

CZĘŚĆ DRUGA.

Działania nieskończone.

ROZDZIAŁ VIII.

Szeregi nieskończone o składnikach stałych.

§ 70. Szeregiem nieskończonym nazywamy symbol

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1)$$

gdzie u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) oznacza dany ciąg nieskończony liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Liczby $u_1, u_2, u_3, \dots$ nazywamy *składnikami szeregu* (1), mianowicie u_n — jego n -tym składnikiem.

Liczby

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (2)$$

nazywamy *sumami cząstkowymi* szeregu (1), mianowicie s_n — sumą cząstkową rzędu n . Jeżeli ciąg s_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest ograniczony, to szereg (1) nazywamy *ograniczonym*.

Szereg nieskończony nazywamy *zbieżnym*, jeżeli ciąg jego sum cząstkowych s_n jest zbieżny: granicę tego ostatniego nazywamy wówczas *sumą* uważanego szeregu. Każdy szereg zbieżny ma więc oznaczoną sumę (skończoną). Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

to piszemy

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Wzory te są więc równoważne równości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = s.$$

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy rozbieżnym. Jeżeli granicą ciągu (2) jest $+\infty$ (lub $-\infty$), to mówimy, że sumą szeregu (1) (rozbieżnego) jest $+\infty$ (lub $-\infty$).

Ńp. dla $u_n = \frac{1}{2^n}$ mamy $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ i przeto $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$, skąd

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Podobnie, dla $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ mamy $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, skąd

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$, zatem

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots, \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Wobec tożsamości

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad \text{dla } x \neq 1,$$

oraz wobec wzoru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, \quad \text{dla } |x| < 1,$$

mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^n) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{dla } |x| < 1,$$

czyli

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Wobec umowy, przyjętej w § 15 co do przedstawiania liczb rzeczywistych zapomocą ułamków nieskończonych przy danej zasadzie, możemy każdy ułamek nieskończony $(c_0, c_1 c_2 c_3 \dots)_g$ przedstawić w postaci szeregu nieskończonego

$$(c_0, c_1 c_2 c_3 \dots)_g = c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \frac{c_3}{g^3} + \dots$$

Wobec twierdzenia 39, dla zbieżności ciągu s_n , jak łatwo wi dzieć, potrzeba i wystarczy, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba μ taka, aby dla $n > \mu$ było przy wszelkiem naturalnem k

$$|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon;$$

stąd, wobec (2), otrzymujemy

Twierdzenie 81. *Na to żeby szereg nieskończony (1) był zbieżny, potrzeba i wystarczy, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba μ taka, aby dla $n > \mu$ było przy wszelkiem naturalnem k :*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon. \quad (3)$$

(Mniej ściśle, ale bardziej może obrazowo, moglibyśmy twierdzenie to wyrazić, mówiąc, że dla zbieżności szeregu potrzeba i wystarczy, iżby suma ilukolwiek kolejnych, byleby dostatecznie dalekich, składników szeregu była dowolnie małą).

Zauważymy, że jeżeli do każdej liczby dodatniej ε i każdej liczby naturalnej k można dobrać takie μ (zależne od ε i od k) iżby dla $n > \mu$ zachodziła zawsze nierówność (3), to szereg może nie być zbieżny, czego przykładem jest szereg harmoniczny

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Mamy tu $u_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) i przeto dla $n > \mu = \frac{k}{\varepsilon}$:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k} < \frac{k}{n} < \varepsilon,$$

natomiast szereg nasz nie jest zbieżny, gdyż

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad \text{ogólnie}$$

$$\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^p} > \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{1}{2} \quad (p = 2, 3, 4, \dots),$$

skąd w jednej chwili

$$s_{2^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^p} > \frac{p}{2}.$$

co dowodzi, że sumy czastkowe szeregu harmonicznego wzrastają nieograniczenie.

Z tw. 81 wnosimy natychmiast (przyjmując we wzorze (3) $k = 1$) iż w razie zbieżności szeregu (1) mamy

$$|u_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Zatem:

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu nieskończonego jest, iżby jego składniki zmierzały do zera.

Warunek ten nie jest jednak wystarczającym do zbieżności szeregu, jak tego dowodzi zbadany wyżej szereg harmoniczny.

§ 71. Co się tyczy szeregów o składnikach zespolonych, to mamy dla nich następujące

Twierdzenie 82. Aby szereg nieskończony $\sum u_n$ o składnikach zespolonych $u_n = a_n + b_n i$ był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby szeregi o składnikach rzeczywistych $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ były oba zbieżne: jeżeli przytem pierwszy z nich daje sumę s' , zaś drugi sumę s'' , to sumą szeregu $\sum u_n$ jest liczba zespolona $s' + s''i$ i naodwrot.

Dowód. Oznaczając przez s_n , s_n' oraz s_n'' odpowiednio sumy cząstkowe rzędu n szeregów $\sum u_n$, $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$, będziemy mieli oczywiście

$$s_n = s_n' + s_n''i \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Lecz, w myśl tw. 78, równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n' + s_n''i) = s' + s''i$$

jest równoważna równościom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n' = s' \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n'' = s'',$$

skąd, wobec (4), wynika natychmiast prawdziwość naszego twierdzenia.

Zauważymy, że twierdzenie iż moduł sumy nie przenosi sumy modułów, rozciąga się też na szeregi nieskończone. W samej rzeczy, niech s oznacza sumę szeregu zbieżnego $\sum u_n$, i połączmy

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad S_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Ciąg S_n jest oczywiście niemalejący, zatem posiada granicę S (skończoną lub $+\infty$), która jest sumą szeregu nieskończonego $\sum |u_n|$. Mamy przytem, wobec (5) i w myśl tw. o module sumy:

$$|s_n| \leq S_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$:

$$|s| \leq S,$$

czyli

$$|u_1 + u_2 + u_3 + \dots| \leq |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

c. b. d. o.

§ 72. Niech k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) oznacza ciąg nieskończony rosnący wskaźników. Załóżmy, że szereg (1) jest zbieżny i połączmy

$$v_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1},$$

$$\text{zaś dla } n > 1: v_n = u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \dots + u_{k_n}. \quad (6)$$

Powiadamy, że szereg

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (7)$$

będzie zbieżny i będzie posiadał tę samą sumę co i szereg (1).

W samej rzeczy, połączmy:

$$s'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Wobec (8) i (6) będzie, jak łatwo widzieć, w myśl (2):

$$s'_n = s_{k_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Oznaczmy przez s sumę szeregu (1). Wobec (2) i definicji sumy szeregu, będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

skąd, w myśl tw. 16, wynika też:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{k_n} = s,$$

zatem wobec (9):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s,$$

co, wobec (8), dowodzi, że szereg (7) jest zbieżny i że sumą jego jest liczba s .

Dowiedliśmy więc, że w szeregu nieskończonym zbieżnym możemy kolejne składniki dowolnie łączyć w grupy, nie naruszając przez to zbieżności szeregu i nie zmieniając wartości jego sumy. Mamy więc, przy dowolnem rozstawieniu kolejnych nawiasów, równość:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = (u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \dots + u_{k_2}) + (u_{k_2+1} + \dots + u_{k_3}) + \dots \quad (10)$$

Suma szeregu nieskończonego zbieżnego posiada więc *prawo łączności*, podobnie jak suma szeregu skończonego.

Zauważymy przytem, że prawo łączności zachodzi dla szeregu zbieżnego nawet wtedy, jeżeli ostatnia z grup, w które łączymy kolejne składniki, zawiera ich nieskończenie wiele, że mianowicie dla każdego ciągu skończonego wskaźników rosnących $k_1, k_2, \dots, k_p$ mamy:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = (u_1 + \dots + u_{k_1}) + \dots + (u_{k_{p-1}+1} + \dots + u_{k_p}) + \sigma, \quad (11)$$

gdzie

$$\sigma = u_{k_p+1} + u_{k_p+2} + \dots \quad (12)$$

W samej rzeczy, oznaczając

$$\sigma_n = u_{k_p+1} + u_{k_p+2} + \dots + u_{k_p+n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

będziemy mieli oczywiście, wobec (2):

$$s_{k_p+n} = s_{k_p} + \sigma_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, z uwagi, że wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, mamy też $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{k_p+n} = s$, otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{k_p+n} - s_{k_p}) = s - s_{k_p},$$

co, w myśl (13), dowodzi że szereg (12) jest zbieżny i że jego suma $\sigma = s - s_{k_p}$, skąd

$$s = s_{k_p} + \sigma,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (11), c. b. d. o.

W szczególności więc mamy dla szeregu zbieżnego (1) przy wszelkiem naturalnem n :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = u_1 + u_2 + \dots + u_n + r_n, \quad (14)$$

gdzie

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots;$$

liczbę r_n nazywamy n -tą resztą szeregu (1); wzór (14), który możemy, wobec (2), przepisać w postaci

$$s = s_n + r_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

daje, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

t. j. w szeregu zbieżnym reszty zbieżają do zera.

Co się tyczy wzoru (10), to zauważymy jeszcze rzecz następującą. Zbieżność szeregu, stojącego po lewej stronie tego wzoru, pociąga za sobą, jak dowiedliśmy, zbieżność szeregu, stojącego po prawej stronie, oraz prawdziwość samego wzoru (10). Godnem uwagi jest atoli, że zbieżność szeregu, stojącego po prawej stronie wzoru (10), nie pociąga jeszcze za sobą zbieżności szeregu, stojącego po lewej stronie tego wzoru.

Np. szereg

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots,$$

którego wszystkie składniki są równe zeru, jest zbieżny (dając sumę = 0), zaś szereg

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots,$$

który otrzymujemy z poprzedniego przez opuszczenie nawiasów, nie jest zbieżny (gdyż jego składniki nie zmierzają do zera).

Ciekawem jest też, że szeregi

$$(u_1 + \dots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + \dots + u_{k_2}) + (u_{k_2+1} + \dots + u_{k_3}) + \dots,$$

oraz

$$(u_1 + \dots + u_{l_1}) + (u_{l_1+1} + \dots + u_{l_2}) + (u_{l_2+1} + \dots + u_{l_3}) + \dots,$$

gdzie k_n oraz l_n są dwa ciągi wskaźników rosnących, mogą być oba zbieżne, ale dawać różne sumy, jak np. szeregi

$$(1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + \dots,$$

oraz

$$1 + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + 1) + \dots,$$

z których pierwszy daje sumę 0, zaś drugi — sumę 1.

Możemy nawet zbudować szereg, którego suma przy odpowiednim połączaniu składników w grupy przedstawiać może dowolną liczbę rzeczywistą.

Ustawmy w tym celu w ciąg nieskończony w_n wszystkie liczby wymierne (sposobem wskazanym w § 9) i połączmy

$$u_1 = w_1, \quad \text{zaś} \quad u_n = w_n - w_{n-1}, \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots \quad (15)$$

Powiadam, że szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (16)$$

będzie posiadał żadaną własność.

W samej rzeczy, niech x oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą (skończoną lub nieskończoną). Obierzmy ciąg nieskończony różnych liczb wymiernych x_n , taki iż $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Oznaczmy przez $w_1, w_2, w_3, \dots$ te kolejne wyrazy ciągu w_n , które są zarazem wyrazami ciągu x_n : ciąg w_{k_n} ($n = 1, 2, 3, \dots$) będzie się różnił oczywiście co najwyżej porządkiem wyrazów od ciągu x_n i przeto, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ oraz w myśl tw. 15, będzie też

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{k_n} = x. \quad (17)$$

Połączmy teraz składniki szeregu (16) w grupy w następujący sposób:

$$(u_1 + \dots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + \dots + u_{k_2}) + \dots + (u_{k_{n-1}+1} + \dots + u_{k_n}) + \dots \quad (18)$$

Oznaczając przez σ_n sumę n pierwszych grup, będziemy mieli, w myśl (15): $\sigma_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{k_n} = w_1 + (w_2 - w_1) + (w_3 - w_2) + \dots + (w_{k_n} - w_{k_n-1}) = w_{k_n}$, zatem, wobec (17):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{k_n} = x,$$

co dowodzi, że sumą szeregu (18) jest liczba x .

