Oznaczmy przez R_n redukty ułamka (93), zaś przez R'_n redukty ułamka nieskończonego arytmetycznego (a więc, w myśl tw. 127, zbieżnego):

$$\alpha = 2 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots,$$

gdzie

$$b_{3n-2} = b_{3n} = 1, \quad b_{3n-1} = 2n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

wobec (94) będziemy mieli oczywiście

$$R_{k+1} = R'_{3k+1}, \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

skąd

$$e = \lim_{k=\infty} R_{k+1} = \lim_{k=\infty} R'_{3k+1} = \alpha.$$

Udowodniliśmy więc, że *liczba e rozwija się na ułamek nieskończony arytmetyczny*

$$e = 2 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots,$$

gdzie

$$b_{3n-2} = b_{3n} = 1, \quad b_{3n-1} = 2n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Jest więc:

$$e = 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|1} + \ldots$$

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że jeżeli ułamek łańcuchowy $R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n}$ ma oznaczoną wartość, zaś $c_1, c_2, \ldots c_n$ są dowolne dane liczby, różne od zera, to

$$R_n = b_0 + \frac{c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + \ldots + \frac{c_{n-2} c_{n-1} a_{n-1}|}{|c_{n-1} b_{n-1}} + \frac{c_{n-1} c_n a_n|}{|c_n b_n}.$$

2) Udowodnić wzór (Stern'a):

$$\frac{p_1 p_2 \ldots p_n|}{|q_1 q_2 \ldots q_n} = \frac{1|}{|1} - \frac{p_1 - q_1|}{|p_1} - \frac{(p_2 - q_2) p_1 q_1|}{|p_1 p_2 - q_1 q_2} - \frac{(p_1 - q_1)(p_3 - q_3) p_2 q_2|}{|p_2 p_3 - q_2 q_3} -$$
$$- \ldots - \frac{(p_{n-2} - q_{n-2})(p_n - q_n) p_{n-1} q_{n-1}|}{|p_{n-1} p_n - q_{n-1} q_n}$$

— o ile obie strony mają oznaczoną wartość.

3) Udowodnić, że na to iżby ułamek łańcuchowy zbieżny był zbieżnym doskonale, potrzeba i wystarcza, iżby żaden jego redukt nie równał się wartości ułamka.

4) Dowieść, że każda liczba rzeczywista rozwija się, i to w jeden tylko sposób, na ułamek łańcuchowy nieskończony.

$$b_0 - \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} - \frac{1|}{|b_3} - \ldots,$$

gdzie b_0 jest liczbą całkowitą, zaś b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) są liczby naturalne, większe od jedności. Okazać, że naodwrót, każdy ułamek łańcuchowy nieskończony uważanego typu jest zbieżny i że wartość jego jest mniejszą od każdego reduktu.

ROZDZIAŁ XII.

Wiadomości podstawowe z teorji funkcji zmiennej zespolonej.

§ 105. Niech Z oznacza jakikolwiek dany zbiór liczb zespolonych, ζ — daną liczbę zespoloną, należącą do zbioru Z lub nie. Mówimy, że ζ jest *punktem skupienia* zbioru Z, jeżeli przy wszelkiem dodatniem ε istnieje nieskończenie wiele różnych liczb zespolonych z, należących do zbioru Z i spełniających nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon. \tag{1}$$

Jak łatwo widzieć, *na to żeby punkt ζ był punktem skupienia zbioru Z, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdego dodatniego ε istniał conajmniej jeden różny od ζ element z zbioru Z, spełniający nierówność* (1). Że warunek ten jest konieczny, jest oczywistem; okażemy więc tylko, że jest on wystarczającym. Załóżmy więc, że warunek nasz jest spełniony i że punkt ζ nie jest punktem skupienia zbioru Z. Wówczas przy pewnem dodatniem ε_0 istnieje conajwyżej skończona liczba różnych elementów z zbioru Z spełniających nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon_0;$$

załóżmy, że wśród nich jest k różnych od ζ i niech to będą elementy $z_1, z_2, \ldots z_k$. Oznaczmy przez ε liczbę dodatnią, mniejszą od każdej z liczb (dodatnich) $|z_1 - \zeta|, |z_2 - \zeta|, \ldots |z_k - \zeta|$: dla każdego elementu z zbioru Z różnego od ζ będziemy oczywiście mieli

$$|z - \zeta| \geq \varepsilon,$$

co będzie prawdziwem i w razie $k = 0$, dla $\varepsilon = \varepsilon_0$.

W każdym więc razie przy pewnem dodatniem ε żaden z elementów z zbioru Z, różnych od ζ, nie spełnia nierówności (1),

wbrew naszemu warunkowi. Dowiedliśmy więc, że warunek nasz jest wystarczającym.

Zauważymy też, iż możnaby w jednej chwili dowieść, że *na to żeby punkt ζ był punktem skupienia zbioru Z, potrzeba i wystarcza, iżby przy wszelkiem naturalnem n istniał conajmniej jeden element z zbioru Z, spełniający nierówność*

$$0 < |z - \zeta| < \frac{1}{n}.$$

Z definicji punktu skupienia wynika z łatwością, że jeżeli punkt ζ jest granicą ciągu nieskończonego z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ punktów zbioru Z, różnych od ζ, to ζ jest punktem skupienia zbioru Z. W samej rzeczy, wówczas mamy (przy wszelkiem danem dodatniem ε).

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu$$

i przeto nierówność (1) zachodzi dla nieskończenie wielu różnych elementów z zbioru Z.

Opierając się na pewniku Zermelo (§ 54) można też udowodnić twierdzenie odwrotne, mianowicie że jeżeli ζ jest punktem skupienia zbioru Z, to ζ jest granicą pewnego ciągu nieskończonego punktów zbioru Z, różnych od ζ. W samej rzeczy, załóżmy, że ζ jest punktem skupienia zbioru Z i oznaczmy, przy wszelkiem danem naturalnem n, przez Z_n zbiór wszystkich punktów zbioru Z, spełniających nierówność

$$\frac{1}{n+1} \leq |z - \zeta| < \frac{1}{n}.$$

Niektóre ze zbiorów Z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mogą być próżne, lecz w każdym razie nieskończenie wiele z tych zbiorów zawiera conajmniej po jednym elemencie: gdyby bowiem dla $n \geq p$ zbiory Z_n były wszystkie próżne, to jak łatwo widzieć, próżnym byłby też zbiór wszystkich liczb z zbioru Z, spełniających nierówność

$$0 < |z - \zeta| < \frac{1}{p},$$

wbrew założeniu, że ζ jest punktem skupienia zbioru Z. Niech teraz k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będą kolejne wskaźniki, dla których odpowiednie zbiory Z_{k_n} nie są próżne. Zbiory te nie posiadają oczywiście elementów wspólnych, zatem, w myśl pewnika Zermelo, istnieje

mnogość M, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z_{k_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Oznaczmy przez z_n ten jedyny element zbioru Z_{k_n}, który należy do M: będzie (wobec definicji zbioru Z_{k_n}, oraz z uwagi, że oczywiście $k_n \geq n$)

$$0 < |z_n - \zeta| < \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{n}$$

i przeto z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie ciągiem nieskończonym liczb zbioru Z, różnych od ζ, zmierzającym do ζ, którego istnienie chcieliśmy właśnie udowodnić.

Udowodniliśmy zatem, że *z pewnika* Zermelo *wynika, iż na to żeby punkt ζ był punktem skupienia zbioru Z, potrzeba i wystarcza, iżby punkt ζ był granicą ciągu nieskończonego punktów zbioru Z, różnych od ζ.*

Zbiór, który zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, nazywamy *zamkniętym*.

