

Dla każdej liczby z zbioru Z , spełniającej nierówność (45), mamy więc $|g(z)| > \varepsilon$: nierówność ta będzie więc zachodziła, tembardziej, dla każdej, spełniającej nierówność (45) liczby z zbioru Z_1 (będącego częścią zbioru Z), wbrew własności punktu ξ .

Musi więc być $g(\xi) = 0$, czyli, wobec (43): $f(\xi) = u_0$, skąd $\xi = F(u_0)$, co daje, wobec (41):

$$\xi = z_0. \quad (47)$$

Lecz, skoro ξ należy do zbioru Z_1 , więc mamy

$$|\xi - z_0| \geq \alpha,$$

zatem $\xi \neq z_0$, wbrew (47). Założenie, że funkcja $F(u)$ nie jest w zbiorze U ciągłą, doprowadza więc do sprzeczności. Udowodniłmy więc twierdzenie 140.

ROZDZIAŁ XIII.

Ciągi i szeregi funkcji.

§ 111. Jeżeli każdej liczbie naturalnej n odpowiada pewna funkcja $f_n(z)$ zmiennej zespolonej z , określona w danym zbiorze Z , to mamy do czynienia z ciągiem nieskończonym funkcji

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, \quad (1)$$

określonym w zbiorze Z .

Obierzmy na z jakąkolwiek oznaczoną wartość ze zbioru Z : wyrazy ciągu (1) będą wówczas oznaczonymi w zupełności liczbami zespolonymi i przeto będziemy mieli do czynienia ze zwykłym ciągiem nieskończonym o wyrazach zespolonych.

Założmy, że ciąg (1) jest zbieżny dla każdej wartości z , należącej do zbioru Z . Granica jego będzie wogóle zależała od obranej wartości z i będzie przez nią wyznaczoną w zupełności: będzie to więc funkcja zmiennej z , określona w zbiorze Z ; oznaczmy ją przez $f(z)$: będzie więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \quad (2)$$

dla każdej liczby zespolonej z , należącej do zbioru Z .

Przykłady.

1) Przyjmijmy jako zbiór Z zbiór wszystkich liczb zespolonych z , spełniających nierówność $|z| < 1$ i połączmy

$$f_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

— bedziemy tu mieli w zbiorze Z :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

2) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i połączmy dla liczb x zbioru X :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n;$$

bedziemy tu mieli w zbiorze X :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x.$$

3) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb dodatnich i połączmy

$$f_n(x) = n'(\sqrt[n]{x} - 1);$$

bedziemy tu mieli w zbiorze X (§ 50):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lg x.$$

W myśl definicji granicy ciągu o wyrazach zespolonych, na to żeby w zbiorze Z zachodził wzór (2), potrzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby zespolonej z , należącej do zbioru Z , oraz każdej liczby dodatniej ε istniała liczba rzeczywista $\mu = \mu(\varepsilon, z)$, taka iż

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu. \quad (3)$$

Owa wartość na μ jest więc wogóle zależną nie tylko od ε ale i od z . Może się jednak zdarzyć, że do każdego dodatniego ε można dobrać takie $\mu = \mu(\varepsilon)$, iż nierówność (3) będzie spełniona dla $n > \mu$ przez każdą liczbę z , należącą do zbioru Z . Mówimy wówczas, że uważany ciąg jest w zbiorze Z *zbieżnym jednostajnie*.

Różnica między zbieżnością zwykłą a zbieżnością jednostajną ciągu w zbiorze Z polega więc na tem, że dla zwykłej zbieżności wystarcza możność dobrania odpowiedniego μ do każdego dodatniego ε oraz każdego z osobna z , należącego do zbioru Z , dla zbieżności zaś jednostajnej potrzeba iżby do każdego dodatniego ε można było dobrać odpowiednie μ , któreby było zdaniem przy wszelkiem z , należącym do zbioru Z . Innymi słowy: w razie zwykłej zbieżności, przy danem ε , różnym z mogą odpowiadać różne μ , w razie zaś

zbieżności jednostajnej (przy każdym danym $\varepsilon > 0$), μ , dobrane do ε ma być jednym i tem samym dla wszystkich z , należących do zbioru Z .

Ciąg nieskończony funkcji może być w całym zbiorze zbieżnym, ale nie być w nim zbieżnym jednostajnie, jak tego dowodzą następujące przykłady:

1) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $(0, 1)$ i położmy w zbiorze X :

$$f_n(x) = x^n (1 - x^n). \quad (4)$$

Będziemy tu mieli, jak łatwo widzieć, dla każdej liczby x zbioru X :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (5)$$

— ciąg nasz jest więc zbieżny w całym zbiorze X . Załóżmy, że jest on w zbiorze X zbieżny jednostajnie. Dla każdej liczby dodatniej ε , w szczególności więc dla liczby $\varepsilon = \frac{1}{4}$, istniałoby takie μ , iż dla każdej liczby x zbioru X mielibyśmy nierówność

$$|f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

czyli, wobec (4), (5) oraz $\varepsilon = 1$:

$$|x^n (1 - x^n)| < \frac{1}{4} \quad \text{dla } n > \mu. \quad (6)$$

Oznaczmy, w szczególności, przez p liczbę naturalną $> \mu$ i przyjmijmy $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: będzie to liczba zbioru X ; wobec (6) musi więc być, dla $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n = p$:

$$\left| \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right| < \frac{1}{4},$$

co niemożliwe. Ciąg nasz nie jest więc zbieżny jednostajnie w zbiorze X .