Powyższy wynik możnaby jeszcze uogólnić: możnaby mianowicie zbudować szereg wielomianów, którego suma przy odpowiednim ugrupowaniu składników przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą. (Zob. § 122).

Zauważymy jednak, że przy pewnych warunkach zbieżność szeregu, stojącego po prawej stronie wzoru (10), może pociągać za sobą zbieżność szeregu, stojącego po lewej stronie, a stąd i prawdziwość samego wzoru (10).

Rozpatrzmy tu jeden z takich warunków, najczęściej stosowanych.

Powiadam, że jeżeli prawa strona wzoru (10) jest szeregiem zbieżnym i jeżeli w każdej grupie (v_n) wszystkie składniki $(u_{k_{n-1}+1}, u_{k_{n-1}+2}, \dots, u_{k_n})$ są jednego znaku (t. j. bądź ≥ 0 , bądź też ≤ 0 , przyczem składniki, należące do różnych grup, mogą być różnych znaków), to wzór (10) jest prawdziwy.

Żałujemy więc, że szereg (7) jest zbieżny, oraz że zachodzą wzory (6). Wyznamy liczby s_n oraz s'_n ze wzorów (2) oraz (8) i połączmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s'. \quad (19)$$

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią

Wobec (19), będzie dla dostatecznie wielkich m , np. dla $m \geq q$, gdzie q jest pewną liczbą naturalną:

$$|s'_m - s'| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |s'_m - s'_{m+1}| < \varepsilon. \quad (20)$$

Niech teraz n oznacza wskaźnik $> k_q$. Ponieważ ciąg wskaźników k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest rosnący, zaś n oznacza liczbę $> k_q$, więc musi istnieć takie $m \geq q$, iż

$$k_m < n \leq k_{m+1}:$$

wobec (2) mamy więc

$$s_n = s_{k_m} + u_{k_m+1} + \dots + u_n = s_{k_{m+1}} - u_{k_{m+1}+1} - \dots - u_{k_{m+1}}$$

zatem wobec (9):

$$\left. \begin{aligned} s_n - s'_m &= u_{k_m+1} + \dots + u_n \\ s'_{m+1} - s_n &= u_{n+1} + \dots + u_{k_{m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ponieważ zaś, w myśl założenia, składniki

$$u_{k_m+1}, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{k_{m+1}},$$

jako należące do tej samej grupy (v_{m+1}) , są jednego znaku, więc, wobec (21), mamy albo jednocześnie

$$s_n - s'_m \geq 0 \quad \text{oraz} \quad s'_{m+1} - s_n \geq 0,$$

albo też jednocześnie

$$s_n - s'_m \leq 0 \quad \text{oraz} \quad s_{m+1} - s_n \leq 0,$$

więc albo

$$s'_m \leq s_n \leq s'_{m+1},$$

albo też

$$s'_m \geq s_n \geq s'_{m+1},$$

skąd w każdym razie

$$|s_n - s'_m| \leq |s'_m - s'_{m+1}|,$$

zatem, wobec (20):

$$|s_n - s'_m| < \varepsilon$$

oraz

$$|s_n - s'| = (s_n - s'_m) + (s'_m - s') < 2\varepsilon,$$

czyli

$$|s_n - s'| < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > k_q,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s',$$

czyli że zachodzi wzór (10), c. b. d. o.

Z dowiedzionych twierdzeń wnosimy w szczególności, że w każdym szeregu nieskończonym możemy odrzucić wszystkie składniki równe zeru, nie zmieniając przez to kwestji zbieżności szeregu ani też ewentualnej wartości jego sumy: odrzucenie bowiem składników równych zeru jest równoważne połączeniu każdego ciągu kolejnych równych zeru składników w jedną grupę z poprzedzającym je (lub następującym po nich) różnym od zera składnikiem szeregu.

§ 73. Zbieżność ciągu nieskończonego i ewentualna wartość jego granicy nie zależy, jak wiemy, od porządku jego wyrazów (tw. 15). Natomiast zbieżność szeregu nieskończonego i ewentualna wartość jego sumy zależy wogóle od porządku jego składników. Np. mamy

$$0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$$

(gdyż, jak łatwo widzieć, $|s_n| \leq \frac{2}{n+1}$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$); jeżeli jednak zmienimy porządek składników naszego szeregu, wypisując po każdym dwóch dodatnich jeden ujemny, to otrzymamy szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \dots \quad (22)$$

którego sumą nie jest już zero, gdyż mamy tu

$$s_{3n} = s_{3(n-1)} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = s_{3(n-1)} + \frac{1}{(2n-1)2n} > s_{3(n-1)},$$

zatem $s_{3n} > s_3 = \frac{1}{2}$, czyli stale $s_{3n} \geq \frac{1}{2}$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$

(Wobec $s_{3n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ oraz w myśl wzoru (52) z § 51 możnaby wywnioskować, że sumą szeregu (22) jest liczba $\lg 2$).

Podobnie mamy

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$$

natomiast szereg

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

nie jest zbieżny, gdyż mamy w nim

$$s_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{n}{\sqrt{2n}},$$

$$\text{czyli } s_{2n} > \sqrt{\frac{n}{2}}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Szereg nieskończony, który jest zbieżny przy wszelkiem uporządkowaniu składników, nazywamy *zbieżnym bezwarunkowo*.

Szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

dla którego szereg odpowiednich wartości bezwzględnych, czyli szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

jest zbieżny, nazywamy szeregiem *zbieżnym bezwzględnie*.

Okażemy, że *zbieżność bezwarunkowa szeregu jest równoważna ze zbieżnością bezwzględną*.

Przedewszystkiem określmy ściśle, co nazywamy szeregami, różniąciami się conajwyżej порядkiem składników.

O szeregu nieskończonym

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (23)$$

mówimy, że się różni conajwyżej порядkiem składników od szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (24)$$

jeżeli istnieje ciąg nieskończony k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), różniący się conajwyżej порядkiem wyrazów od ciągu $1, 2, 3, \dots$ (t. j. ciąg

liczb naturalnych k_n , który zawiera każdą liczbę naturalną raz i tylko raz), taki iż

$$u_{k_n} = v_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Łatwo widzieć, że wówczas i szereg (24) różni się conajwyżej порядkiem składników od szeregu (23).

W samej rzeczy, skoro ciąg liczb naturalnych k_n zawiera każdą liczbę naturalną raz i tylko raz, więc dla każdej liczby naturalnej r istnieje jeden i tylko jeden wskaźnik n_r , taki iż

$$k_{n_r} = r. \quad (26)$$

Powiadam, że ciąg liczb naturalnych n_r ($r = 1, 2, 3, \dots$) zawiera każdą liczbę naturalną raz i tylko raz.

Że ciąg n_r zawiera każdą liczbę naturalną conajwyżej raz, t. j. że wszystkie wyrazy jego są różne, wynika z uwagi, że w razie $n_r = n_{r'}$ mielibyśmy $k_{n_r} = k_{n_{r'}}$, skąd, w myśl (26), $r = r'$. Że zaś ciąg n_r zawiera każdą liczbę naturalną, wynika z uwagi, że przy wszelkiem naturalnem s , wobec (26) (dla $r = k_s$), mamy $k_{n_{k_s}} = k_s$, skąd, skoro wszystkie wyrazy ciągu k_n są różne, wynika, że

$$n_{k_s} = s \quad (\text{dla } s = 1, 2, 3, \dots).$$

Ciąg n_r ($r = 1, 2, 3, \dots$) różni się więc conajwyżej порядkiem wyrazów od ciągu $1, 2, 3, \dots$, przysiem, w myśl (25), mamy

$$u_{n_r} = v_r, \text{ dla } r = 1, 2, 3, \dots$$

zatem, wobec (26):

$$v_r = u_r, \text{ dla } r = 1, 2, 3, \dots$$

co dowodzi, że szereg (24) różni się conajwyżej порядkiem składników od szeregu (23), c. b. d. o.

Założmy teraz, że szereg nieskończony

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots \quad (27)$$

jest zbieżny. W myśl tw. 81, dla każdej liczby dodatniej ε istnieje więc liczba μ taka, iż przy wszelkiem naturalnem p :

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu. \quad (28)$$

skąd, tembardziej

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu,$$

co dowodzi, w myśl tw. 81, że szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (29)$$

też jest zbieżny. Oznaczmy przez s sumę tego szeregu.

Kładąc

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

będziemy więc mieli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s. \quad (31)$$

Niech, dalej,

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (32)$$

oznacza szereg, różniący się co najwyżej порядkiem składników od szeregu (29): istnieje więc ciąg nieskończony wskaźników k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), różniący się co najwyżej порядkiem wyrazów od ciągu 1, 2, 3, ... i taki, iż

$$u_{k_n} = v_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Położmy

$$s'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n. \quad (34)$$

Wobec (28), dla danej liczby dodatniej ε istnieje taki wskaźnik m , iż

$$|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_{m+p}| < \varepsilon, \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

Ciąg nieskończony wskaźników k_n różni się co najwyżej порядkiem wyrazów od ciągu 1, 2, 3, ...: możemy więc wyznaczyć liczbę q tak wielką, iżby w ciągu

$$k_1, k_2, \dots, k_q$$

była zawartą każda z liczb

$$1, 2, \dots, m; \quad (36)$$

tembardziej więc każda z tych liczb będzie zawartą w ciągu

$$k_1, k_2, \dots, k_n \quad (37)$$

dla $n > q$.

Po usunięciu liczb (36) z ciągu (37), pozostaną w nim oczywiście wskaźniki

$$k', k'', \dots, k^{(n-m)},$$

które wszystkie będą różne i przytem większe od m , oraz będziemy mogli napisać:

$$u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_n} - (u_1 + u_2 + \dots + u_m) = u_{k'} + u_{k''} + \dots + u_{k^{(n-m)}}, \quad (38)$$

gdzie

$$k^{(j)} > m, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n - m. \quad (39)$$

Wobec (33), (34) i (30), wzór (38) daje:

$$s'_n - s_m = u_{k'} + u_{k''} + \dots + u_{k^{(n-m)}}. \quad (40)$$

Oznaczmy przez $m + p$ największą z liczb $k^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n - m$) wobec (39) liczby $k^{(j)}$ będą stanowiły część wyrazów ciągu

$$m + 1, m + 2, \dots, m + p$$

i przeto będzie

$$|u_{k'}| + |u_{k''}| + \dots + |u_{k^{(n-m)}}| \leq |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_{m+p}|$$

skąd, wobec (40) oraz (35):

$$|s'_n - s_m| < \varepsilon. \quad (41)$$

Wobec (30) oraz (35) mamy, dla $k > m$:

$$|s'_k - s_m| = |u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_k| < \varepsilon,$$

skąd, w granicy dla $k = \infty$, wobec (31):

$$|s' - s_m| \leq \varepsilon. \quad (42)$$

Nierówności (41) i (42) dają w jednej chwili:

$$|s'_n - s| = |s'_n - s_m + s_m - s| \leq |s'_n - s_m| + |s_m - s| < 2\varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego wskaźnika $n > q$ zachodzi nierówność

$$|s'_n - s| < 2\varepsilon,$$

skąd wynika natychmiast, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s,$$

czyli wobec (34), że szereg (32) jest zbieżny i że sumą jego jest liczba s . Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 83. Jeżeli szereg (27) jest zbieżny, to zbieżnym jest szereg (29), oraz każdy szereg, różniący się od szeregu (29) co najwyżej порядkiem składników przyczem każdy taki szereg ma tę samą sumę co szereg (29).

Z dowiedzionego twierdzenia wynika natychmiast, że zbieżność szeregu (27) pociąga za sobą zbieżność bezwarunkową szeregu (29), czyli że szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny bezwarunkowo.

