

Z drugiej strony, wobec $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$, mamy

$$0 < u_n \varepsilon_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_{n-1}} - \sqrt{\varepsilon_n}}{\sqrt{\varepsilon_n} \sqrt{\varepsilon_{n-1}}} \varepsilon_n < \sqrt{\varepsilon_{n-1}} - \sqrt{\varepsilon_n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

skąd, dla $n > 1$:

$$0 < u_1 \varepsilon_1 + u_2 \varepsilon_2 + \dots + u_n \varepsilon_n < u_1 \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_n} < u_1 \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1},$$

co dowodzi ograniczonosci, a więc i zbieżności szeregu $\sum u_n \varepsilon_n$.

Szereg $\sum u_n$ spełnia więc żądane warunki.

Pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że jeżeli ε_n jest jakimkolwiek ciągiem liczb zespolonych, zmierzającym do zera, to istnieje szereg rozbieżny o składnikach dodatnich $\sum u_n$, taki iż szereg $\sum u_n \varepsilon_n$ jest zbieżny.

8) Obliczyć zapomocą wzoru Eulera (151) sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n, \quad (174)$$

gdzie k oznacza liczbę naturalną, zaś $|x| < 1$.

Szereg (174) jest zbieżny dla $|x| < 1$, co wnosimy np. na podstawie tw. 91: wzór (151) jest więc dla szeregu (174) stosowalny. Dla $a_n = n^k$ mamy, jak łatwo widzieć $\Delta^{k+1} a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), zatem, wobec (148): $S_{k+1}(x) = 0$ i przeto, w myśl (149) (dla $n = k+1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n = \frac{x \Delta^0 0^k}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^1 0^k}{(1-x)^3} + \dots + \frac{x^k \Delta^k 0^k}{(1-x)^{k+1}} \quad (dla |x| < 1)$$

(gdzie $\Delta^k 0^k$ oznacza $\Delta^k a_0$, dla $a_n = n^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Wobec np., dla $k = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad (175)$$

zaś dla $k = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

9) Niech x oznacza daną liczbę dodatnią. Oznaczmy przez k_1 najnniejszą liczbę naturalną, spełniającą nierówność $k_1 x > 1$, i połóżmy $k_1 x = 1 + x_1$; będzie znowu $x_1 > 0$. Z liczbą x_1 postąpmy jak z liczbą x , wyznaczając najnniejszą liczbę naturalną k_2 , taką iż $k_2 x_1 > 1$, i kładąc $k_2 x_1 = 1 + x_2$ i t. d. Udowodnić że w ten sposób dochodzimy do rozwinięcia liczby x na szereg nieskończony:

$$x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2 k_3} + \dots,$$

gdzie k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są liczby naturalne niemalejące.

Okazać, że każda liczba dodatnia daje jedno tylko rozwinięcie na taki szereg oraz że na iżby liczba x była niewymierna, potrzeba i wystarcza by było $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ ¹⁾.

¹⁾ Zob. moją pracę: „O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi nieskończone“. Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. 1911.

ROZDZIAŁ IX.

Mnożenie szeregów. Szeregi podwójne.

§ 84. Twierdzenie 109 (Cesàro). Jeżeli mamy dwa szeregi zbieżne (o składnikach zespolonych)

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (1)$$

i jeżeli utworzymy szereg Σc_n , kładąc

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

oraz położymy

$$C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

to będziemy mieli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} = AB. \quad (4)$$

Dowód. Połóżmy

$$\left. \begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Mamy oczywiście, wobec (3) i (2), przy naturalnem n :

$$C_n = \begin{cases} a_1 b_1 \\ + a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\ + \dots \\ + a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_n b_1, \end{cases}$$

skąd w jednej chwili, wobec (5):

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + a_3 B_{n-2} + \dots + a_n B_1 = \\ &= B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + \dots + B_n a_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Wobec (6), mamy:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = \begin{cases} B_1 a_1 \\ + B_1 a_2 + B_2 a_1 \\ + B_1 a_3 + B_2 a_2 + B_3 a_1 \\ + \dots \\ + B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + B_3 a_{n-2} + \dots + B_n a_1, \end{cases}$$

skąd, wobec (5):

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = B_1 A_n + B_2 A_{n-1} + \dots + B_n A_1 \quad (7)$$

przy wszelkiem naturalnem n .

Lecz, wobec (5) i (1), mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B;$$

możemy więc położyć

$$A_n = A + \varepsilon_n, \quad B_n = B + \eta_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

gdzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0. \quad (9)$$

Wzór (7) daje, wobec (8):

$$\begin{aligned} \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} &= AB + B \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} + \\ &+ A \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n}{n} + \frac{\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \dots + \varepsilon_n \eta_1}{n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Niech teraz ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

W myśl (9), będzie

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |\eta_n| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \quad (11)$$

Suma

$$\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \dots + \varepsilon_n \eta_1 \quad (12)$$

składa się przy danem n z wyrazów

$$\varepsilon_k \eta_l;$$

gdzie $k + l = n + 1$, a więc przynajmniej jeden ze wskaźników k, l jest większy od $\frac{n}{2}$. Jeżeli więc będzie $n > 2\mu$, to zachodzić będzie co najmniej jedna z nierówności

$$k > \mu \quad \text{oraz} \quad l > \mu,$$

i przeto, w myśl (11), zachodzić będzie co najmniej jedna z nierówności

$$|\varepsilon_k| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |\eta_l| < \varepsilon.$$

Z drugiej strony, ciągi ε_n i η_n , jako zbieżne, muszą być ograniczone: istnieje więc liczba g , taka iż

$$|\varepsilon_n| < g \quad \text{oraz} \quad |\eta_n| < g, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

W każdym więc razie, dla $n > 2\mu$ jedna z liczb $|\varepsilon_k|, |\eta_l|$ będzie mniejsza od ε , zaś druga mniejsza od g , zatem zawsze

$$|\varepsilon_k \eta_l| < \varepsilon g.$$

Dowiedliśmy więc, że dla $n > 2\mu$ każdy ze składników sumy (12) jest bezwzględnie mniejszy od εg , skąd w jednej chwili:

$$\left| \frac{\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \dots + \varepsilon_n \eta_1}{n} \right| < \varepsilon g, \quad \text{dla} \quad n > 2\mu,$$

co dowodzi (wobec dowolności liczby dodatniej ε), że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 \eta_n + \varepsilon_2 \eta_{n-1} + \dots + \varepsilon_n \eta_1}{n} = 0. \quad (13)$$

Niech teraz p oznacza dany wskaźnik $> \mu$. Położmy, przy obranem $p > \mu$, $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p = h$ i niech ν oznacza liczbę, większą jednocześnie od p i od $\frac{h}{\varepsilon}$: będzie więc

$$\left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p}{n} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \nu. \quad (14)$$

Dla $n > p$ możemy zapisać

$$\left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p}{n} \right| + \left| \frac{\varepsilon_{p+1} + \varepsilon_{p+2} + \dots + \varepsilon_n}{n} \right|. \quad (15)$$

Lecz, wobec $\nu > p > \mu$, mamy, w myśl (11), dla $n > \nu$:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{p+1} + \varepsilon_{p+2} + \dots + \varepsilon_n| &\leq |\varepsilon_{p+1}| + |\varepsilon_{p+2}| + \dots + |\varepsilon_n| < \\ &< \varepsilon(n - p) < \varepsilon n; \end{aligned}$$

nierówność (15) daje więc, wobec (14):

$$\left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} \right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \nu,$$

skąd w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} = 0. \quad (16)$$

Podobnie znaleźćlibyśmy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n}{n} = 0. \quad (17)$$

Wzór (10) daje więc, wobec (16), (17) i (13), w jednej chwili wzór (4), c. b. d. o. Udowodniliśmy więc twierdzenie Cesàro.

Zauważymy, że przy dowodzie tw. Cesàro udowodniliśmy zarazem

Twierdzenie 110. *Jeżeli granicą ciągu (liczb zespolonych) ε_n jest zero, to jest też*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} = 0. \quad (18)$$

Twierdzenie to nie daje się oczywiście odwrócić: jeżeli zachodzi wzór (18) to niekoniecznie mamy $\lim \varepsilon_n = 0$: np. dla ciągu $\varepsilon_n = (-1)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), który nie jest zbieżny, zachodzi, jak łatwo widzieć, wzór (18). Godnem uwagi jest jednak, że jeżeli mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} \right) = 0,$$

to stąd wynika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

jakoteż (w myśl tw. 110) naodwrot. Udowodnimy nawet ogólniejsze twierdzenie, mianowicie¹⁾:

Jeżeli dla ciągu nieskończonego liczb zespolonych ε_n zachodzi przy pewnym $\alpha \geq 0$ wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varepsilon_n + \alpha \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} \right) = 0. \quad (I)$$

to mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (II)$$

Położmy, dla dowodu:

$$\varepsilon_n + \alpha \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} = \eta_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (III)$$

Wobec (I) będziemy mieli $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$, i przeto też $\lim_{n \rightarrow \infty} |\eta_n| = 0$, skąd, w myśl tw. 110, wnosimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\eta_1| + |\eta_2| + \dots + |\eta_n|}{n} = 0. \quad (IV)$$

Położmy, dalej:

$$\sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (V)$$

w myśl (III) i (V) znajdujemy z łatwością:

$$\sigma_n = \frac{n}{n+\alpha} (\eta_n + \sigma_{n-1}) \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec $\alpha \geq 0$:

$$|\sigma_n| \leq |\eta_n| + |\sigma_{n-1}|, \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots,$$

¹⁾ Por. E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Functionentheorie. Berlin 1916, p. 30.

co, z uwagi, że w myśl (III) i (V) $|\sigma_n| = |\varepsilon_n| \leq (1+\alpha) |\varepsilon_n| = |\eta_n|$, daje w jednej chwili:

$$|\sigma_n| \leq |\eta_n| + |\eta_{n-1}| + \dots + |\eta_2| + |\eta_1|, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

zatem, w myśl (V):

$$\left| \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} \right| \leq \frac{|\eta_1| + |\eta_2| + \dots + |\eta_n|}{n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

skąd, w myśl (IV), otrzymujemy natychmiast

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} = 0,$$

co, wobec (I), daje w jednej chwili wzór (II), c. b. d. o.

