i wyznaczając odpowiedni szereg podwójny $\sum\limits_{k,l} u_{k,l}$, gdzie $S_{m,n} = a_{m,n}$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$, otrzymamy przykład szeregu podwójnego zbieżnego, którego każdy wiersz oraz każda kolumna są rozbieżne.

2) Okazać, że jeżeli szereg nieskończony $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} u_n$ jest zbieżny warunkowo, to składniki jego można zawsze tak ustawić w ciąg podwójny, iżby każdy wiersz oraz każda kolumna dawały dowolne, dane naprzód sumy.

3) Udowodnić, że jeżeli ciąg podwójny $u_{k,l}$ jest ograniczony, to istnieją zawsze ciągi rosnące wskaźników k_m oraz l_n, takie iż istnieją granice

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} u_{k_m, l_n} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} u_{k_m, l_n}.$$

4) Udowodnić, że dla każdego ciągu podwójnego liczb dodatnich $u_{m,n}$ istnieje ciąg u_n, taki iż przy wszelkiem naturalnem m:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{m,n}} = \infty.$$

(Wystarczy np. położyć $u_n = n\,(u_{1,n} + u_{2,n} + \ldots + u_{n,n})$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$).

5) Udowodnić, że dla każdego ciągu podwójnego liczb dodatnich $u_{m,n}$, takiego iż $\lim\limits_{n=\infty} u_{m,n} = \infty$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, istnieje ciąg v_n, taki iż $\lim\limits_{n=\infty} v_n = \infty$, zaś $\lim\limits_{n=\infty} \frac{v_n}{u_{m,n}} = 0$, dla $m = 1, 2, 3, \ldots$

6) Udowodnić, że dla każdego ciągu nieskończonego szeregów zbieżnych o składnikach dodatnich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ istnieje szereg zbieżny o składnikach dodatnich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, taki iż przy wszelkiem naturalnem m: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{m,n}} = \infty$.

ROZDZIAŁ X.

Teorja iloczynów nieskończonych.

§ 91. Iloczynem nieskończonym nazywamy symbol

$$u_1 u_2 u_3 \ldots, \quad \text{lub} \quad \prod_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

gdzie u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest danym ciągiem nieskończonym (liczb rzeczywistych lub zespolonych).

Połóżmy

$$u_1 u_2 u_3 \ldots u_n = p_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{2}$$

liczbę p_n nazywamy n-tym iloczynem cząstkowym iloczynu nieskończonego (1).

Jeżeli ciąg nieskończony p_n zmierza do oznaczonej i przytem różnej od zera granicy, to iloczyn nieskończony (1) nazywamy *zbieżnym*, zaś liczbę $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$ — jego wartością. W przeciwnym razie, a więc jeżeli ciąg p_n nie zmierza do żadnej skończonej granicy, lub też zmierza do zera, iloczyn (1) nazywamy *rozbieżnym*. W przypadku $\lim\limits_{n=\infty} p_n = 0$ mówimy jeszcze, że wartością iloczynu nieskończonego (1) jest zero, albo że iloczyn ten jest rozbieżny do zera.

Przykłady.

1) Jeżeli szereg o składnikach rzeczywistych u_n jest zbieżny i położymy $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, to mamy $s = \lim\limits_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$, skąd, przy wszelkiem dodatniem a:

$$a^s = a^{\lim\limits_{n=\infty}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)} = \lim_{n=\infty} a^{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = \lim_{n=\infty} a^{u_1} . a^{u_2} \ldots a^{u_n},$$

czyli

$$a^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n} = \prod_{n=1}^{\infty} a^{u_n}. \tag{3}$$

Wzór ten uważać możemy jako uogólnienie prawidła, że przy mnożeniu potęg (o tej samej podstawie) wykładniki należy dodawać.

W szczególności np., dla $a = 2$, $u_n = \frac{1}{2^n}$, wobec $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, otrzymujemy:

$$2 = 2^{\frac{1}{2}} . 2^{\frac{1}{4}} . 2^{\frac{1}{8}} . 2^{\frac{1}{16}} \ldots\ldots,$$

co możemy też napisać w formie

$$2 = \sqrt{2} . \sqrt[4]{2} . \sqrt[8]{2} . \sqrt[16]{2} \ldots\ldots,$$

albo jeszcze (przez analogję ze wzorami $p_1 = \sqrt{2}$, $p_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $p_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ i t. d.) w formie pierwiastnika nieskończonego

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots\ldots}}}}$$

Wzór, analogiczny do wzoru (3) zachodzi też dla szeregów iterowanych, jakoteż dla szeregów podwójnych. Niech mianowicie $u_{k,l}$ oznacza dowolny dany ciąg podwójny o wyrazach rzeczywistych. Jeżeli szereg iterowany $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$ jest zbieżny, to, kładąc

$S_k = \sum\limits_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$ $(k=1,2,3,\ldots)$, mamy $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k$, skąd, w myśl (3) (dla $a>0$):

$$a^{S_k} = \prod_{l=1}^{\infty} a^{u_{k,l}} \quad \text{oraz} \quad a^S = \prod_{k=1}^{\infty} a^{S_k} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{\infty} a^{u_{k,l}}\right).$$

czyli

$$a^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} u_{k,l}} = \prod_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{\infty} a^{u_{k,l}} \tag{3a}$$

Podobnież jeżeli szereg podwójny $S = \sum\limits_{k,l} u_{k,l}$ jest zbieżny, to, kładąc $S_{m,n} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} u_{k,l}$, mamy $S = \lim\limits_{m,n=\infty} S_{m,n}$ skąd (dla $a>0$):

$$a^S = \lim_{m,n=\infty} a^{S_{m,n}}$$

(w myśl wzoru (113) z § 89), czyli, wobec

$$a^{S_{m,n}} = a^{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} u_{k,l}} = \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} a^{u_{k,l}}:$$

$$a^{\sum\limits_{k,l} u_{k,l}} = \lim_{m,n=\infty} \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} a^{u_{k,l}},$$

lub wreszcie

$$a^{\sum\limits_{k,l} u_{k,l}} = \prod_{k,l} a^{u_{k,l}},$$

jeżeli przez $\prod\limits_{k,l} v_{k,l}$ będziemy rozumieli granicę $\lim\limits_{m,n=\infty}\prod\limits_{k=1}^{m}\prod\limits_{l=1}^{n} v_{k,l}$.

2) Iloczyny nieskończone

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\ldots,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = 1.2.3.4\ldots\ldots,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(-1)^n = (-1)(+1)(-1)(+1)\ldots\ldots$$

są rozbieżne. (Dla pierwszego bowiem z wypisanych iloczynów mamy $p_n = \frac{1}{n!}$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} p_n = 0$, dla drugiego jest $p_n = n!$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} p_n = \infty$, dla trzeciego zaś $p_n = (-1)^n$ i ciąg p_n nie zmierza do żadnej oznaczonej granicy).

3) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\ldots$$

jest zbieżny, a wartością jego jest 1, gdyż, jak łatwo widzieć, iloczyn n pierwszych czynników wynosi $1+\frac{1-(-1)^n}{2n}$.

4) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\ldots$$

jest rozbieżny, gdyż, jak łatwo obliczyć, mamy tu $p_n = n+1$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} p_n = \infty$.

5) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\ldots$$

jest rozbieżny do zera, gdyż mamy tu $p_n = \frac{1}{n+1}$.

6) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\ldots$$

jest zbieżny, a wartością jego jest $\frac{1}{2}$, gdyż, jak łatwo obliczyć, mamy tu $p_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

7) Wartością iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) = \left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)\ldots\ldots$$

jest liczba 2, gdyż mamy tu $p_n = \frac{2(n+1)}{(n+2)}$.

8) Iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^{n-1}}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\ldots\ldots,$$

gdzie z jest daną liczbą zespoloną, jest zbieżny dla $|z|<1$, dając wartość $\frac{1}{1-z}$, gdyż, jak łatwo widzieć, mamy tu

$$(1-z)p_n = (1-z)(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2^{n-1}}) = 1-z^{2^n}, \tag{*}$$

skąd, dla $z \neq 1$:

$$p_n = \frac{1-z^{2^n}}{1-z} \quad (n=1,2,3,\ldots\ldots)$$

i przeto

$$\lim_{n=\infty} p_n = \frac{1}{1-z}, \quad \text{dla } |z|<1.$$

9) Niech x oznacza liczbę rzeczywistą >0. Kładąc w tożsamości (*) $z=x^{\frac{1}{2^n}}$, otrzymujemy z łatwością wzór

$$2^n\left(x^{\frac{1}{2^n}}-1\right)=(x-1)\cdot\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\frac{2}{x^{\frac{1}{4}}+1}\cdots\frac{2}{x^{\frac{1}{2^n}}+1} \qquad (**)$$

Lecz w § 50 wyprowadziliśmy dla $x>0$ wzór

$$\lg x=\lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right),\quad \text{skąd}\quad \lim_{n=\infty} 2^n\left(x^{\frac{1}{2^n}}-1\right)=\lg x;$$

wzór (**) daje więc dla $x>0$ rozwinięcie funkcji $\lg x$ na iloczyn nieskończony:

$$\lg x=(x-1)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}+1}\cdot\ldots\,.$$

10) Połóżmy $k_1=k>1$, zaś $k_{n+1}=k_n^2-1$ (dla $n=1,2,3,\ldots$). Wobec tożsamości

$$\sqrt{\frac{k+1}{k+1}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{(2k^2-1)+1}{(2k^2-1)-1}},$$

znajdujemy

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\sqrt{\frac{k_2+1}{k_2-1}},\qquad \sqrt{\frac{k_2+1}{k_2-1}}=\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\sqrt{\frac{k_3+1}{k_3-1}},$$

i t. d., skąd

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_n}\right)\sqrt{\frac{k_{n+1}+1}{k_{n+1}-1}}. \qquad (4)$$

Wobec $k>1$ wnosimy drogą łatwej indukcji, że $k_{n+1}=2k_n^2-1=$ $=k_n^2+(k_n^2-1)>k_n^2$, oraz $k_{n+1}>k^{2^n}$, skąd $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt{\frac{k_{n+1}+1}{k_{n+1}-1}}=1$, co dowodzi, wobec (4), że

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_n}\right)=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

i daje rozwinięcie na iloczyn nieskończony

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\cdots\,.$$

Np., dla $k=3$, otrzymujemy:

$$\sqrt{2}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\left(1+\frac{1}{577}\right)\left(1+\frac{1}{665857}\right)\cdots;$$

dla $k=2$, mamy:

$$\sqrt{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{97}\right)\left(1+\frac{1}{18817}\right)\cdots\,.$$

11) Niech x oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą >1. Wyznaczmy najmniejszą liczbę naturalną k_1, spełniającą nierówność

$$x>1+\frac{1}{k_1}$$

i połóżmy $x=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)x_1$.

Liczba x_1 będzie oczywiście też większa od jedności. Możemy więc z nią postąpić, jak z liczbą x i t. d.

Będzie więc przy wszelkiem naturalnem n:

$$x=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_n}\right)x_n, \qquad (5)$$

przyczem k_n oznacza najmniejszą liczbę naturalną, spełniającą nierówność

$$x_{n-1}>1+\frac{1}{k_n}.$$

Powiadam że $k_{n+1}\geq k_n^2$ ($n=1,2,3,\ldots$). W samej rzeczy, gdyby przy pewnem naturalnem n było $k_{n+1}<k_n^2$, t. j. $k_{n+1}\leq k_n^2-1$, to, wobec $x_{n-1}=\left(1+\frac{1}{k_n}\right)\left(1+\frac{1}{k_{n+1}}\right)x_{n+1}$, oraz $x_{n+1}>1$, mielibyśmy

$$x_{n-1}>\left(1+\frac{1}{k_n}\right)\left(1+\frac{1}{k_{n+1}}\right)\geq\left(1+\frac{1}{k_n}\right)\left(1+\frac{1}{k_n^2-1}\right)=\frac{k_n}{k_n-1},$$

czyli

$$x_{n-1}>1+\frac{1}{k_n-1},$$

wbrew definicji liczby k_n.

Gdyby było stale $k_n=1$ ($n=1,2,3,\ldots$), mielibyśmy stale $x=2^n x_n>2^n$, co niemożliwe. Jest więc przy pewnem p, $k_p>1$. Wobec: $k_{n+1}\geq k_n^2$ ($n=1,2,3,\ldots$) znajdujemy, dalej, drogą łatwej indukcji: $k_{p+n}\geq k_p^{2^n}$ ($n=1,2,3,\ldots$), skąd, (wobec $k_p>1$): $\lim\limits_{n=\infty}k_n=\infty$. Ponieważ zaś, w myśl definicji liczby k_n:

$$1+\frac{1}{k_{n+1}-1}\geq x_n>1+\frac{1}{k_{n+1}},$$

więc mamy $\lim\limits_{n=\infty}x_n=1$, skąd, wobec (5):

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_n}\right)=x,$$

i przeto

$$x=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\cdots\,. \qquad (6)$$

Możnaby z łatwością dowieść, że każda liczba rzeczywista $x>1$ daje jedno tylko rozwinięcie na iloczyn nieskończony (6), gdzie k_n są liczby naturalne, spełniające stale nierówność $k_{n+1}\geq k_n^2$. Rozwinięcie na iloczyn nieskończony wyrażenia $\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, podane w przykładzie 9), jest więc przypadkiem szczególnym rozważanego tutaj algorytmu. Możnaby też okazać, że na to iżby rozwinięcie (6) przedstawiało liczbę wymierną, potrzeba i wystarcza, iżby dla dostatecznie wielkich n zachodziła stale równość $k_{n+1} = k_n^2$.

12) Jako ostatni przykład iloczynu nieskończonego, pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że każda liczba rzeczywista $x > 0$ daje się przedstawić w postaci

$$x = 10^k \cdot c_0 \cdot \left(1 + \frac{c_1}{10}\right)\left(1 + \frac{c_2}{10^2}\right)\left(1 + \frac{c_3}{10^3}\right)\ldots\ldots,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, zaś c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ są cyfry układu dziesiętnego. (Ob. A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, Erste Teil, Lipsk, Veit 1915, p. 382).

§ 92. **Twierdzenie 117.** *Na to żeby iloczyn nieskończony*

$$u_1 u_2 u_3 \ldots \tag{7}$$

był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby było

$$u_n \neq 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

oraz żeby dla każdej liczby dodatniej ε *istniało takie* μ, *iż*

$$|u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+k} - 1| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Dowód. Załóżmy, że szereg nieskończony (7) jest zbieżny. Kładąc

$$p_n = u_1 u_2 \ldots u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{10}$$

mamy więc

$$\lim_{n=\infty} p_n = p \neq 0, \tag{11}$$

skąd wynika natychmiast, że przy pewnem naturalnem q:

$$|p_n| > \frac{|p|}{2}, \quad \text{dla} \quad n > q. \tag{12}$$

Gdyby było, przy pewnem k, $u_k = 0$, mielibyśmy, w myśl (10), $p_n = 0$, dla $n \geq k$, wbrew (11). Muszą więc zachodzić nierówności (8), a więc też, wobec (10), nierówności

$$p_n \neq 0, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wszystkie $q + 1$ liczby

$$|p_1|, |p_2|, \ldots |p_q|, \frac{|p|}{2} \tag{13}$$

są więc różne od zera: oznaczmy przez a liczbę dodatnią, mniejszą od każdej z liczb (13): będzie więc

$$a < |p_n|, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots q, \quad \text{oraz} \quad a < \frac{|p|}{2},$$

skąd, wobec (12):

$$|p_n| > a, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Wobec zbieżności ciągu p_n oraz w myśl tw. 39, dla liczby dodatniej ε istnieje takie μ, iż

$$|p_{n+k} - p_n| < a\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

skąd, wobec (14):

$$\left|\frac{p_{n+k}}{p_n} - 1\right| < \frac{a\varepsilon}{|p_n|} < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

co, wobec $p_{n+k} = p_n u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+k}$, przedstawia nierówność (9). Warunki nasze są więc konieczne.