Zauważymy dalej, że na to iżby szereg (27) był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby ciąg jego sum cząstkowych

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (43)$$

był ograniczony. W samej rzeczy. ciąg (43) jest oczywiście niemalejący i jako taki posiada granicę, która jest liczbą skończoną lub $+\infty$, zależnie od tego czy ciąg (43) jest ograniczony czy też nie; szereg zaś (27) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, jeżeli ciąg (43) posiada granicę skończoną.

§ 74. Okażemy teraz, że szereg, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nie może być zbieżnym bezwarunkowo.

Zauważmy przedewszystkiem, że twierdzenie nasze wystarczy udowodnić dla szeregów o składnikach rzeczywistych. Załóżmy, w samej rzeczy, żeśmy go dowiedli dla szeregów o składnikach rzeczywistych i niech (29) oznacza szereg o składnikach zespolonych, który nie jest zbieżny bezwzględnie. Szereg (27) nie jest więc zbieżny. Połóżmy

$$u_n = u'_n + u''_n i, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (44)$$

gdzie u'_n oraz u''_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są liczby rzeczywiste.

Gdyby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u'_n|$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} |u''_n|$ były oba zbieżne, to

oznaczając ich sumy przez A' i A'' , mielibyśmy oczywiście przy wszelkim n :

$|u'_1| + |u'_2| + \dots + |u'_n| \leq A'$ oraz $|u''_1| + |u''_2| + \dots + |u''_n| \leq A''$, skąd, wobec oczywistej nierówności

$$|u_k| = |u'_k + u''_k i| \leq |u'_k| + |u''_k i| = |u'_k| + |u''_k| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

znaleźlibyśmy przy wszelkim naturalnem n :

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \leq A' + A''$$

i szereg (27) byłby (w myśl uwagi końcowej § 73) zbieżny, wbrew założeniu. Jeden więc conajmniej z szeregów $\sum |u'_n|$ oraz $\sum |u''_n|$ musi być rozbieżnym. Lecz w takim razie, w myśl założenia, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla szeregów o składnikach rzeczywistych, jeden conajmniej z szeregów $\sum u'_n$ oraz $\sum u''_n$ nie jest zbieżnym bezwarunkowo, skąd oczywiście wynika, że i szereg $\sum (u'_n + u''_n i)$, czyli, w myśl (44), szereg $\sum u_n$, nie jest zbieżnym bezwarunkowo. Okazaliśmy więc, że twierdzenie nasze wystarczy udowodnić dla szeregów o składnikach rzeczywistych.

Założmy więc, że szereg (29) jest szeregiem o składnikach rzeczywistych, dla którego szereg (27) nie jest zbieżny. Co do sa

mego szeregu (29), to możemy zakładać, że jest on zbieżny, gdyż w przeciwnym razie twierdzenie nasze byłoby oczywiście prawdziwe.

Z założenia, że szereg (29) jest zbieżny, wynika, jak wiemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (45)$$

Oznaczmy przez

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad (46)$$

kolejne składniki nieujemne szeregu (29), zaś przez

$$-b_1, -b_2, -b_3, \dots \quad (47)$$

— kolejne składniki ujemne szeregu (29) i połóżmy

$$\left. \begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n, \end{aligned} \right\} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

Przypuśćmy, dalej, że na n pierwszych składników szeregu (29) przypada p_n nieujemnych oraz q_n ujemnych ($n = 1, 2, 3, \dots$). Ciągi p_n i q_n będą oczywiście niemalejące, przy czem $p_n + q_n = n$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Określając ciągi s_n oraz σ_n wzorami (30) oraz (43), będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= A_{p_n} - B_{q_n}, \\ \sigma_n &= A_{p_n} + B_{q_n} \end{aligned} \right\} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

(rozumiejąc przez A_0 oraz B_0 zero), skąd

$$A_{p_n} = \frac{\sigma_n + s_n}{2} \text{ oraz } B_{q_n} = \frac{\sigma_n - s_n}{2} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

wzory te, z uwagi że ciąg s_n jest zbieżny (gdyż, jak zakładamy, szereg (29) jest zbieżny), oraz że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$ (gdyż, w myśl założenia, szereg (27) nie jest zbieżny), dowodzą, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{p_n} = +\infty \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} B_{q_n} = +\infty. \quad (49)$$

Ponieważ zaś ciągi A_n oraz B_n są niemalejące, więc, wobec (49), wnosimy z łatwością, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = +\infty. \quad (50)$$

(Gdyż, wobec (49), będzie, przy dowolnem danem R , dla dostatecznie wielkiego m : $A_m > R$, zatem, dla $n \geq p_m$ też $A_n \geq A_{p_m} > R$).

Wynika stąd, w szczególności, że szereg (29) musi zawierać nieskończenie wiele składników dodatnich i nieskończenie wiele składników ujemnych.

Wobec (50) mamy też przy wszelkiem danem k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_k) = +\infty$$

i przeto dla każdego wskaźnika k istnieje taki wskaźnik $n > k$, iż

$$A_n - A_k > 1.$$

Istnieje więc ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n , taki iż

$$\left. \begin{array}{l} A_{k_1} > 1, \\ A_{k_2} - A_{k_1} > 1, \\ A_{k_3} - A_{k_2} > 1, \\ \dots \dots \dots \\ A_{k_n} - A_{k_{n-1}} > 1, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (51)$$

(W szczególności, możemy jako liczby k_n obrać najmniejsze wskaźniki, spełniające wypisane nierówności).

Weźmy teraz pod rozwagę szereg nieskończony

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1} - b_1 + a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2} - b_2 + a_{k_2+1} + \dots + a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \dots + a_{k_n} - b_n + a_{k_n+1} + \dots \quad (52)$$

Szereg ten różni się oczywiście conajwyżej porządkiem składników od szeregu (29): nie jest on jednak zbieżny, gdyż mamy przy wszelkiem naturalnem n (w myśl (51)):

$$a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \dots + a_{k_n} = A_{k_n} - A_{k_{n-1}} > 1$$

(zaś w razie zbieżności szeregu (52) wypisana suma musiałaby przy dostatecznie wielkiem n być dowolnie małą, jako suma dostatecznie dalekich kolejnych składników szeregu).

Możemy nawet dowieść, że sumą szeregu (52) jest $+\infty$. W samej rzeczy, niech R oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą.

Nierówności (51) dają w jednej chwili

$$A_{k_n} > n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (53)$$

Z drugiej strony, ponieważ wyrazy ciągu (47) są składnikami szeregu (29), więc mamy

$$-b_n = u_{k_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (54)$$

przyczem ciąg wskaźników k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest rosnący, gdyż $-b_{n+1}$ jest dalszym składnikiem szeregu (29) niż $-b_n$.

Stąd, wobec (45), znajdujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = 0,$$

skąd, w myśl (54):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Istnieje więc wskaźnik h taki, iż

$$b_n < \frac{1}{2}, \quad \text{dla } n > h. \quad (55)$$

Obierzmy, dalej, wskaźnik m tak wielki, iżby było

$$m > h \quad \text{oraz} \quad \frac{m}{2} - B_h > R. \quad (56)$$

Ciąg $r_j = k_j + j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) jest oczywiście rosnący: jeżeli więc n oznacza wskaźnik $> k_m + m$, to musi istnieć takie $p \geq m$, iż $r_p \leq n < r_{p+1}$, czyli

$$k_p + p \leq n < k_{p+1} + (p+1). \quad (57)$$

Oznaczmy przez S_n sumę n pierwszych składników szeregu (52): wobec (57) oraz (48), będzie, jak łatwo widzieć:

$$S_n = A_{k_p} - B_p + a_{k_p+1} + a_{k_p+2} + \dots + a_{n-p}$$

(w razie $n = k_p + p$ mieliśmyby poprostu $S_n = A_{k_p} - B_p$), zatem, z uwagi, że wyrazy ciągu (46) są nieujemne, oraz w myśl (53):

$$S_n > p - B_p = p - B_h - (B_p - B_h); \quad (58)$$

lecz, w myśl (48) (wobec $p \geq m > h$):

$$B_p - B_h = b_{h+1} + b_{h+2} + \dots + b_p,$$

zatem, w myśl (55):

$$B_p - B_h < \frac{p-h}{2} < \frac{p}{2}$$

i przeto wzór (58) daje:

$$S_n > p - B_h - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} - B_h,$$

skąd, wobec $p \geq m$ oraz w myśl (56):

$$S_n > R. \quad (59)$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkim wskaźniku $n > \nu$, gdzie $\nu = k_m + m$, zachodzi nierówność (59), co dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty,$$

czyli, że sumą szeregu (52) jest $+\infty$, c. b. d. o.

Dowiedliśmy zatem, że szereg, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nie może być zbieżnym bezwarunkowo. Wynika stąd natychmiast, że każdy szereg, zbieżny bezwarunkowo, musi być

zbieżnym bezwzględnie, a że w § 73 dowiedliśmy twierdzenia odwrotnego, więc udowodniliśmy

Twierdzenie 84. *Na to iżby szereg był zbieżnym bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza iżby był zbieżnym bezwzględnie.*

Wobec tw. 84 i 83 dochodzimy też do wniosku, że suma szeregu zbieżnego bezwarunkowo nie zależy od porządku składników.

§ 75. Szereg, który jest zbieżny, ale nie bezwarunkowo (lub, co wobec tw. 84 wychodzi na jedno, nie bezwzględnie), nazywamy *zbieżnym warunkowo*. Szereg zbieżny warunkowo może więc przy odpowiedniej zmianie uporządkowania składników przejść na szereg rozbieżny.

Okażemy obecnie, że z każdego szeregu o składnikach rzeczywistych, zbieżnego warunkowo, można, zmieniając odpowiednio porządek jego składników, otrzymać szereg, mający dowolną (rzeczywistą) daną naprzód sumę (tw. Riemann'a).

Niech więc (29) oznacza dany szereg o składnikach rzeczywistych, zbieżny warunkowo, i niech (46) i (47) będą kolejne jego składniki nieujemne oraz ujemne. Zachowując znakowanie z poprzedniego paragrafu, będziemy mieli wzory (50).

Niech L oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą.

Oznaczmy przez α , najmniejszy wskaźnik n , taki iż

$$A_n > L$$

(wskaźnik taki istnieje, wobec (50); dalej, oznaczmy przez β_1 najmniejszy wskaźnik n , taki iż

$$A_{\alpha_1} - B_n < L$$

(wskaźnik taki istnieje, gdyż wobec (50)): $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{\alpha_1} - B_n) = -\infty$).

Ogólnie, dla $k = 2, 3, 4, \dots$, oznaczmy przez α_k najmniejszy wskaźnik n , taki iż

$$n > \alpha_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_n - B_{\beta_{k-1}} > L, \quad (60)$$

zaś przez β_k oznaczmy najmniejszy wskaźnik n , taki iż

$$n > \beta_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_{\alpha_k} - B_n < L. \quad (61)$$

Położmy

$$v_1 = A_{\alpha_1}, \quad v_2 = -B_{\beta_1},$$

zaś dla $k > 1$: $v_{2k-1} = A_{\alpha_k} - A_{\alpha_{k-1}}, \quad v_{2k} = -B_{\beta_k} + B_{\beta_{k-1}}. \quad (62)$

Kładąc

$$V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (63)$$

będziemy mieli, wobec (62), dla $k > 1$:

$$\left. \begin{aligned} V_{2k-1} &= v_1 + v_2 + \dots + v_{2k-2} + v_{2k-1} = A_{\alpha_k} - B_{\beta_{k-1}} \\ \text{oraz} \\ V_{2k} &= v_1 + v_2 + \dots + v_{2k-1} + v_{2k} = A_{\alpha_k} - B_{\beta_k}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Ponieważ, dla $k > 1$, α_k oznacza najmniejszy wskaźnik n , spełniający warunki (60), więc dla $n = \alpha_k - 1$ nie zachodzi conajmniej jeden z tych warunków: innymi słowy, zachodzi conajmniej jedna z nierówności

$$\alpha_k - 1 \leq \alpha_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_{\alpha_{k-1}} - B_{\beta_{k-1}} \leq L. \quad (65)$$

Lecz, z definicji ciągu β_k wynika, że (dla $k > 1$):

$$A_{\alpha_{k-1}} - B_{\beta_{k-1}} < L; \quad (66)$$

ponieważ zaś ciąg α_k jest oczywiście rosnący, więc mamy $\alpha_k - 1 \geq \alpha_{k-1}$: w razie $\alpha_k - 1 \leq \alpha_{k-1}$ mamy więc $\alpha_{k-1} = \alpha_k - 1$ i, wobec (66), otrzymujemy drugą z nierówności (65).