2) Niech Z oznacza zbiór liczb zespolonych z , spełniających nierówności $0 < |z| \leq 1$, i położmy w zbiorze Z :

$$f_n(z) = \frac{1}{nz}; \quad (7)$$

będziemy tu mieli oczywiście dla każdego punktu z zbioru Z :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0,$$

natomiast, wobec (7):

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots;$$

ciąg nasz jest więc zbieżny w całym zbiorze Z , ale nie jednostajnie.

3) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Połóżmy $f_n(x) = 0$ dla x niewymiernych, w razie zaś kiedy x jest liczbą wymierną $= \frac{l}{m}$, gdzie $\frac{l}{m}$ jest ułamkiem nieprzywiedlnym o naturalnym mianowniku, przyjmijmy $f_n(x) = 1$ dla $n \leq m$ oraz $f_n(x) = 0$ dla $n > m$.

Będziemy tu mieli przy wszelkim rzeczywistym x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

gdyż, jeżeli x jest liczbą niewymierną, to wszystkie wyrazy ciągu $f_n(x)$ będą zerami; jeżeli zaś x jest liczbą wymierną, to będą zerami wszystkie wyrazy, poczynając od pewnego miejsca.

Założmy, że ciąg nasz jest w zbiorze X zbieżnym jednostajnie. Istniałoby więc dla $\varepsilon = 1$ takie μ , niezależne od x , iż

$$|f_n(x)| < 1, \quad \text{dla } n > \mu \quad (8)$$

przy wszelkim rzeczywistym x . Obierzmy jednak liczbę naturalną m większą od μ i położmy w nierówności (8) $x = \frac{1}{m}$, $n = m$: otrzymamy, z uwagi że, w myśl definicji naszej funkcji, $f_m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$:

$$|1| < 1,$$

co niemożliwe. Ciąg nasz nie jest więc zbieżny jednostajnie w zbiorze X . Można by też z łatwością okazać, że ciąg nasz nie jest zbieżny jednostajnie w żadnym, jak chcąc, małym przedziale (gdyż w każdym przedziale możemy wyznaczyć liczbę wymierną o jak chcąc wielkim nieprzywiedlnym mianowniku).

§ 112. Twierdzenie 141. Jeżeli $f(z)$ jest funkcją, określoną w zbiorze Z , zaś $f_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest ciągiem nieskończonym funkcji ciągłych w tym zbiorze i jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje wskaźnik m (zależy jedynie od ε), taki iż

$$|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon \quad (9)$$

przy wszelkiem z należącym do zbioru Z , to funkcja $f(z)$ jest ciągłą w całym zbiorze Z .

Dowód. Niech z_0 oznacza dany punkt zbioru Z , ε -daną liczbę dodatnią. Z założeń naszego twierdzenia wynika, że istnieje dla liczby ε wskaźnik $m = m(\varepsilon)$, przy którym nierówność (9) jest spełniona przez każdą liczbę z zbioru Z . W szczególności więc będzie:

$$|f_m(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad (10)$$

Z założenia, że wyrazy ciągu $f_n(z)$ są funkcjami ciągłymi w zbiorze Z wynika, w szczególności, że funkcja $f_m(z)$ jest ciągłą

w zbiorze Z dla punktu z_0 : istnieje więc dla liczby dodatniej ε liczba dodatnia $\delta = \delta(n, z_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$, taka iż przy wszelkiem z , należącym do zbioru Z i spełniającym nierówność

$$|z - z_0| < \delta, \quad (11)$$

będzie

$$|f_m(z) - f_m(z_0)| < \varepsilon. \quad (12)$$

Załóżmy, że z oznacza liczbę zbioru Z , spełniającą nierówność (11): będą więc zachodziły jednocześnie nierówności (9), (12) i (10), skąd

$$|f(z) - f(z_0)| = |(f(z) - f_m(z) + f_m(z) - f_m(z_0) + f_m(z_0) - f(z_0))| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(z_0)| + |f_m(z_0) - f(z_0)| < 3\varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego punktu z_0 zbioru Z oraz każdej liczby dodatniej ε istnieje takie dodatnie δ iż nierówność (11) pociąga za sobą przy wszelkiem z , należącym do zbioru Z , nierówność

$$|f(z) - f(z_0)| < 3\varepsilon,$$

co dowodzi, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą. Udowodniłmy więc nasze twierdzenie.

Jeżeli ciąg funkcji $f_n(z)$, ciągłych w zbiorze Z , jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie, to, kładąc w zbiorze Z $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, będziemy oczywiście mieli spełnione wszystkie warunki tw. 141 i przeto możemy jeszcze wypowiedzieć

Twierdzenie 142. *Granica ciągu funkcji ciągłych w zbiorze Z , zbieżnego jednostajnie w tym zbiorze, jest funkcją ciągłą w tym zbiorze.*

Zauważymy, że granica ciągu funkcji ciągłych w zbiorze Z , zbieżnego w tym zbiorze, ale niejednostajnie, może nie być funkcją ciągłą w zbiorze Z .