Załóżmy teraz, że warunki (8) i (9) są spełnione.

Wobec (9) mamy więc, przy pewnem naturalnem m:

$$|u_{m+1} u_{m+2} \ldots u_{m+k} - 1| < 1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

co, z uwagi, że wobec (8), $|p_m| > 0$, daje, po pomnożeniu przez $|p_m|$ i wobec (10):

$$|p_{m+k} - p_m| < |p_m|, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd

$$|p_{m+k}| < 2|p_m|, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

co dowodzi, że ciąg nieskończony p_n jest ograniczony.

Istnieje więc takie A (skończone), iż

$$|p_n| < A, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Wobec (9) mamy (z uwagi, że, wobec (8), $p_n \neq 0$):

$$\left|\frac{p_{n+k}}{p_n} - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

skąd, wobec (15):

$$|p_{n+k} - p_n| < |p_n|\,\varepsilon < A\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

co, wobec tw. 39, dowodzi, że ciąg p_n jest zbieżny.

Połóżmy $\lim\limits_{n=\infty} p_k = p$. Powiadam, że $p \neq 0$. W samej rzeczy, gdyby było $p = 0$, to mielibyśmy $\lim\limits_{k=\infty} p_{n+k} = 0$, przy wszelkiem turalnem n, skąd, przechodząc w nierówności (16) do granicy dla $k = \infty$:

$$1 \leq \varepsilon,$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε, jest niemożliwe. Ciąg p_n

zmierza więc do granicy różnej od zera, co dowodzi zbieżności iloczynu (7).

Twierdzenie 117 udowodniliśmy zatem w zupełności.

W szczególności, dla $k=1$, nierówność (9) daje

$$|u_{n+1}-1|<\varepsilon, \text{ dla } n>\mu,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} u_n = 1.$$

Zatem:

Na to, żeby iloczyn nieskończony $u_1 u_2 u_3 \ldots$ był zbieżny, potrzeba iżby jego czynnik ogólny u_n zmierzał do jedności.

Jeżeli więc w iloczynie nieskończonym zbieżnym (7) położymy

$$u_n = 1 + v_n \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

to będziemy mieli

$$\lim_{n=\infty} v_n = 0. \tag{17}$$

Zauważymy jednak, że warunek (17) nie jest wystarczający dla zbieżności iloczynu nieskończonego

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots,$$

bo np. iloczyn nieskończony

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots,$$

dla którego $p_n = n+1$ $(n=1,2,3,\ldots)$, jest rozbieżny, pomimo że $\lim\limits_{n=\infty} v_n = \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Jeżeli iloczyn nieskończony (7) jest zbieżny i wartością jego jest liczba p, to kładąc

$$p = p_k q_k, \quad (k=1,2,3,\ldots), \tag{18}$$

i zważywszy, że, wobec (11), mamy też przy wszelkiem danem naturalnem k:

$$\lim_{n=\infty} p_{k+n} = p,$$

znajdujemy:

$$q_k = \frac{p}{p_k} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} p_{k+n}}{p_k} = \lim_{n=\infty} \frac{p_{k+n}}{p_k} \quad (\text{dla } k=1,2,3,\ldots)$$

co, z uwagi, że wobec (10)

$$\frac{p_{k+n}}{p_k} = u_{k+1} u_{k+2} \ldots u_{k+n}, \quad \begin{pmatrix} k=1,2,3,\ldots \\ n=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}$$

daje rozwinięcie na iloczyn nieskończony

$$q_k = u_{k+1} u_{k+2} u_{k+3} \ldots, \quad (\text{dla } k=1,2,3,\ldots), \tag{19}$$

który nazywamy niekiedy k-tym iloczynem dopełniającym dla iloczynu nieskończonego (7).

W razie zbieżności iloczynu nieskończonego (7) mamy, jak dowiedliśmy, $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 1$, zatem, w razie rzeczywistych czynników u_n, dla dostatecznie wielkich k, mamy $u_{k+n} > 0$ $(n=1,2,3,\ldots)$: wszystkie czynniki iloczynu nieskończonego (19) będą więc dodatnie. Badanie iloczynu nieskończonego zbieżnego o czynnikach rzeczywistych możemy więc zawsze (w myśl wzorów (18) oraz (19)) sprowadzić do badania iloczynu nieskończonego, którego wszystkie czynniki są dodatnie.

§ 93. Lemmat. *Jeżeli liczby*

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

są wszystkie jednego znaku (t. j. stale ≥ 0 lub stale ≤ 0) *oraz wszystkie* >-1, *to mamy nierówność*

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) \geq 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{20}$$

Dowód. Lemmat nasz jest prawdziwy oczywiście dla $n=1$. Załóżmy, że jest on prawdziwy przy pewnem naturalnem n i niech $u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}$ będą dane liczby, wszystkie jednego znaku oraz >-1. Z założenia że lemmat nasz jest prawdziwy dla n liczb wynika nierówność (20): mnożąc tę ostatnią przez liczbę $1+u_{n+1}$, która jest dodatnią (gdyż zakładamy, że $u_{n+1} > -1$), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1}) &\geq \\ \geq (1+u_1+u_2+\ldots u_n)(1+u_{n+1}) &= \\ = 1+u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+(u_1+u_2+\ldots+u_n)u_{n+1}; \end{aligned}$$

iloczyn $(u_1+u_2+\ldots+u_n)u_{n+1}$ jest nieujemny, gdyż, jak zakładamy, liczby u są wszystkie jednego znaku: mamy więc

$$\begin{aligned} (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1}) &\geq \\ \geq 1+u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}, \end{aligned}$$

co dowodzi prawdziwości naszego lemmatu dla $n+1$ liczb.

Stąd, przez indukcję, wnosimy o jego prawdziwości przy wszelkiem naturalnem n. (Zauważymy, że, w szczególności, dla $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = d$, otrzymujemy nierówność $(1+d)^n \geq 1 + nd$, dla $d > -1$, udowodnioną bezpośrednio w § 36).

Twierdzenie 118. *Iloczyn nieskończony*

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\ldots, \tag{21}$$

gdzie a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *są liczby nieujemne, mniejsze od jedności, jest zbieżny, jeżeli szereg nieskończony*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{22}$$

jest zbieżny; jeżeli zaś szereg ten jest rozbieżny, to wartością uważanego iloczynu nieskończonego jest zero.

Dowód. Z założenia, że a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby nieujemne, mniejsze od jedności, wynika, iż

$$p_n > 0 \quad \text{oraz} \quad 0 < 1 - a_{n+1} \leq 1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd

$$p_{n+1} = p_n(1 - a_{n+1}) \leq p_n:$$

ciąg p_n jest więc ciągiem nierosnącym liczb dodatnich, zatem posiada granicę (skończoną) $p \geq 0$. Powiadam, że jeżeli szereg (22) jest zbieżny, to nie może być $p = 0$.