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie. Zauważymy, że możnaby dowieść, że jest ono też prawdziwe dla $0 > \alpha > -1$, natomiast dla $\alpha \leq -1$ twierdzenie nasze jest nieprawdziwe: np. dla $\alpha = -1$, $\varepsilon_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) zachodzi, jak łatwo widzieć, wzór (I), lecz nie zachodzi wzór (II); podobnie dla $\alpha = -2$, $\varepsilon_n = n - 1$ ($n = 1, 2, \dots$). (Możnaby udowodnić, że twierdzenie nasze nie jest prawdziwe przy żadnym $\alpha \leq -1$: zob. moją odnośną notatkę w *Tôhoku Mathematical Journal*, luty 1917).

Twierdzenie 110 możemy z łatwością uogólnić. Założmy, że ciąg u_n jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l;$$

kładąc

$$u_n - l = \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

będziemy więc mieli $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, skąd, jak dowiedliśmy, wynika wzór (18), czyli, wobec (19), wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} - l \right) = 0,$$

skąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = l.$$

Mamy więc

Twierdzenie 110^a. *Jeżeli ciąg u_n jest zbieżny, to mamy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Twierdzenie to możemy, jak łatwo widzieć, wypowiedzieć też w formie:

Jeżeli (dla ciągu liczb zespolonych v_n) mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_{n+1} - v_n) = l$,

to mamy też $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = l$ (Cauchy).

Zwróćmy uwagę na pewne ciekawe zastosowanie wypowiedzianego twierdzenia. Niech u_n oznacza ciąg liczb rzeczywistych dodatnich i założmy, że istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = g > 0$. Będziemy więc stąd mieli $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lg g$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lg u_{n+1} - \lg u_n) = g$, co daje, w myśl naszego twierdzenia (dla $v_n = \lg u_n$): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg u_n}{n} = \lg g$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg \sqrt[n]{u_n} = \lg g$, skąd: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = g$.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli dla ciągu liczb dodatnich u_n istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = g > 0$, to mamy również $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = g$. (Por. twierdzenie 95, § 77).

Wyprowadzimy teraz pewien łatwy wniosek z twierdzeń 109 oraz 110^a. Zachowując użyte w twierdzeniu 109 znakowanie, założmy, że ciąg C_n jest zbieżny. W myśl tw. 110^a będzie więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n,$$

skąd, wobec (4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = AB,$$

co możemy wypowiedzieć w formie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 111 (Abel'a). Jeżeli mamy dwa szeregi zbieżne

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (20)$$

oraz

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad (21)$$

i jeżeli, kładąc

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

otrzymujemy szereg zbieżny

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \dots, \quad (23)$$

to mamy:

$$C = AB. \quad (24)$$

§ 85. Okażemy obecnie, że jeżeli szeregi (20) i (21) są oba zbieżne, przytem conajmniej jeden z nich bezwzględnie, to szereg (23) jest zbieżny (a więc zachodzi wzór (24)).

Założmy więc, że np. szereg (20) jest zbieżny bezwzględnie, zaś szereg (21) zbieżny (choćby tylko warunkowo). Oznaczmy, jak w poprzednim §, przez A_n , B_n i C_n odpowiednio sumy cząstkowe szeregów (20), (21) i (23). Mamy oczywiście, przy naturalnem n :

$$A_n B_n = a_1 B_n + a_2 B_n + a_3 B_n + \dots + a_n B_n.$$

skąd, wobec (6):

$$A_n B_n - C_n = a_2 (B_n - B_{n-1}) + a_3 (B_n - B_{n-2}) + \dots + a_n (B_n - B_1),$$

czyli

$$A_n B_n - C_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} (B_n - B_{n-k}). \quad (25)$$

Rozbijmy sumę (25) na dwie:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-1}$$

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec zbieżności ciągu B_n , dla liczby ε istnieje takie μ , iż

$$|B_{n'} - B_{n''}| < \varepsilon, \quad \text{dla } n' > \mu \text{ oraz } n'' > \mu. \quad (26)$$

Założmy, że $n > 2\mu$: dla $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ będzie $n - k \geq \frac{n}{2} > \mu$

i przeto, wobec (26) (dla $n' = n$, $n'' = n - k$):

$$|B_n - B_{n-k}| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > 2\mu, \quad k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Stąd, dla $n > 2\mu$:

$$\left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{k+1} (B_n - B_{n-k}) \right| < \varepsilon \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |a_{k+1}|. \quad (27)$$

Lecz szereg (20) jest, jak zakładamy, zbieżny bezwzględnie: szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ jest więc zbieżny: oznaczając jego sumę przez M , będziemy mieli przy wszelkiem n :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |a_{k+1}| \leq M,$$

gdzie M jest liczbą (skończoną) niezależną od n . Stąd, wobec (27), znajdujemy:

$$\left| \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_{k+1} (B_n - B_{n-k}) \right| < \varepsilon M, \quad \text{dla } n > 2\mu. \quad (28)$$

Ze zbieżności ciągu B_n wynika, że istnieje liczba (skończona) N , niezależna od m , taka iż:

$$|B_m| < N, \quad \text{dla } m = 1, 2, 3, \dots;$$

jest więc stale

$$|B_n - B_{n-1}| < 2N,$$

skąd

$$\left| \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} a_{k+1} (B_n - B_{n-k}) \right| < 2N \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} |a_{k+1}|. \quad (29)$$

Z założenia, że szereg (20) jest zbieżny bezwzględnie, wynika dalej, że dla liczby dodatniej ε istnieje takie ν , iż

$$|a_m| + |a_{m+1}| + \dots + |a_{m+l}| < \varepsilon, \quad \text{dla } m > \nu. \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli więc $n > 2\nu$, to będzie

$$\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} |a_{k+1}| < \varepsilon,$$

zatem, w myśl (29):

$$\left| \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} a_k (B_n - B_{n-k}) \right| < 2N\varepsilon, \quad \text{dla } n > 2\nu. \quad (30)$$

Wobec (25), (28) i (30) znajdujemy, dla n większych jednocześnie od 2μ i 2ν :

$$|A_n B_n - C_n| < (M + 2N)\varepsilon,$$

skąd, wobec dowolności ε :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n B_n - C_n) = 0,$$

zatem, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = AB,$$

c. b. d. o. Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 112 (Cauchy'ego). Jeżeli mamy szereg zbieżny bezwzględnie

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \quad (31)$$

oraz szereg zbieżny (choćby tylko warunkowo)

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots, \quad (32)$$

to, kładąc

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (33)$$

otrzymamy szereg zbieżny

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots, \quad (34)$$

którego sumą jest AB .

Zauważymy, że jeżeli szeregi (31) i (32) są oba zbieżne warunkowo, to szereg (34) może być zarówno zbieżnym jak i rozbieżnym.

Przyjmijmy np.

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{oraz} \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

Każdy z szeregów (31) i (32) będzie więc szeregiem anharmonicznym

$$\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

który, jak wiemy, jest zbieżny warunkowo.

W myśl (33) i (35) znajdujemy:

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(n-k+1)}. \quad (36)$$

Lecz

$$\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right],$$

skąd

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right]; \quad (37)$$

dalej, mamy oczywiście

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k};$$

oznaczając

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} = \sigma_n. \quad (38)$$

będziemy więc mieli, wobec (36) i (37):

$$c_n = \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{n+1} \sigma_n; \quad (39)$$

składniki szeregu (34) są więc naprzemiennie dodatnie i ujemne.

Wobec (38), mamy, dalej, dla $n > 2$:

$$(n+1)\sigma_{n-1} - n\sigma_n = \sigma_{n-1} - n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \sigma_{n-1} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} > 0,$$

zatem, dla $n > 2$:

$$\frac{\sigma_{n-1}}{n} > \frac{\sigma_n}{n+1},$$

co, dowodzi, wobec (39), że składniki szeregu (34), poczynając od drugiego, maleją bezwzględnie.

Wobec (38), możemy, dalej, napisać:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{E\sqrt{n}} \frac{1}{k} + \sum_{k=E\sqrt{n}+1}^n \frac{1}{k}$$

pierwsza z wypisanych sum zawiera nie więcej niż $\sqrt{n}$ składników, z których każdy jest największy od jedności: wartość jej nie przenosi zatem $\sqrt{n}$; druga zaś z naszych sum zawiera mniej niż n składników, z których każdy jest mniejszy od $1/\sqrt{n}$ (ponieważ w uważanej sumie wskaźnik k spełnia nierówność $k \geq E\sqrt{n} + 1 > \sqrt{n}$): wartość jej jest więc $< \sqrt{n}$. Stąd:

$$\sigma_n < 2\sqrt{n},$$

i przeto, wobec (39):

$$|c_n| < \frac{4}{\sqrt{n}},$$

skąd $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Szereg (34) jest więc naprzemiennym, zatem, w myśl tw. 105, zbieżnym. W myśl tw. 111 suma jego jest więc iloczynem sum (31) i (32), skąd rozwinięcie:

$$\frac{1}{2} (\lg 2)^2 = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{4} - \frac{\sigma_4}{5} + \dots$$

Dowiedliśmy więc, że szereg (34) może być zbieżnym, pomimo że oba szeregi (31) i (32) są zbieżne tylko warunkowo. Okażemy obecnie, że, w razie warunkowej zbieżności szeregów (31) i (32), szereg (34) może być rozbieżnym.

Przyjmijmy:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (40)$$

szeregi (31) i (32) będą tu zbieżne, jako naprzemiennie.

W myśl (33) oraz (40), będzie

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n-k+1}}. \quad (41)$$

Lecz, dla $k = 1, 2, \dots, n$, mamy oczywiście $k \leq n$ oraz $n - k + 1 \leq n$, za' tem

$$\frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

i przeto, wobec (41):

$$|c_n| \geq 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

co dowodzi, że szereg (34) nie jest zbieżny.