Dla dowodu położymy w zbiorze liczb rzeczywistych x :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

— będą to oczywiście funkcje ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Mamy tu, jak łatwo widzieć:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \text{dla } x \neq 0,$$

zaś

$$f_n(0) = 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{skąd } f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1.$$

Funkcja $f(x)$ jest więc nieciągłą dla wartości $x = 0$.

Jako inny przykład, położymy dla $-1 \leq x \leq 1$:

$$f_n(x) = (1 - x^n)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{dla } -1 \leq x < 0 \quad \text{oraz dla } 0 < x \leq 1,$$

zaś

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1.$$

Przykład ten wskazuje, że granica ciągu zbieżnego wielomianów całkowitych może być funkcją nieciągłą.

Inny jeszcze przykład na granicę nieciągłą ciągu zbieżnego funkcji ciągłych otrzymamy, kładąc przy wszelkiem zespolonem z

$$f_n(z) = \sqrt[n]{|z|}; \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

będzie tu, jak łatwo widzieć:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z = 0 \\ 1 & \text{dla } z \neq 0. \end{cases}$$

Granica ciągu zbieżnego funkcji ciągłych w dany skończonym przedziale może nawet nie być funkcją ograniczoną w tym przedziale: np. kładąc

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2} \quad \text{dla } -1 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0.$$

oraz

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x)$ nie jest ograniczoną w przedziale $(-1, 1)$.

Podobnie, kładąc

$$f_n(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 - x^n) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1$$

będziemy mieli

$$f_n(1) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

skąd

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0,$$

zaś, dla $0 \leq x < 1$:

$$f_n(x) = \frac{(1-x^n)^2}{1-x},$$

skąd, w jednej chwili:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{dla } 0 \leq x < 1.$$

Nawet więc ciąg wielomianów całkowitych, zbieżny w przedziale $(0, 1)$ (z włączeniem granic) może przedstawiać funkcję, która nie jest ograniczoną w tym przedziale.

Z drugiej strony, granica ciągu zbieżnego funkcyj nieciągłych może być funkcją ciągłą. Połóżmy np. w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza zero dla wymiernego x oraz jedność dla niewymiernego x . Każda z funkcji $f_n(x)$ będzie oczywiście wszędzie nieciągłą. Z drugiej strony będzie oczywiście

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

przy wszelkiem rzeczywistym x i wszelkiem naturalnem n , skąd

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Zatem ciągłość wyrazów ciągu zbieżnego nie jest ani warunkiem koniecznym, ani też warunkiem wystarczającym dla ciągłości jego granicy.

Twierdzenie 142 daje nam warunek wystarczający dla ciągłości granicy funkcyj ciągłych. Warunek ten nie jest jednak konieczny: granica ciągu niejednostajnie zbieżnego funkcyj ciągłych może być funkcją ciągłą, jak tego dowodzi ciąg (4), rozpatrywany w § 111. Inny przykład otrzymany, kładąc przy wszelkiem rzeczywistym x

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

Będziemy tu mieli, jak łatwo widzieć, w całym zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

i przeto $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych, natomiast ciąg (13) nie jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie do zera, gdyż mamy tu

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zapytamy obecnie, jakie warunki są konieczne i wystarczające na to żeby granica funkcyj ciągłych była funkcją ciągłą?

§ 113. Twierdzenie 143. *Na to żeby funkcja $f(x)$, będąca w zbiorze Z granicą ciągu funkcyj $f_n(x)$, ciągłych w zbiorze Z dla punktu x_0 , sama była w zbiorze Z dla punktu x_0 ciągłą, potrzeba i wystarcza aby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba dodatnia δ oraz wskaźnik m takie, iżby przy wszelkiem x , należącym do zbioru Z i spełniającym nierówność*

$$|x - x_0| < \delta, \quad (14)$$

zachodziła nierówność

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (15)$$

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w zbiorze Z dla punktu x_0 . Istnieje więc dla danego dodatniego ε takie $\delta_0 > 0$, iż dla każdego punktu x zbioru Z nierówność

$$|x - x_0| < \delta_0 \quad (16)$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (17)$$

Z drugiej strony, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0)$, to istnieje takie m , iż

$$|f(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (18)$$

Wreszcie, jeżeli funkcje $f_n(x)$ są ciągłe w zbiorze Z dla punktu x_0 , to istnieje takie $\delta' > 0$, iż nierówność

$$|x - x_0| < \delta' \quad (19)$$

pociąga za sobą dla każdej liczby x zbioru Z nierówność

$$|f_m(x_0) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (20)$$

Niech teraz δ oznacza liczbę dodatnią, mniejszą od δ_0 i δ' .

Nierówność (14) będzie pociągała za sobą każdą z nierówności (16) i (19) i przeto będą zachodziły jednocześnie nierówności (17), (18) i (20), dające w jednej chwili:

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Nierówność (14) pociąga więc za sobą dla każdej liczby ε zbioru Z nierówności (15), co dowodzi, że warunek naszego twierdzenia jest konieczny.