W samej rzeczy, wobec zbieżności szeregu (22), istnieje liczba naturalna m taka, iż

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} < \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

Liczby $-a_{m+1}, -a_{m+2} \ldots -a_{m+k}$ są wszystkie ≤ 0, a więc jednego znaku, oraz wszystkie > -1 (gdyż, jak zakładamy liczby a są wszystkie nieujemne oraz < 1): w myśl naszego lemmatu mamy więc nierówność:

$$(1 - a_{m+1})(1 - a_{m+2}) \ldots (1 - a_{m+k}) \geq 1 - a_{m+1} - a_{m+2} - \ldots - a_{m+k},$$

skąd, wobec (23):

$$(1 - a_{m+1})(1 - a_{m+2}) \ldots (1 - a_{m+k}) > \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

skąd

$$p_{m+k} = p_m(1 - a_{m+1})(1 - a_{m+2}) \ldots (1 - a_{m+k}) > \frac{p_m}{2}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

i przeto, w granicy dla $k = \infty$:

$$p = \lim_{k=\infty} p_{m+k} \geq \frac{p_m}{2},$$

zatem, wobec $p_m > 0$:

$$p > 0, \quad c.\ b.\ d.\ o.$$

Udowodniliśmy więc pierwszą część naszego twierdzenia.

Dla dowodu drugiej, zauważymy, że wobec

$$0 \leq a_n < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

jest

$$1 + a_n > 0$$

oraz

$$0 < 1 - a_n = \frac{1 - a_n^2}{1 + a_n} \leq \frac{1}{1 + a_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

skąd

$$0 < p_n = (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) \leq$$
$$\leq \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)}. \tag{24}$$

Lecz, w myśl naszego lemmatu (z uwagi, że liczby $a_1, a_2, \ldots a_n$ są nieujemne):

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$

nierówność (24) daje więc

$$0 < p_n \leq \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

Załóżmy teraz, że szereg (22) (o składnikach nieujemnych < 1) jest rozbieżny: wynika stąd, iż dla każdej danej liczby dodatniej ε istnieje takie μ, iż

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{26}$$

Wobec (25) i (26), znajdujemy:

$$0 < p_n < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} p_n = 0.$$

Twierdzenie 118 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Twierdzenie 119. *Iloczyn nieskończony*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots, \tag{27}$$

gdzie a_n $(n=1,2,3,\ldots)$ są liczby nieujemne, jest zbieżny, jeżeli szereg nieskończony

$$a_1+a_2+a_3+\ldots \tag{28}$$

jest zbieżny; jeżeli zaś szereg ten jest rozbieżny, to iloczyny cząstkowe uważanego iloczynu nieskończonego wzrastają nieograniczenie.

Dowód. Połóżmy

$$b_n=\frac{a_n}{1+a_n}; \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{29}$$

wobec $a_n \geq 0$ $(n=1,2,3,\ldots)$, będzie

$$0 \leq b_n < 1; \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{30}$$

z drugiej strony, wobec (29):

$$1+a_n=\frac{1}{1-b_n} \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{31}$$

Wobec (29) mamy stale $b_n \leq a_n$: jeżeli więc szereg (28) jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg

$$b_1+b_2+b_3+\ldots,$$

co, w myśl tw. 118, pociąga za sobą zbieżność iloczynu nieskończonego

$$(1-b_1)(1-b_2)(1-b_3)\ldots;$$

połóżmy

$$q_k=(1-b_1)(1-b_2)\ldots(1-b_n); \quad (\text{dla } n=1,2,3,\ldots) \tag{32}$$

będzie więc

$$\lim_{n=\infty} q=q \neq 0. \tag{33}$$

Lecz, oznaczając przez p_n n-ty iloczyn cząstkowy iloczynu nieskończonego (27), mamy, wobec (31) oraz (32):

$$p_n=\frac{1}{q_n}, \quad (n=1,2,3,\ldots$$

skąd, wobec (33):

$$\lim_{n=\infty} p_n=\frac{1}{q},$$

co dowodzi zbieżności iloczynu nieskończonego (27).

Udowodniliśmy więc pierwszą część naszego twierdzenia.

Wobec $a_n \geq 0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ i w myśl naszego lemmatu, mamy:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq$$
$$\geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n, \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

skąd, w razie rozbieżności szeregu (o składnikach nieujemnych) (28), wynika że iloczyny cząstkowe iloczynu nieskończonego (27) wzrastają nieograniczenie, co dowodzi drugiej części naszego twierdzenia.

Twierdzenie 119 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Twierdzenia 118 i 119 dowodzą, że dla zbieżności iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{34}$$

o czynnikach (dodatnich) stale mniejszych od jedności, lub stale większych od jedności, potrzeba i wystarcza, iżby szereg nieskończony

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35}$$

był zbieżny.

Zauważymy jednak, że wogóle (jeżeli liczby u_n $(n=1,2,3,\ldots)$ nie są wszystkie jednego znaku), zbieżność szeregu (35) nie pociąga za sobą zbieżności iloczynu (34), ani też naodwrót.

Np. szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny, jako naprzemienny, natomiast iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

jest rozbieżny (do zera), gdyż, wobec

$$0<\left(1-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2k}}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}\,\sqrt{2k+1}}<$$
$$<1-\frac{1}{\sqrt{2k}\,\sqrt{2k+1}}<1-\frac{1}{2k+1}, \quad (\text{dla } k=1,2,3,\ldots),$$

mamy

$$0<p_{2k+1}<2\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2k+1}\right), \quad (k=1,2,3,\ldots), \tag{36}$$

a że wobec rozbieżności szeregu $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\left(\text{gdyż } \frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)$ i w myśl tw. 118, iloczyn nieskończony

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\ldots$$

jest rozbieżny do zera, więc, wobec (36), mamy

$$\lim_{k=\infty} p_{2k+1}=0,$$

skąd też

$$\lim_{k=\infty} p_{2k}=\lim_{k=\infty} p_{2k-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=0.$$

zatem

$$\lim_{n=\infty} p_n=0, \quad c.\ b.\ d.\ o.$$

Z drugiej strony szereg nieskończony $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, gdzie

$$u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k}+1} \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

jest rozbieżny, gdyż, jak łatwo widzieć

$$u_{2k-1}+u_{2k}=\frac{1}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}+1)}\geq\frac{1}{2k}, \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

natomiast iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1}+1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)\ldots$$

jest zbieżny, gdyż, wobec

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)=1, \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

mamy w nim stale $p_{2k}=1$ $(k=1,2,3,\ldots)$, zaś

$$p_{2k-1}=p_{2k-2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ co daje } \lim_{n=\infty} p_n=1.$$

Okazuje się atoli, że w razie zbieżności szeregu (35), zbieżność lub rozbieżność iloczynu (34) zależy od zbieżności lub rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$, jak to udowodnimy szczegółowo w następnym paragrafie.

§ 94. Twierdzenie 120. *Jeżeli szeregi nieskończone*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad oraz \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2, \tag{37}$$

gdzie

$$u_n>-1, \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots, \tag{38}$$

są oba zbieżne, to zbieżny jest też iloczyn nieskończony

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots \tag{39}$$

Dowód. Udowodnimy przedewszystkiem dwa lemmaty.