§ 86. Okażemy obecnie, że jeżeli szeregi (31) i (32) są oba zbieżne bezwzględnie, to zbieżnym jest też szereg, który otrzymamy, rozłączając każdą grupę (33) składników szeregu (34), czyli szereg

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_1 b_4 + \dots \quad (42)$$

Oznaczmy przez s_m sumę m pierwszych składników szeregu (42), zaś przez σ_m — sumę wartości bezwzględnych składników sumy s_m , i niech $a_p b_q$ będzie ostatni składnik sumy s_m . Ze wzorów (33) wnosimy natychmiast, że składnik $a_p b_q$ należy do grupy c_{p+q-1} , zaś każdy z pozostałych składników $a_k b_l$ sumy s_m należy do jednej z grup $c_1, c_2, \dots, c_{p+q-1}$ i przeto wskaźniki jego k i l spełniają nierówność $k + l \leq p + q$, skąd, tembardziej, $k \leq p + q$, oraz $l \leq p + q$. Składniki sumy s_m przedstawiają więc część wszystkich $(p + q)^2$ iloczynów

$$a_k b_l,$$

gdzie $k \leq p + q$ oraz $l \leq p + q$, czyli część wszystkich $(p + q)^2$ składników, które otrzymujemy po rozwinięciu iloczynu

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{p+q}) (b_1 + b_2 + \dots + b_{p+q}).$$

Wnosimy stąd natychmiast o nierówności

$$\sigma_m \leq (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{p+q}|) (|b_1| + |b_2| + \dots + |b_{p+q}|). \quad (43)$$

Wobec zbieżności bezwzględnej szeregów (31) oraz (32), szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

są zbieżne: oznaczmy odpowiednio przez M i N ich sumy: będzie więc, przy wszelkich naturalnych p i q :

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{p+q}| \leq M \quad \text{oraz} \quad |b_1| + |b_2| + \dots + |b_{p+q}| \leq N,$$

zatem, wobec (43):

$$\sigma_m < MN, \quad \text{dla } m = 1, 2, 3, \dots$$

Ciąg σ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) jest więc ograniczony, skąd wynika, że szereg (42) jest zbieżny bezwzględnie.

Sumy szeregu (zbieżnego) (42) nie zmienimy, jak wiemy (§ 72), łącząc znowu jego składniki w grupy $c_1, c_2, c_3, \dots$. Ponieważ zaś (wobec zbieżności bezwzględnej szeregów (31) i (32) oraz w myśl tw. 112) sumą szeregu (34) jest iloczyn sum (31) i (32), więc mamy wzór:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)(b_1 + b_2 + b_3 + \dots) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + \dots \quad (44)$$

Położmy przy wszelkich naturalnych k i l :

$$a_k b_l = u_{k,l}; \quad (45)$$

szereg (42) będziemy mogli przepisać w postaci:

$$S = u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,3} + u_{2,2} + \dots \quad (46)$$

Ciąg nieskończony układów wskaźników

$$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), \dots \quad (47)$$

będzie oczywiście zawierał każdy układ (k,l) dwóch liczb naturalnych k i l , przytem każdy taki układ raz tylko jeden (przyczem oczywiście układy, różniące się порядkiem liczb, uważamy za różne).

Niech teraz

$$(k_1, l_1), (k_2, l_2), (k_3, l_3), \dots \quad (48)$$

oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony układów (k,l) dwóch liczb naturalnych k i l , zawierający każdy układ dwóch liczb naturalnych raz i tylko raz jeden. Ciąg (48) różni się więc conajwyżej порядkiem wyrazów od ciągu (47), i przeto szereg

$$u_{k_1, l_1} + u_{k_2, l_2} + u_{k_3, l_3} + \dots \quad (49)$$

różni się conajwyżej порядkiem składników od szeregu (46). Ponieważ zaś szereg (42) jest zbieżny bezwzględnie, więc szeregi (46) i (49) dają tę samą sumę. Mamy więc, wobec (44) i (45):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n},$$

gdzie (k_n, l_n) ($n=1, 2, 3, \dots$) oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych k i l . Stąd:

Twierdzenie 113. Jeżeli szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to mamy wzór

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n}, \quad (50)$$

gdzie (k_n, l_n) oznacza dowolny ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych k i l .

W szczególności np. możemy układy (k, l) ustawić w ciąg nieskończony, porządkując je według wielkości iloczynów kl , a w każdej grupie układów (k, l) , dających ten sam iloczyn, np. według rosnących pierwszych wskaźników. W ten sposób otrzymamy szereg:

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1 + a_1 b_5 + \dots$$

Łącząc w jedną grupę d_n składniki $a_k b_l$, dla których $kl = n$, czyli kładąc

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 b_1, \\ d_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1, \\ d_3 &= a_1 b_3 + a_3 b_1, \\ d_4 &= a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1, \\ d_5 &= a_1 b_5 + a_5 b_1, \end{aligned}$$

i t. d., otrzymujemy, wobec (50):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots \quad (51)$$

(Każda grupa d_n zawiera tu oczywiście tyle składników, ile dzielników naturalnych posiada wskaźnik n). Mnożenie szeregów, wykonane w ten sposób, nazywamy *mnożeniem Dirichlet'a*¹⁾, mnożenie zaś, wykonane zapomocą wzoru (34) (gdzie liczby c_n określone są wzorami (33)) nazywamy *mnożeniem Cauchy'ego*.

Przyjmijmy np.

$$a_n = \frac{1}{n^s}, \quad b_n = \frac{1}{n^s}, \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (52)$$

gdzie s oznacza liczbę rzeczywistą > 1 . Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ są, jak dowiedliśmy w § 78,

zbieżne (bezwzględnie) dla $s > 1$: stosowalny jest więc do nich wzór (51).

Weźmy pod uwagę składniki n -tej grupy d_n . Jeżeli składnik $a_k b_l$ należy do grupy d_n , to mamy $kl = n$, a ponieważ, wobec (52), jest

$$a_k b_l = \frac{1}{k^s} \cdot \frac{1}{l^s} = \frac{1}{(kl)^s},$$

¹⁾ E. Landau udowodnił w r. 1907 (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 24, p. 52], że dla mnożenia Dirichlet'a zachodzi twierdzenie analogiczne do tw. Abela 111, mianowicie, że jeżeli zbieżne są szeregi (20), (21), oraz szereg $d_1 + d_2 + d_3 + \dots$, to sumą tego ostatniego jest AB . Dowód Landau'a posługuje się teorią funkcji zmiennej zespolonej. Landau zaznacza, że cieszyłby się, gdyby kto znalazł dowód elementarny tego twierdzenia.

więc każdy składnik n -tej grupy wynosi $1/n^s$. Ponieważ zaś w n -tej grupie mamy tyle składników, ile wskaźnik n ma dzielników naturalnych, więc, oznaczając liczbę dzielników liczby n przez $\theta(n)$, będziemy mieli

$$d_n = \frac{\theta(n)}{n^s} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Stąd, wobec (51) i (52), oznaczając (według Riemanna)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s),$$

otrzymujemy:

$$\left[\zeta(s) \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^s} \quad \text{dla } s > 1. \quad (53)$$

Obliczymy, dalej, iloczyn $\zeta(s-1)\zeta(s)$, dla $s > 2$. Szeregi $\zeta(s)$ oraz $\zeta(s-1)$ będą tu zbieżne bezwzględnie i wzór (51) będzie znowu stosowalny. Będziemy tu mieli

$$a_n = \frac{1}{n^{s-1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^s} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (54)$$

W grupie d_n będzie więc

$$a_k b_l = \frac{1}{k^{s-1}} \cdot \frac{1}{l^s} = \frac{k}{(kl)^s} = \frac{k}{n^s},$$

a ponieważ wskaźnik k przebiega w grupie d_n kolejno wszystkie dzielniki liczby n , więc, oznaczając sumę dzielników liczby n przez $\sigma(n)$, będziemy mieli

$$d_n = \frac{\sigma(n)}{n^s} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Znajdujemy więc, wobec (51) i (54):

$$\zeta(s-1) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}, \quad \text{dla } s > 2. \quad (55)$$

Wzory (53) i (55) mają zastosowanie w analitycznej teorii liczb, gdzie ważną rolę odgrywają też ogólniejsze szeregi, typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^s},$$

gdzie λ_n oznacza ciąg nieskończony liczb rzeczywistych lub zespolonych (są to t. zw. szeregi Dirichlet'a).

§ 87. Szeregi iterowane. Jeżeli każdemu układowi dwóch liczb naturalnych k i l odpowiada oznaczona liczba (rzeczywista lub zespolona) $u_{k,l}$, to mówimy, że mamy określony ciąg podwójny

$$u_{k,l} \quad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, 3, \dots \\ l = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right). \quad (56)$$

Ciąg podwójny możemy sobie wyobrazić w postaci tablicy

$$\begin{matrix} u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}, & \dots & \\ u_{2,1}, u_{2,2}, u_{2,3}, & \dots & \\ u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3}, & \dots & \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \quad (57)$$

Ciąg nieskończony

$$u_{k,1}, u_{k,2}, u_{k,3}, \dots$$

nazywamy k -tym wierszem ciągu podwójnego $u_{k,l}$ (lub tablicy (57)), zaś ciąg nieskończony

$$u_{1,l}, u_{2,l}, u_{3,l}, \dots$$

— jego l -tą kolumną.

Ciąg

$$u_{1,1}, u_{2,2}, u_{3,3}, \dots$$

nazywamy przekątną główną tablicy (57).