Załóżmy teraz, że warunek naszego twierdzenia jest spełniony i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią: istnieje więc odpowiednie dodatnie δ takie, iż przy pewnym m nierówność (14) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (15). W szczególności więc mamy też

$$|f_m(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad (21)$$

Wobec ciągłości funkcji $f_m(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0 , istnieje takie $\delta' > 0$, iż nierówność

$$|z - z_0| < \delta' \quad (22)$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|f_m(z) - f_m(z_0)| < \varepsilon. \quad (23)$$

Oznaczmy przez δ_0 liczbę dodatnią, mniejszą od δ i δ' , i niech z oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru Z , spełniającą nierówność

$$|z - z_0| < \delta_0. \quad (24)$$

Nierówność (24) będzie pociągała za sobą nierówność (14) i (22) i przeto będą zachodziły jednocześnie nierówności (15), (21) i (23), dające w jednej chwili

$$|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon \quad (25)$$

Dla każdej więc liczby ε zbioru Z nierówność (24) pociąga za sobą nierówność (25), co dowodzi, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0 . Warunek naszego twierdzenia jest więc wystarczający.

Twierdzenie 143 udowodniliśmy zatem w zupełności. Zauważymy, że twierdzenie nasze pozostaje prawdziwym, a dowód jego pozostaje bez zmiany, jeżeli zamiast zakładać, że funkcja $f(z)$ jest granicą ciągu $f_n(z)$ w całym zbiorze Z , założymy tylko, że funkcja $f(z)$ jest określona w zbiorze Z , oraz że wartość $f(z_0)$ jest granicą ciągu $f_n(z_0)$.

§ 114. Ciąg nieskończony funkcji $f_n(z)$, zbieżny w zbiorze Z , nazywamy (według Borela) w tym zbiorze *zbieżnym quasi-jednostajnie*, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε i każdej liczby naturalnej p istnieje liczba naturalna $q > p$ taka, iż dla każdego punktu z zbioru Z przy pewnym wskaźniku $n = n(z)$ (zależnym od z), spełniającym nierówności

$$p < n(z) < q,$$

zachodzi nierówność

$$|f_{n(z)}(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

gdzie $f(z)$ oznacza granicę ciągu $f_n(z)$.

Twierdzenie 144. Jeżeli ciąg funkcji $f_n(z)$, ciągłych w zbiorze Z , jest zbieżny quasi-jednostajnie w tym zbiorze, to granica tego ciągu jest funkcją ciągłą w zbiorze Z .

Dowód. Załóżmy, że $f_n(z)$ jest ciągiem funkcji ciągłych w zbiorze Z , zbieżnym quasi-jednostajnie w tym zbiorze: połączmy w zbiorze Z

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad (26)$$

i niech z_0 oznacza dany punkt zbioru Z , zaś ε dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec (26) mamy, w szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0)$: istnieje więc liczba naturalna p taka iż

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > p. \quad (27)$$

Z drugiej strony, z definicji zbieżności quasi-jednostajnej wynika, że dla liczb dodatnich ε i p istnieje liczba $q > p$ taka iż dla każdego punktu z zbioru Z przy pewnym (zależnym od z) wskaźniku $n = n(z)$, spełniającym nierówności

$$p < n(z) < q \quad (28)$$

zachodzi nierówność

$$|f_{n(z)}(z) - f(z)| < \varepsilon. \quad (29)$$

W myśl założenia o ciągłości wyrazów ciągu $f_k(z)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) w zbiorze Z , istnieje dla każdego wskaźnika k liczba dodatnia δ_k taka iż przy wszelkiem z należącym do zbioru Z , nierówność

$$|z - z_0| < \delta_k \quad (30)$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f_k(z) - f_k(z_0)| < \varepsilon. \quad (31)$$

Oznaczmy przez δ liczbę dodatnią, mniejszą od każdej z liczb dodatnich

$$\delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \dots, \delta_{q-1}$$

i niech z oznacza dowolny dany punkt zbioru Z , spełniający nierówność

$$|z - z_0| < \delta; \quad (32)$$

punkt z będzie więc spełniał każdą z nierówności (30) dla $k = p+1, p+2, \dots, q-1$, co pociąga za sobą dla tychże wskaźników k każdą z nierówności (31), czyli

$$|f_k(z) - f_k(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{dla } k = p+1, p+2, \dots, q-1. \quad (33)$$

Wobec (28) i (33) będziemy mieli:

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon, \quad (34)$$

zaś wobec (28) i (27) mamy:

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad (35)$$

Nierówności (29), (34) i (35) dają w jednej chwili:

$$|f(z) - f(z_0)| < 3\varepsilon. \quad (36)$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego punktu z zbioru Z , spełniającego nierówność (32), zachodzi nierówność (36), co dowodzi, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0 . Udowodniliśmy więc twierdzenie 144.