Lemmat I. *Jeżeli*

$$u_k>-1, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n \tag{40}$$

oraz

$$u_1+u_2+\ldots+u_n<1, \tag{41}$$

to mamy nierówność:

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\leq\frac{1}{1-u_1-u_2-\ldots-u_n}. \tag{42}$$

Połóżmy, dla dowodu

$$u_{n+1}=-(u_1+u_2+\ldots+u_n); \tag{43}$$

w myśl (41) będzie

$$u_{n+1}>-1 \tag{44}$$

i przeto, wobec (40) i (41):

$$u_k>-1, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n+1,$$

oraz

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}=0,$$

zatem, w myśl tw. 60 (§ 40):

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1})\leq 1,$$

skąd, z uwagi, że wobec (44), $1+u_{n+1}>0$:

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\leq\frac{1}{1+u_{n+1}},$$

co, wobec (43), daje nierówność (42), *c. b. d. o.*

Lemmat II. *Jeżeli*

$$u_k>-1, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n, \tag{45}$$

to

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\geq 1+\frac{u_1}{1+u_1}+\frac{u_2}{1+u_2}+\ldots+\frac{u_n}{1+u_n}. \tag{46}$$

Wobec (45), lewa strona wzoru (46) jest dodatnią; gdyby prawa strona tego wzoru była ≤ 0, to nierówność (46) zachodziłaby oczywiście, możemy więc dla dowodu jej zakładać, że prawa strona wzoru (46) jest dodatnią, czyli, że

$$\frac{u_1}{1+u_1}+\frac{u_2}{1+u_2}+\ldots+\frac{u_n}{1+u_n}>-1. \tag{47}$$

Połóżmy, dalej:

$$v_k=-\frac{u_k}{1+u_k}, \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,\ldots n; \tag{48}$$

będziemy mieli

$$1+v_k=\frac{1}{1+u_k},\quad (k=1,2,3,\ldots n),\tag{49}$$

zatem, wobec (45):

$$1+v_k>0,\quad \text{czyli}\quad v_k>-1,\quad \text{dla}\quad k=1,2,\ldots n,\tag{50}$$

zaś, wobec (47):

$$v_1+v_2+\ldots+v_n<1.\tag{51}$$

Liczby $v_1, v_2, \ldots v_n$ spełniają więc warunki lemmatu I, skąd

$$(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)\leq\frac{1}{1-v_1-v_2-\ldots-v_n},$$

co daje (wobec (50) i (51)):

$$\frac{1}{(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)}\geq 1-v_1-v_2-\ldots-v_n,$$

skąd, wobec (49) i (48) wynika natychmiast nierówność (46), *c. b. d. o.*

Przejdziemy obecnie do dowodu samego twierdzenia 120.

Załóżmy więc, że szeregi (37) są oba zbieżne (pierwszy choćby tylko warunkowo). Dla liczby dodatniej ε będzie więc istniało takie μ, iż

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},\quad \text{dla}\quad n>\mu,\quad k=1,2,\ldots\tag{52}$$

Nierówności (38) oraz (52) dowodzą, że dla $n>\mu$ (przy wszelkiem naturalnem k) liczby

$$u_{n+1},\ u_{n+2},\ \ldots\ u_{n+k}$$

spełniają warunki lemmatu I, skąd wynika, w myśl tego lemmatu oraz wobec (52), że

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})\leq\frac{1}{1-u_{n+1}-u_{n+2}\ldots-u_{n+k}}<\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

czyli, że

$$1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})<1+\varepsilon,\quad \text{dla}\quad n>\mu;\ k=1,2,3,\ldots\tag{53}$$

Z drugiej strony, wobec zbieżności szeregu Σu_n^2, zbieżnym będzie też szereg $\sum\frac{u_n^2}{1+u_n}$ $\left(\text{gdyż, dla dostatecznie wielkich } n, \text{ musi być } u_n>-\frac{1}{2}\right.$ skąd $\left.\frac{u_n^2}{1+u_n}<2u_n^2\right)$, a więc, wobec zbieżności szeregu Σu_n, zbieżnym będzie i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-\frac{u_n^2}{1+u_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1+u_n};$$

będzie więc, dla $n>\nu$:

$$\frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{1+u_{n+2}}+\ldots+\frac{u_{n+k}}{1+u_{n+k}}>-\varepsilon\quad (k=1,2,3,\ldots).\tag{54}$$

Wobec (38), liczby

$$u_{n+1},\ u_{n+2},\ \ldots,\ u_{n+k}$$

spełniają warunek lemmatu II: w myśl tego lemmatu, oraz wobec (54), znajdujemy:

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})>1-\varepsilon,\quad \text{dla}\quad n>\nu,\quad k=1,2,3,\ldots\tag{55}$$

Nierówności (53) i (55) dowodzą, że dla dostatecznie wielkich n:

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})-1|<\varepsilon\quad (k=1,2,3,\ldots),$$

co, w myśl tw. 117, dowodzi zbieżności iloczynu (39).

Udowodniliśmy więc twierdzenie 120.

Zauważymy, iż możnaby dowieść, że *jeżeli szereg o składnikach rzeczywistych $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ jest zbieżny, zaś szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ rozbieżny, to wartością iloczynu nieskończonego $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ jest zero.*

Twierdzenie to możnaby udowodnić elementarnie, opierając się na następującym lemmacie:

Jeżeli

$$c_k>-1,\quad \text{dla}\quad k=1,2,\ldots n,$$

oraz

$$c_1+c_2+\ldots+c_n\leq 0,$$

to

$$(1+c_1)(1+c_2)\ldots(1+c_n)<\frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2\right)}.$$

Ponieważ jednak dowód tego lemmatu jest dosyć długi (Zob. np. A. Pringsheim: Mathematische Annalen, Bd. 33 p. 146 i nast., oraz Bd. 44, p. 413, jakoteż tegoż autora *Vorlesungen über Zahlenlehre,* Część III, Teubner 1921, p. 654), więc omawiane twierdzenie udowodnimy na innej drodze (mniej elementarnej, ale znacznie krótszej) w jednym z późniejszych rozdziałów.

§ 95. Badanie iloczynów nieskończonych o czynnikach dodatnich sprowadzić można do badania szeregów nieskończonych jeszcze inną drogą.

Niech

$$u_1\,u_2\,u_3\ldots\tag{56}$$

oznacza dany iloczyn nieskończony, którego wszystkie czynniki są dodatnie. Kładąc

$$p_n=u_1\,u_2\ldots u_n\quad (n=1,2,3,\ldots),\tag{57}$$

będziemy mieli

$$p_n>0\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Każda liczba dodatnia posiada, jak wiemy (§ 48), oznaczony logarytm naturalny, przyczem logarytm iloczynu jest sumą logarytmów czynników (§ 49). Będziemy więc mogli napisać, wobec (57):

$$\lg p_n = \lg u_1 + \lg u_2 + \ldots + \lg u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{58}$$

Jeżeli

$$\lim_{n=\infty} p_n = p > 0,$$

to, w myśl tw. 65, mamy:

$$\lim_{n=\infty} \lg p_n = \lg p, \tag{59}$$

zatem, jeżeli iloczyn (56) jest zbieżny (a wtedy wartość jego p musi być dodatnią, gdyż stale $u_n > 0$), to zbieżnym jest też szereg nieskończony

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \lg u_3 + \ldots, \tag{60}$$

przyczem sumą jego, wobec (58) i (59), jest wówczas $\lg p$, czyli logarytm wartości iloczynu (56).

Naodwrót, zbieżność szeregu (60) pociąga za sobą zbieżność iloczynu (56). W samej rzeczy, kładąc

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \ldots + \lg u_n = s_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

będziemy mieli

$$p_n = u_1 u_2 \ldots u_n = e^{s_n}; \tag{61}$$

jeżeli szereg (60) jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$, to będzie

$$\lim_{n=\infty} e^{s_n} = e^s,$$

skąd, wobec (61):

$$\lim_{n=\infty} p_n = e^s,$$

co dowodzi, że iloczyn nieskończony (56) jest zbieżny (gdyż przy wszelkiem (skończonem) rzeczywistem s mamy $e > 0$).

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 121. *Jeżeli u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby dodatnie, to zbieżność iloczynu nieskończonego*

$$u_1 u_2 u_3 \ldots \tag{62}$$

pociąga za sobą zbieżność szeregu nieskończonego

$$\lg u_1 + \lg u_2 + \lg u_3 + \ldots \tag{63}$$

i naodwrót, przyczem między wartością p iloczynu oraz sumą s szeregu zachodzi prosta zależność:

$$s = \lg p \quad (\text{lub } p = e^s).$$

Z dowiedzionego twierdzenia wynika, że iloczyny nieskończone posiadają własności analogiczne do własności szeregów nieskończonych, więc np. posiadają prawo łączności, lecz nie posiadają prawa przemienności.