Przypuśćmy, że dla danego ciągu podwójnego $u_{k,l}$ szereg wyrazów każdego wiersza jest zbieżny, i półożmy

$$S_k = u_{k,1} + u_{k,2} + u_{k,3} + \dots, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

czyli

$$S_n = \sum_{l=1}^{\infty} u_{n,l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (58)$$

Wobec (58), szereg nieskończony

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \quad (59)$$

możemy napisać w postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} \right),$$

lub poprostu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}. \quad (60)$$

Symbol (60) nazywamy *szeregiem iterowanym* (série itérée) lub podwójnym (double): ta ostatnia nazwa bywa też używaną w innym znaczeniu (Cauchy) (zob. § 90).

Jeżeli szereg (59) jest zbieżny i S oznacza jego sumę, to liczba S jest sumą szeregu (60):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}.$$

O szeregu iterowanym (60) mówimy, że sumowanie zostało w nim wykonane najpierw względem l , potem względem k , albo, że sumowaliśmy *według wierszy* należy go odróżniać od szeregu

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad (61)$$

w którym sumowanie zostało wykonane *według kolumn*, t. j. najpierw względem k , potem względem l . Aby szereg (61) był zbieżny, musi być zbieżny każdy szereg nieskończony

$$S'_l = u_{1,l} + u_{2,l} + u_{3,l} + \dots, \quad (l = 1, 2, 3, \dots), \quad (62)$$

jakoteż szereg

$$S' = S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots, \quad (63)$$

przyczem mamy wówczas

$$S' = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}.$$

Okażemy na przykładzie, że jeden z szeregów (60) i (61) może być zbieżny, a drugi rozbieżny.

W tym celu przyjmijmy jako elementy głównej przekątnej tablicy (57) kolejne liczby naturalne

$$1, 2, 3, 4, \dots,$$

zaś jako elementy sąsiedniej górnej przekątnej (t. j. jako wyrazy ciągu $u_{1,2}, u_{2,3}, u_{3,4}, \dots, u_{n,n+1}, \dots$) — liczby ujemne

$$-1, -2, -3, \dots,$$

wszystkie zaś pozostałe elementy tablicy (57) półożmy $= 0$. (Innymi słowy, określamy ciąg podwójny $u_{k,l}$ przez warunki: $u_{k,l} = k$, dla $l = k$, $u_{k,l} = -k$, dla $l = k + 1$, wreszcie $u_{k,l} = 0$ dla $l < k$ oraz dla $l > k + 1$). Tablica (57) przyjmie więc postać:

$$\begin{array}{cccc} 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 2, & -2, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 3, & -3, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 4, & -4, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Suma elementów każdego wiersza jest tu, jak łatwo widzieć, zerem, suma zaś elementów każdej kolumny wynosi 1. Szereg (59), zatem i szereg (60), jest więc zbieżny (dając sumę $S = 0$), zaś szereg (63), a więc i szereg (61), jest rozbieżny (dając sumę $S' = \infty$).

Szereg (60) może być zbieżny nawet pomimo, że wszystkie kolumny tablicy (57) dają szeregi rozbieżne. Np. kładąc

$$u_{k,2p-1} = \frac{1}{p}, \text{ zaś } u_{k,2p} = -\frac{1}{p} \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \dots, p = 1, 2, 3, \dots)$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć, jako sumę każdego wiersza liczbę 0, zaś każda kolumna będzie szeregiem rozbieżnym. Szereg (60) jest więc w uważanym przykładzie zbieżny, natomiast w szeregu (61) już sumowanie wewnętrzne (względem k) daje szeregi rozbieżne.

Godnem uwagi jest wreszcie, że nawet jeżeli oba szeregi (60) i (61) są zbieżne, to sumy ich mogą być różne. Następujący prosty przykład na to podał p. St. Ruziewicz:

Niech a i b będą dwie różne liczby (rzeczywiste lub zespolone). Przyjmijmy wszystkie elementy głównej przekątnej $= a - b$, prócz pierwszego jej elementu $u_{1,1} = a$. Przyjmijmy, dalej, wszystkie elementy sąsiedniej górnej przekątnej $= b - a$, wszystkie zaś pozostałe elementy tablicy (57) $= 0$. (Innymi słowy, półożmy $u_{1,1} = a$, $u_{n+1, n+1} = a - b$, $u_{n, n+1} = b - a$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$, wreszcie $u_{k,l} = 0$, dla $l < k$ oraz dla $l > k + 1$). Tablica (57) przyjmie więc postać

$$\begin{array}{cccc} a, & b-a, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & a-b, & b-a, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & a-b, & b-a, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & a-b, & b-a, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & a-b, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Suma wyrazów pierwszego wiersza wynosi tu, jak łatwo widzieć b , suma zaś każdego następnego wiersza daje 0. Suma szeregu (60) wynosi więc b .

Z drugiej strony, suma pierwszej kolumny wynosi oczywiście a , każdej zaś następnej — 0. Suma szeregu (61) wynosi więc a . Mamy więc tu (wobec $b \neq a$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} \neq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

pomimo że oba uważane szeregi iterowane są zbieżne.

$$m \geq \mu, \quad \text{oraz} \quad n \geq \mu$$

pociągają za sobą zawsze nierówność:

$$|S - S_{m,n}| < \varepsilon, \quad (74)$$

gdzie S oznacza sumę szeregu (60).

Założmy, dla dowodu, szereg (64) jest zbieżny. Wówczas, jak dowiedliśmy, zbieżne są też szeregi (60) oraz (68). Wobec zbieżności szeregów (64) oraz (68), zatem też szeregów (66) i (72), dla liczby dodatniej ε istnieje takie μ , iż mamy

$$\sigma_{p+1} + \sigma_{p+2} + \dots < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oraz } \sigma'_{p+1} + \sigma'_{p+2} + \dots < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } p > \mu. \quad (75)$$

Wobec zbieżności szeregu iterowanego (60), zbieżne są też szeregi (58), przyczem, oznaczając przez S sumę szeregu (60), mamy:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$$

Stąd:

$$S - S_{m,n} = (S_1 + S_2 + \dots + S_m) - S_{m,n} + (S_{m+1} + S_{m+2} + \dots). \quad (76)$$

Wobec (67), mamy

$$|S_{m+1} + S_{m+2} + \dots| \leq \sigma_{m+1} + \sigma_{m+2} + \dots,$$

zatem, wobec (75):

$$|S_{m+1} + S_{m+2} + \dots| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } m > \mu. \quad (77)$$

Dalej, wobec (73) możemy napisać

$$(S_1 + S_2 + \dots + S_m) - S_{m,n} = \sum_{k=1}^m [S_k - u_{k,1} + u_{k,2} + \dots + u_{k,n}]. \quad (78)$$

Lecz, wobec (58):

$$S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \dots + u_{k,n}) = u_{k,n+1} + u_{k,n+2} + \dots,$$

skąd:

$$|S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \dots + u_{k,n})| \leq |u_{k,n+1}| + |u_{k,n+2}| + \dots,$$

oraz

$$\left| \sum_{k=1}^m [S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \dots + u_{k,n})] \right| \leq \sum_{k=1}^m |u_{k,n+1}| + \sum_{k=1}^m |u_{k,n+2}| + \dots,$$

a że wobec (69):

$$\sum_{k=1}^m |u_{k,l}| \leq \sigma'_l, \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

więc

$$\left| \sum_{k=1}^m [S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \dots + u_{k,n})] \right| \leq \sigma'_{n+1} + \sigma'_{n+2} + \dots,$$

skąd, wobec (75):

$$\left| \sum_{k=1}^m [S_k - (u_{k,1} + u_{k,2} + \dots + u_{k,n})] \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } n > \mu. \quad (79)$$

Wobec (78), (79) i (77), wzór (76) daje dla $m > \mu$ oraz $n > \mu$ nierówność (74), c. b. d. o.

Wynika stąd, w szczególności, że mamy

$$|S - S_{n,n}| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,n},$$

co możemy napisać w postaci szeregu nieskończonego

$$S = S_{1,1} + (S_{2,2} - S_{1,1}) + (S_{3,3} - S_{2,2}) + \dots + (S_{n,n} - S_{n-1,n-1}) + \dots \quad (80)$$

Mamy tu oczywiście (wobec (73)).

$$S_{n,n} - S_{n-1,n-1} = u_{n,1} + u_{n,2} + \dots + u_{n,n} + u_{n-1,n} + u_{n-2,n} + \dots + u_{1,n}. \quad (81)$$

Z drugiej strony, kładąc

$$\sigma_{m,n} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |u_{k,l}| \quad (82)$$

będziemy, wobec zbieżności szeregu (64), mieli podobnie

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,n},$$

co możemy napisać w postaci szeregu nieskończonego

$$\sigma = \sigma_{1,1} + (\sigma_{2,2} - \sigma_{1,1}) + (\sigma_{3,3} - \sigma_{2,2}) + \dots + (\sigma_{n,n} - \sigma_{n-1,n-1}) + \dots, \quad (83)$$

przyczem będzie

$$\sigma_{n,n} - \sigma_{n-1,n-1} = |u_{n,1}| + |u_{n,2}| + \dots + |u_{n,n}| + |u_{n-1,n}| + |u_{n-2,n}| + \dots + |u_{1,n}|. \quad (84)$$

Ponieważ składniki każdej grupy (84) są jednego znaku (≥ 0) więc, wobec zbieżności szeregu (83) (w myśl twierdzenia z § 72) możemy, zastępując każdy składnik szeregu (83) przez wyrażenie (84) i opuszczając nawiasy, napisać:

$$\sigma = |u_{1,1}| + |u_{2,1}| + |u_{2,2}| + |u_{1,2}| + |u_{2,3}| + \dots \quad (85)$$

co dowodzi, że szereg nieskończony

$$u_{1,1} + u_{2,1} + u_{3,1} + u_{1,2} + u_{2,2} + u_{3,2} + \dots$$

jest zbieżny bezwzględnie, a ponieważ, łącząc składniki jego w grupy (81), otrzymujemy z niego szereg (80), więc musi być

$$S = u_{1,1} + u_{2,1} + u_{3,1} + u_{1,2} + u_{2,2} + u_{3,2} + \dots \quad (86)$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli szereg iterowany (60) jest zbieżny bezwzględnie, to możemy go przekształcić (nie zmieniając wartości sumy) na szereg zwykły (86), który również będzie zbieżny bezwzględnie. W tym ostatnim możemy więc dowolnie zmieniać porządek składników.