Twierdzenie nasze udowodniliśmy, nie czyniąc żadnych zastrzeżeń co do zbioru Z : jeżeli, w szczególności, zbiór Z jest ograniczony i zamknięty, to prawdziwym jest i twierdzenie odwrotne, mianowicie

Twierdzenie 145. *Jeżeli ciąg $f_n(z)$ funkcji ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z , zmierza w całym zbiorze Z do funkcji ciągłej w tym zbiorze, to uważany ciąg jest zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z .*

Dowód. Załóżmy więc, że ciąg $f_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) funkcji ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z zmierza w tym zbiorze do funkcji ciągłej $f(z)$ i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią, p — dowolną daną liczbę naturalną

Wobec założenia, że w zbiorze Z mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad (37)$$

istnieje dla każdego danego punktu z zbioru Z wskaźnik $n > p$, taki iż

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon:$$

niech $n(z)$ oznacza najmniejszy z takich wskaźników i połóżmy $\varphi(z) = \frac{1}{n(z)}$: będzie to więc funkcja dodatnia, określona w całym zbiorze Z . Powiadam, że kres dolny l funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze Z jest dodatni.

W samej rzeczy, załóżmy, że mamy $l = 0$. W myśl tw. 135 (wobec ograniczoności zbioru Z) istnieje więc punkt ξ taki iż przy

wszelkiem dodatniem ς kres dolny funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ wszystkich tych liczb z zbioru Z , które spełniają nierówność

$$|z - \xi| < \varsigma \quad (38)$$

jest zerem, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z , punkt ξ należy do Z . Ponieważ zaś w zbiorze Z zachodzi wzór (37), więc przy pewnem $m > p$ mamy

$$|f_m(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon/3. \quad (39)$$

Z drugiej strony, wobec ciągłości funkcji $f(z)$ oraz $f_m(z)$ w zbiorze Z , dla punktu ξ istnieje takie dodatnie ς , iż nierówność (38) pociąga za sobą nierówność

$$|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon/3$$

oraz

$$|f_m(z) - f_m(\xi)| < \varepsilon/3,$$

które, wobec (39), dają w jednej chwili nierówność

$$|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon. \quad (40)$$

Dla każdego więc punktu z zbioru $Z(\varsigma)$ zachodziłaby nierówność (40) i przeto, w myśl definicji funkcji $n(z)$, mielibyśmy w całym zbiorze Z nierówność

$$n(\varsigma) \leq m,$$

skąd

$$\varphi(z) \geq 1/m,$$

co dowodzi, że kres dolny funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ jest dodatni, wbrew własności punktu ξ .

Dowiedliśmy więc, że kres dolny l funkcji $\varphi(z)$ w całym zbiorze Z jest dodatni: mamy więc dla każdego punktu z zbioru Z nierówność

$$\varphi(z) \geq l,$$

skąd

$$n(z) \leq 1/l:$$

oznaczając przez q liczbę naturalną $> 1/l$ będziemy więc mieli w całym zbiorze Z nierówność

$$p < n(z) < q,$$

co dowodzi, że ciąg $f_n(z)$ jest w zbiorze Z zbieżny quasi-jednostajnie, c. b. d. o.

Zestawiając dwa ostatnie twierdzenia, otrzymujemy w jednej chwili

Twierdzenie 146 (Arzelà): *Na to żeby granica ciągu funkcji $f_n(z)$, ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z , była funkcją ciągłą w tym zbiorze, potrzeba i wystarcza, iżby uważany ciąg był zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z .*

§ 115. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$, którego składniki są funkcjami zmiennej z w pewnym zbiorze Z nazywamy w tym zbiorze zbieżnym jednostajnie, względnie quasi-jednostajnie, jeżeli ciąg sum cząstkowych $f_n(z) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(z)$ jest w zbiorze Z zbieżny jednostajnie, względnie quasi-jednostajnie.

Węc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ nazywamy zbieżnym jednostajnie w zbiorze Z , jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba μ (zależna jedynie od ε) taka, iż przy wszelkiem z , należącym do zbioru Z zachodzi nierówność

$$|R_n(z)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

gdzie $R_n(z)$ oznacza n -tą resztę uważanego szeregu, czyli $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(z)$.

Podobnie mogliśmy określić bezpośrednio zbieżność quasi-jednostajną szeregu

Wszystkie wyprowadzone dla ciągów funkcji twierdzenia i uwagi dają się w jednej chwili przenieść (przy odpowiedniej zmianie ich stylizacji) na szeregi funkcyj. W szczególności, z uwagi że ciągłość każdego ze składników szeregu $\sum \varphi_n(z)$ pociąga za sobą ciągłość każdej z sum cząstkowych i naodwrot, otrzymujemy z tw. 142 i 146, twierdzenia:

Twierdzenie 147. *Suma szeregu funkcji ciągłych w zbiorze Z , zbieżnego jednostajnie w tym zbiorze, jest funkcją ciągłą w zbiorze Z .*

Twierdzenie 148. *Na to żeby suma szeregu nieskończonego funkcji ciągłych w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z była funkcją ciągłą w tym zbiorze, potrzeba i wystarcza iżby uważany szereg był zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z .*

Z definicji zbieżności quasi-jednostajnej wynika natychmiast, że szereg zbieżny jednostajnie w zbiorze Z jest w tym zbiorze tembardziej zbieżnym

quasi-jednostajnie. Godnem uwagi jest, że dla szeregu funkcji jednego znaku twierdzenie to daje się odwrócić, mianowicie:

Szereg funkcji jednego znaku, zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z , jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie.