Jeżeli iloczyn nieskończony (62) jest zbieżny bezwarunkowo, t. j. przy wszelkiem uporządkowaniu czynników, to w myśl dowiedzionego twierdzenia, szereg (63) też jest zbieżny bezwarunkowo i naodwrót.

Załóżmy teraz, że iloczyn nieskończony (62) jest zbieżny warunkowo: szereg (63) jest więc wówczas również zbieżny warunkowo. Niech p oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl tw. Riemann'a o szeregach warunkowo zbieżnych (tw. 85), będziemy mogli tak zmienić porządek składników szeregu (63), iżby sumą powstałego przez to szeregu nieskończonego

$$\lg v_1 + \lg v_2 + \lg v_3 + \ldots$$

była liczba $\lg p$. Wartością iloczynu nieskończonego

$$v_1 v_2 v_3 \ldots$$

będzie więc (w myśl tw. 121) liczba $e^{\lg p} = p$, przyczem iloczyn ten różnić się będzie conajwyżej porządkiem czynników od iloczynu (62) (gdyż ciągi nieskończone u_n i v_n różnią się oczywiście conajwyżej porządkiem wyrazów). Stąd twierdzenie:

Możemy zawsze tak zmienić porządek czynników iloczynu nieskończonego zbieżnego warunkowo (o czynnikach dodatnich), iżby wartością jego była dowolna dana liczba dodatnia.

Łatwo też widzieć, że przez zmianę porządku czynników iloczynu warunkowo zbieżnego, można z niego otrzymać iloczyn rozbieżny do zera lub do nieskończoności: wystarczy w tym celu zauważyć, że przez zmianę porządku składników szeregu warunkowo zbieżnego (63) można z niego otrzymać szereg, którego sumą jest $-\infty$, jakoteż szereg, którego sumą jest $+\infty$ (oraz że w razie $\lim\limits_{n=\infty} s_n = -\infty$ mamy $\lim\limits_{n=\infty} p_n = \lim\limits_{n=\infty} e^{s_n} = 0$, zaś w razie $\lim\limits_{n=\infty} s_n = +\infty$ mamy $\lim\limits_{n=\infty} p_n = +\infty$).

§ 96. **Twierdzenie 122.** *Na to żeby iloczyn nieskończony*

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots, \tag{64}$$

gdzie stale $u_n > -1$ $(n=1,2,3,\ldots)$, *był zbieżny bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza, iżby szereg nieskończony*

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots \tag{65}$$

był zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że iloczyn (64) jest zbieżny bezwarunkowo: jak wiemy (§ 95), szereg logarytmów kolejnych czynników, czyli szereg

$$\lg(1+u_1)+\lg(1+u_2)+\lg(1+u_3)+\ldots \tag{66}$$

jest wówczas zbieżny bezwzględnie. Oznaczmy przez

$$1+a_1,\ 1+a_2,\ 1+a_3,\ldots$$

kolejne czynniki iloczynu (64), które są ≥ 1, zaś przez

$$1-b_1,\ 1-b_2,\ 1-b_3,$$

kolejne czynniki iloczynu (64), będące <1. Ciąg

$$\lg(1+a_1),\ \lg(1+a_2),\ldots$$

będzie więc przedstawiał kolejne składniki nieujemne szeregu (66) zaś ciąg

$$\lg(1-b_1),\ \lg(1-b_2),\ldots$$

— kolejne składniki ujemne tegoż szeregu.

Wobec bezwzględnej zbieżności szeregu (66), szeregi

$$\lg(1+a_1)+\lg(1+a_2)+\lg(1+a_3)\ldots \tag{67}$$

oraz

$$\lg(1-b_1)+\lg(1-b_2)+\lg(1-b_3)+\ldots \tag{68}$$

będą oba zbieżne[1]), co, w myśl tw. 121, pociąga za sobą zbieżność iloczynów nieskończonych

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots \tag{69}$$

oraz

$$(1-b_1)(1-b_2)(1-b_3)\ldots \tag{70}$$

Wobec $a_n \geq 0$ oraz $b_n > 0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ oraz w myśl twierdzeń 119 i 118, zbieżność iloczynów (69) i (70) pociąga za sobą zbieżność szeregów nieskończonych

$$a_1+a_2+a_3+\ldots, \tag{71}$$

[1]) Przypadek, kiedy jeden z tych szeregów jest skończony (lub nie istnieje), nie nastręczający żadnych trudności, pozostawiamy do bliższego zbadania czytelnikowi.

oraz

$$b_1+b_2+b_3+\ldots \tag{72}$$

co znowu dowodzi zbieżności bezwzględnej szeregu

$$u_1+u_2+u_3+\ldots, \tag{73}$$

którego kolejnymi składnikami nieujemnymi są wyrazy ciągu a_n, zaś, ujemnymi — wyrazy ciągu $-b_n$).

Dowiedliśmy więc, że, w razie zbieżności bezwarunkowej iloczynu (64), szereg (65) jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że szereg (65) jest zbieżny. Oznaczając przez a_n $(n=1,2,3,\ldots)$ kolejne składniki nieujemne szeregu (73) zaś przez $-b_n$ kolejne składniki ujemne tego szeregu, wnosimy stąd, że szeregi (71) i (72) są oba zbieżne, co (wobec $a_n \geq 0$ oraz $b_n > 0$ i w myśl tw. 119 i 118) pociąga za sobą zbieżność iloczynów (69) i (70), co znowu (w myśl tw. 121) dowodzi zbieżności szeregów (67) i (68), i przeto bezwzględnej zbieżności szeregu (66), skąd (§ 95) wynika bezwarunkowa zbieżność iloczynu (64). Twierdzenie 122 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Jeżeli szereg (65) jest zbieżny, to w myśl tw. 119 (z uwagi że składniki szeregu (65) są nieujemne), zbieżny jest i iloczyn nieskończony

$$(1+|u_1|)(1+|u_2|)(1+|u_3|)\ldots, \tag{74}$$

jakoteż naodwrót. W razie zbieżności iloczynu (74), będziemy iloczyn (64) nazywali *zbieżnym bezwzględnie.*

W myśl tw. 122 możemy więc też powiedzieć:

Na to żeby iloczyn nieskończony (64) *był zbieżny bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza, iżby był zbieżny bezwzględnie.*

Dowodząc twierdzenia 122, udowodniliśmy zarazem, że zbieżność szeregu (65) pociąga za sobą zbieżność bezwzględną szeregu (66), jakoteż naodwrót. Lecz z tw. 121 wynika natychmiast, że, w razie zbieżności bezwzględnej szeregu (66), wartość iloczynu (64) nie zależy od porządku czynników, i naodwrót: jeżeli wartość iloczynu (64) nie zależy od porządku czynników, to szereg (66) jest zbieżny bezwzględnie. Zatem:

Na to żeby iloczyn nieskończony (64) *był zbieżny i żeby wartość jego była niezależną od porządku czynników, potrzeba i wystarcza iżby szereg* (65) *był zbieżny.*

Jak łatwo widzieć, moglibyśmy jeszcze powiedzieć:

Na to żeby iloczyn nieskończony (64) *był zbieżny, dając wartość niezależną od porządku czynników, potrzeba i wystarcza, iżby iloczyn ten był zbieżny bezwzględnie.*

Niech teraz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}, \tag{75}$$

gdzie stale $u_{k,l} > -1$, oznacza dowolny dany szereg iterowany, zbieżny bezwzględnie. Sumę tego szeregu będziemy mogli, jak dowiedliśmy w § 88, przedstawić w postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} = u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,3} + u_{2,2} + u_{3,1} + \ldots,$$

gdzie szereg po prawej stronie jest zbieżny bezwzględnie. Wynika stąd, jak dowiedliśmy, zbieżność bezwzględna szeregu

$$\lg(1 + u_{1,1}) + \lg(1 + u_{1,2}) + \lg(1 + u_{2,1}) + \lg(1 + u_{1,3}) + \ldots,$$

a więc też (§ 88) zbieżność bezwzględna szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \lg(1 + u_{k,l})$$

tudzież wzór:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \lg(1 + u_{k,l}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lg(1 + u_{k,l}) = \sum_{n=l}^{\infty} \lg(1 + u_{k_n, l_n}), \tag{76}$$

gdzie (k_n, l_n) oznacza ciąg nieskończony wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych k, l.