Pisząc szereg (86) w postaci

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_{p_n, q_n}, \quad (87)$$

widzimy z łatwością, że ciąg nieskończony układów

$$(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), \dots$$

zawiera raz i tylko raz każdy układ (k, l) dwóch liczb naturalnych k i l . Jeżeli więc (k_n, l_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) oznacza dowolny dany ciąg nieskończony układów wskaźników, zawierający raz i tylko raz każdy układ (k, l) dwóch liczb naturalnych k i l , to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n, l_n}$ będzie się różnił co najwyżej porządkiem składników od szeregu (87) i przeto będziemy mieli:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n, l_n}, \quad (88)$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n, l_n}. \quad (89)$$

Położmy dalej, przy wszelkich naturalnych k i l :

$$v_{k,l} = u_{l,k}. \quad (90)$$

Ponieważ szeregi

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$$

różnią się tylko znakowaniem, więc możemy, wobec (90), napisać:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} v_{k,l} \quad (91)$$

i podobnie:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k,l}| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |v_{k,l}|,$$

co, wobec zbieżności szeregu (68), wynikającej, jak wiemy, ze zbieżności szeregu (64), dowodzi, że szereg iterowany

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} v_{k,l}$$

jest zbieżny bezwzględnie. Stąd, jak dowiedliśmy, wynika wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} v_{k,l} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{k_n, l_n}, \quad (92)$$

przyczem szereg, stojący po prawej stronie wzoru (92) jest zbieżny bezwzględnie.

Ciąg (k_n, l_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) przebiega tu, podobnie jak we wzorze (89), wszystkie różne układy dwóch liczb naturalnych k i l ; to samo oczywiście można powiedzieć o ciągu (l_n, k_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$): wobec zbieżności bezwzględnej szeregu (92) mamy więc wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{k_n, l_n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{l_n, k_n} \quad (93)$$

(gdyż oba wypisane szeregi różnią się tylko porządkiem składników).

Wobec (90), mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{l_n, k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n, l_n}. \quad (94)$$

Wzory (91), (92), (93) i (94) dają w jednej chwili:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n, l_n},$$

skąd, wobec (89):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}. \quad (95)$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 114. *Jeżeli szereg iterowany (60) jest zbieżny bezwzględnie, to suma jego nie zależy od porządku sumowania; szereg taki możemy również przekształcić na szereg zwykły, w myśl wzoru (89) (gdzie (k_n, l_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich różnych układów dwóch liczb naturalnych k i l).*

Jeżeli szereg iterowany (60) jest zbieżny bezwzględnie, to zbieżny jest, jak dowiedliśmy, szereg (85), a że, w myśl (82), mamy oczywiście

$$\sigma_{m,n} \leq \sigma, \quad (\text{dla } m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (96)$$

(gdyż suma (85) zawiera wszystkie składniki sumy (82)), więc ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest ograniczony. Okażemy, że i naodwrot: jeżeli ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest ograniczony, to szereg (60) jest zbieżny bezwzględnie.

Założmy więc, że ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest ograniczony, t. j. że istnieje liczba skończona dodatnia A , taka, iż

$$\sigma_{m,n} < A, \quad \text{dla } m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots \quad (97)$$

Mamy oczywiście, wobec (82), przy wszelkich naturalnych m i n :

$$|u_{m,1}| + |u_{m,2}| + \dots + |u_{m,n}| \leq \sigma_{m,n}$$

(gdyż lewa strona przedstawia część składników prawej strony). Stąd, wobec (97), wnosimy, że sumy cząstkowe szeregu nieskończonego

$$\sigma_m = |u_{m,1}| + |u_{m,2}| + |u_{m,3}| + \dots$$

są ograniczone i przeto sam szereg jest zbieżny (dla $m = 1, 2, 3, \dots$). Mamy stąd (w myśl tw. 107) przy wszelkiem naturalnem m :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = \sum_{k=1}^m |u_{k,1}| + \sum_{k=1}^m |u_{k,2}| + \sum_{k=1}^m |u_{k,3}| + \dots \quad (98)$$

Lecz, wobec oczywistej równości

$$\sum_{k=1}^m |u_{k,1}| + \sum_{k=1}^m |u_{k,2}| + \dots + \sum_{k=1}^m |u_{k,n}| = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |u_{k,l}| = \sigma_{m,n},$$

oraz wobec (97), wnosimy, że sumy cząstkowe szeregu nieskończonego (98) są wszystkie $< A$, skąd wnosimy, że

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m \leq A, \quad \text{dla } m = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd wynika, że szereg (66) jest zbieżny, czyli, że zbieżny jest szereg (64), c. b. d. o.

Dowiedliśmy więc, że na to iżby szereg (60) był zbieżny bezwzględnie, potrzeba i wystarcza, iżby ciąg podwójny (82) był ograniczony. Powiadam dalej, że na to iżby ciąg podwójny (82) był ograniczony, potrzeba i wystarcza, iżby szereg (86) był zbieżny bezwzględnie.

Że warunek ten jest konieczny, wynika z uwagi, że, jak dowiedliśmy, ograniczonosc ciągu podwójnego (82) pociąga za sobą zbieżność bezwzględną szeregu (60), co znowu pociąga za sobą zbieżność bezwzględną szeregu (86). Założmy, z drugiej strony, że szereg (86) jest zbieżny bezwzględnie, czyli, że szereg (85) jest zbieżny: mamy wówczas stale nierówność (96), co dowodzi, że ciąg podwójny (82) jest ograniczony.

Wynika stąd, dalej, że jeżeli szereg (86) (albo, co wychodzi na jedno, którykolwiek z szeregów (88)) jest zbieżny bezwzględnie, to szereg (60) jest zbieżny bezwzględnie. Wnosimy stąd, że jeżeli szereg (60) nie jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg (86) nie jest zbieżny bezwzględnie: składniki tego ostatniego możemy więc wówczas tak uporządkować, iżby powstały przez to szereg (88) był rozbieżny: wówczas nie zachodzi więc wzór (89). Zatem: na to żeby zachodził wzór (89) (dla każdego ciągu układów (k_n, l_n) , przebiegającego wszystkie układy dwóch liczb naturalnych k i l), potrzeba i wystarcza, żeby szereg (60) był zbieżny bezwzględnie.

Przykłady:

1) Weźmy pod rozwagę szereg iterowany

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x^{kl}, \quad (99)$$

gdzie x oznacza liczbę rzeczywistą lub zespoloną, której moduł jest < 1 . Położmy $\varrho = |x|$. Mamy, wobec $\varrho < 1$:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varrho^{kl} = \frac{\varrho^k}{1 - \varrho^k},$$

dla dowodu zbieżności bezwzględnej szeregu (99) wystarczy więc okazać, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho^k}{1 - \varrho^k} \quad (100)$$

jest zbieżny. Że zaś szereg (100) jest (dla $\varrho < 1$) zbieżny, jest dla $\varrho = 0$ oczywiste, zaś dla $\varrho > 0$ wynika np. z kryterjum d'Alembert'a (tw. 91), gdyż, wobec $\varrho < 1$, mamy $\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho^k = 0$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varrho^{k+1}}{1 - \varrho^{k+1}} : \frac{\varrho^k}{1 - \varrho^k} = \varrho < 1$.

Względem szeregu (99) możemy więc zastosować wzór (89). Wypisując układy wskaźników (k, l) według wielkości iloczynów kl [w ciąg $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(1,4)$, $(2,2)$, $(4,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$, $(1,6)$, $(2,3)$, ...] i łącząc w jedną (m -tą) grupę składniki szeregu (89), odpowiadające tej samej wartości m iloczynu kl , będziemy mieli oczywiście w m tej grupie $\theta(m)$ składników, z których każdy będzie równy x^m , gdzie $\theta(m)$ oznacza liczbę dzielników liczby m . Stąd wzór:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(m) x^m,$$

czyli wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(m) x^m, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Jest to t. zw. wzór Lambert'a. Godnem uwagi jest tu, że funkcja liczbowa $\theta(m)$ (o biegu, jak wiadomo, nader nieprawidłowym) występuje jako współczynnik wyrazu ogólnego w rozwinięciu na szereg potęgowy funkcji $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 - x^k}$.

Z drugiej strony, dla sumy S szeregu (99) możemy wypisać wzór (80), przyczem jak łatwo widzieć:

$$\begin{aligned} S_{n,n} - S_{n-1,n-1} &= x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots + x^{nn} + x^{(n-1)n} + \dots + x^n = \\ &= 2 \frac{x^n - x^{n^2}}{1 - x^n} + x^{n^2}, \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

oraz

$$S_{1,1} = x = 2 \frac{x^1 - x^{1^2}}{1 - x^1} + x^{1^2};$$

wzór (99) daje więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 - x^k} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - x^{n^2}}{1 - x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2},$$

skąd w jednej chwili, z uwagi, iż $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - x^{n^2}}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{1 - x^n}$, i zważywszy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n},$$

otrzymujemy, po łatwej redukcji:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{1 - x^n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, \quad \text{dla } |x| < 1,$$

— jest to t. zw. przekształcenie Clausen'a.

2) Jako drugi przykład weźmy pod rozagę szereg iterowany

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k x^{kl}, \quad \text{gdzie } |x| < 1. \quad (101)$$

Wobec zbieżności szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \varrho^k}{1 - \varrho^k}$$

dla $0 \leq \varrho < 1$, wnosimy, jak w przykładzie 1), że szereg iterowany (101) jest zbieżny bezwzględnie. Jak wyżej, znajdujemy stąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^k}{1 - x^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma(m) x^m, \quad \text{dla } |x| < 1,$$

gdzie $\sigma(m)$ oznacza sumę dzielników liczby m .