Załóżmy, że zbiór Z jest zamknięty i niech ζ oznacza granicę ciągu zbieżnego z_n, którego wyrazy są wszystkie elementami zbioru Z: powiadam, że ζ jest również elementem zbioru Z. W samej rzeczy, jeżeli ζ jest jednym z wyrazów ciągu z_n, to twierdzenie nasze jest oczywistem, jeżeli zaś wszystkie wyrazy ciągu z_n są różne od ζ, to, jak wiemy, ζ będzie punktem skupienia zbioru Z, i przeto elementem zbioru Z, skoro ten ostatni jest zamknięty. Dowiedliśmy więc, że *zbiór zamknięty zawiera granicę każdego ciągu zbieżnego, którego wyrazy są jego elementami.*

Opierając się na otrzymanym wyżej zapomocą pewnika Zermelo warunku koniecznym i wystarczającym na to żeby dany punkt był punktem skupienia danego zbioru, możnaby z łatwością udowodnić, że *z pewnika* Zermelo *wynika, iż na to żeby zbiór był zamkniętym, potrzeba i wystarcza iżby zbiór ten zawierał granicę każdego ciągu zbieżnego swych elementów.*

Niech Z_1 i Z_2 będą dwa dane zbiory zamknięte: zbiór $Z_1 + Z_2$ wszystkich punktów, należących bądź do Z_1, bądź do Z_2, jakoteż zbiór $Z_1 Z_2$ wszystkich punktów, należących jednocześnie do Z_1 oraz do Z_2, będą, jak łatwo widzieć, zamknięte. Wynika to natychmiast z uwagi, że każdy punkt skupienia zbioru $Z_1 + Z_2$ jest punktem skupienia conajmniej jednego ze zbiorów Z_1 oraz Z_2, zaś każdy punkt skupienia zbioru $Z_1 Z_2$ jest punktem skupienia każdego ze zbiorów Z_1 oraz Z_2. Zatem: *suma oraz iloczyn dwóch zbiorów*

zamkniętych są zbiorami zamkniętymi. Twierdzenie to daje się natychmiast uogólnić na dowolną, skończoną liczbę zbiorów zamkniętych.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych z, spełniających przy danem nieujemnem R nierówność

$$|z| \leq R$$

jest oczywiście zamknięty. (Jeżeli bowiem ζ jest punktem skupienia naszego zbioru, to nie może być $|\zeta| > R$, gdyż wówczas, dla $\varepsilon = |\zeta| - R$, żaden punkt naszego zbioru nie spełniałby nierówności (1), wbrew definicji punktu skupienia). Wnosimy stąd, że jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to zbiór wszystkich tych punktów zbioru Z, które (przy danem $R \geq 0$) spełniają nierówność

$$|z| \leq R$$

(o ile takowe istnieją) jest zamknięty (jako iloczyn dwóch zbiorów zamkniętych).

Zbiór wszystkich punktów skupienia danego zbioru Z nazywamy *pochodną* tego zbioru i oznaczamy przez Z'. Łatwo widzieć, że *pochodna każdego zbioru* (o ile nie jest zbiorem próżnym) *jest zbiorem zamkniętym.* Niech bowiem ζ' oznacza punkt skupienia zbioru Z', zaś ε dowolną daną liczbę dodatnią. Skoro ζ' jest punktem skupienia zbioru Z', więc istnieje w zbiorze Z' element ζ, spełniający nierówność

$$|\zeta - \zeta'| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Z drugiej strony, skoro ζ należy do Z', więc jest punktem skupienia zbioru Z: istnieje więc w tym zbiorze nieskończenie wiele różnych liczb zespolonych z, spełniających nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

Nierówności (2) i (3) dowodzą że mamy

$$|z - \zeta'| < \varepsilon$$

dla nieskończenie wielu różnych liczb z zbioru Z, co dowodzi, że ζ' jest punktem skupienia zbioru Z, zatem elementem zbioru Z'. Zbiór Z' zawiera więc wszystkie swe punkty skupienia, czyli jest zbiorem zamkniętym, *c. b. d. o.*

Załóżmy teraz, że X jest zbiorem liczb rzeczywistych, ograniczonym zgóry: kres jego górny będzie więc liczbą skończoną. Powiadam, że jeżeli kres górny zbioru X nie jest jego elementem,

to jest on jego punktem skupienia. W samej rzeczy, w myśl tw. 67, kres górny L zbioru X jest najmniejszą z liczb rzeczywistych niemniejszych od żadnej z liczb zbioru X: dla każdego danego dodatniego ε będzie więc istniała conajmniej jedna liczba x zbioru X, spełniająca nierówność

$$x > L - \varepsilon$$

(gdyż w razie przeciwnym mielibyśmy przy pewnem dodatniem ε dla każdej liczby x zbioru X nierówność $x \leq L - \varepsilon$ i liczba $L - \varepsilon < L$ byłaby niemniejszą od żadnej z liczb zbioru X, wbrew definicji kresu górnego), a że, z drugiej strony, mamy oczywiście dla każdej liczby x zbioru X nierówność

$$x \leq L$$

(gdyż L jest kresem górnym zbioru X), więc dla każdego dodatniego ε istnieje conajmniej jedna liczba x zbioru X, spełniająca nierówność

$$|x - L| < \varepsilon,$$

przyczem, jeżeli L nie jest elementem zbioru X, to będzie $x \neq L$. Dowodzi to, że L jest wówczas punktem skupienia zbioru X, *c. b. d. o.* Mamy więc

Twierdzenie 131. *Jeżeli kres górny zbioru liczb rzeczywistych, ograniczonego zgóry, nie jest jego elementem, to jest on jego punktem skupienia.* Podobnież udowodnilibyśmy

Twierdzenie 131[a]. *Jeżeli kres dolny zbioru liczb rzeczywistych, ograniczonego zdołu, nie jest jego elementem, to jest on jego punktem skupienia.* Wynika stąd natychmiast

Twierdzenie 132. *Zbiór zamknięty liczb rzeczywistych, ograniczony zgóry, zawiera swój kres górny, zaś ograniczony zdołu zawiera swój kres dolny.*

§ 106. Niech Z oznacza dany zbiór nieskończony i ograniczony liczb zespolonych. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich części rzeczywistych liczb zbioru Z, zaś przez Y — zbiór wszystkich współczynników przy i liczb zbioru Z: zbiory X i Y będą więc ograniczone; niech a i b będą kresy dolny i górny zbioru X, zaś c i d — kresy dolny i górny zbioru Y: a, b, c i d będą więc liczby rzeczywiste skończone.

Oznaczmy, przy danych naturalnych n, k oraz l, przez $Z_{k,l}^{(n)}$ zbiór wszystkich tych liczb $z = x + yi$ zbioru Z, dla których mamy:

$$a + \frac{(k-1)(b-a)}{n} \leq x \leq a + \frac{k(b-a)}{n},$$
$$c + \frac{(l-1)(d-c)}{n} \leq y \leq c + \frac{l(d-c)}{n}.$$

Mamy oczywiście

$$\left.\begin{aligned} Z = Z_{1,1}^{(n)} + Z_{1,2}^{(n)} + Z_{1,3}^{(n)} + \ldots + Z_{1,n}^{(n)} \\ + Z_{2,1}^{(n)} + Z_{2,2}^{(n)} + Z_{2,3}^{(n)} + \ldots + Z_{2,n}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + Z_{n,1}^{(n)} + Z_{n,2}^{(n)} + Z_{n,3}^{(n)} + \ldots + Z_{n,n}^{(n)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Skoro zbiór Z jest nieskończony, więc jeden conajmniej ze składników prawej strony wzoru (4) musi być zbiorem nieskończonym: niech $Z_{k_n, l_n}^{(n)}$ oznacza pierwszy ze składników sumy (4), który jest zbiorem nieskończonym: wskaźniki k_n i l_n będą więc wyznaczonemi w zupełności przez n liczbami naturalnemi $\leq n$.

Połóżmy:

$$x_n = a + \frac{k_n(b-a)}{n}, \quad y_n = c + \frac{l_n(d-c)}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{5}$$

będzie oczywiście

$$a \leq x_n \leq b \quad \text{oraz} \quad c \leq y_n \leq d \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i przeto ciągi x_n oraz y_n będą ograniczone; połóżmy

$$z_n = x_n + y_n i, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{6}$$

ciąg nieskończony z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie więc ograniczony.