Druga z nierówności (65) zachodzi więc w każdym razie (dla $k > 1$), skąd, z uwagi, że wobec (48)

$$A_{\alpha_{k-1}} = A_{\alpha_k} - a_{\alpha_k},$$

otrzymujemy:

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_{k-1}} \leq L + a_{\alpha_k}; \quad (67)$$

z drugiej strony, wobec definicji liczby α_k , mamy

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_{k-1}} > L; \quad (68)$$

nierówności (67) i (68) dają więc, wobec (64):

$$L < V_{2k-1} \leq L + a_{\alpha_k}, \quad \text{dla } k > 1 \quad (69)$$

Podobnie, ponieważ, dla $k > 1$, β_k oznacza najmniejszy wskaźnik, spełniający warunki (61), więc dla $n = \beta_k - 1$ nie zachodzi conajmniej jeden z nich: innymi słowy, zachodzi conajmniej jedna z nierówności:

$$\beta_k - 1 \leq \beta_{k-1} \quad \text{oraz} \quad A_{\alpha_k} - B_{\beta_{k-1}} \geq L. \quad (70)$$

Jazeli zachodzi pierwsza z tych nierówności, to, z uwagi, że ciąg β_k jest rosnący (skąd $\beta_k - 1 \geq \beta_{k-1}$), wnosimy, że $\beta_{k-1} = \beta_k - 1$, skąd, wobec (68) otrzymujemy drugą z nierówności (70). Druga

z nierówności (70) zachodzi więc (dla $k > 1$) w każdym razie, skąd, z uwagi, że wobec (48)

$$B_{\beta_{k-1}} = B_{\beta_k} + b_{\beta_k},$$

otrzymujemy:

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_k} \geq L - b_{\beta_k}; \quad (71)$$

z drugiej strony, w myśl definicji liczby β_k , mamy:

$$A_{\alpha_k} - B_{\beta_k} < L; \quad (72)$$

nierówności (71) i (72) dają więc, wobec (64):

$$L - b_{\beta_k} \leq V_{2k} < L, \quad \text{dla } k > 1. \quad (73)$$

Wyrazy ciągu (46) są składnikami szeregu (29): mamy więc

$$a_n = u_{r_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (74)$$

przyczem ciąg wskaźników r_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest rosnący, gdyż a_{n+1} jest dalszym składnikiem szeregu (29), niż a_n . Stąd, wobec (45), znajdujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{r_n} = 0,$$

skąd, wobec (74):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

oraz, z uwagi że ciąg wskaźników α_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) jest rosnący:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\alpha_k} = 0. \quad (75)$$

Podobnie znaleźćlibyśmy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{\beta_k} = 0. \quad (76)$$

Nierówności (69) i (73) dają więc w jednej chwili, wobec (75) i (76):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k-1} = L, \quad \text{oraz} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k} = L,$$

skąd, w myśl tw. 18:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = L,$$

czyli, wobec (63):

$$L = v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (77)$$

Lecz szereg (77) możemy, wobec (62) i (48), napisać w postaci:

$$L = (a_1 + a_2 + \dots + a_{\alpha_1}) + (-b_1 - b_2 - \dots - b_{\beta_1}) + \\ + (a_{\alpha_1+1} + \dots + a_{\alpha_2}) + (b_{\beta_1+1} - \dots - b_{\beta_2}) + \dots + \\ + (a_{\alpha_{k-1}+1} + \dots + a_{\alpha_k}) + (-b_{\beta_{k-1}+1} - \dots - b_{\beta_k}) + \dots,$$

przyczem składniki tej samej grupy są zawsze jednego znaku. W myśl twierdzenia, udowodnionego w § 72, możemy więc opuścić wszędzie nawiasy, nie zmieniając przez to sumy szeregu; mamy zatem:

$$L = a_1 + a_2 + \dots + a_{\alpha_1} - b_1 - b_2 - \dots - b_{\beta_1} + \\ + a_{\alpha_1+1} + \dots + a_{\alpha_2} - b_{\beta_1+1} - \dots - b_{\beta_2} + a_{\alpha_2+1} + \dots,$$

przyczem wypisany szereg różni się oczywiście co najwyżej порядkiem składników od szeregu (29).

Dowiedliśmy więc, że z szeregu (29) można przez odpowiednią zmianę porządku składników otrzymać szereg, mający dowolną, daną naprzód skończoną sumę L . W § 74 dowiedliśmy, że z szeregu (29) można, zmieniając porządek jego składników, utworzyć szereg, którego sumą jest $+\infty$, i analogicznie moglibyśmy dowieść, że można z szeregu (29) przez stosowną zmianę porządku składników, otrzymać szereg, którego sumą jest $-\infty$. Ostatecznie więc możemy wypowiedzieć

Twierdzenie 85. (Riemann'a). *Z każdego szeregu o składnikach rzeczywistych, zbieżnego warunkowo, można, zmieniając jedynie porządek jego składników, otrzymać szereg, którego suma jest dowolną, daną naprzód liczbą rzeczywistą, skończoną lub nieskończoną.*

Zauważymy jeszcze, że modyfikując nieco nasz dowód, moglibyśmy okazać, że z każdego szeregu zbieżnego warunkowo można przez odpowiednią zmianę porządku jego składników otrzymać szereg, którego sumy cząstkowe posiadają dowolne, dane naprzód (skończone lub nieskończone) granicę dolną $\underline{l}$ i górną $\bar{l}$ (byleby naturalnie było $\underline{l} \leq \bar{l}$).

Jako pouczający przykład konkretny na dowiedzione twierdzenie, zbierzemy szereg anharmoniczny

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (78)$$

Sumą tego szeregu jest, jak to wynika natychmiast ze wzoru 51 § 51, liczba $\lg 2$. Szereg (78) jest zbieżny tylko warunkowo, gdyż szeregiem odpowiednich modułów jest szereg harmoniczny.

Zmienimy porządek składników szeregu (78), wypisując najprzód p_1 pierwszych jego składników dodatnich, następnie q_1 pierwszych jego składników

ujemnych, po nich p_2 dalszych składników dodatnich, później q_2 dalszych składników ujemnych i t. d. Utworzymy w ten sposób szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p_1-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q_1} + \frac{1}{2p_1+1} + \dots + \frac{1}{2p_1+3} + \dots + \frac{1}{2(p_1+p_2)-1} - \frac{1}{2q_1+2} - \dots \quad (79)$$

różniący się co najwyżej porządkiem składników od szeregu (78). Dla zbieżności szeregu (79) potrzeba i wystarcza (w myśl twierdzeń z § 73), iżby szereg

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p_1-1} \right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q_1} \right) + \left(\frac{1}{2p_1+1} + \frac{1}{2p_1+3} + \dots + \frac{1}{2(p_1+p_2)-1} \right) + \dots \quad (80)$$

(który otrzymamy z szeregu (79), łącząc w grupy kolejne składniki jednego znaku) był zbieżny, przyczem, w razie zbieżności, oba szeregi mają tę samą sumę.

Położmy (dla danych ciągów liczb naturalnych p_n i q_n):

$$P_0 = 0, Q_0 = 0, P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad (81)$$

$$Q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

ciągi P_n i Q_n będą więc rosnące, oraz, jak łatwo widzieć, $P_n \geq n$, $Q_n \geq n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Szereg (80) będziemy mogli przepisać w postaci

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots, \quad (82)$$

gdzie

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2P_{n-1}+1} + \frac{1}{2P_{n-1}+3} + \dots + \frac{1}{2P_n-1}, \quad (83)$$

$$v_{2n} = -\frac{1}{2Q_{n-1}+2} - \frac{1}{2Q_{n-1}+4} - \dots - \frac{1}{2Q_n},$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Oznaczmy przez V_n sumę n pierwszych składników szeregu (82); w myśl (83), będziemy mieli (dla $n = 1, 2, 3, \dots$):

$$V_{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2P_n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2Q_{n-1}} \quad (84)$$

oraz

$$V_{2n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2P_n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2Q_n}. \quad (85)$$

Wobec nierówności (49) z § 51, mamy, oznaczając przez C stałą Euler'a:

$$\left| \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2P_n-1} - \frac{1}{2} \lg P_n - \frac{C}{2} - \lg 2 \right| \leq \frac{1}{2P_n},$$

zaś, wobec nierówności (47) z § 51:

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2Q_{n-1}} - \frac{1}{2} \lg Q_{n-1} - \frac{C}{2} \right| \leq \frac{1}{2Q_{n-1}},$$

oraz

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2Q_n} - \frac{1}{2} \lg Q_n - \frac{C}{2} \right| \leq \frac{1}{2Q_n},$$

wobec czego wzory (84) i (85) dają w jednej chwili:

$$\left| V_{2n-1} - \lg \left(2 \sqrt{\frac{P_n}{Q_{n-1}}} \right) \right| \leq \frac{1}{2P_n} + \frac{1}{2Q_{n-1}},$$

oraz

$$\left| V_{2n} - \lg \left(2 \sqrt{\frac{P_n}{Q_n}} \right) \right| \leq \frac{1}{2P_n} + \frac{1}{2Q_n},$$

skąd, ponieważ $P_n \geq n$ oraz $Q_n \geq n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[V_{2n-1} - \lg \left(2 \sqrt{\frac{P_n}{Q_{n-1}}} \right) \right] &= 0 \\ \text{oraz} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[V_{2n} - \left(\lg 2 \sqrt{\frac{P_n}{Q_n}} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Jeżeli więc chcemy, żeby było

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = x,$$

to musi być, wobec (86):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lg \left(2 \sqrt{\frac{P_n}{Q_{n-1}}} \right) = x \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lg \left(2 \sqrt{\frac{P_n}{Q_n}} \right) = x, \quad (87)$$

co daje, jak łatwo widzieć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_{n-1}} = \frac{e^{2x}}{4} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \frac{e^{2x}}{4},$$

skąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = 1,$$

zatem, wobec $Q_{n-1} = Q_n - q_n$ (w myśl (81)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0.$$

Zatem, jeżeli chcemy, żeby było $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = x$, to musi być

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \frac{e^{2x}}{4} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0. \quad (88)$$

Z drugiej strony, łatwo widzieć, że założenia (88) pociągają za sobą wzory (87) i przeto, w myśl (86), wzór $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = x$.

Dowiedliśmy zatem, że na to iżby sumą szeregu (79) była liczba rzeczywista x , potrzeba i wystarcza, aby spełnione były następujące warunki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{q_1 + q_2 + \dots + q_n} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{q_1 + q_2 + \dots + q_n} = \frac{e^{2x}}{4}. \quad (89)$$

Aby przy dowolnym danym rzeczywistym x były spełnione warunki (89), wystarczy np. przyjąć

$$p_n = E n^2 e^{2x} - E(n-1)^2 e^{2x} + 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$q_n = 8n.$$

Liczby p_n i q_n , wyznaczone z tych wzorów, będą oczywiście naturalne, przyczem będzie

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = E n^2 e^{2x} + n \quad \text{oraz} \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 4n(n+1),$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$, skąd, jak łatwo widzieć, wynikają wzory (89).