Z drugiej strony, wobec zbieżności bezwzględnej szeregu (101), możemy w nim (w myśl tw. 114) zmienić porządek sumowania, co, z uwagi że (w myśl wzoru (175) Rozdz. VIII):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{kl} = \frac{x^l}{(1 - x^l)^2},$$

skąd

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k x^{kl} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{(1 - x^l)^2},$$

daje wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1 - x^n)^2}, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

3) Załóżmy teraz, że szeregi

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{oraz} \quad B = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \quad (102)$$

są zbieżne bezwzględnie, i przyjmijmy we wzorze (60):

$$u_{k,l} = a_k b_l \quad (k = 1, 2, 3, \dots, l = 1, 2, 3, \dots). \quad (103)$$

Położmy

$$B' = \sum_{l=1}^{\infty} |b_l|;$$

szereg $\sum_{l=1}^{\infty} |a_k b_l|$ będzie oczywiście zbieżny przy wszelkiem k , oraz będzie

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_k b_l| = |a_k| \sum_{l=1}^{\infty} |b_l| = |a_k| B',$$

skąd, wobec zbieżności bezwzględnej szeregu A , wnosimy o zbieżności szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_k b_l|,$$

czyli o zbieżności bezwzględnej szeregu iterowanego

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_k b_l; \quad (104)$$

dla sumy S tego szeregu możemy więc wypisać wzór (88), czyli, wobec (103), wzór

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_{l_n}. \quad (105)$$

Z drugiej strony, wobec (104), oraz (102), znajdujemy w jednej chwili:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sum_{l=1}^{\infty} b_l \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot B = AB,$$

czyli

$$S = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l \right). \quad (106)$$

Dowiedliśmy więc, wobec (105) i (106), że jeżeli szeregi (102) są zbieżne bezwzględnie, to mamy wzór

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n}$$

(gdzie (k_n, l_n) ($n=1, 2, 3, \dots$) przebiega wszystkie różne układy dwóch liczb naturalnych k i l), t. j. otrzymaliśmy twierdzenie 113, udowodnione w § 86 na innej drodze.

§ 88^a. Podamy teraz pewien warunek konieczny i wystarczający na to, aby, w razie zbieżności szeregów iterowanych (60) i (61) (o dowolnych zespolonych składnikach), sumy ich były równe. Wykażemy, że warunek ten polega na tem, aby było

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0, \quad (a)$$

gdzie

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} u_{k,l}. \quad (b)$$

^a) Por. K. Knopp: *Sitzber. d. Berliner Math. Ges.* 1919.

W samej rzeczy, założmy, że szeregi (60) i (61) są zbieżne, oraz oznaczmy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} = S_1, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = S_2. \quad (c)$$

Niech n oznacza daną liczbę naturalną. Wobec zbieżności szeregu (60), zbieżne są szeregi

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

przyczem (dla $k=1, 2, 3, \dots$):

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} u_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} - \sum_{l=1}^k u_{k,l}. \quad (d)$$

Lecz, wobec zbieżności szeregu (61), zbieżne są szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}$$

oraz mamy przy wszelkiem naturalnem n :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n u_{k,l} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l};$$

wzór (d) daje więc, wobec (b) i (c):

$$R_n = S_1 - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

skąd, wobec (c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = S_1 - S_2,$$

co dowodzi, że warunek (a) jest koniecznym i wystarczającym na to, aby było $S_1 = S_2$, c. b. d. o.

§ 89. O ciągu podwójnym $u_{k,l}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) ($l=1, 2, 3, \dots$) mówimy, że granicą jego jest liczba (skończona) u , jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba μ taka, iż nierówności

$$k > \mu \quad \text{oraz} \quad l > \mu \quad (107)$$

pociągają za sobą zawsze nierówność

$$|u_{k,l} - u| < \varepsilon; \quad (108)$$

piszemy wówczas

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} u_{k,l} = u. \quad (109)$$

Ciąg podwójny, posiadający skończoną granicę, nazywamy *zbieżnym*, nie posiadający jej zaś — *rozbieżnym*.

Załóżmy, że dla ciągu podwójnego $u_{k,l}$ zachodzi wzór (109) i niech k_n oraz l_n ($n=1, 2, 3, \dots$) będą dowolne dwa dane ciągi skończone o wyrazach naturalnych, takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \infty; \quad (110)$$

powiadam, że będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n, l_n} = u. \quad (111)$$

W samej rzeczy, niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl (109) i wobec definicji granicy ciągu podwójnego, istnieje dla liczby ε takie μ , iż nierówności (107) pociągają za sobą zawsze nierówność (108). Wobec (110), dla liczby μ istnieje liczba ν taka, iż nierówność $n > \nu$ pociąga za sobą nierówność

$$k_n > \mu \quad \text{oraz} \quad l_n > \mu,$$

co znowu pociąga za sobą nierówność

$$|u_{k_n, l_n} - u| < \varepsilon. \quad (112)$$

Dla $n > \nu$ zachodzi więc nierówność (112), co dowodzi prawdziwości wzoru (109). Zatem:

Granica ciągu podwójnego $u_{k,l}$ jest wspólną granicą wszystkich ciągów u_{k_n, l_n} ($n=1, 2, 3, \dots$), gdzie k_n i l_n są dowolne ciągi wskaźników, wzrastające nieograniczenie (niezależnie jeden od drugiego).

Możnaby okazać, że i naodwrot, jeżeli dla dowolnych ciągów liczb naturalnych k_n i l_n warunek (110) pociąga za sobą zawsze wzór (111), to zachodzi wzór (109). W samej rzeczy załóżmy, że wzór (109) nie zachodzi. Znaczy to, że nie dla każdej liczby dodatniej ε istnieje odpowiednie μ , przy którym nierówności (107) pociągają za sobą nierówność (108). Niech więc α oznacza wartość liczby dodatniej ε , dla której odpowiednie μ nie istnieje. Jakakolwiek zatem obralibyśmy wartość na μ , zawsze istnieć będą liczby naturalne k i l , spełniające nierówność (107), a jednocześnie nierówność

$$|u_{k,l} - u| \geq \alpha.$$

Przyjmijmy na μ kolejne wartości $1, 2, 3, \dots$, a liczby k, l , odpowiadające wartości $\mu = n$ (np. możliwie najmniejsze k przy możliwie najmniejszej sumie $k+l$) oznaczmy przez k_n, l_n ($n=1, 2, 3, \dots$). Będzie więc

$$k_n > n, l_n > n, \quad \text{oraz} \quad |u_{k_n, l_n} - u| \geq \alpha, \quad (\text{dla } n=1, 2, 3, \dots),$$

co dowodzi, ciągi nieskończone wskaźników k_n i l_n spełniają warunki (110) lecz nie spełniają wzoru (111).

Dowiedliśmy więc, że jeżeli wszystkie ciągi nieskończone u_{k_n, l_n} ($n=1, 2, 3, \dots$), gdzie k_n i l_n są dowolne ciągi nieskończone wskaźników, wzrastające nieograniczenie, posiadają wspólną granicę, to jest ona zarazem granicą ciągu podwójnego $u_{k,l}$.

Z dowiedzionych twierdzeń wynika natychmiast, że jeżeli istnieją granice

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \lim_{k, l \rightarrow \infty} v_{k,l},$$

to mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{k, l \rightarrow \infty} (u_{k,l} + v_{k,l}) &= \lim_{k, l \rightarrow \infty} u_{k,l} + \lim_{k, l \rightarrow \infty} v_{k,l}, \\ \lim_{k, l \rightarrow \infty} (u_{k,l} \cdot v_{k,l}) &= \left(\lim_{k, l \rightarrow \infty} u_{k,l} \right) \cdot \left(\lim_{k, l \rightarrow \infty} v_{k,l} \right) \end{aligned}$$

i t. p., podobnie jak dla ciągów zwykłych. Więc np., o ile istnieje $\lim_{k, l \rightarrow \infty} u_{k,l}$, to mamy przy wszelkiem $\alpha > 0$:

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} a^{u_{k,l}} = a^{\lim_{k, l \rightarrow \infty} u_{k,l}}. \quad (113)$$

Udowodnimy np. tę ostatnią własność. Niech k_n i l_n będą dwa dowolne ciągi liczb naturalnych, spełniające warunki (110). Z założenia, że istnieje granica

$$u = \lim_{k, l \rightarrow \infty} u_{k,l}, \quad (114)$$

wynika wzór (111), skąd dla $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_{k_n, l_n}} = a^u,$$

co (wobec dowolności ciągów k_n i l_n , spełniających warunek (110)), dowodzi, że granicą ciągu podwójnego $v_{k,l} = a^{u_{k,l}}$ jest liczba a^u , czyli, że

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} a^{u_{k,l}} = a^u,$$

co, wobec (114), daje wzór (113), c. b. d. o.