W myśl tw. 80 istnieje więc (oznaczony w zupełności przez ciąg z_n) ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, taki iż ciąg z_{n_p} $(p = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny. Połóżmy:

$$\zeta = \lim_{p=\infty} z_{n_p}; \tag{7}$$

powiadam, że liczba ζ jest punktem skupienia zbioru Z.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Z uwagi, że $\lim_{n=\infty} n_p = \infty$, oraz wobec (7), istnieje wskaźnik p taki, iż

$$\frac{b-a}{n_p} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{d-c}{n_p} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{oraz} \quad |z_{n_p} - \zeta| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Z definicji wskaźników k_n oraz l_n wynika, że zbiór $U_p = Z_{k_{n_p}, l_{n_p}}^{(n_p)}$ zawiera nieskończenie wiele elementów zbioru Z; powiadam, że każdy element z bioru U_p spełnia nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon. \tag{9}$$

W samej rzeczy, z definicji zbiorów $Z_{k,l}^{(n)}$ wynika, że dla każdego punktu $z = x + yi$ zbioru U_p mamy:

$$a + \frac{(k_{n_p} - 1)(b-a)}{n_p} \leq x \leq a + \frac{k_{n_p}(b-a)}{n_p},$$
$$c + \frac{(l_{n_p} - 1)(d-c)}{n_p} \leq y \leq c + \frac{l_{n_p}(d-c)}{n_p},$$

co, wobec (5) (dla $n = n_p$) możemy przepisać w postaci:

$$x_{n_p} - \frac{b-a}{n_p} \leq x \leq x_{n_p}, \quad y_{n_p} - \frac{d-c}{n_p} \leq y \leq y_{n_p},$$

skąd, wobec (8):

$$|x - x_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |y - y_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

i przeto, wobec (6):

$$|z - z_{n_p}| = |x - x_{n_p} + (y - y_{n_p})i| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

co daje, wobec (8), w jednej chwili nierówność (9).

Dowiedliśmy więc, że każdy element zbioru nieskończonego U_p spełnia nierówność (9): ponieważ zaś zbiór U_p jest częścią zbioru Z, więc nierówność (9) zachodzi dla nieskończenie wielu elementów zbioru Z. Udowodniliśmy więc, że przy wszelkiem danem dodatniem ε istnieje nieskończenie wiele różnych liczb z zbioru Z, spełniających nierówność (9), co dowodzi, że ζ jest punktem skupienia zbioru Z. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 133 (Bolzano-Weierstrassa): *Każdy zbiór nieskończony ograniczony liczb zespolonych posiada conajmniej jeden punkt skupienia.*

Z dowodu naszego wynika, że punkt ζ jest wyznaczony w zupełności przez zbiór Z: możemy więc powiedzieć, że ***można raz na zawsze ustalić prawo, według którego każdemu zbiorowi nieskończonemu ograniczonemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony punkt skupienia tego zbioru.***

W szczególności, jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to ζ, jako punkt skupienia zbioru Z, jest jego elementem; zatem: można ustalić prawo, według którego każdemu zbiorowi nieskończonemu ograniczonemu i zamkniętemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony element tego zbioru.

Można też oczywiście z łatwością ustalić prawo, według którego każdemu zbiorowi skończonemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony element tego zbioru (np. ta z pośród liczb uważanego zbioru, mających najmniejszą część rzeczywistą, której współczynnik przy i jest najmniejszy).

Z drugiej strony można z łatwością każdemu (nie próżnemu) zbiorowi Z liczb zespolonych podporządkować pewną część nie próżną ograniczoną $\overline{Z}$ tego zbioru: jeżeli bowiem zbiór liczb zespolonych Z nie jest próżny, to przy pewnem dostatecznie wielkiem naturalnem n zbiór Z_n wszystkich tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność $|z| \leq n$, jest niepróżny: oznaczając przez n_0 najmniejszą wartość naturalną przy której to zachodzi i kładąc $\overline{Z} = Z_{n_0}$, otrzymamy część nie próżną i ograniczoną zbioru Z, wyznaczoną przez ten ostatni w zupełności. Nadto, jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to zbiór $\overline{Z}$ będzie, jak wiemy, również zamknięty. Każdemu zbiorowi zamkniętemu odpowiada więc oznaczona część (nie próżna) ograniczona i zamknięta tego zbioru. Ostatecznie więc, wobec otrzymanych wyżej wyników, możemy powiedzieć:

Można raz na zawsze ustalić prawo, według ktorego każdemu zbiorowi zamkniętemu liczb zespolonych odpowiada oznaczony element tego zbioru.

Oznaczmy ogólnie przez $p(Z)$ element, odpowiadający według tego prawa zbiorowi zamkniętemu Z i niech M będzie jakakolwiek mnogość zbiorów zamkniętych (liczb zespolonych), nie mających elementów wspólnych. Oznaczmy przez N zbiór wszystkich tych liczb zespolonych z, które dla pewnego zbioru Z, należącego do mnogości M, spełniają warunek

$$z = p(Z).$$

Jasnem jest, że mnogość N będzie zawierała po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z mnogości M. Mamy więc

Twierdzenie 134. *Dla każdej mnogości zbiorów zamkniętych (liczb zespolonych) Z, nie mających elementów wspólnych, istnieje mnogość, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdeyo ze zbiorów Z.*

Udowodniliśmy więc *pewnik* Zermelo dla zbiorów zamkniętych.

§ 107. Niech Z oznacza dany zbiór liczb zespolonych. Jeżeli każdej liczbie z zbioru Z odpowiada pewna liczba zespolona $f(z)$, to mówimy, że mamy określoną w zbiorze Z *funkcję* $f(z)$ zmiennej z.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest określona w danym zbiorze Z, to jest ona oczywiście tembardziej określoną w każdym zbiorze Z_1, będącym częścią zbioru Z.

Niech $f(z)$ oznacza funkcję, określoną w danym zbiorze liczb zespolonych Z i niech l oznacza kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze Z (t. j. kres dolny zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $|f(z)|$, odpowiadających liczbom z zbioru Z). Powiadam, że jeżeli

zbiór Z jest sumą dwóch zbiorów: $Z = Z_1 + Z_2$, to w jednym conajmniej ze zbiorów Z_1 oraz Z_2 kres dolny modułów funkcji $f(z)$ jest równy l. W somej rzeczy, oznaczmy przez l_1 i l_2 odpowiednio kresy dolne modułów funkcji $f(z)$ w zbiorach Z_1 i Z_2: musi być oczywiście $l_1 \geq l$ oraz $l_2 \geq l$, gdyż kres dolny części zbioru (liczb rzeczywistych) jest zawsze nie mniejszy od kresu dolnego całego zbioru. Gdybyśmy mieli jednocześnie $l_1 > l$ oraz $l_2 > l$, to, oznaczając przez l_0 mniejszą z liczb l_1 i l_2 (lub ich wspólną wartość), mielibyśmy, wobec definicji liczb l_1 i l_2, w zbiorze Z_1

$$|f(z)| \geq l_1 \geq l_0,$$

zaś w ziorze Z_2

$$|f(z)| \geq l_2 \geq l_0,$$

zatem, w każdym razie, w zbiorze $Z = Z_1 + Z_2$ stale

$$|f(z)| \geq l_0 > l,$$

co niemożliwe, skoro l jest kresem dolnym modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze Z.

Wynika stąd natychmiast ogólniej, że jeżeli zbiór Z jest sumą dowolnej skończonej liczby zbiorów $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$, to w jednym conajmniej z tych zbiorów kres dolny modułów funkcji $f(z)$ jest równy l. Pozostaje to prawdziwem oczywiście i wtedy, jeżeli niektóre ze zbiorów wypisanej sumy są próżne.

Załóżmy dalej, że zbiór Z jest ograniczony i niech zbiory $Z_{k,i}^{(n)}$ mają to samo znaczenie co w § 106. Będziemy więc mieli wzór (4) i przeto w jednym conajmniej (nie próżnym) ze zbiorów $Z_{k,i}^{(n)}$ wzoru (4) kres dolny modułów funkcji $f(z)$ będzie równy l: niech $Z_{k_n}^{(n)}, i_n$ znacza pierwszy z kolei ze zbiorów (4), w którym kres dolny modułów funkcji $f(z)$ jest równy l.