W samej rzeczy, załóżmy że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$, gdzie funkcje $\varphi_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

są wszystkie jednego znaku (t. j. stale $\varphi_n(z) \geq 0$ lub stale $\varphi_n(z) \leq 0$) jest zbieżny quasi-jednostajnie w zbiorze Z i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Dla liczby ε i liczby $p = 1$ istnieje więc liczba naturalna q , taka iż dla każdego punktu z zbioru Z przy pewnym (zależnym od z) wskaźniku $n = n(z)$, spełniającym nierówność

$$1 < n(z) < q, \quad (41)$$

zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{k=n(z)+1}^{\infty} \varphi_k(z) \right| < \varepsilon. \quad (42)$$

Ponieważ, w myśl założenia, wszystkie składniki $\varphi_k(z)$ są jednego znaku, więc nierówność (42), z uwagi na (41), pociąga za sobą nierówność

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \varphi_k(z) \right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad m > q,$$

dla każdego punktu z zbioru Z , co dowodzi, że uważany szereg jest zbieżny jednostajnie w zbiorze Z , c. b. d. o.

Zatem, dla szeregów funkcyj, których składniki są jednego znaku, zbieżność quasi-jednostajna jest równoważna zbieżności jednostajnej. Stąd, w szczególności, z tw. 148 i z uwagi, że zbiór liczb każdego przedziału skończonego jest ograniczony i zamknięty, otrzymujemy

Twierdzenie 149. *Na to żeby suma szeregu nieskończonego funkcji jednego znaku, ciągłych w przedziale skończonym, była funkcją ciągłą w tym przedziale, potrzeba i wystarcza, iżby uważany szereg był w uważanym przedziale zbieżny jednostajnie.*

§ 116. Powiemy teraz parę słów o tem jak się ma zbieżność jednostajna szeregu do jego zbieżności bezwzględnej: okażemy, że własności te są od siebie niezależne. Mianowicie:

Szereg funkcyj może być w zbiorze Z zbieżnym jednostajnie, nie będąc dla żadnego punktu tego zbioru zbieżnym bezwzględnie, z drugiej zaś strony szereg funkcyj może być w całym zbiorze Z zbieżnym bezwzględnie, nie będąc jednak w tym zbiorze zbieżnym jednostajnie.

Np. szereg

$$f(z) = \frac{z}{1} - \frac{z}{1} + \frac{z}{2} - \frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{3} + \dots$$

jest, dla $0 < |z| \leq 1$, zbieżny jednostajnie, gdyż, oznaczając przez $R_n(z)$ jego n -tą resztę, mamy, jak łatwo widzieć: $R_{2k}(z) = 0$,

$R_{2k-1}(z) = \frac{z}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), skąd, dla $0 < |z| \leq 1$:

$$|R_n(z)| \leq \frac{2}{n+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

z drugiej zaś strony przy żadnym $z \neq 0$ uważany szereg nie jest zbieżny bezwzględnie (wobec rozbieżności szeregu harmonicznego).

Szereg zaś geometryczny

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

jest dla $|z| < 1$ zbieżny bezwzględnie, ale nie jednostajnie, gdyż, oznaczając przez $R_n(z)$ jego n -tą resztę, mamy oczywiście, dla

$|z| < 1$, $R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z}$, skąd, np. dla $z = 1 - \frac{1}{2n}$:

$$R_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 2n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq 2n\left(1 - \frac{n}{2n}\right) = n.$$

Jak wiemy, w szeregu zbieżnym bezwzględnie zmiana porządku składników nie wpływa na wartość sumy. Godnem uwagi jest jednak, że przez zmianę porządku składników w szeregu bezwzględnie zbieżnym możemy niekiedy z szeregu zbieżnego jednostajnie otrzymać szereg zbieżny niejednostajnie. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Weźmy pod rozwagę w przedziale $(0, 1)$ szereg

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= x(1-x) - x(1-x) + \\ &+ x^2(1-x) - x^2(1-x) + x^3(1-x) - \dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć, oznaczając przez $S_n(x)$ oraz $R_n(x)$ odpowiednie sumy cząstkowe i reszty:

$$S_{2k}(x) = 0, \quad S_{2k-1}(x) = x^k(1-x) \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (44)$$

skąd w jednej chwili, dla $0 \leq x \leq 1$:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$$

i przeto, wobec (44):

$$R_{2k}(x) = 0, \quad R_{2k-1}(x) = -x^k(1-x) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (45)$$

Lecz dla $0 \leq x < 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$ mamy:

$$0 \leq x^k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}-1}\right)^k} < \frac{1}{1 + \frac{k}{\sqrt{k}-1}} < \frac{1}{\sqrt{k}},$$

skąd, wobec (45):

$$|R_{2k-1}(x)| = x^k(1-x) < \frac{1}{\sqrt{k}},$$

zaś dla $1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \leq x \leq 1$ mamy

$$0 \leq 1-x \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

skąd, wobec (45):

$$|R_{2k-1}(x)| = x^k(1-x) \leq 1-x \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

W każdym więc razie dla $0 \leq x \leq 1$ mamy

$$|R_{2k-1}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

skąd, wobec (45) wnosimy, że stale

$$|R_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{n+1}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

co dowodzi, że szereg $S(x)$ jest zbieżny jednostajnie w całym przedziale $(0, 1)$.