Twierdzenie 115. *Na to, żeby ciąg podwójny $u_{k,l}$ był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba μ taka iż nierówność*

$$k > \mu, l > \mu, k' > \mu, l' > \mu \quad (115)$$

pociągają za sobą nierówność

$$|u_{k,l} - u_{k',l'}| < \varepsilon. \quad (116)$$

Dowód, że warunek nasz jest konieczny, nie nastrocza żadnych trudności. Udowodnimy więc tylko, że jest wystarczający. Załóżmy, że warunek nasz jest spełniony i weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony $v_n = u_{n,n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$). W myśl naszego założenia (dla $k=l=n$, $k'=l'=n'$), nierówności

$$n > \mu, \quad \text{oraz} \quad n' > \mu$$

będą pociągały za sobą zawsze nierówność

$$|v_n - v_{n'}| < \varepsilon,$$

co, w myśl tw. 39, dowodzi, że ciąg $v_n = u_{n,n}$ jest zbieżny: połóżmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,n} = u. \quad (117)$$

Niech teraz k i l będą dowolne wskaźniki, spełniające warunek

$$k > \mu \text{ oraz } l > \mu; \quad (118)$$

oznaczając przez n wskaźnik $> \mu$ i kładąc $k' = l' = n$, będziemy więc mieli spełnione warunki (115), co pociąga za sobą nierówność (116), czyli, w danym razie, nierówność

$$|u_{k,l} - u_{n,n}| < \varepsilon.$$

Nierówność ta jest prawdziwą (dla k i l , spełniających warunek (118)) przy wszelkiem $n > \mu$, skąd, wobec (117), w granicy dla $n = \infty$:

$$|u_{k,l} - u| \leq \varepsilon, \text{ dla } k > \mu, l > \mu,$$

co, jak łatwo widzieć, dowodzi, że granicą ciągu podwójnego $u_{k,l}$ jest liczba u . Ten ostatni jest więc zbieżny, c. b. d. o. Udowodnimy więc tw. 115

Jeżeli ciąg podwójny $u_{k,l}$ posiada tę własność, że dla każdej liczby dodatniej A istnieje takie μ , iż

$$u_{k,l} > A, \text{ dla } k > \mu \text{ oraz } l > \mu,$$

to mówimy, że granicą ciągu podwójnego $u_{k,l}$ jest $+\infty$. Podobnie określamy $\lim_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l} = -\infty$

Granice ciągu podwójnego $u_{k,l}$ należy odróżniać od granic podwójnych (albo iterowanych)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l} \text{ oraz } \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k,l}. \quad (119)$$

Przez

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l} \quad (120)$$

rozumiemy granicę ciągu nieskończonego v_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), gdzie

$$v_k = \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Istnienie granic (119) jest niezależne od istnienia granicy

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l} \quad (121)$$

i naodwrot. Np. określając ciąg podwójny $u_{k,l}$ przez warunki $u_{k,l} = 1$ dla $k = l$, zaś $u_{k,l} = 0$ dla $k \neq l$, otrzymamy, jak łatwo widzieć,

jako wartość granic (119) liczbę 0, natomiast ciąg podwójny $u_{k,l}$ nie jest zbieżny, gdyż stale mamy $u_{n,n} - u_{n,n+1} = 1$ (dla $n = 1, 2, 3, \dots$), wbrew tw. 115.

$$Z \text{ drugiej strony, dla ciągu podwójnego } u_{k,l} = \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^l}{l}$$

granica (121) jest oczywiście zerem, natomiast nie istnieje żadna z granic (119) (gdyż nie istnieje już żadna z granic $\lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l}$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{k,l}$).

Wartości granic (119), jeżeli obie istnieją, mogą być różne:

np. dla $u_{k,l} = \frac{k}{k+l}$ mamy oczywiście

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{k}{k+l} = 0, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+l} = 1, \text{ dla } l = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l} = 0, \text{ zaś } \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k,l} = 1,$$

zatem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l} \neq \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k,l}.$$

Nie mamy więc wogóle prawa, w razie granic podwójnych, zmieniać porządku przejścia do granicy.

Jeżeli jednak ciąg podwójny $u_{k,l}$ jest zbieżny, i istnieje jedna z granic (119), to jest ona równa granicy (121). Załóżmy np. że istnieje granica (120). Istnieją więc (przynajmniej dla dostatecznie wielkich k) granice $v_k = \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l}$.

Jeżeli istnieje jednocześnie granica (109), to, dla $k > \mu$ oraz $l > \mu$, mamy nierówność (108), skąd w granicy dla $l = \infty$:

$$|v_k - u| \leq \varepsilon, \text{ dla } k > \mu,$$

co dowodzi, że $u = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l}$, c. b. d. o.

Wnosimy stąd, że jeżeli ciąg podwójny $u_{k,l}$ jest zbieżny, to granice iterowane (119), o ile istnieją, są równe.

Dla ciągu podwójnego o wyrazach rzeczywistych możemy też określić granicę górną $\bar{l} = \overline{\lim}_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l}$ oraz granicę dolną $\underline{l} = \underline{\lim}_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l}$. W tym celu oznaczmy przez U zbiór wszystkich granic $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_{k_n, l_n}$, odpowiadających ciągom wskaźników k_n i l_n , wzrastającym nieograniczenie: liczbę $\bar{l}$ określamy jako kres górny zbioru U . Analogicznie określamy liczbę $\underline{l}$. Mamy oczywiście zawsze $\underline{l} \leq \bar{l}$; łatwo też widzieć, że warunek $\bar{l} = \underline{l}$ jest konieczny i wystarczający na to, iżby ciąg

podwójny $u_{k,l}$ posiadał granicę (skończoną lub nieskończoną). Można też udowodnić, że zawsze

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l}$$

oraz

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l} \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_{k,l} \leq \overline{\lim}_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l}.$$

§ 90. Niech $u_{k,l}$ ($k=1,2,3,\dots$; $l=1,2,3,\dots$) oznacza dany ciąg podwójny.

Położmy

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n u_{k,l} \quad (\text{dla } m=1,2,\dots; n=1,2,\dots). \quad (122)$$

Jeżeli ciąg podwójny $S_{m,n}$ posiada granicę S , to mówimy, że S jest sumą szeregu podwójnego

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \left(\begin{matrix} k=1,2,3,\dots \\ l=1,2,3,\dots \end{matrix} \right). \quad (123)$$

Szereg podwójny (123) należy odróżniać od szeregów iterowanych

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad (124)$$

które czasami też są nazywane szeregami podwójnymi.

Szereg (123) może nie być zbieżny, pomimo że oba szeregi (124) są zbieżne, lub naodwrot.

Np. określając ciąg podwójny $u_{k,l}$ przez warunki

$$\begin{aligned} u_{k,l} &= 1 \\ u_{k,l} &= 2 \quad \text{dla } k=l > 1 \\ u_{k,l} &= -1, \quad \text{dla } |k-l|=1, \\ u_{k,l} &= 0, \quad \text{dla } |k-l| > 1, \end{aligned}$$

co daje tablicę

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots & \dots \\ -1, & 2, & -1, & 0, & 0, & 0, & \dots & \dots \\ 0, & -1, & 2, & -1, & 0, & 0, & \dots & \dots \\ 0, & 0, & -1, & 2, & -1, & 0, & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & -1, & 2, & -1, & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 2, & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć $S_{n,n} - S_{n+1,n} = 1$, dla $n=1,2,3,\dots$, co dowodzi rozbieżności ciągu podwójnego $S_{m,n}$, a więc i szeregu podwójnego (123), natomiast oba szeregi iterowane (124) dają, jak łatwo widzieć, sumę 0.

Okażemy teraz na przykładzie, że szereg podwójny (123) może być zbieżny, pomimo że każdy jego wiersz, jakoteż każda kolumna dają szeregi rozbieżne. Położmy w tym celu

$$u_{k,l} = \frac{(-1)^{k+l}}{E \frac{k+1}{2}} \quad \text{dla } l \geq k, \quad \text{zaś } u_{k,l} = \frac{(-1)^{k+l}}{E \frac{l+1}{2}} \quad \text{dla } l < k.$$

Otrzymamy w ten sposób tablicę:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & -1, & +1, & -1, & +1, & -1, & +1, & -1, & \dots & \dots \\ -1, & +1, & -1, & +1, & -1, & +1, & -1, & +1, & \dots & \dots \\ +1, & -1, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \dots & \dots \\ -1, & +1, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & \dots & \dots \\ +1, & -1, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \dots & \dots \\ -1, & +1, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, & \dots & \dots \\ +1, & -1, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & \dots & \dots \\ -1, & +1, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & +\frac{1}{4}, & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Możnaby tu udowodnić z łatwością, że sumy $S_{m,n}$ są różne od zera jedynie wtedy, jeżeli oba wskaźniki m i n są nieparzyste i że wówczas $S_{m,n} = u_{m,n}$. (Wynika to bezpośrednio z uwagi, że parami stojące obok siebie lub pod sobą wyrazy jednego wiersza lub jednej kolumny znoszą się wzajemnie), a że oczywiście $\lim_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l} = 0$, więc mamy też $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{m,n} = 0$, co dowodzi, że sumą szeregu podwójnego (123) jest 0. Natomiast żaden wiersz, ani też żadna kolumna naszego szeregu oczywiście nie są zbieżne, nie tylko jako szeregi, ale nawet jako ciągi. (Inny przykład tego rodzaju zawiera ćwiczenie 1)).

Dowiedliśmy więc na przykładach, że zbieżność szeregów (124) nie jest ani warunkiem koniecznym, ani też warunkiem wystarczającym dla zbieżności szeregu podwójnego (123).

Jeżeli zbieżnym jest szereg podwójny

$$S = \sum_{k,l} u_{k,l} \quad (125)$$

oraz każdy z szeregów

$$s_l = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad \text{dla } l=1,2,3,\dots \quad (126)$$

to można udowodnić, że mamy też

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l} = S. \quad (127)$$

W samej rzeczy, założmy, że szeregi (125) i (126) są zbieżne i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec (122) oraz (125), będziemy mieli

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{m,n} = S;$$

dla liczby dodatniej ε będzie więc istniała liczba μ taka, iż

$$|S_{m,n} - S| < \varepsilon, \quad \text{dla } m > \mu, \quad n > \mu. \quad (128)$$

Wobec zbieżności szeregów (125), kładąc

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sigma_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (129)$$

mamy (w myśl tw. 107):

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n u_{k,l}, \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \dots),$$

skąd, wobec (122):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m,n} = \sigma_n; \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \dots)$$

nierówność (128) daje więc, w granicy dla $m = \infty$:

$$|\sigma_n - S| \leq \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S,$$

czyli, wobec (126) i (129), że zachodzi wzór (127), c. b. d. o.

Wynika stąd natychmiast, że jeżeli zbieżne są oba szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

to mają tę samą sumę. Podobnież, jeżeli są zbieżne oba szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l}, \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l},$$

to sumy ich są równe.

Jeżeli więc zbieżne są wszystkie trzy szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

to wszystkie trzy mają tę samą sumę.

Jeżeli jednak zbieżne są tylko szeregi iterowane (124), to sumy ich mogą być różne, jak dowiedliśmy w § 87.