Wyznaczmy, dalej, ciągi x_n, y_n oraz z_n ze wzorów (5) oraz (6): ciąg z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie ograniczony i, w myśl tw. 80, istnieć będzie ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ taki, iż ciąg z_{n_p} $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie zbieżny. Połóżmy

$$\zeta = \lim_{p=\infty} z_{n_p}. \tag{10}$$

Niech, dalej, ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Powiadam, że kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze Z_ε wszystkich tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z - \zeta| < \varepsilon \tag{11}$$

jest równy l.

W samej rzeczy, wobec (10) udowodnimy zupełnie tak samo jak w § 106, że przy dostatecznie wielkiem p każda liczba z zbioru $Z^{(n_p)}_{k_{n_p}, l_{n_p}}$ spełnia nierówność (11), a więc należy do zbioru $Z(\varepsilon)$: kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze $Z(\varepsilon)$ nie może więc być większy niż w zbiorze $Z^{(n_p)}_{k_{n_p}, l_{n_p}}$, w którym jest równy l, a że, z drugiej strony, kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze $Z(\varepsilon)$, jako części zbioru Z, nie może być mniejszy niż w zbiorze Z, w którym jest równy l, więc wnosimy, że kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze $Z(\varepsilon)$ jest równy l. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 135. *Jeżeli kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze ograniczonym liczb zespolonych Z jest równy l, to istnieje punkt ζ (należący do zbioru Z lub nie), taki iż przy wszelkiem dodatniem ε kres dolny modułów funkcji $f(z)$ w zbiorze tych liczb zbioru Z, które spełniają nierówność*

$$|z-\zeta|<\varepsilon,$$

jest równy l.

Jeżeli przytem punkt ζ nie jest elementem zbioru Z, to jest on oczywiście jego punktem skupienia: wnosimy stąd natychmiast że jeżeli zbiór Z jest zamknięty, to punkt ζ w każdym razie jest jego elementem.

Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest *w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0* tego zbioru, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ, taka iż nierówność

$$|z-z_0|<\delta \tag{12}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|f(z)-f(z)|<\varepsilon \tag{13}$$

(definicja Cauchy'ego). Podobnie jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej (§ 41), z definicji tej wynika natychmiast prawdziwość twierdzenia 61. Dalej, podobnie jak w § 54, możnaby udowodnić, że *z pewnika* Zermelo *wynika iż na to żeby funkcja $f(z)$ była w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0 tego zbioru, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdego ciągu nieskończonego z_n punktów zbioru Z, zmierzarzającego do z_0, ciąg nieskończony $f(z_n)$ zmierzał do $f(z_0)$.*

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła w zbiorze Z dla każdego punktu tego zbioru, to mówimy, że funkcja $f(z)$ jest *ciągła w całym zbiorze Z.*

Łatwo widzieć, że *suma dwóch funkcji ciągłych w zbiorze Z dla punktu z_0 jest funkcją ciągłą w zbiorze Z dla punktu z_0.* W samej

rzeczy, niech $f_1(z)$ i $f_2(z)$ będą dwie dane funkcje, określone w zbiorze Z i ciągłe w tym zbiorze dla punktu z_0. Połóżmy $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ — będzie to więc funkcja, określona w zbiorze Z.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec ciągłości funkcji $f_1(z)$ i $f_2(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0, istnieją dla liczby dodatniej ε takie dodatnie δ_1 oraz δ_2, iż nierówność

$$|z-z_0|<\delta_1$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|f_1(z)-f_1(z_0)|<\varepsilon/2,$$

zaś nierówność

$$|z-z|<\delta_2$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|f_2(z)-f_2(z)|<\varepsilon/2.$$

Oznaczając przez δ liczbę dodatnią, mniejszą od δ_1 i δ_2, wnosimy stąd natychmiast, wobec

$$f(z)-f(z_0)=f_1(z)-f_1(z_0)+f_2(z)-f_2(z_0)$$

oraz w myśl twierdzenia o module sumy, że nierówność (12) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (13), co dowodzi ciągłości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0.

Podobnież udowodnilibyśmy odnośne twierdzenie dla różnicy dwóch funkcji.

Opierając się na tożsamości

$$f_1(z)f_2(z)-f_1(z_0)f_2(z_0)=[f_1(z)-f_1(z_0)]\,[f_2(z)-f_2(z_0)]+$$
$$+[f_1(z)-f_1(z_0)]\,f_2(z_0)+f_1(z_0)\,[f_2(z)-f_2(z_0)],$$

udowodnilibyśmy również z łatwością, że *iloczyn dwóch funkcji ciągłych w zbiorze Z dla punktu z_0 jest funkcją ciągłą w zbiorze Z dla punktu z_0.*

Pozostawiamy wreszcie czytelnikowi wypowiedzenie oraz udowodnienie odnośnego twierdzenia dla ilorazu dwóch funkcji.

Twierdzenia o sumie i iloczynie funkcji ciągłych dają się natychmiast uogólnić na dowolną skończoną liczbę funkcji.

Załóżmy teraz, że funkcja $f(z)$ jest ciągła w całym zbiorze Z. Wówczas, w myśl definicji ciągłości dla każdego punktu z_0 zbioru Z oraz dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ (zależna od ε i od z_0), taka iż przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z,

warunek (12) pociąga za sobą nierówność (13). Może się jednak zdarzyć, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje odpowiednia liczba dodatnia δ, taka iż nierówność (12) pociąga za sobą nierówność (13) przy wszelkich z_0 oraz z, należących do zbioru Z. W takim razie mówimy, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z *ciągłą jednostajnie*.

Różnica między ciągłością zwyczajną a ciągłością jednostajną fukcji w zbiorze Z polega więc na tem, że dla zwyczajnej ciągłości wystarcza istnienie odpowiedniego δ dla każdego dodatniego ε oraz każdego zosobna punku z_0 zbioru Z, dla ciągłości zaś jednostajnej potrzeba iżby dla każdego dodatniego ε istniało odpowiednie δ, któreby było zdatnem przy wszelkiem z_0, należącem do zbioru Z.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą, ale nie jest ciągłą jednostajnie, to mówimy, że $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą *niejednostajnie*.

Okażemy w jaki sposób można jeszcze wyrazić różnicę między ciągłością jednostajną a ciągłością niejednostajną funkcji w danym zbiorze. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla danego punktu z_0, to dla każdego danego dodatniego ε istnieje liczba dodatnia δ, przy której nierówność (12) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (13): oznaczmy, przy danych z_0 oraz ε, przez $\delta(z_0, \varepsilon)$ kres górny zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$ liczb δ, przy których nierówność (12) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (13). Łatwo widzieć, że będzie to największa z liczb zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$. (Wystarczy w tym celu oczywiście tylko okazać, że $\delta(z_0, \varepsilon)$ należy do zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$. Niech więc z oznacza jakąkolwiek daną liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność

$$|z - z_0| < \delta(z_0, \varepsilon): \tag{14}$$

ponieważ $\delta(z_0, \varepsilon)$ oznacza kres górny zbioru $\Delta(z_0, \varepsilon)$, więc istnieje w tym zbiorze liczba $\delta_1 > |z - z_0|$; nierówność ta, z uwagi że δ_1 należy do $\Delta(z_0, \varepsilon)$, pociąga za sobą nierówność (13), która w ten sposób zachodzi dla każdej liczby z zbioru Z, spełniającej nierówność (14), co dowodzi, że $\delta(z_0, \varepsilon)$ należy do $\Delta(z_0, \varepsilon)$, *c. b. d. o.*).

Oznaczmy teraz, przy każdem danem dodatniem ε, przez $l(\varepsilon)$ kres dolny funkcji (dodatniej) $\delta(z, \varepsilon)$ w zbiorze Z: będzie to oczywiście liczba nieujemna. Jak łatwo widzieć, na to żeby funkcja $f(z)$ była w zbiorze Z ciągłą jednostajnie, potrzeba i wystarcza iżby przy wszelkiem dodatniem ε było $l(\varepsilon) > 0$.