Powiadam dalej, że szereg (43) jest również zbieżny bezwzględnie w całym przedziale $(0, 1)$. W samej rzeczy, szeregiem odpowiednich modułów jest dla szeregu (43) oczywiście szereg

$$\left. \begin{aligned} \sigma(x) &= x(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \\ &+ x^2(1-x) + x^3(1-x) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Suma $\sigma_{2k}(x)$ pierwszych $2k$ składników szeregu (46) wynosi $\sigma_{2k}(x) = 2[x(1-x) + x^2(1-x) + \dots + x^k(1-x)] = 2[x - x^{k+1}]$,

skąd znajdujemy w jednej chwili:

$$\sigma_{2k}(x) \leq 2x, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

co dowodzi ograniczoności sum cząstkowych szeregu (46) o składnikach nieujemnych, a więc i jego zbieżności.

Szereg (43) jest więc zbieżny w całym przedziale $(0, 1)$ bezwzględnie i jednostajnie. Zmienimy jednak porządek składników naszego szeregu, wypisując po każdym dwóch kolejnych jego składnikach dodatnich jeden składnik ujemny. Otrzymamy w ten sposób szereg

$$\left. \begin{aligned} & x(1-x) + x^2(1-x) - x(1-x) + x^3(1-x) + \\ & + x^4(1-x) - x^2(1-x) + \dots, \end{aligned} \right\} (47)$$

w którym suma $S'_{3k}(x)$ pierwszych $3k$ składników wynosi, jak łatwo widzieć

$$S'_{3k}(x) = x^{k+1}(1-x) + x^{k+2}(1-x) + \dots + x^{2k}(1-x) = x^{k+1}(1-x^k),$$

skąd w jednej chwili, oznaczając przez $R'_n(x)$ odpowiednie reszty:

$$-R'_{3k}(x) = x^{k+1}(1-x^k), \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

i przeto, np. dla $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$-R'_{3k}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots,$$

co dowodzi, że szereg (47) nie jest zbieżny jednostajnie w przedziale $(0, 1)$.

Możnaby udowodnić, że *na to żeby szereg funkcji $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ był w zbiorze Z zbieżnym jednostajnie przy wszelkiem uporządkowaniu składników, potrzeba i wystarcza, aby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|$ był w zbiorze Z zbieżnym jednostajnie¹⁾.*

Zauważymy jednak, że z ciągu zbieżnego jednostajnie nie możemy przez żadną zmianę porządku wyrazów otrzymać ciągu zbieżnego niejednostajnie. W samej rzeczy, jeżeli ciąg $f_n(z)$ jest w zbiorze Z zbieżny jednostajnie i jeżeli $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, to dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie μ (niezależne od z), iż $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ dla $n > \mu$, w całym zbiorze Z . Jeżeli teraz $f_{n_k}(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) oznacza ciąg nieskończony, różniący się tylko porządkiem wyrazów od ciągu $f_n(z)$, to ciąg wskaźników n_k ($k = 1, 2, \dots$) różni się tylko porządkiem wyrazów od ciągu naturalnego, i przeto

¹⁾ Zob. mój komunikat „O wpływie porządku składników na zbieżność jednostajną szeregu”. Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. 1910.

dla liczby μ istnieje liczba ν taka, iż stale $n_k > \mu$ dla $k > \nu$. Będzie więc $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \varepsilon$ dla $k > \nu$, w całym zbiorze Z , co dowodzi, że ciąg $f_{n_k}(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) jest w tym zbiorze zbieżny jednostajnie.

§ 117. Jeżeli mamy ciąg nieskończony szeregów skończonych

$$\sum_{k=1}^p u_{k,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

i jeżeli każdy ze składników $u_{k,n}$ ($k = 1, 2, \dots, p$) jest ciągiem zbieżnym dla $n = \infty$, to, w myśl tw. o granicy sumy, granicą dla $n = \infty$ szeregu $\sum_{k=1}^p u_{k,n}$ jest suma granic kolejnych jego składników, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p u_{k,n} = \sum_{k=1}^p \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}.$$

Twierdzenie to może być jednak nie być prawdziwym, jeżeli uważany szereg jest nieskończony. Mówiąc krócej, granicą sumy szeregu nieskończonego może nie być suma granic kolejnych jego składników

Weźmy np. pod rozwagę ciąg nieskończony szeregów

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+k)(n+k-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Mamy tu oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+k)(n+k-1)} = 0, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} = 0;$$

z drugiej strony, wobec tożsamości

$$\frac{n}{(n+k)(n+k-1)} = \frac{n}{n+k-1} - \frac{n}{n+k},$$

znajdujemy

$$\sum_{k=1}^p u_{k,n} = 1 - \frac{n}{n+p}, \quad \begin{cases} (n = 1, 2, 3, \dots) \\ (p = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

i przeto również

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = 1.$$

Mamy więc w uważanym przypadku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} \neq \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n},$$

pomimo że obie strony posiadają oznaczoną wartość.