Ciekawym jest jeszcze przypadek szczególny, kiedy

$$p_n = p \quad \text{oraz} \quad q_n = q, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie p i q są dwie dane liczby naturalne. Będziemy tu mieli stale

$$\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{q_1 + q_2 + \dots + q_n} = \frac{p}{q} \quad \text{i warunki (89) będą spełnione dla } x = \lg \left(2 \sqrt{\frac{p}{q}} \right).$$

Przeto:

Zmieniając porządek składników szeregu (78) w ten sposób, iżby po każdym p składnikach dodatnich następowało q składników ujemnych, przyczem kolej składników tego samego znaku pozostaje tą samą co w szeregu (78), otrzymamy szereg, którego sumą jest liczba $\lg 2 \sqrt{\frac{p}{q}}$.

W szczególności np. dla $p = 2$, $q = 1$, wobec $\lg 2 \sqrt{2} = \frac{3}{2} \lg 2$, otrzymujemy:

$$\frac{3}{2} \lg 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Dla $p = 1$, $q = 2$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

co można też wyprowadzić ze wzoru (78) na $\lg 2$ drogą elementarną, na podstawie tożsamości (Dirichlet'a):

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Ze wzorów (86) wynika jeszcze, że kładąc

$$p_n = n, \quad q_n = 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

otrzymamy $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ i przeto:

$$+\infty = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots$$

Podobnie znaleźćlibyśmy:

$$-\infty = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{9} - \dots$$

Zauważymy jeszcze, że z każdego szeregu, zbieżnego warunkowo, otrzymać można szereg o dowolnej, danej naprzód sumie, zmieniając jedynie porządek składników jednego znaku. Można mianowicie udowodnić następujące twierdzenie:

Jeżeli sumą szeregu warunkowo zbieżnego jest U , to zmieniając jedynie porządek jego dodatnich składników (z pozostawieniem na miejscu każdego składnika ≤ 0) można otrzymać szereg, którego sumą jest dowolna, dana naprzód liczba mniejsza od U , zmieniając zaś jedynie porządek ujemnych składników naszego szeregu, możemy z niego otrzymać szereg, którego sumą jest dowolna, dana naprzód liczba większa od U ¹⁾.

Godnem uwagi jest też, że można zbudować szereg wielomianów całkowitych, który przy odpowiednim uporządkowaniu składników przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą²⁾.

Można też mówić o szeregach rozbieżnych bezwarunkowo, t. j. rozbieżnych przy każdym uporządkowaniu składników. Pomijając przypadek kiedy składniki szeregu nie zmierzają do zera, łatwo widzieć, że na to iżby szereg był rozbieżny bezwarunkowo, potrzeba i wystarcza iżby jego składniki jednego znaku tworzyły szereg zbieżny (albo skończony), drugiego zaś — rozbieżny. (Suma szeregu jest wówczas zawsze nieskończoną: bądź zawsze $+\infty$, bądź zawsze $-\infty$).

Powiemy wreszcie parę słów o szeregach warunkowo zbieżnych o składnikach zespolonych. Co się tyczy takich szeregów, to wogóle nie każdą liczbę zespoloną może przedstawiać ich suma przy odpowiednim uporządkowaniu

składników. Np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} a}{n}$, gdzie a oznacza dowolną daną liczbę

zespoloną, który otrzymujemy z szeregu anharmonicznego (78), mnożąc jego składniki przez a , przedstawiać może przy odpowiednim uporządkowaniu składników, jak łatwo widzieć, tylko liczby zespolone postaci ax , gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Są jednak szeregi o składnikach zespolonych, których suma przed-

¹⁾ Dowód tego twierdzenia znajduje się w mej pracy: „Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes”. Biuletyn Akad. Krakowskiej z roku 1911, p. 149

²⁾ Zob. moją odnośną pracę w Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Umiejętn. w Krakowie, luty 1912.

stawiać może przy odpowiednim uporządkowaniu składników każdą daną na-
przód liczbę zespoloną. Takim jest np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n}$. Szereg ten możemy

bowiem rozpatrywać jako sumę szeregów $\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$ oraz $\left(\frac{i}{2} - \frac{i}{4} + \frac{i}{6} - \dots\right) = i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \dots\right)$, otrzymaną przez wstawienie składników drugiego z tych szeregów między składniki pierwszego. Szeregi o składnikach rzeczywistych $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ oraz $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \dots$ są zbieżne warunkowo: możemy więc, dla dowolnych danych liczb rzeczywistych x i y , tak zmienić porządek składników pierwszego z nich, iżby sumą otrzymanego przez to szeregu $\sum u_n$ była liczba x , zaś drugiego — iżby sumą otrzymanego w ten sposób szeregu $\sum v_n$ była liczba y . Sumą szeregu

$$u_1 + iv_1 + u_2 + iv_2 + u_3 + iv_3 + \dots$$

będzie oczywiście liczba zespolona $x + yi$, przyczem szereg ten różnić się będzie co najwyżej porządkiem składników od szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n}$.

Bliższa analiza doprowadza do wniosku, że są trzy rodzaje szeregów zbieżnych o składnikach zespolonych: 1) Szeregi, które mogą przy różnych uporządkowaniach składników przedstawiać tylko jedną liczbę, 2) szeregi, które przy odpowiednim uporządkowaniu składników mogą przedstawiać każdą liczbę zespoloną postaci $ax + b$, gdzie a i b są dane liczby zespolone, zaś x jest dowolną liczbą rzeczywistą [takim np. jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}a}{n} + \frac{b}{2^n}\right)$], oraz

3) szeregi, których suma przy odpowiednim uporządkowaniu składników przedstawiać może dowolną liczbę zespoloną¹⁾.

§ 76. Rozpoznawanie zbieżności i rozbieżności szeregów.

O zbieżności lub rozbieżności szeregów wnosimy najczęściej przez porównanie ich składników ze składnikami szeregów, których zbieżność lub rozbieżność jest nam znana, opierając się przytem na następujących twierdzeniach:

Twierdzenie 86. Jeżeli szereg o składnikach niewjemnych

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (90)$$

jest zbieżny, zaś składniki szeregu

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (91)$$

spełniają nierówność

$$|v_n| \leq au_n, \quad \text{dla } n > \mu, \quad (92)$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, niezależną od n , to szereg (91) jest też zbieżny (bezwzględnie).

Dowód. Załóżmy, że szereg (90) jest zbieżny, oraz że składniki szeregu (91) spełniają nierówność (92). Wobec (92) mamy więc

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+k}| \leq a(u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}), \quad (93)$$

dla $n > \mu, k = 1, 2, 3, \dots$

Lecz, wobec zbieżności szeregu (90) i w myśl tw. 81, dla dowolnej danej liczby dodatniej ε istnieje takie ν (zależne od ε), iż

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} < \frac{\varepsilon}{a}, \quad \text{dla } n > \nu, k = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (93), dla n większych jednocześnie od μ i ν :

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+k}| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

co, w myśl tw. 81, dowodzi zbieżności szeregu

$$v_1 + |v_2| + |v_3| + \dots,$$

czyli zbieżności bezwzględnej szeregu (91), c. b. d. o.

W szczególności, jeżeli szereg (90) jest zbieżny, s oznacza jego sumę, zaś $v_n = au_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (gdzie a oznacza liczbę niezależną od n), to sumą szeregu (91) jest liczba as . Dla dowodu wystarczy zauważyć, że oznaczając przez s_n i σ_n odpowiednie sumy cząstkowe szeregów (90) i (91), mamy stale $\sigma_n = as_n$, skąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad \text{czyli } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = as.$$

Mamy więc, w razie zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, przy wszelkim a , niezależnym od n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

co wyrażamy, mówiąc, że czynnik niezależny od zmiennej sumowania możemy w szeregu nieskończonym wyprowadzić przed znak sumy.

¹⁾ Dowód tego twierdzenia podał P. Lévy w Nouv. Ann. math. (4) 5 (1905), p. 506.

Twierdzenie 87. Jeżeli szereg o składnikach nieujemnych Σu_n jest rozbieżny, i jeżeli zachodzi nierówność

$$v_n \geq au_n, \text{ dla } n > \mu, \quad (94)$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, niezależną od n , to szereg Σv_n jest rozbieżny.

Dowód. Mamy, w myśl (94) i wobec $a > 0$:

$$u_n \leq \frac{v_n}{a}, \text{ dla } n > \mu;$$

gdyby więc szereg Σv_n był zbieżny, to, w myśl tw. 86, byłby zbieżny i szereg Σu_n , wbrew założeniu. Szereg Σv_n jest więc rozbieżny, c. b. d. o.

Twierdzenie 88. Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest zbieżny, jeżeli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a, \text{ dla } n > \mu, \quad (95)$$

gdzie a oznacza liczbę dodatnią (niezależną od n), mniejszą od jedności.

Dowód. Załóżmy, że składniki szeregu Σu_n są dodatnie i spełniają nierówność (95): mamy więc

$$u_{n+1} \leq au_n, \text{ dla } n > \mu;$$

jeżeli więc k oznacza wskaźnik $> \mu$, to będzie $u_{k+1} \leq au_k$, $u_{k+2} \leq au_{k+1} \leq a^2 u_k$, $u_{k+3} \leq au_{k+2} \leq a^3 u_k$, i t. d., ogólnie

$$u_n \leq a^{n-k} u_k, \text{ dla } n > k$$

i przeto, kładąc

$$\frac{u_k}{a^k} = A,$$

będziemy mieli

$$u_n \leq A a^n, \text{ dla } n > k. \quad (96)$$

Lecz szereg Σa^n jest, jak wiemy (§ 70), zbieżny dla $0 < a < 1$: wnosimy stąd, wobec (96) i w myśl tw. 86, że szereg Σu_n jest zbieżny, c. b. d. o.

Zauważymy jednak, że jeżeli o składnikach szeregu Σu_n wiemy tylko to, że stosunek $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ jest stale mniejszym od jedności, to nie możemy jeszcze wnioskować o zbieżności szeregu. Np. szereg harmoniczny $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, pomimo że w nim stale $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$.

Zwróćmy uwagę też na to, że warunek tw. 88 nie jest konieczny dla zbieżności szeregu: np. szereg

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

(który po połączeniu w grupy każdych dwóch równych składników daje postęp geometryczny) jest zbieżny, chociaż przy nieparzystym n mamy stale $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Twierdzenie 89. Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest rozbieżny, jeżeli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \text{ dla } n > \mu.$$

Dowód. W myśl naszego założenia mamy, oznaczając przez k wskaźnik $> \mu$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \text{ dla } n \geq k,$$

skąd, w jednej chwili:

$$u_n \geq u_k, \text{ dla } n \geq k,$$

co dowodzi (wobec $u_k > 0$), że nie może być $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Szereg Σu_n jest więc rozbieżny, c. b. d. o.

Twierdzenie 90. Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest

$$\text{zbieżny} - \text{ jeżeli } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \quad (97)$$

$$\text{rozbieżny} - \text{ jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1. \quad (98)$$

Dowód. Załóżmy, że zachodzi nierówność (97). Oznaczając przez a liczbę (dodatnią) pośrednią między $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ oraz jednością, będziemy mieli

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < a \text{ oraz } a < 1;$$

pierwsza z tych nierówności dowodzi, w myśl tw. 6, iż

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, wobec drugiej i w myśl tw. 88, wnosimy o zbieżności szeregu Σu_n .

Założmy teraz, że zachodzi nierówność (98). W myśl tw. 7 wnosimy stąd, że

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, w myśl tw. 89, wynika, że szereg $\sum u_n$ jest rozbieżny. Twierdzenie 90 udowodniliśmy zatem w zupełności. Jako natychmiastowy wniosek z tw. 90 otrzymujemy

Twierdzenie 91. (Cecha d'Alembert'a). *Szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ jest zbieżny, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, rozbieżny, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.*

Przykłady.

Szereg nieskończony

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (99)$$

jest zbieżny bezwzględnie przy wszelkim zespolonym z .

Istotnie, dla $z=0$ jest on zbieżny oczywiście, zaś dla $z \neq 0$ mamy $|z| > 0$, i dla składników szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 1 + \left| \frac{z}{1!} \right| + \left| \frac{z^2}{2!} \right| + \dots$$

$$\text{mamy } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \text{ skąd } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,$$

co, w myśl tw. 90, dowodzi o zbieżności szeregu $\sum u_n$ i przeto o bezwzględnej zbieżności szeregu (99).