Jeżeli szereg

$$\sum_{k,l} |u_{k,l}| \quad (130)$$

jest zbieżny, to mówimy, że szereg podwójny (123) jest zbieżny bezwzględnie. Położmy

$$\sigma_{m,n} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |u_{k,l}| \quad \left(\begin{matrix} m=1, 2, 3, \dots \\ n=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right). \quad (131)$$

Powiadamy, że jeżeli szereg (123) jest zbieżny bezwzględnie, to sumy $\sigma_{m,n}$ są ograniczone, t. j. istnieje liczba skończona dodatnia A , taka iż

$$\sigma_{m,n} < A, \quad \text{dla } \begin{matrix} m=1, 2, 3, \dots \\ n=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \quad (132)$$

[Zauważmy, że jeżeli szereg podwójny (123) jest zbieżny, to sumy $S_{m,n}$ muszą być ograniczone dla *dostatecznie wielkich* m i n , ale zbiór *wszystkich* wyrazów ciągu podwójnego $S_{m,n}$ niekoniecznie musi być ograniczony. Np. kładąc $u_{1,1} = 1$, $u_{2,1} = -1$, dla $l = 1, 2, 3, \dots$, zaś $u_{k,l} = 0$, dla $k > 2$, otrzymujemy ciąg podwójny $u_{k,l}$, dla którego $S_{1,n} = n$, zaś $S_{m,n} = 0$, dla $m > 1$: szereg podwójny (123) jest tu więc zbieżny (dając sumę 0), natomiast nie istnieje liczba skończona A , dla której $|S_{m,n}| < A$ przy wszelkich naturalnych m i n].

W samej rzeczy, skoro szereg podwójny (123) jest zbieżny bezwzględnie, to szereg (130) jest zbieżny i przeto istnieje liczba skończona (oczywiście nieujemna) σ , taka iż

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n} = \sigma;$$

jest więc

$$|\sigma_{m,n} - \sigma| < 1, \quad \text{dla } m > \mu \quad \text{oraz} \quad n > \mu,$$

skąd, kładąc $\sigma + 1 = A$:

$$\sigma_{m,n} < A, \quad \text{dla } m > \mu \quad \text{oraz} \quad n > \mu \quad (133)$$

Niech teraz m' i n' będą dwie dowolne dane liczby naturalne (niekoniecznie obie większe od μ). Możemy oczywiście wyznaczyć zawsze liczby naturalne m i n , takie iż

$$m > \mu, \quad n > \mu, \quad m > m', \quad n > n'.$$

W myśl (133) i z uwagi, że

$$\sigma_{m',n'} \leq \sigma_{m,n}$$

(gdyż suma $\sigma_{m,n}$ zawiera oczywiście wszystkie składniki sumy $\sigma_{m',n'}$,

a prócz tego jeszcze inne składniki nieujemne), znajdujemy w jednej chwili:

$$\sigma_{m', n'} < A,$$

co dowodzi, że nierówność (132) zachodzi przy wszelkich naturalnych m i n , c. b. d. o.

W § 88 dowiedliśmy, że jeżeli ciąg podwójny $\sigma_{m,n}$ jest ograniczony, to szereg iterowany

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$$

jest zbieżny bezwzględnie, co znówu (w myśl nierówności (74) z § 88, pociąga za sobą wzór

$$S = \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{m,n}.$$

Wynika stąd, że szereg podwójny (123) jest zbieżny, oraz że sumą jego jest również liczba S .

Dowiedliśmy więc, że jeżeli szereg podwójny (130) jest zbieżny, to tembardziej zbieżny jest i szereg (123), przyczem

$$\sum_{k,l} u_{k,l} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l},$$

a nadto, że szereg po prawej stronie jest też zbieżny bezwzględnie.

Łatwo widzieć, że i naodwrot: jeżeli szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$$

jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg podwójny (123) jest zbieżny bezwzględnie. W samej rzeczy, w razie zbieżności szeregu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |u_{k,l}|$$

mamy

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n} = \sigma,$$

co dowodzi zbieżności bezwzględnej szeregu podwójnego (123).

Zbieżność bezwzględna jednego z szeregów

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$$

pociąga więc za sobą zbieżność bezwzględną drugiego.

Uzupełniając wyniki, otrzymane w § 88, możemy ostatecznie wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 116 (Pringsheim). *Wystarczy iżby jeden z czterech szeregów*

$$\sum_{k,l} |u_{k,l}| \quad \left(\begin{matrix} k=1, 2, 3, \dots \\ l=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |u_{k,l}|, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k,l}|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|u_{n,1}| + |u_{n-1,2}| + |u_{n-2,3}| + \dots + |u_{1,n}|)$$

był zbieżny, na to iżby wszystkie cztery szeregi

$$\sum_{k,l} u_{k,l} \quad \left(\begin{matrix} k=1, 2, 3, \dots \\ l=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,l},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n,1} + u_{n-1,2} + u_{n-2,3} + \dots + u_{1,n})$$

posiadały tę samą skończoną sumę.

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że jeżeli $a_{k,l}$ oznacza dowolny dany ciąg podwójny, to istnieje jeden i tylko jeden szereg podwójny $\sum_{k,l} u_{k,l}$, taki iż

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n u_{k,l} = a_{m,n}, \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} m=1, 2, 3, \dots \\ n=1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

(Będziemy tu mieli:

$$\begin{aligned} u_{m,n} &= a_{m,n} - a_{m-1,n} - a_{m,n-1} + a_{m-1,n-1}, \quad \text{dla } m > 1, n > 1, \\ u_{m,1} &= a_{m,1} - a_{m-1,1}, \quad \text{dla } m > 1, \\ u_{1,n} &= a_{1,n} - a_{1,n-1}, \quad \text{dla } n > 1, \\ u_{1,1} &= a_{1,1}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że każdy ciąg podwójny może być uważany jako ciąg sum cząstkowych pewnego (i przytem jednego tylko) szeregu podwójnego.

Jako zastosowanie, udowodnić, że kładąc

$$a_{k,l} = (-1)^{k+l} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l} \right)$$

i wyznaczając odpowiedni szereg podwójny $\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n}$, gdzie $S_{m,n} = a_{m,n}$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$), otrzymamy przykład szeregu podwójnego zbieżnego, którego każdy wiersz oraz każda kolumna są rozbieżne.

2) Okazać, że jeżeli szereg nieskończony $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny warunkowo, to składniki jego można zawsze tak ustawić w ciąg podwójny, iżby każdy wiersz oraz każda kolumna dawały dowolne, dane naprzód sumy.

3) Udowodnić, że jeżeli ciąg podwójny $u_{k,n}$ jest ograniczony, to istnieją zawsze ciągi rosnące wskaźników k_m oraz l_n , takie iż istnieją granice

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_m, l_n} \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} u_{k_m, l_n}.$$

4) Udowodnić, że dla każdego ciągu podwójnego liczb dodatnich $u_{m,n}$ istnieje ciąg u_n , taki iż przy wszelkiem naturalnem m :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{m,n}} = \infty.$$

(Wystarczy np. położyć $u_n = n(u_{1,n} + u_{2,n} + \dots + u_{n,n})$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$).

5) Udowodnić, że dla każdego ciągu podwójnego liczb dodatnich $u_{m,n}$, takiego iż $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{m,n} = \infty$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), istnieje ciąg v_n , taki iż $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$,

zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_{m,n}} = 0$, dla $m = 1, 2, 3, \dots$

6) Udowodnić, że dla każdego ciągu nieskończonego szeregów zbieżnych o składnikach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) istnieje szereg zbieżny o składnikach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, taki iż przy wszelkiem naturalnem m : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{m,n}} = \infty$.

ROZDZIAŁ X.

Teoria iloczynów nieskończonych.

§ 91. Iloczynem nieskończonym nazywamy symbol

$$u_1 u_2 u_3 \dots, \text{ lub } \prod_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1)$$

gdzie u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest danym ciągiem nieskończonym (liczb rzeczywistych lub zespolonych).

Położmy

$$u_1 u_2 u_3 \dots u_n = p_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (2)$$

liczbę p_n nazywamy n -tym iloczynem cząstkowym iloczynu nieskończonego (1).

Jeżeli ciąg nieskończony p_n zmierza do oznaczonej i przytem różnej od zera granicy, to iloczyn nieskończony (1) nazywamy *zbieżnym*, zaś liczbę $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ — jego wartością. W przeciwnym razie, a więc jeżeli ciąg p_n nie zmierza do żadnej skończonej granicy, lub też zmierza do zera, iloczyn (1) nazywamy *rozbieżnym*. W przypadku $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ mówimy jeszcze, że wartością iloczynu nieskończonego (1) jest zero, albo że iloczyn ten jest rozbieżny do zera.

Przykłady.

1) Jeżeli szereg o składnikach rzeczywistych u_n jest zbieżny i położymy $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, to mamy $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$, skąd, przy wszelkiem dodatnim a :

$$a^s = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_1 + u_2 + \dots + u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_1} \cdot a^{u_2} \dots a^{u_n},$$

czyli

$$a^{\sum_{n=1}^{\infty} u_n} = \prod_{n=1}^{\infty} a^{u_n}. \quad (3)$$

Wzór ten uważać możemy jako uogólnienie pravidła, że przy mnożeniu potęg (o tej samej podstawie) wykładniki należy dodawać.

W szczególności np., dla $a = 2$, $u_n = \frac{1}{2^n}$, wobec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, otrzymujemy:

$$2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{16}} \dots,$$

co możemy też napisać w formie

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \dots,$$

albo jeszcze (przez analogię ze wzorami $p_1 = \sqrt{2}$, $p_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $p_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ i t. d.) w formie pierwiastnika nieskończonego

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}\dots}}$$

Wzór, analogiczny do wzoru (3) zachodzi też dla szeregów iterowanych, jakoteż dla szeregów podwójnych. Niech mianowicie u_n oznacza dowolny dany ciąg podwójny o wyrazach rzeczywistych. Jeżeli szereg iterowany $S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{k,l}$ jest zbieżny, to, kładąc