Wobec (76), mamy:

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\lg(1+u_{k,l})} = e^{\sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lg(1+u_{k,l})} = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lg(1+u_{k_n,\, l_n})}$$

skąd, w myśl wzorów (3^a) oraz (3) z § 91 (z uwagi, że $e^{\lg(1+u)} = 1 + u$):

$$\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{\infty}(1 + u_{k,l}) = \prod_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_{k,l}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_{k_n, l_n}). \tag{77}$$

Dowiedliśmy więc, *że jeżeli szereg* (75) *jest zbieżny bezwzględnie, to zachodzi wzór* (77).

Zastosowanie. Każda liczba naturalna daje się, jak wiadomo, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci $n = 2^{k-1}(2l - 1)$, gdzie k i l są liczby

naturalne. Wynika stąd, że ciąg nieskończony kolejnych liczb naturalnych $1, 2, 3, \ldots$ daje się ustawić w ciąg podwójny $2^{k-1}(2l-1)\begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ l = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$.

Jeżeli więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} u_{2^{k-1}(2l-1)}$ też będzie zbieżny bezwzględnie i przeto, jak dowiedliśmy, będziemy mieli:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1 + u_{2^{k-1}(2l-1)}\right) = \prod_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + u_{2^{k-1}(2l-1)}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + u_n\right).$$

Połóżmy, w szczególności $u_n = q^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, gdzie q oznacza liczbę rzeczywistą, bezwzględnie mniejszą od jedności.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ będzie zbieżny bezwzględnie, i przeto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + q^n\right) = \prod_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + q^{2^{k-1}(2l-1)}\right).$$

Lecz (przykład 8 z § 91):

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1 + (q^{2l-1})^{2^{k-1}}\right] = \frac{1}{1 - q^{2l-1}} \quad (l = 1, 2, 3, \ldots)$$

(gdyż $|q^{2l-1}| < 1$, dla $l = 1, 2, 3, \ldots$). Stąd, w jednej chwili:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^n) = \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{\infty}(1 - q^{2l-1})} \quad \text{dla } |q| < 1.$$

Jest to wzór Euler'a.

Co się tyczy związku między zbieżnością iloczynu (74), a zbieżnością iloczynu (64), to udowodnimy obecnie bez pomocy logarytmów, że *zbieżność iloczynu* (74) *pociąga za sobą zbieżność iloczynu* (64), i to przy wszelkich (rzeczywistych lub zespolonych) u_n, byleby różnych od -1.

W samej rzeczy, załóżmy, że iloczyn (74) jest zbieżny. W myśl tw. 117, mamy więc

$$(1 + |u_{n+1}|)(1 + |u_{n+2}|)\ldots(1 + |u_{n+k}|) - 1 < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu,\ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{78}$$

Rozwijając wyrażenie

$$\begin{aligned}&(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2})\ldots(1 + u_{n+k}) - 1 = \\ &= u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + u_{n+1}u_{n+2} + \ldots + u_{n+1}u_{n+2}\ldots u_{n+k},\end{aligned}$$

spostrzegamy z łatwością, że moduł prawej strony nie przenosi sumy jej modułów, będącej rozwinięciem lewej strony nierówności (78), skąd nierówność

$$\begin{aligned}&|(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2})\ldots(1 + u_{n+k}) - 1| \le \\ &\le (1 + |u_{n+1}|)(1 + |u_{n+2}|)\ldots(1 + |u_{n+k}|) - 1,\end{aligned}$$

zatem, wobec (78):

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\dots(1+u_{n+k})-1|<\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n>\mu, \quad k=1,2,\dots,$$

co, w myśl tw. 117, dowodzi zbieżności iloczynu (64), *c. b. d. o.* Wynika stąd też natychmiast, że, w razie zbieżności iloczynu (74) (gdzie u_n są dowolne dane liczby rzeczywiste lub zespolone) wartością iloczynu (64) jest wtedy i tylko wtedy liczba zero, jeżeli jeden conajmniej z jego czynników jest zerem.

§ 97. Niech

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots \tag{79}$$

oznacza dowolny dany iloczyn nieskończony (o czynnikach rzeczywistych lub zespolonych).

Kładąc

$$p_n=(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n), \quad (n=1,2,3,\dots) \tag{80}$$

będziemy mieli:

$$p_n-p_{n-1}=p_{n-1}u_n, \quad (n=2,3,\dots),$$

skąd (dla $n>1$):

$$\left.\begin{aligned} p_n&=p_1+(p_2-p_1)+(p_2-p_2)+\dots+(p_n-p_{n-1})= \\ &=p_1+p_1u_2+p_2u_3+\dots+p_{n-1}u_n \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Iloczyny cząstkowe iloczynu nieskończonego (79) są więc odpowiedniemi sumami cząstkowemi szeregu nieskończonego.

$$p_1+p_1u_2+p_2u_3+p_3u_4+\dots$$

Szereg ten możemy, wobec (80), napisać w postaci

$$(1+u_1)+(1+u_1)u_2+(1+u_1)(1+u_2)u_3+\dots$$

lub jeszcze, w postaci:

$$(1+u_1)+(u_2+u_1u_2)+(u_3+u_1u_3+u_2u_3+u_1u_2u_3)+\dots \tag{82}$$

Jeżeli opuszczając nawiasy w szeregu (82), otrzymamy szereg zbieżny

$$1+u_1+u_2+u_1u_2+u_3+u_1u_3+u_2u_3+u_1u_2u_3+\dots, \tag{83}$$

to, jak wiemy (§ 72), zbieżnym będzie tembardziej szereg (82), dając tę samą co i szereg (83) sumę. Zatem, w razie zbieżności szeregu (83), suma jego będzie wartością iloczynu (79).

Załóżmy teraz, że zbieżnym jest iloczyn

$$(1+|u_1|)(1+|u_2|)(1+|u_3|)\dots, \tag{84}$$

zbieżnym więc będzie szereg

$$\begin{gathered}(1+|u_1|)+(|u_2|+|u_1u_2|)+\\+(|u_3|+|u_1u_3|+|u_2u_3|+|u_1u_2u_3|)+\dots,\end{gathered} \tag{85}$$

którego sumy cząstkowe są odpowiednimi iloczynami cząstkowemi iloczymu (84); ze zbieżności zaś szeregu (85) wnosimy natychmiast (§ 72) o zbieżności szeregu

$$1+|u_1|+|u_2|+|u_1u_2|+|u_3|+|u_1u_3|+|u_2u_3|+|u_1u_2u_3|+\dots,$$

co dowodzi, że szereg (83) jest zbieżny bezwzględnie.

Dowiedliśmy zatem, że w razie zbieżności bezwzględnej iloczynu (79), szereg (83) jest zbieżny bezwzględnie i że mamy wówczas wzór

$$\begin{gathered}(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots=\\=1+u_1+u_2+u_1u_2+u_3+u_1u_3+u_2u_3+u_1u_2u_3\dots\end{gathered} \tag{86}$$

Zmieniając porządek wyrazów ciągu u_n zmienimy, jak łatwo widzieć, tylko porządek składników szezegu (83), przez co jednak, wobec jego bezwzględnej zbieżności, nie zmienimy jego sumy, a więc wartości iloczynu (79). Zatem: *w razie zbieżności iloczynu* (84), *wartość iloczynu* (79) *nie zależy od porządku czynników.*

Połóżmy przy wszelkich naturalnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$:

$$v_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}=u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}\dots u_{\alpha_n};$$

szereg (83), po odrzuceniu pierwszego składnika, będziemy mogli przepisać w postaci:

$$v_1+v_2+v_{1,2}+v_3+v_{1,3}+v_{2,3}+v_{1,2,3}+\dots \tag{87}$$

Weźmy pod rozwagę kolejne układy wskaźników:

$$(1),\ (2),\ (1,2),\ (3),\ (1,3),\ (2,3),\ (1,2,3),\dots; \tag{88}$$

zbiór (88) jest, jak łatwo widzieć, zbiorem wszystkich ciągów skończonych liczb naturalnych rosnących (jeżeli w ciągu jest więcej niż jedna liczba).