Funkcja może być ciągłą w całym zbiorze Z, ale nie być w nim ciągłą jednostajnie. Oto przykłady:

1) Niech Z oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych różnych od zera i połóżmy $f(z) = \frac{1}{z}$ dla każdego punktu z zbioru Z. Oznaczając, przy danem $\varepsilon > 0$ oraz $z_0 \neq 0$ przez δ mniejszą z liczb $\frac{|z_0|}{2}$ oraz $\frac{\varepsilon |z_0|^2}{2}$, będziemy, jak

łatwo widzieć, dla $|z - z_0| < \delta$ mieli $|z| > \frac{|z_0|}{2}$ oraz $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \left|\frac{z - z_0}{z z_0}\right| < \varepsilon$, co dowodzi że funkcja $f(z) = \frac{1}{z}$ jest ciągła w całym zbiorze Z. Załóżmy, że funkcja nasza jest w zbiorze Z ciągła jednostajnie. Dla każdej liczby dodatniej, w szczególności zaś dla liczby 1, istniałaby liczba dodatnia δ taka, iż warunek

$$|z - z_0| < \delta \tag{15}$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(z) - f(z_0)| < 1 \tag{16}$$

przy wszelkich z i z_0, należących do zbioru Z. Obierzmy jednak liczbę naturalną $p > \frac{1}{\delta}$ i przyjmijmy $z = \frac{1}{p}$, $z_0 = \frac{1}{p+1}$: będziemy mieli

$$|z - z_0| = \frac{1}{p(p+1)} < \frac{1}{p} < \delta,$$

zaś

$$\left|f(z) - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = 1,$$

wbrew (16). Funkcja $f(z)$ nie jest więc ciągła jednostajnie w zbiorze Z.

Dowód powyższy pozostaje bez zmiany w przypadku kiedy Z oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych, spełniających nierówność $0 < |z| \leq 1$, albo w przypadku kiedy Z oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich.

2) Niech Z oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych (lub zbiór wszystkich liczb rzeczywistych) i połóżmy $f(z) = z^2$.

Funkcja nasza będzie, jak łatwo widzieć, ciągłą w całym zbiorze Z. Załóżmy, że jest ona w zbiorze Z ciągła jednostajnie. Istniałoby więc takie dodatnie δ, że przy wszelkich z i z_0 nierówność (15) pociąga za sobą nierówność (16).

Obierzmy jednak liczbę naturalną $p > \frac{1}{\delta}$ i połóżmy $z_0 = p$, $z = p + \frac{1}{p}$: będziemy mieli

$$|z - z_0| = \frac{1}{p} < \delta,$$

zaś

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = 2 + \frac{1}{p^2} > 1,$$

wbrew (16). Funkcja nasza nie jest więc ciągłą jednostajnie w zbiorze Z.

Jeżeli jednak zbiór Z spełnia pewne warunki, to ciągłość funkcji w całym zbiorze Z pociąga za sobą jej ciągłość jednostajną w tym zbiorze. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 136. *Funkcja ciągła w zbiorze zamkniętym i ograniczonym jest w tym zbiorze ciągłą jednostajnie.*

Dowód. Załóżmy, że zbiór Z jest zamknięty i ograniczony i niech $f(z)$ oznacza funkcję ciągłą w zbiorze Z. Dla każdej liczby

dodatniej ε oraz każdego punktu z_0 zbioru Z istnieje więc liczba dodatnia δ, taka iż przy wszelkiem z należącem do zbioru Z warunek (12) pociąga za sobą nierówność (13). Oznaczmy, przy danem dodatniem ε, przez $\delta(z_0)$ kres górny liczb dodatnich δ, dla których przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, warunek (12) pociąga za sobą nierówność (13). $\delta(z)$ będzie więc oznaczoną w zupełności funkcją zmiennej zespolonej z w zbiorze Z, przyczem dla każdego punktu z tego zbioru będzie $\delta(z) > 0$. Oznaczmy przez l kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze Z: będzie to więc liczba rzeczywista nieujema, zależna od ε. Powiadam, że nie może być $l = 0$.

W samej rzeczy, załóżmy, że mamy $l = 0$. W myśl tw. 135 (zastosowanego względem funkcji $\delta(z) = |\delta(z)|$) istnieje więc punkt ζ taki iż przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z - \zeta| < \varsigma \tag{17}$$

jest równy zeru, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z, punkt ζ jest elementem zbioru Z. Wobec ciągłości funkcji $f(z)$ w całym zbiorze Z, istnieje dla liczby dodatniej $\varepsilon/2$ liczba dodatnia δ_1, taka iż dla każdej liczby z zbioru Z, spełniającej nierówność

$$|z - \zeta| < \delta_1 \tag{18}$$

zachodzi nierówność

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon/2. \tag{19}$$

Niech teraz z_0 oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność

$$|z_0 - \zeta| < \delta_1/2; \tag{20}$$

dla $z = z_0$ zachodzi więc, tembardziej, nierówność (18), pociągająca za sobą nierówność (19), czyli, w danym razie, nierówność

$$|f(z_0) - f(\zeta)| < \varepsilon/2. \tag{21}$$

Przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z i spełniającem nierówność

$$|z - z_0| < \delta_1/2, \tag{22}$$

będziemy, wobec (20), mieli oczywiście nierówność (18), pociągającą za sobą, jak wiemy, nierówność (19), która daje w jednej chwili, wobec (21):

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{23}$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, nierówność (22) pociąga za sobą nierówność (23), co, jak łatwo widzieć, dowodzi, że

$$\delta(z) \geqq \delta_1/2. \tag{24}$$

Okazaliśmy więc, że dla każdej liczby z_0 zbioru Z, spełniającej nierówność (20), zachodzi nierówność (24), skąd wynika natychmiast, że kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze liczb z zbioru Z, spełniających nierówność

$$|z - \zeta| < \delta_1/2$$

jest $\geqq \delta_1/2$, a więc dodatni, wbrew otrzymanemu wyżej z założenia $l = 0$ wnioskowi, że przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny funkcji $\delta(z)$ w zbiorze liczb z zbioru Z, spełniających nierówność (17), jest zerem.

Dowiedliśmy więc, że nie może być $l = 0$: kres dolny l funkcji (dodatniej) $\delta(z)$ w zbiorze Z jest więc dodatni.

Z definicji liczby l wynika, że przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, mamy:

$$\delta(z) \geqq l,$$

skąd, wobec definicji funkcji $\delta(z)$ wnosimy natychmiast, że dla każdych dwóch liczb z i z' zbioru Z nierówność

$$|z - z'| < l \tag{25}$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon. \tag{26}$$

Udowodniliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia l taka iż przy wszelkich z i z' należących do zbioru Z nierówność (25) pociąga za sobą nierówność (26). Wynika stąd natychmiast, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągła *jednostajnie*. Udowodniliśmy wiec twierdzenie 136.

Zauważymy, że jeżeli zbiór nie jest zamknięty, lub nie jest ograniczony, to funkcja, ciągła w każdym jego punkcie, może nie być ciągłą jednostajnie w uważanym zbiorze, jak tego dowodzą przykłady: 1), w którym zbiór Z nie jest zamknięty, oraz 2), w którym zbiór Z nie jest ograniczony.

§ **108. Twierdzenie 137.** *Funkcja ciągła w zbiorze zamkniętym i ograniczonym jest w tym zbiorze ograniczoną, a zbiór jej wartości jest zamknięty.*

Dowód. Niech $f(z)$ oznacza funkcję ciągłą w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z. Oznaczmy przez U zbiór wszystkich wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, t j. zbiór wszystkich liczb zespolonych $f(z)$, odpowiadających liczbom z zbioru Z i niech η oznacza punkt skupienia zbioru U. Połóżmy w zbiorze Z:

$$g(z) = f(z) - \eta:$$

będzie to więc funkcja, określona w całym zbiorze Z.

Ponieważ η jest punktem skupienia zbioru U wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, więc, jak łatwo widzieć, kres dolny modułów funkcji $g(z) = f(z) - \eta$ w zbiorze Z jest równy zeru. Skoro zaś zbiór Z jest ograniczony, więc, w myśl tw. 135, istnieje punkt ζ taki, iż przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ tych liczb zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z - \zeta| < \varsigma \tag{27}$$

jest równy zeru, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z, punkt ζ jest jego elementem. Powiadam, że $f(\zeta) = \eta$.