Wynika stąd, że przy wszelkim zespolonym z :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n!} = 0. \quad (100)$$

Warto zauważyć, że wyrazy ciągu $v_n = \frac{z^n}{n!}$, aczkolwiek granicą ich jest zero, przy wielkich z , początkowo, dość szybko nawet, wzrastają: np. dla $z=10$, mamy $v_1=10$, $v_2=50$, $v_3=166\frac{2}{3}$, $v_4=416\frac{2}{3}$, $v_5=833\frac{1}{3}$, $v_6=1388\frac{2}{3}$, ...

Sądząc z zachowania się pierwszych kilku składników możnaby przypuszczać, że wyrazy naszego ciągu wzrastają nieograniczenie, tymczasem jest wręcz przeciwnie, gdyż, jak dowiedliśmy, wyrazy v_n nieograniczenie maleją.

Niech teraz a oznacza dowolną daną (jak chcąc zresztą małą)

liczbę dodatnią. Kładąc we wzorze (100) $z = \frac{1}{a}$, otrzymamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n! a^n} = 0,$$

skąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! a^n = +\infty$$

przy wszelkiem dodatnim a .

Jako drugi przykład, weźmy pod rozwagę szereg $\sum u_n$, gdzie $u_n = \frac{x^n}{n}$, zaś $x > 0$. Mamy tu

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} x, \text{ skąd } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

i przeto, w myśl tw. 91, szereg nasz jest zbieżny dla $x < 1$ oraz rozbieżny dla $x > 1$. Dla $x=1$ kryterjum d'Alembert'a nie pozwala wnioskować o zbieżności lub rozbieżności naszego szeregu, skądinąd jednak wiemy, że jest on rozbieżny (jako szereg harmoniczny).

Podobnie, dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ kryterjum d'Alembert'a

nie jest stosowne, gdyż znowu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, szereg zaś jest zbieżny,

gdyż jak łatwo widzieć $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) (zob. § 70).

Widzimy więc, że jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

to szereg $\sum u_n$ może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny.

§ 77. Twierdzenie 92. *Szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ jest zbieżny, jeżeli dla $n > \mu$ mamy $\sqrt[n]{u_n} \leq a$, gdzie $a < 1$, zaś rozbieżny, jeżeli dla nieskończonego wielu składników szeregu mamy $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$.*

Dowód. Nierówność $\sqrt[n]{u_n} \leq a$ możemy napisać w postaci: $u_n \leq a^n$; jeżeli więc nierówność ta zachodzi dla $n > \mu$, to, wobec

zbieżności szeregu Σa^n dla $0 < a < 1$, oraz w myśl tw. 86, wnosimy o zbieżności szeregu Σu_n .

Jeżeli zaś dla nieskończonego wielu składników u_n mamy $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, to mamy też dla tych składników $u_n \geq 1$, co dowodzi rozbieżności naszego szeregu. Udowodniliśmy więc tw. 92. Jako łatwy wniosek z niego otrzymujemy

Twierdzenie 93. Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest

$$\text{zbieżny} \quad \text{— jeżeli} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

$$\text{rozbieżny} \quad \text{— jeżeli} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1.$$

Jeżeli bowiem zachodzi pierwsza z tych nierówności, to mamy w myśl tw. 6 (oznaczając przez a liczbę pośrednią między $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ oraz 1):

$$\sqrt[n]{u_n} < a < 1, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd, w myśl tw. 92, wnosimy o zbieżności szeregu Σu_n .

Jeżeli zaś zachodzi nierówność $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, to, w myśl tw. 6,

musi być, dla nieskończonego wielu różnych n , $\sqrt[n]{u_n} > 1$, czyli $u_n > 1$, skąd wnosimy o rozbieżności szeregu Σu_n . Udowodniliśmy więc tw. 93. Jako szczególny przypadek jego otrzymujemy:

Twierdzenie 94. (Cecha Cauchy'ego). Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest

$$\text{zbieżny} \quad \text{— jeżeli} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

$$\text{rozbieżny} \quad \text{— jeżeli} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1.$$

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, to szereg Σu_n może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny. Np. dla $u_n = \frac{1}{n^k}$, gdzie k oznacza liczbę naturalną,

mamy $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{n}}$; lecz, w myśl wzoru (178) z § 46, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \quad \text{skąd} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

Dla $k = 1$ otrzymujemy szereg rozbieżny (harmoniczny), zaś dla $k = 2$ — szereg zbieżny, gdyż składniki jego są odpowiednio nie większe od składników szeregu zbieżnego

$$2 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Twierdzenie 93 nie jest, oczywiście, stosowne tylko wtedy, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, natomiast twierdzenie 90 nie jest stosowne wtedy, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Okażemy teraz, że twierdzenie 93 jest ogólniejsze, niż twierdzenie 90, t. j. że tw. 93 daje się stosować w tych wszystkich przypadkach, w których daje się stosować tw. 90, ale nie naodwrot. Udowodnimy mianowicie, że dla każdego ciągu nieskończonego liczb dodatnich u_n zachodzą nierówności:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}. \quad (101)$$

Położymy

$$\sqrt[n]{u_n} = a_n, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = b_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (102)$$

Mamy stąd przy naturalnem k :

$$u_{k+1} = b_k u_k, \quad u_{k+2} = b_{k+1} u_{k+1} = b_{k+1} b_k u_k,$$

ogólnie, dla $n > k$:

$$u_n = b_{n-1} b_{n-2} \dots b_k u_k. \quad (103)$$

Położymy, dalej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \quad (104)$$

— będzie to oczywiście liczba rzeczywista nieujemna. Gdyby było $L = +\infty$, pierwsza z nierówności (101) byłaby prawdziwą oczywiście, możemy więc dalej, dla jej dowodu, zakładać, że L jest liczbą skończoną.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec (104) oraz w myśl tw. 6, będziemy mieli

$$b_m \leq L + \varepsilon, \quad \text{dla } m > \mu,$$

skąd, wobec (103), będziemy mieli, dla $k > \mu$:

$$u_n \leq (L + \varepsilon)^{n-k} u_k, \quad \text{dla } n > k;$$

kładąc (przy obranem $k > \mu$)

$$\frac{u_k}{(L + \varepsilon)^k} = c$$

(będzie to liczba rzeczywista dodatnia), otrzymamy więc

$$u_n \leq (L + \varepsilon)^n c, \quad \text{dla } n > k,$$

skąd

$$\sqrt[n]{u_n} \leq (L + \varepsilon) \sqrt[n]{c}, \quad \text{dla } n > k. \quad (105)$$

Lecz, w myśl wzoru (86) z § 43, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

skąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L + \varepsilon) \sqrt[n]{c} = L + \varepsilon;$$

nierówność (105) daje więc, w myśl tw. 8:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq L + \varepsilon,$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε , pociąga za sobą nierówność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq L,$$

ką, wobec (104) i (102), przedstawia pierwszą z nierówności (101).

Udowodnimy teraz drugą z nierówności (101). Położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad (106)$$

— będzie to oczywiście liczba nieujemna. W razie $l = 0$ druga z nierówności (101) zachodzi oczywiście: możemy więc założyć, że $l > 0$. Założymy na dno, że l jest liczbą skończoną.

Niech ε oznacza liczbę dodatnią $< l$. Wobec (102) i (106) oraz w myśl tw. 7, będzie

$$b_m \geq l - \varepsilon, \text{ dla } m > \mu,$$

skąd, biorąc wskaźnik $k > \mu$, będziemy mieli, wobec (103):

$$u_n \geq (l - \varepsilon)^{n-k} u_k, \text{ dla } n > k;$$

kładąc (przy obranem $k > \mu$)

$$\frac{u_k}{(l - \varepsilon)^k} = c,$$

będziemy więc mieli

$$u_n \geq (l - \varepsilon)^n c, \text{ dla } n > k,$$

skąd

$$\sqrt[n]{u_n} \geq (l - \varepsilon) \sqrt[n]{c},$$

skąd, jak wyżej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \geq l - \varepsilon$$

i przeto, wobec dowolności liczby dodatniej ε :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \geq l,$$

co, wobec (106), przedstawia drugą z nierówności (101). Nierówność tę udowodniliśmy więc w przypadku, kiedy l jest liczbą skończoną.

Gdyby było $l = +\infty$, mielibyśmy, wobec (106) i w myśl tw. 7, przy wszelkim danem rzeczywistym A :

$$b_m \geq A, \text{ dla } m > \mu,$$

skąd, jak wyżej, znaleźlibyśmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \geq A,$$

co, wobec dowolności A , daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty;$$

druga z nierówności (101) zachodzi więc w każdym razie.

Nierówności (101) zostały zatem dowiedzione w zupełności.

Jako natychmiastowy wniosek z nierówności (101) otrzymujemy

Twierdzenie 95. Jeżeli dla ciągu nieskończonego liczb dodatnich u_n istnieje

granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (skończona lub nieskończona), to istnieje też granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, przyczem obie te granice są równe (Cauchy).

Więc np., kładąc $u_n = n!$, będziemy mieli $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$,

skąd, w myśl tw. 95, wnosimy że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Dla $u_n = n$, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, wnosimy, w myśl tw. 95,

że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Niech teraz a_n oznacza ciąg liczb dodatnich, posiadający granicę (skończoną lub nieskończoną) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Kładąc $u_n = a_1 a_2 \dots a_n$, będziemy mieli $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$)

i przeto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, skąd, w myśl tw. 95: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$.

Dowiedliśmy więc

Twierdzenie 96. Jeżeli $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to

mamy też $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$.

Z twierdzenia 95 wynika natychmiast, że twierdzenie 94 daje się stosować dla rozpoznawania zbieżności lub rozbieżności szeregów zawsze wtedy, jeżeli daje się stosować twierdzenie 91. Lecz niekiedy nie naodwrot. Weźmy bowiem pod rozwagę szereg $\sum u_n$, gdzie

$$u_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (107)$$

Wobec (107) mamy tu $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{6}$ dla n parzystych, zaś $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}$ dla n nieparzystych, zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{6}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2};$$

względem szeregu $\sum u_n$ nie jest więc stosowne ani twierdzenie 91, ani też twierdzenie 90. Natomiast, wobec (107), mamy

$$\frac{1}{2^n} \leq u_n \leq \frac{3}{2^n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{2}}$$

i przeto, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2},$$

skąd, w myśl tw. 91, wnosimy o zbieżności szeregu $\sum u_n$.

Wynika stąd, że kryterjum Cauchy'ego jest ogólniejsze niż kryterjum d'Alembert'a. To ostatnie znowu posiada w porównaniu z pierwszym tę zaletę, że stosunek dwóch kolejnych składników szeregu (oraz ewentualna jego granica) zazwyczaj łatwiej obliczać się daje niż n -ty pierwiastek z n -go składnika

§ 78. Twierdzenie 97. (Cecha Kummera). *Na to, żeby szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby istniał ciąg nieskończony liczb dodatnich a_n , oraz liczba dodatnia α , takie iż*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \alpha, \quad \text{dla } n > \mu. \quad (108)$$

Dowód. Okażemy, że warunek nasz jest wystarczający.

Nierówność (108) możemy przepisać w postaci

$$a u_{n+1} < a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}, \quad \text{dla } n > \mu.$$

Oznaczając przez k wskaźnik $> \mu$, będziemy więc mieli dla $n > k$:

$$\begin{aligned} a u_{k+1} &< a_k u_k - a_{k+1} u_{k+1}, \\ a u_{k+2} &< a_{k+1} u_{k+1} - a_{k+2} u_{k+2}, \\ &\dots \dots \dots \\ a u_n &< a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n. \end{aligned}$$

skąd, po dodaniu stronami, kładąc $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (wobec $a_n > 0$ oraz $u_n > 0$):

$$\alpha(s_n - s_k) < a_k u_k - a_n u_n < a_k u_k,$$

i przeto

$$s_n < s_k + \frac{a_k u_k}{\alpha}, \quad \text{dla } n > k,$$

co dowodzi, że ciąg s_n jest ograniczony, zatem — jako rosnący — zbieżny. Szereg $\sum u_n$ jest więc zbieżny, c. b. d. o.