Wzór (86) możemy więc przepisać w postaci:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=1+\sum_{(\alpha)}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}\dots u_{\alpha_n}, \tag{89}$$

gdzie sumowanie $\sum\limits_{(\alpha)}$ rozciąga się na wszystkie układy skończone wskaźników rosnących $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$.

Elementy zbioru (88) możemy rozbić na klasy, zaliczając do n-tej klasy wszystkie układy $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, utworzone z n wskaźników rosnących.

W ten sposób ciąg (88) będziemy mogli ustawić w ciąg podwójny:

$$\begin{array}{llll} (1), & (2), & (3), & (4), \ldots . \\ (1,2), & (1,3), & (2,3), & (1,4), \ldots . \\ (1,2,3), & (1,2,4), & (1,3,4), & (2,3,4), \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

którego n-ty wiersz jest utworzony ze wszystkich elementów n-tej klasy $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

Wypisanemu ciągowi podwójnemu układów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ odpowiada szereg podwójny składników $v_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}$, czyli szereg podwójny

$$\left.\begin{array}{lllll} v_1 & + v_2 & + v_3 & + v_4 & + \ldots \\ + v_{1,2} & + v_{1,3} & + v_{2,3} & + v_{1,4} & + \ldots \\ + v_{1,2,3} & + v_{1,2,4} & + v_{1,3,4} & + v_{2,3,4} & + \ldots \\ + \ldots & & & & \\ \ldots & & & & , \end{array}\right\} \tag{90}$$

który jest zbieżny bezwzględnie, gdyż, ustawiając jego składniki w jakibądź sposób w szereg zwykły, otrzymamy zawsze szereg, różniący się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (87), który jest zbieżny bezwzględnie.

Oznaczając przez S_n sumę składników n-tego wiersza szeregu podwójnego (90), zaś przez S — sumę szeregu (87), będziemy więc (w myśl tw. 116) mieli wzór:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots \tag{91}$$

Z definicji sum S_n wynika, że

$$S_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)} u_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

gdzie sumowanie $\sum\limits_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}$ rozciąga się na wszystkie układy n wskaźników rosnących: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

W ten sposób, wobec (91), wzór (89) możemy przepisać w postaci:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n) = 1 + \sum_{(\alpha_1)} u_{\alpha_1} + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2)} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} u_{\alpha_3} + \ldots; \tag{92}$$

wzór ten można uważać jako uogólnienie rozwinięcia skończonego:

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_m) = 1 + (u_1 + u_2 + \ldots + u_m) + $$
$$+ (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 + \ldots + u_{m-1} u_m) + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_m.$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli iloczyn (84) jest zbieżny, to zachodzi wzór (92).

Stąd, w szczególności, kładąc $u_n = a_n z$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, wnosimy, że jeżeli szereg nieskończony

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

jest zbieżny bezwzględnie [co pociąga za sobą przy wszelkiem zespolonem z zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n z|$, a więc, w myśl tw. 119, i zbieżność iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n z|)$], to mamy przy wszelkiem zespolonem z rozwinięcie na szereg potęgowy:

$$(1 + a_1 z)(1 + a_2 z)(1 + a_3 z) \ldots = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots, \tag{93}$$

gdzie

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad A_2 = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2)} a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}, \ldots \quad A_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n}.$$

(Możnaby z łatwością dowieść, że mamy tu:

$$2 A_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

$$6 A_3 = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^3 + 3\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$$

i t. p.

Niech

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{94}$$

oznacza dany szereg nieskończony zbieżny, którego żadna z sum cząstkowych s_n nie jest zerem. Mamy oczywiście:

$$s_n = s_1 \cdot \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{s_3}{s_2} \cdot \ldots \cdot \frac{s_n}{s_{n-1}}, \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \tag{95}$$

a ponieważ
$$\frac{s_k}{s_{k-1}}=\frac{s_{k-1}+u_k}{s_{k-1}}=1+\frac{u_k}{s_{k-1}},\quad (k=2,3,\ldots)$$
więc możemy, wobec (95), napisać:
$$s_n=s_1\left(1+\frac{u_2}{s_1}\right)\left(1+\frac{u_3}{s_2}\right)\ldots\left(1+\frac{u_n}{s_{n-1}}\right),\quad (n=2,3,\ldots)$$
skąd, w granicy dla $n=\infty$:
$$s=s_1\left(1+\frac{u_2}{s_1}\right)\left(1+\frac{u_3}{s_2}\right)\left(1+\frac{u_4}{s_3}\right)\ldots,\tag{96}$$
co daje przekształcenie szeregu nieskończonego (94) na iloczyn nieskończony.

Odwrotnie, każdy iloczyn nieskończony możemy przekształcić na szereg, w myśl wzoru (81).

Wyprowadzimy obecnie pewien ciekawy wniosek ze wzoru (81). Niech $v_1, v_2, \ldots v_n$ będą liczby rzeczywiste lub zespolone, różne od -1: połóżmy:
$$u_k=-\frac{v_k}{1+v_k},\quad (k=1,2,\ldots u):$$
będziemy mieli
$$1+u_k=\frac{1}{1+v_k},\quad (k=1,2,\ldots n)$$
zatem:
$$p_k=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)=\frac{1}{(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_k)}$$
i wzór (81), przepisany w postaci
$$-u_1-p_1u_2-p_2u_3-\ldots-p_{n-1}u_n=1-p_n,$$
daje:
$$\frac{v_1}{1+v_1}+\frac{v_2}{(1+v_1)(1+v_2)}+\ldots+\frac{v_n}{(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)}=$$
$$=1-\frac{1}{(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)}.\tag{97}$$
Stąd stwierdzenie:

Szereg nieskończony
$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)}$$
jest zbieżny, jeżeli zbieżny jest iloczyn
$$p=\prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n),$$
przyczem mamy wówczas $s=1-\dfrac{1}{p}$.

W szczególności, jeżeli wszystkie v_n są dodatnie, szereg s jest zawsze zbieżny, przyczem, jeżeli iloczyn p jest rozbieżny, to, z uwagi, że wobec $v_n>0$ mamy $p_{n+1}>p_n$, a więc $\lim\limits_{n=\infty}p_n=\infty$, wnosimy, wobec $s_n=1-\dfrac{1}{p_n}$, że wówczas $\lim\limits_{n=\infty}s_n=1$, czyli że $s=1$.

Wobec tw. 119 możemy więc powiedzieć:

Jeżeli szereg o składnikach dodatnich $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ *jest rozbieżny, to*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)}=1.$$
Np. dla $v_n=1$, znajdujemy: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=1$,

„ dla $v_n=n$ „ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=1$,

„ dla $v_n=\dfrac{1}{n}$ „ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$,

dla $x_n=x^n$, w razie $x>1$:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}=1$$
i t. p.

ROZDZIAŁ XI.

Ułamki łańcuchowe.

§ 98. Ułamkiem łańcuchowym, albo **ciągłym** (skończonym) nazywamy wyrażenie
$$\left.\begin{array}{l} b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+}}} \\ \qquad\qquad\ddots \\ \qquad\qquad\qquad +\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\cfrac{a_n}{b_n}}, \end{array}\right\}\tag{1}$$
gdzie $a_1, a_2, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_n$ są dowolne dane liczby rzeczywiste lub zespolone.