W samej rzeczy, załóżmy, że $f(\zeta) \neq \eta$; będzie więc $\varepsilon = \frac{|f(\zeta) - \eta|}{2} > 0$. Ponieważ funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą, więc istnieje, dla dodatniego ε, takie dodatnie ς, iż przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z i spełniającem warunek (27), zachodzi nierówność

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon,$$

skąd, w jednej chwili:

$$|g(z)| = |f(z) - \eta| = |f(\zeta) - \eta - (f(\zeta) - f(z))| \geq$$
$$\geq |f(\zeta) - \eta| - |f(\zeta) - f(z)| = 2\varepsilon - |f(\zeta) - f(z)| > \varepsilon,$$

co dowodzi, że kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze $Z(\varsigma)$ jest $\geq \varepsilon$, a więc dodatni, wbrew własności punktu ζ. Jest więc $f(\zeta) = \eta$, czyli η jest jedną z wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, a więc elementem zbioru U. Ten ostatni zawiera więc każdy swój punkt skupienia, czyli jest zbiorem zamkniętym.

Załóżmy teraz, że funkcja $f(z)$ nie jest ograniczoną w zbiorze Z. Dla każdego dodatniego A istnieje więc w zbiorze Z takie z, iż $|f(z)| > A$, skąd $\varphi(z) = \frac{1}{|f(z)| + 1} < \frac{1}{A}$. Wnosimy stąd w jednej chwili, że kres dolny funkcji (dodatniej) $\varphi(z)$ w zbiorze Z jest zerem. W myśl tw. 135 istnieje więc punkt ζ_1 taki, iż przy wszelkiem dodatniem δ kres dolny modułów funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze tych liczb z zbioru Z, które spełniają nierówność

$$|z - \zeta_1| < \delta, \tag{28}$$

jest zerem.

Wobec zamkniętości zbioru Z, punkt ζ_1 należy do Z: ponieważ zaś funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą, więc istnieje takie dodatnie δ, iż dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (28) pociąga za sobą nierówność

$$|f(z) - f(\zeta_1)| < 1,$$

skąd

$$|f(z)| < |f(\zeta_1)| + 1$$

i przeto

$$\varphi(z) = \frac{1}{|f(z)| + 1} > \frac{1}{|f(\zeta_1)| + 2} = \alpha > 0,$$

co dowodzi, że kres dolny funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze liczb z zbioru Z, spełniających nierówność (28), jest $\geq \alpha$, zatem dodatni, wbrew własności liczby ζ_1. Dowiedliśmy więc, że funkcja $f(z)$ jest ograniczoną w zbiorze Z.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 137 w zupełności.

§ 109. Funkcja funkcji. Niech $\varphi(z)$ oznacza funkcję, określoną w zbiorze Z i niech U oznacza zbiór wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje funkcja $\varphi(z)$ w zbiorze Z. (Do zbioru U zaliczamy więc wszystkie te i tylko te liczby zespolone u, dla których przy pewnem z, należącem do zbioru Z, mamy $u = f(z)$). Niech, dalej, $\psi(u)$ oznacza funkcję, określoną w zbiorze U. Połóżmy dla każdego punktu z zbioru Z:

$$f(z) = \psi(\varphi(z)):$$

będzie to funkcja, określona w całym zbiorze Z [gdyż każdemu z, należącem do zbioru Z odpowiada, jak zakładamy, oznaczony punkt $u = \varphi(z)$, należący do zbioru U, każdemu zaś u, należącemu do zbioru U odpowiada oznaczony punkt $\psi(u) = \psi(\varphi(z))$].

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 138. *Jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0, zaś funkcja $\psi(z)$ jest w zbiorze U wszystkich wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z ciągłą dla punktu $u_0 = \varphi(z_0)$, to funkcja $f(z) = \psi(\varphi(z))$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0.*

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są zachowane i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec ciągłości funkcji $\psi(u)$ w zbiorze U dla punktu $u_0 = \varphi(z_0)$, istnieje dla liczby ε liczba dodatnia η taka, iż nierówność

$$|u - u_0| < \eta \tag{29}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby u zbioru U nierówność

$$|\psi(u) - \psi(u_0)| < \varepsilon. \tag{30}$$

Z drugiej strony, wobec ciągłości funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0, istnieje liczba dodatnia δ taka, iż nierówność

$$|z - z_0| < \delta \tag{31}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \eta. \tag{32}$$

Niech teraz z oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru Z, spełniającą nierówność (31). Będziemy więc mieli nierówność (32). Połóżmy, dalej $u = \varphi(z)$ — będzie to oczywiście liczba zbioru U, spełniająca, w myśl (32) i wobec $u_0 = \varphi(z_0)$, nierówność (29), pociągającą za sobą nierówność (30), czyli nierówność

$$|\psi(\varphi(z)) - \psi(\varphi(z_0))| < \varepsilon. \tag{33}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ taka, iż nierówność (31) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność (33), co dowodzi, że funkcja $f(z) = \psi(\varphi(z))$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0. Udowodniliśmy więc twierdzenie 138.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika, w szczególności, że jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest ciągła w całym zbiorze Z, zaś funkcja $\varphi(u)$ jest ciągła w całym zbiorze U, to funkcja $f(z) = \psi(\varphi(z))$ jest ciągła w całym zbiorze Z. Wynik ten wyrażamy krócej, mówiąc że *funkcja ciągła funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą.*

Przykłady:

1) Kładąc w zbiorze liczb dodatnich $\varphi(x) = x \lg x$, zaś w zbiorze liczb rzeczywistych $\psi(y) = e^y$, wnosimy, że funkcja $x^x = e^{x \lg x} = \psi(\varphi(x))$ jest ciągłą w zbiorze liczb dodatnich.

2) Kładąc w zbiorze liczb rzeczywistych, większych od jedności, $\varphi(x) = \lg x$, zaś w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich $\psi(y) = \lg y$, wnosimy, że funkcja $\lg(\lg x)$ jest określoną i ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych większych od jedności.

3) Kładąc w zbiorze liczb rzeczywistych $\varphi(x) = e^x$, $\psi(y) = e^y$, wnosimy, że funkcja $e^{e^x} = \psi(\varphi(x))$ jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

4) Funkcja $\lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$ jest określoną i ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych ≥ 1.

5) Z nierówności $\big||z| - |z_0|\big| \leq |z - z_0|$ (wynikającej w jednej chwili z twierdzenia o module różnicy) wynika natychmiast, że funkcja $|z|$ jest ciągła w całym zbiorze liczb zespolonych. Wnosimy stąd natychmiast, w myśl tw. 138, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0, to i funkcja $|f(z)|$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu z_0.

Zauważymy, że wogóle funkcje $\psi(\varphi(z))$ oraz $\varphi(\psi(z))$ są różne: np. dla $\varphi(z) = z^2$, $\psi(z) = 2z$, mamy: $\psi(\varphi(z)) = 2z^2$, zaś $\varphi(\psi(z)) = (2z)^2 = 4z^2$. Jeżeli w całym zbiorze Z zachodzi równość $\psi(\varphi(z)) = \varphi(\psi(z))$, to mówimy, że funkcje φ i ψ są w zbiorze Z *przemienne*. Np. funkcje $\varphi(z) = z^2$ oraz $\psi(z) = z^3$ są przemienne w całym zbiorze liczb zespolonych, gdyż $\varphi(\psi(z)) = \psi(\varphi(z)) = z^6$.

Iteracje. Jeżeli, w szczególności, $\varphi(z) = \psi(z)$, to funkcję $\psi(\varphi(z))$, czyli funkcję $f(z) = \varphi(\varphi(z))$ nazywamy *iteracją* funkcji $\varphi(z)$, albo iterowaną funkcją $\varphi(z)$; np. funkcję $\lg \lg x$ nazywamy iterowanym logarytmem. Przez skrócenie piszemy niekiedy $\varphi_2(z)$ zamiast $\varphi(\varphi(z))$.

Jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest określoną w zbiorze Z i jeżeli wartości funkcji $\varphi(z)$ dla liczb z zbioru Z również należą do Z, to w zbiorze Z określone są funkcje: $\varphi_1(z) = \varphi(z)$, $\varphi_2(z) = \varphi(\varphi(z))$, $\varphi_3(z) = \varphi(\varphi_2(z))$ i t. d., ogólnie $\varphi_n(z) = \varphi(\varphi_{n-1}(z))$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Funkcję $\varphi_n(z)$ nazywamy n-tą *iteracją funkcji* $\varphi(z)$. Iteracje te spełniają, jak łatwo widzieć, tak zwaną *zasadę dodawniczą*, wyrażającą się wzorem $\varphi_m(\varphi_n(z)) = \varphi_{m+n}(z)$, przy wszelkich naturalnych m i n, oraz t. zw. *zasadę mnożniczą*, wedle której, dla $f(z) = \varphi_n(z)$, mamy $f_m(z) = \varphi_{mn}(z)$, przy wszelkich maturalnych m i n.

Jeżeli (przy danem z) ciąg nieskończony $\varphi_n(z)$ jest zbieżny, to możemy mówić o iteracji rzędu nieskończonego (właściwie pozaskończonego) $\varphi_\omega(z) = \lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(z)$. [Jeżeli liczba $\varphi_\omega(z)$ należy jeszcze do Z, to możemy mówić o iteracjach $\varphi_{\omega+1}(z) = \varphi(\varphi_\omega(z))$, $\varphi_{\omega+2}(z) = \varphi(\varphi_{\omega+1}(z))$ i t. d. Występujące tutaj wskaźniki są to tak zwane *liczby porządkowe pozaskończone*]. Godnem uwagi jest tu następujące

Twierdzenie 139. *Jeżeli, przy danem z_0, ciąg kolejnych iteracji $\varphi_n(z_0)$ jest zbieżny, zaś wszystkie jego wyrazy, jakoteż granica należą do zbioru Z, oraz jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu $t = \varphi_\omega(z_0)$, to liczba t spełnia równanie $\varphi(t) - t = 0$.*

W samej rzeczy, wobec $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(z_0) = \varphi_\omega(z) = t$, oraz założenia, że funkcja $\varphi(z)$ jest w zbiorze Z ciągła dla punktu t, mamy:

$$\varphi(t) = \varphi(\lim_{n=\infty} \varphi_n(z)) = \lim_{n=\infty} \varphi(\varphi_n(z_0)) = \lim_{n=\infty} \varphi_{n+1}(z_0) = t,$$

c. b. d. o.

Twierdzenie to ułatwia nam niekiedy badanie zbieżności ciągu iteracji, podając ewentualną wartość granicy. Wogóle jednak badanie zbieżności ciągu iteracji jest bardzo trudnem nawet dla względnie prostych funkcji: np. nie

zbadano dotąd w przypadku ogólnym przy jakich zespolonych z zbieżnym jest ciąg iteracji $\varphi_n(z)$, gdzie $\varphi(z) = az^2 + bz + c$ [1]).

§ 110. Funkcje odwrotne.

Niech $f(z)$ oznacza daną funkcję, określoną w zbiorze Z, zaś U niech będzie zbiorem wszystkich różnych wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z. Dla każdego więc danego punktu u zbioru U istnieje w zbiorze Z conajmniej jedno z, spełniające równanie

$$f(z) = u. \tag{34}$$

Wogóle dla danego punktu u zbioru U może w zbiorze Z istnieć więcej niż jedno z, spełniające równanie (1): np. dla funkcji $f(z) = z^2$, określonej w zbiorze wszystkich liczb zespolonych, dla której, jak łatwo widzieć, zbiór U zawiera wszystkie liczby zespolone, każdemu $u \neq 0$ odpowiadają dwie różne liczby zespolone z, spełniające równanie (34). Innemi słowy: dla różnych punktów zbioru Z funkcja $f(z)$ może przyjmować tę samą wartość,

Jeżeli jednak różnym punktom z zbioru Z odpowiadają zawsze różne wartości $f(z)$, to równanie (34) posiada przy każem danem u, należącem do zbioru U, jedno i tylko jedno rozwiązanie względem z. Każdemu więc punktowi u zbioru U odpowiada oznaczona liczba z zbioru Z, spełniająca równanie (34): oznaczmy ją przez $F(u)$; będzie więc

$$f(F(u)) = u. \tag{35}$$

Funkcja $F(u)$ będzie więc określoną w całym zbiorze U, przyczem w całym tym zbiorze zachodzić będzie równość (35). Wobec powyższej definicji funkcji $F(u)$ możemy też powiedzieć, że równanie (34) pociąga za sobą równanie

$$z = F(u). \tag{36}$$

Określoną w ten sposób funkcję $F(u)$ nazywamy *odwrotną* względem funkcji $f(z)$ albo *odwróceniem* funkcji $f(z)$, każdą zaś funkcję dla której w danym zbiorze istnieje oznaczona odwrotna, nazywamy *odwracalną* (jednoznacznie) w uważanym zbiorze. Na to

[1]) Kilka prostych i ciekawych twierdzeń o iteracjach podaje R. Schauffler w *Mathematische Annalen* 78 (r. 1917), p. 53. Na uwagę zasługuje zwłaszcza twierdzenie: Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, spełniającą warunki: $a \leq \varphi(x) \leq b$, dla $a \leq x \leq b$ oraz, przy pewnem c: $|\varphi(x) - c| < |x - c|$, dla $x \neq c$, $a \leq x \leq b$, to $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = c$, dla $a \leq x \leq b$.

więc, żeby funkcja była w danym zbiorze (jednoznacznie) odwracalną, potrzeba i wystarcza, iżby różnym punktom uważanego zbioru odpowiadały zawsze różne wartości funkcji.

Łatwo, dalej, widzieć, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z odwracalną i $F(u)$ oznacza, jak wyżej, jej odwrócenie, to funkcja $F(u)$ jest odwracalną w zbiorze U i odwróceniem jej jest funkcja $f(z)$.

W samej rzeczy, zbiorem wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje funkcja $F(u)$ w zbiorze U, jest oczywiście zbiór Z: dla dowodu odwracalności funkcji $F(u)$ potrzeba więc i wystarczy okazać, że dla każdego danego punktu z zbioru Z istnieje w zbiorze U jedno i tylko jedno u, spełniające równanie (36). Że takie u może przy danem z być conajwyżej jedno, wynika z uwagi, że wzór (36) daje natychmiast

$$f(z) = f(F(u)),$$

czyli, wobec (35), wzór (34): punktem u, spełniającym równanie (36) nie może więc być inny niż $u = f(z)$.

Pozostaje więc tylko przekonać się, że punkt $u = f(z)$ spełnia równanie (36). W tym celu zauważymy, że skoro równanie (35) zachodzi przy wszelkiem u, należącem do zbioru U, to możemy w niem położyć, przy danem z, $u = f(z)$, co daje

$$f(F(f(z))) = f(z),$$

a ponieważ funkcja $f(z)$, jako odwracalna, nie może dla różnych punktów zbioru Z przyjmować tę samą wartość, więc mamy stąd

$$F(f(z)) = z, \tag{37}$$

co, wobec $f(z) = u$, daje wzór (36).

Dowiedliśmy więc, że funkcja $F(u)$ jest odwracalna w zbiorze U i że odwróceniem jej jest funkcja $f(z)$. Nadto dowiedliśmy, że przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z, zachodzi równość (37). Równości (35) i (37) dowodzą, że operacje, oznaczone przez symbole f i F znoszą się wzajemnie.

Zauważymy, że jeżeli dla dwóch funkcji f i F zachodzi w zbiorze Z stale równość (37), to funkcje te są (w zbiorze Z) odwrotnościami jedna dla drugiej.