Załóżmy teraz, że szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ jest zbieżny i niech s oznacza jego sumę, s_n — sumy cząstkowe.

Położmy

$$a_n = \frac{s - s_n}{u_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (109)$$

— będzie to ciąg nieskończony liczb dodatnich, przytem będzie w myśl (109):

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{u_{n+1}} = 1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

co dowodzi, że warunek naszego twierdzenia jest konieczny. Twierdzenie 97 udowodniliśmy zatem w zupełności. Przyjmując w tem twierdzeniu $a_n = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), otrzymujemy jako natychmiastowy wniosek:

Twierdzenie 98. (Prawidło Raabe'go). *Szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ jest zbieżny, jeżeli, dla $n > \mu$:*

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > a, \quad \text{gdzie } a > 1.$$

Okażemy obecnie, że szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ jest rozbieżny, jeżeli dla $n > \mu$

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1. \quad (110)$$

Nierówność (110) możemy oczywiście przepisać w postaci

$$(n+1) u_{n+1} \geq n u_n;$$

jeżeli więc k oznacza wskaźnik $> \mu$, to mamy, dla $n > k$:

$$n u_n \geq k u_k,$$

czyli

$$u_n \geq \frac{k u_k}{n}, \quad \text{dla } n > k,$$

co, w myśl tw. 87 i wobec rozbieżności szeregu harmonicznego, dowodzi, że szereg $\sum u_n$ jest rozbieżny, c. b. d. o.

Jako łatwy wniosek z tw. 98 otrzymujemy

Twierdzenie 99. *Szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ jest*

$$\text{zbieżny} \text{ — jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1,$$

$$\text{rozbieżny} \text{ — jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1.$$

Przyjmijmy, w szczególności $u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, gdzie $\alpha > 0$. Będzie tu

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1+\alpha} - 1 \right]. \quad (111)$$

Lecz, w myśl nierówności (171) i (143) z § 46 (dla $\alpha > 0$):

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1+\alpha} \geq 1 + \frac{1+\alpha}{n}, \quad \text{dla } n > 1 + \alpha$$

skąd, wobec (111):

$$\frac{1+\alpha}{1 - \frac{1}{n}} \geq n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \alpha, \quad \text{dla } n > 1 + \alpha$$

skąd, w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = 1 + \alpha$$

i przeto, wobec $\alpha > 0$ i w myśl tw. 99 wnosimy, że szereg $\sum u_n$ jest zbieżny.

Natomiast szereg $\sum \frac{1}{n}$, a więc tembardziej, każdy szereg $\sum_{n=\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, gdzie $\alpha < 0$, jest rozbieżny. Mamy więc wniosek:

Szeregi

$$\frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \dots \quad (112)$$

są zbieżne dla $\sigma > 1$, oraz rozbieżne dla $\sigma \leq 1$.

Zauważymy, że zbieżność szeregu (112) dla $\sigma > 1$ możemy z łatwością udowodnić też bezpośrednio. Oznaczając mianowicie przez s_n sumę n pierwszych składników szeregu (112), mamy oczywiście przy naturalnem k :

$$s_2^k = s_2 + (s_{2^2} - s_2) + (s_{2^3} - s_{2^2}) + \dots + (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}). \quad (113)$$

Lecz

$$s_2^k - s_{2^{k-1}} = \frac{1}{(2^{k-1} + 1)^\sigma} + \frac{1}{(2^{k-1} + 2)^\sigma} + \dots + \frac{1}{(2^{k-1} + 2^{k-1})^\sigma} < \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\sigma}} = \frac{1}{2^{(k-1)(\sigma-1)}},$$

skąd, wobec (113):

$$s_2^k < s_2 + \frac{1}{2^{\sigma-1}} + \frac{1}{2^{2(\sigma-2)}} + \dots + \frac{1}{2^{(k-1)(\sigma-1)}} = s_2 + \frac{\frac{1}{2^{\sigma-1}} - \frac{1}{2^{k(\sigma-1)}}}{1 - \frac{1}{2^{\sigma-1}}},$$

i przeto, dla $\sigma > 1$:

$$s_2^k < \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{\sigma-1}-1} = A_\sigma, \quad (114)$$

gdzie A_σ nie zależy od k .

Jeżeli teraz n oznacza dowolny dany wskaźnik, to możemy obrać k takie, iżby było $2^k \geq n$, i przeto będzie $s_n \leq s_{2^k}$, skąd wobec (114):

$$s_n < A_\sigma.$$

Ciąg s_n jest więc ograniczony i przeto (jako rosnący) zbieżny, co dowodzi, że szereg (112) jest zbieżny, dla $\sigma > 1$.

Jako przykład rozbieżnego szeregu (112), weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \quad (115)$$

Oznaczmy przez s_n sumę n pierwszych składników szeregu (115). Przy naturalnem k mamy tożsamość

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = -\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2};$$

kładąc w niej kolejno $k=1, 2, \dots, n$ i dodając stronami, otrzymujemy:

$$s_n - 2\sqrt{n} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2}. \quad (116)$$

Mamy oczywiście

$$\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

co, wobec zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma}$ dla $\sigma = \frac{3}{2}$, dowodzi o zbieżności szeregu

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2}. \quad (117)$$

Wzory (116) i (117) dają więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right) = -A,$$

gdzie A oznacza pewną stałą dodatnią.

§ 79. Niech teraz u_n oznacza ciąg nieskończony liczb dodatnich; połóżmy

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (118)$$

Przy dodatnim ϱ mamy, w myśl wzoru (144) z § 46 (tw. 62) (dla $x = \varrho$, $d = \frac{u_n}{s_{n-1}}$), z uwagi, że, w myśl (118), $1 + \frac{u_n}{s_{n-1}} = \frac{s_n}{s_{n-1}}$:

$$\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right)^\varrho - 1 \geq \frac{\varrho u_n}{s_n}, \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots,$$

skąd

$$\frac{1}{\varrho} \left[\frac{1}{s_{n-1}^\varrho} - \frac{1}{s_n^\varrho} \right] \geq \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}}, \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots$$

oraz

$$\sum_{n=2}^m \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}} \leq \frac{1}{\varrho} \left[\frac{1}{s_1^\varrho} - \frac{1}{s_m^\varrho} \right] < \frac{1}{\varrho s_1^\varrho}, \quad \text{dla } m = 2, 3, 4, \dots,$$

skąd wnosimy, że szereg o składnikach dodatnich $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}}$ jest ograniczony i przeto zbieżny. Mamy więc

Twierdzenie 100. Jeżeli u_n jest ciągiem nieskończonym liczb dodatnich, $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), zaś ϱ oznacza liczbę dodatnią, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{s_n^{1+\varrho}} \quad (119)$$

jest zbieżny.

Załóżmy, w szczególności, że szereg $\sum u_n$ jest szeregiem rozbieżnym o składnikach dodatnich: powiadam, że szereg (119) będzie rozbieżny dla $\varrho \leq 0$.

W samej rzeczy, możemy napisać, wobec (118):

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}} + \dots + \frac{u_{n+k}}{s_{n+k}} > \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}}{s_{n+k}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+k}},$$

zaś dla dostatecznie wielkich k , przy danem n , musi być $\frac{s_n}{s_{n+k}} < \frac{1}{2}$, gdyż $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+k} = \infty$, skoro szereg $\sum u_n$ jest rozbieżny. Istnieje więc dla każdego naturalnego n takie k , iż

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}} + \dots + \frac{u_{n+k}}{s_{n+k}} > \frac{1}{2},$$

co dowodzi, że szereg (119) jest rozbieżny dla $\varrho = 0$ i, tembardziej, dla $\varrho < 0$. Stąd, wobec tw. 100, mamy

Twierdzenie 101 (Dinie'go). Jeżeli $\sum u_n$ jest szeregiem rozbieżnym o składnikach dodatnich, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^{1+\varrho}}$$

są zbieżne dla $\varrho > 0$ oraz rozbieżne dla $\varrho \leq 0$.

Stąd, w szczególności, dla $u_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), wnosimy o zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

dla $\varrho > 0$ i rozbieżności ich dla $\varrho \leq 0$.

Przyjmijmy, dalej $u_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$): wobec rozbieżności szeregu harmonicznego, wnosimy, w myśl tw. 101, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)^{1+\varrho}} \quad (120)$$

są zbieżne dla $\varrho > 0$ i rozbieżne dla $\varrho \leq 0$. Lecz, w myśl nierówności (46) z § 51, mamy

$$\lg n + C + \frac{1}{n} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \lg n + C, \quad (121)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$

gdzie C oznacza pewną stałą dodatnią: jest więc

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \lg n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

i przeto składniki szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg n} \quad (122)$$

są odpowiednio większe od składników szeregu (120) dla $\varrho = 0$, który jest rozbieżny. Szereg (122) jest więc rozbieżny, i, tembardziej, szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\lg n)^{1+\varrho}} \quad (123)$$

są rozbieżne dla $\varrho \leq 0$.

Z drugiej strony, wobec (121), mamy, jak łatwo widzieć, dla dostatecznie wielkich n :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 2 \lg n$$

i przeto, dla $\varrho > 0$:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)^{1+\varrho} < 2^{1+\varrho} (\lg n)^{1+\varrho}:$$

składniki szeregu (123) są więc (dla $\varrho > 0$), poczynając od pewnego miejsca, mniejsze od składników szeregu (120), pomnożonych przez $2^{1+\varrho}$, skąd, wobec zbieżności szeregów (120) dla $\varrho > 0$, wynika (w myśl tw. 86) zbieżność szeregów (123) dla $\varrho > 0$.

Zatem:

Szeregi (123) są zbieżne dla $\varrho > 0$ i rozbieżne dla $\varrho \leq 0$.

Jako zastosowanie otrzymanych wyników, wprowadzimy t. zw. kryterja logarytmiczne.

Twierdzenie 102. Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest

$$\text{zbieżny} - \text{jeżeli } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg u_n}{\lg n} < -1, \quad (124)$$

$$\text{rozbieżny} - \text{jeżeli stałe } \frac{\lg u_n}{\lg n} \geq -1. \quad (125)$$

Dowód. Zakładając, że zachodzi warunek (124) i oznaczając przez $-(1+\varrho)$ liczbę pośrednią między $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg u_n}{\lg n}$ oraz -1 , będziemy mieli $\varrho > 0$ oraz, w myśl tw. 6, dla dostatecznie wielkich n :

$$\frac{\lg u_n}{\lg n} < -(1+\varrho),$$

skąd

$$\lg u_n < \lg \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

oraz

$$u_n < \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

co, wobec zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}}$ dla $\varrho > 0$, dowodzi zbieżności szeregu Σu_n .

Załóżmy teraz, że zachodzi warunek (125), dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Mamy stąd $\lg u_n \geq \lg \frac{1}{n}$, zatem $u_n \geq \frac{1}{n}$, skąd, wobec rozbieżności szeregu harmonicznego, wnosimy o rozbieżności szeregu Σu_n . Udowodniliśmy więc tw. 102. Jako natychmiastowy wniosek z dowiedzonego twierdzenia, otrzymujemy

Twierdzenie 102^a. Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest

$$\text{zbieżny, jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg u_n}{\lg n} < -1,$$

$$\text{rozbieżny, jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg u_n}{\lg n} > -1.$$

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 103. Szereg o składnikach dodatnich Σu_n jest

$$\text{zbieżny} - \text{jeżeli } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg u_n}{\lg \lg n} < -1, \quad (126)$$

$$\text{rozbieżny} - \text{jeżeli dla dostatecznie wielkich } n \text{ stałe } \frac{\lg u_n}{\lg \lg n} > -1. \quad (127)$$

W samej rzeczy, podobnie jak przy dowodzie tw. 102, wnosimy, że jeżeli zachodzi warunek (126), to, przy pewnym dodaniu ϱ , mamy dla dostatecznie wielkich n :

$$\frac{\lg u_n}{\lg \lg n} < -(1+\varrho), \text{ skąd } \lg u_n < \lg \frac{1}{(\lg n)^{1+\varrho}}$$

oraz

$$u_n < \frac{1}{n(\lg n)^{1+\varrho}};$$

wobec zbieżności szeregów (123) dla $\varrho > 0$, wnosimy stąd o zbieżności szeregu Σu_n .