Okazemy jednak, że jeżeli szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (48)$$

są zbieżne jednostajnie (t. j. jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie μ , zależne od ε , lecz niezależne od n , iż

$$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} u_{k,n} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } q > \mu \quad (49)$$

przy wszelkiem naturalnem n) i jeżeli każda z granic $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$, istnieje i jest skończoną, to wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} \quad (50)$$

jest prawdziwy.

W samej rzeczy, założmy, że szeregi (48) są zbieżne jednostajnie oraz że istnieje każda z granic

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (51)$$

i jest skończoną.

Niech ε oznacza daną liczbę dodatnią: wobec jednostajnej zbieżności szeregów (48) istnieje takie μ (zależne jedynie od ε),

iż przy wszelkiem naturalnem n zachodzi nierówność (49). Stąd, tembardziej:

$$\left| \sum_{k=q+r+1}^{\infty} u_{k,n} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } q > \mu, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

i przeto, wobec (49) i (52):

$$\left| \sum_{k=q+1}^{q+r} u_{k,n} \right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla } q > \mu, \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$, w myśl tw. o granicy sumy szeregu skończonego:

$$\left| \sum_{k=q+1}^{q+r} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} \right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla } q > \mu, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad (53)$$

co dowodzi zbieżności szeregu

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}. \quad (54)$$

Wobec (53) mamy, dalej:

$$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} \right| \leq 2\varepsilon, \quad \text{dla } q > \mu. \quad (55)$$

Oznaczając przez q jakąkolwiek daną liczbę naturalną $> \mu$ będziemy więc mieli, wobec (54) i (55):

$$\left| S - \sum_{k=1}^q \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} \right| \leq 2\varepsilon. \quad (56)$$

Z drugiej strony, wobec istnienia i skończoności każdej z granic (51), istnieje dla liczby dodatniej ε przy każdym naturalnem k odpowiednie μ_k takie iż

$$\left| u_{k,n} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} \right| < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \text{dla } n > \mu_k. \quad (57)$$

Stąd, oznaczając przez μ_0 liczbę dodatnią, większą od każdej z liczb $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$, będziemy dla $n > \mu_0$ mieli tembardziej $n > \mu_k$ ($k = 1, 2, \dots, q$) i przeto, wobec (57)

$$\left| u_{k,n} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} \right| < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \text{dla } n > \mu_0, \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=1}^q u_{k,n} - \sum_{k=1}^q \lim_{p \rightarrow \infty} u_{k,p} \right| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu_0. \quad (58)$$

Wreszcie, nierówność (49) daje, wobec $q > \mu$:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} - \sum_{k=1}^q u_{k,n} \right| < \varepsilon. \quad (59)$$

Nierówności (56), (58) i (59) dają w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} - S \right| < 4\varepsilon, \text{ dla } n > \mu_0,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = S$$

i, wobec (54), daje wzór (50). Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 150. Jeżeli szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) są zbieżne jednostajnie i jeżeli każda z granic $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) istnieje i jest skończoną, to mamy wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}$$

(przyczem obie strony tego wzoru są skończone).

ROZDZIAŁ XIV.

Rozwijanie funkcji ciągłych na szeregi wielomianów.

§ 118. Zajmiemy się teraz dowodem twierdzenia Weierstrassa, że każda funkcja zmiennej rzeczywistej, ciągła w danym skończonym przedziale, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych¹⁾.

W tym celu wyprowadzimy przedewszystkiem pewien wzór na funkcję $|x|$.

Lemat. Dla $-1 \leq x \leq 1$ zachodzi przy wszelkiem naturalnem n nierówność

$$0 \leq |x| - x \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} < \frac{2}{\sqrt[n]{n}}. \quad (1)$$

Dowód. Położmy, przy naturalnem n

$$|x| - x \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} = r_n; \quad (2)$$

zbadamy osobno przypadki: $x \geq 0$ oraz $x < 0$.

1) $x \geq 0$. Mamy tu $|x| = x$, zatem, w myśl (2):

$$r_n = \frac{2x}{(1+x)^n + 1}. \quad (3)$$

Dla $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ licznik wyrażenia (3) będzie oczywiście nieujemny i nie większy od $\frac{2}{\sqrt[n]{n}}$, mianownik zaś większy od jedności, zatem

$$0 \leq r_n < \frac{2}{\sqrt[n]{n}},$$

co, wobec (2), dowodzi nierówności (1) w uważanym przypadku.

Dla $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < x \leq 1$ mamy:

$$(1+x)^n > \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt[n]{n}} > \sqrt[n]{n};$$

mianownik wyrażenia (3) jest tu więc większy od $\sqrt[n]{n}$, a ponieważ licznik jego jest dodatni oraz ≤ 2 , więc mamy

$$0 < r_n < \frac{2}{\sqrt[n]{n}},$$

co znowu, wobec (2), dowodzi prawdziwości nierówności (1).

2) $x < 0$. Mamy teraz $|x| = -x$, skąd, wobec (2):

$$r_n = \frac{-2x(1+x)^n}{(1+x)^n + 1}. \quad (4)$$

¹⁾ Por. Prace mat.-fiz. T. XXII, p. 59–68.