W samej rzeczy, załóżmy że dla dwóch funkcji f i F zachodzi w zbiorze Z równość (37). Wynika stąd oczywiście, że funkcja $f(z)$ jest określoną w całym zbiorze Z: powiadam, że różnym wartościom z zbioru Z będą odpowiadały różne wartości funkcji $f(z)$. Gdybyśmy

bowiem mieli dla $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) = f(z_2)$, to byłoby też $F(f(z_1) = F(f(z_2))$, zatem, w myśl (37): $z_1 = z_2$, wbrew założeniu. Funkcja $f(z)$ jest więc odwracalną w zbiorze Z: oznaczmy jej odwrócenie przez $\varphi(u)$: będzie to więc funkcja, określona w zbiorze U wszystkich wartości u, jakie przyjmuje funkcja $f(z)$ w zbiorze Z. Będziemy mieli w zbiorze U:

$$f(\varphi(u)) = u. \tag{38}$$

Niech u oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru U: połóżmy

$$z = \varphi(u):$$

będzie to więc liczba zbioru Z, zatem, w myśl (37)

$$F(f(\varphi(u))) = \varphi(u),$$

czyli, w myśl (38):

$$F(u) = \varphi(u)$$

— w całym zbiorze U, co dowodzi, że funkcja F jest odwrotną dla f w zbiorze Z, *c. b. d. o.*

Twierdzenie 140. *Jeżeli zbiór Z jest ograniczony i zamknięty, zaś funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z odwracalna i ciągła, to odwrócenie jej $F(u)$ jest funkcją ciągłą* (w zbiorze U wszystkich wartości, przybieranych przez funkcję $f(z)$ w zbiorze Z).

Dowód. Niech $f(z)$ oznacza funkcję ciągłą i odwracalną w zbiorze ograniczonym i zamkniętym Z i niech $F(u)$ oznacza funkcję odwrotną dla $f(z)$: będzie to więc funkcja, określona w zbiorze U wszystkich wartości, jakie przybiera funkcja $f(z)$ dla liczb z zbioru Z

Załóżmy, że dla danego punktu u_0 zbioru U funkcja $F(u)$ nie jest ciągłą. Z definicji ciągłości wynika, że wówczas przy pewnem dodatniem α dla każdego dodatniego δ istnieje w zbiorze U liczba u, spełniająca nierówności

$$|u - u_0| < \delta \tag{39}$$

oraz

$$|F(u) - F(u_0)| \geq \alpha. \tag{40}$$

Połóżmy

$$z_0 = F(u_0) \tag{41}$$

i oznaczmy przez Z_1 zbiór wszystkich liczb z zbioru Z, spełniających nierówność

$$|z - z_0| \geq \alpha. \tag{42}$$

Zbiór Z_1 będzie jak łatwo widzieć, zamknięty, jako zbiór punktów wspólnych zbioru zamkniętego Z oraz zbioru zamkniętego wszystkich liczb zespolonych z, spełniających nierówność (42).

Powiadam, że kres dolny modułów funkcji

$$g(z) = f(z) - u_0 \tag{43}$$

w zbiorze Z_1 jest zerem.

W samej rzeczy, niech δ oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W zbiorze U istnieje, jak wiemy, liczba u, spełniająca nierówności (39) i (40). Połóżmy

$$z = F(u): \tag{44}$$

będzie to liczba zbioru Z; wobec (41) będziemy mieli, w myśl (40), nierówność (42) i przeto liczba z będzie należała do zbioru Z_1.

Wobec (44) znajdujemy $f(z) = u$ (gdyż funkcja F jest odwrotną dla f); wobec (43) i (39) mamy więc

$$|g(z)| = |f(z) - u_0| = |u - u_0| < \delta:$$

dla każdego dodatniego δ istnieje więc w zbiorze Z_1 liczba z, dla którego $|g(z)| < \delta$, co dowodzi, że kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze Z_1 jest zerem, *c. b. d. o.*

W myśl tw. 135 istnieje więc punkt ζ taki, iż przy wszelkiem dodatniem ς kres dolny modułów funkcji $g(z)$ w zbiorze tych liczb zbioru Z_1, które spełniają nierówność

$$|z - \zeta| < \varsigma \tag{45}$$

jest zerem, przyczem, wobec zamkniętości zbioru Z_1, punkt ζ należy do Z_1. Powiadam, że $g(\zeta) = 0$.

W samej rzeczy, załóżmy, że $g(\zeta) \neq 0$ i połóżmy

$$\frac{|g(\zeta)|}{2} = \varepsilon: \tag{46}$$

będzie to więc liczba dodatnia. Wobec ciągłości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z, istnieje liczba dodatnia ς taka, iż nierówność (45) pociąga za sobą dla każdej liczby z zbioru Z nierówność

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon,$$

skąd, z uwagi że wobec (43) jest

$$g(z) = g(\zeta) - (f(\zeta) - f(z)),$$

znajdujemy w jednej chwili, wobec (46):

$$|g(z)| \geq |g(\zeta)| - |f(\zeta) - f(z)| > \varepsilon.$$

Dla każdej liczby z zbioru Z, spełniającej nierówność (45), mamy więc $|g(z)| > \varepsilon$: nierówność ta będzie więc zachodziła, tembardziej, dla każdej, spełniającej nierówność (45) liczby z zbioru Z_1 (będącego częścią zbioru Z), wbrew własności punktu ζ.

Musi więc być $g(\zeta) = 0$, czyli, wobec (43): $f(\zeta) = u_0$, skąd $\zeta = F(u_0)$, co daje, wobec (41):

$$\zeta = z_0. \tag{47}$$

Lecz, skoro ζ należy do zbioru Z_1, więc mamy

$$|\zeta - z_0| \geq \alpha,$$

zatem $\zeta \neq z_0$, wbrew (47). Założenie, że funkcja $F(u)$ nie jest w zbiorze U ciągłą, doprowadza więc do sprzeczności. Udowodniliśmy więc twierdzenie 140.

ROZDZIAŁ XIII.

Ciągi i szeregi funkcyj.

§ 111. Jeżeli każdej liczbie naturalnej n odpowiada pewna funkcja $f_n(z)$ zmiennej zespolonej z, określona w danym zbiorze Z, to mamy do czynienia z ciągiem nieskończonym funkcyj

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z), \ldots, \tag{1}$$

określonym w zbiorze Z.

Obierzmy na z jakąkolwiek oznaczoną wartość ze zbioru Z: wyrazy ciągu (1) będą wówczas oznaczonemi w zupełności liczbami zespolonemi i przeto będziemy mieli do czynienia ze zwykłym ciągiem nieskończonym o wyrazach zespolonych.

Załóżmy, że ciąg (1) jest zbieżny dla każdej wartości z, należącej do zbioru Z Granica jego będzie wogóle zależała od obranej wartości z i będzie przez nią wyznaczoną w zupełności: będzie to więc funkcja zmiennej z, określona w zbiorze Z; oznaczmy ją przez $f(z)$: będzie więc

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z) \tag{2}$$

dla każdej liczby zespolonej z, należącej do zbioru Z.

Przykłady.

1) Przyjmijmy jako zbiór Z zbiór wszystkich liczb zespolonych z, spełniających nierówność $|z| < 1$ i połóżmy

$$f_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

— będziemy tu mieli w zbiorze Z:

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

2) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i połóżmy dla liczb x zbioru X:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n;$$

będziemy tu mieli w zbiorze X:

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = e^x.$$

3) Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb dodatnich i połóżmy

$$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1);$$

będziemy tu mieli w zbiorze X (§ 50):

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = \lg x.$$

W myśl definicji granicy ciągu o wyrazach zespolonych, na to żeby w zbiorze Z zachodził wzór (2), potrzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby zespolonej z, należącej do zbioru Z, oraz każdej liczby dodatniej ε istniała liczba rzeczywista $\mu = \mu(\varepsilon, z)$, taka iż

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{3}$$

Owa wartość na μ jest więc wogóle zależną nietylko od ε ale i od z. Może się jednak zdarzyć, że do każdego dodatniego ε można dobrać takie $\mu = \mu(\varepsilon)$, iż nierówność (3) będzie spełniona dla $n > \mu$ przez *każdą* liczbę z, należącą do zbioru Z. Mówimy wówczas, że uważany ciąg jest w zbiorze Z *zbieżnym jednostajnie*.

Różnica między zbieżnością zwykłą a zbieżnością jednostajną ciągu w zbiorze Z polega więc na tem, że dla zwykłej zbieżności wystarcza możność dobrania odpowiedniego μ do każdego dodatniego ε oraz każdego z osobna z, należącego do zbioru Z, dla zbieżności zaś jednostajnej potrzeba iżby do każdego dodatniego ε można było dobrać odpowiednie μ, któreby było zdatnem przy wszelkiem z, należącem do zbioru Z. Innemi słowy: w razie zwykłej zbieżności, przy danem ε, różnym z mogą odpowiadać różne μ, w razie zaś