Z drugiej strony, jeżeli dla $n > \mu$ zachodzi warunek (127), to mamy

$$u_n > \frac{1}{n \lg n}, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, wobec rozbieżności szeregu (122), wnosimy o rozbieżności szeregu Σu_n . Udowodniliśmy więc tw. 103.

§ 80. Twierdzenie 104. (Abel'a). Jeżeli szereg Σu_n (o składnikach zespolonych) jest ograniczony, zaś ε_n oznacza ciąg malejący (liczb dodatnich), zmierzający do zera, to szereg $\Sigma \varepsilon_n u_n$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że szereg $\sum u_n$ (o składnikach rzeczywistych lub zespolonych) jest ograniczony: istnieje więc liczba (dodatnia) A (niezależna od n), taka, iż kładąc

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (128)$$

mamy

$$|s_n| < A, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (129)$$

Niech, dalej, ε_n oznacza ciąg malejący (liczb dodatnich), zmierzający do zera, i położmy:

$$\sigma_n = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \dots + \varepsilon_n u_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (130)$$

Wobec (130) oraz (128) znajdujemy przy wszelkich naturalnych n oraz k :

$$\begin{aligned} \sigma_{n+k} - \sigma_n &= \varepsilon_{n+1} u_{n+1} + \varepsilon_{n+2} u_{n+2} + \dots + \varepsilon_{n+k} u_{n+k} = \\ &= \varepsilon_{n+1} (s_{n+1} - s_n) + \varepsilon_{n+2} (s_{n+2} - s_{n+1}) + \dots + \varepsilon_{n+k} (s_{n+k} - s_{n+k-1}) = \\ &= -\varepsilon_{n+1} s_n + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) s_{n+1} + (\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}) s_{n+2} + \dots \\ &\quad \dots + (\varepsilon_{n+k-1} - \varepsilon_{n+k}) s_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} s_{n+k}. \end{aligned}$$

Z uwagi na (129) oraz na to, że w myśl założenia co do ciągu ε_n każda z różnic $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}$, $\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}$, ..., $\varepsilon_{n+k-1} - \varepsilon_{n+k}$ jest dodatnią, mamy stąd:

$$|\sigma_{n+k} - \sigma_n| \leq A [\varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + (\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}) + \dots + (\varepsilon_{n+k-1} - \varepsilon_{n+k}) + \varepsilon_{n+k}] = 2A\varepsilon_{n+1}. \quad (131)$$

Lecz wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ mamy, przy dowolnym danym dodatnim ε

$$\varepsilon_{n+1} < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

zatem, wobec (131):

$$|\sigma_{n+k} - \sigma_n| < 2A\varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (130) i w myśl tw. 81, wnosimy o zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Przyjmijmy, w szczególności $u_n = (-1)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$): otrzymamy szereg ograniczony

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

(gdyż mamy w nim stale $|s_n| \leq 1$), skąd, w myśl tw. 104, otrzymamy następujące

Twierdzenie 105. Szereg nieskończony

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \dots \quad (132)$$

o składnikach naprzemian dodatnich i ujemnych, malejących bezwzględnie i zmierzających do zera, jest zawsze zbieżny.

Szeregi nieskończone (132), spełniające warunki tw. 105, nazywamy szeregami naprzemiennymi.

O szeregach tych udowodnimy

Twierdzenie 106. Suma szeregu naprzemiennego jest większa od każdej sumy cząstkowej rzędu parzystego, oraz mniejsza od każdej sumy cząstkowej rzędu nieparzystego, zaś błąd, popełniony przez zastąpienie sumy szeregu naprzemiennego sumą cząstkową, jest mniejszy bezwzględnie od pierwszego odrzuconego składnika.

Dowód. Położmy

$$\sigma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \dots + (-1)^{n-1} \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (133)$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma. \quad (134)$$

Ponieważ ciąg ε_n jest, jak zakładamy, malejący, więc mamy przy wszelkiem naturalnem n , wobec (133):

$$\sigma_{2n+2} = \sigma_{2n} + \varepsilon_{2n+1} - \varepsilon_{2n+2} > \sigma_{2n}, \quad \sigma_{2n+1} = \sigma_{2n-1} - (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1}) < \sigma_{2n-1};$$

zatem: sumy cząstkowe rzędu parzystego stale wzrastają, zaś sumy cząstkowe rzędu nieparzystego stale maleją, a że granicą jednych i drugich jest, w myśl (134), suma szeregu σ , więc mamy:

$$\sigma_{2n} < \sigma < \sigma_{2n-1}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (135)$$

Mamy więc, dla k parzystego

$$\sigma_k < \sigma < \sigma_{k+1},$$

zaś dla k nieparzystego

$$\sigma_{k+1} < \sigma < \sigma_k,$$

w każdym więc razie

$$|\sigma - \sigma_k| < |\sigma_{k+1} - \sigma_k|, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

czyli, z uwagi, że, wobec (133), $\sigma_{k+1} - \sigma_k = (-1)^k \varepsilon_{k+1}$:

$$|\sigma - \sigma_k| < \varepsilon_{k+1}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (136)$$

Nierówności (135) i (136) dowodzą prawdziwości twierdzenia 106.

Co do szeregów o składnikach naprzemian dodatnich i ujemnych, zmierzających do zera, to zauważymy, że mogą one być rozbieżne (o ile składniki nie maleją bezwzględnie): takim jest np. szereg

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

z którego, łącząc po dwa kolejne składniki, otrzymujemy, jak łatwo widzieć, podwojony szereg harmoniczny.

§ 81. Dodawanie szeregów.

Twierdzenie 107. *Jeżeli $\sum u_n$ oraz $\sum v_n$ są dwa szeregi zbieżne i jeżeli położymy $w_n = u_n + v_n$ (dla $n = 1, 2, \dots$) to szereg $\sum w_n$ jest też zbieżny i daje sumę $\sum w_n = \sum u_n + \sum v_n$.*

Dowód. Oznaczmy przez s'_n , s''_n oraz s_n odpowiednio sumy cząstkowe szeregów $\sum u_n$, $\sum v_n$ oraz $\sum w_n$ i położmy

$$s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n, \quad s'' = \lim_{n \rightarrow \infty} s''_n. \quad (137)$$

Wobec $w_n = u_n + v_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), będzie przy wszelkiem naturalnem n :

$$s_n = s'_n + s''_n, \quad (137a)$$

skąd, wobec (137):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s' + s'',$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Mamy więc (w razie zbieżności szeregów $\sum u_n$ oraz $\sum v_n$) wzór

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots) + (v_1 + v_2 + v_3 + \dots) = \\ = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots$$

Zauważymy jeszcze, że szereg, stojący po prawej stronie, możemy napisać też w postaci

$$u_1 + v_2 + u_2 + v_3 + u_3 + \dots \quad (138)$$

Oznaczając bowiem przez σ_n sumę n pierwszych składników szeregu (138), będziemy mieli

$$\sigma_{2n} = s_n, \quad \sigma_{2n+1} = s_n + u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

skąd, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (gdyż szereg $\sum u_n$ jest zbieżny) wnosimy że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

co daje, w myśl tw. 18, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Dodawanie dwóch szeregów może więc być skuteczniejsze przez wstawienie składników jednego z tych szeregów między składniki drugiego. (Pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że wstawienie to może być dokonane w sposób bardziej ogólny, t. j. po p_1 pierwszych składnikach szeregu $\sum u_n$ możemy wypisać q_1 pierwszych składników szeregu $\sum v_n$, potem znów p_2 dalszych składników szeregu $\sum u_n$, potem q_2 dalszych składników szeregu $\sum v_n$ i t. d., gdzie p_n i q_n są dowolne dwa ciągi nieskończone liczb naturalnych.

Zauważymy też, że tw. 107 daje się natychmiast uogólnić na dowolną, skończoną liczbę szeregów zbieżnych: mamy mianowicie przy wszelkiem naturalnem h wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u'_n + u''_n + \dots + u_n^{(h)}) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n + \sum_{n=1}^{\infty} u''_n + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(h)}$$

o ile tylko każdy z szeregów po prawej stronie jest zbieżny.

Analogicznie udowodnilibyśmy

Twierdzenie 107^a. *Jeżeli $\sum u_n$ oraz $\sum v_n$ są dwa szeregi zbieżne i jeżeli położymy $w_n = u_n - v_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), to szereg $\sum w_n$ jest zbieżny i daje nam sumę $\sum w_n = \sum u_n - \sum v_n$.*

Mamy też (w razie zbieżności szeregów $\sum u_n$ i $\sum v_n$) wzór

$$(u_1 + u_2 + \dots) - (v_1 + v_2 + \dots) = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + \dots$$

Przykład. Weźmy pod rozwagę szeregi

$$\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

oraz

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} + \dots,$$

które, na mocy prawa łączności (§ 72) możemy przepisać w postaci:

$$\lg 2 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

Odejmując odpowiednie składniki drugiego z tych szeregów od składników pierwszego, otrzymujemy:

$$\lg 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} + \dots$$

§ 82. Przekształcanie szeregów wolno zbieżnych. Ponieważ suma szeregu zbieżnego jest granicą jego sum cząstkowych, więc zdawałoby się, że możemy ją (teoretycznie przynajmniej) zawsze obliczyć z dowolną dokładnością, uwzględniając dostatecznie wielką liczbę składników szeregu¹⁾. Praktycznie jednak jest to często niewykonalne: może się bowiem zdarzyć, że dla otrzymania sumy szeregu z żadaną dokładnością, należałoby uwzględnić bardzo wielką liczbę składników szeregu. Typowym przykładem jest tu szereg anharmoniczny

$$\lg 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Tysięczny składnik jego ($-0,001$) wpływa jeszcze na trzeci znak dziesiętny: chcąc zapomocą tego szeregu obliczyć $\lg 2$ z dokładnością kilku znaków dziesiętnych, należałoby wykonać niezmiernie długie rachunki.

Powstaje wobec tego pytanie, czy nie możnaby szeregów wolno zbieżnych przekształcać na inne, mające tę samą sumę, ale zbieżne szybciej?

Ogólna metoda takiego przekształcania szeregów (moglibyśmy ją nazwać przyspieszaniem zbieżności szeregów) nie istnieje: są tylko poszczególne sposoby, stosowalne, o ile szereg spełnia pewne warunki. Niżej zapoznamy się właśnie z kilkoma ważniejszymi z nich.

Wzór Eulera. Załóżmy, że szereg

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (139)$$

jest zbieżny dla danej wartości $x \neq 1$ i niech $S(x)$ oznacza jego sumę.

Umówimy się oznaczać przez skrócenie różnicę $a_{n+1} - a_n$ symbolem Δa_n . (Wyrażenie Δa_n nie jest więc iloczynem liczb Δ i a_n , lecz symbolem złożonym: znak Δ jest tu symbolem działania (róż-

¹⁾ Nie zawsze jednak wiemy ile składników należy uwzględnić, aby otrzymać wartość sumy z daną dokładnością. Oznaczmy np. przez a_n liczbę 1 lub 0, zależnie od tego, czy liczba naturalna n rozkłada się, czy też nie na sumę 19-tu czwartych potęg liczb całkowitych, i połączmy $u_1 = 0$, zaś $u_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n - 1)$, dla $n = 2, 3, 4, \dots$: można z łatwością wykazać, że szereg $\sum u_n$ (którego każdy poszczególny składnik potrafimy dokładnie obliczyć) jest zbieżny (gdyż ma tylko skończoną liczbę różnych od zera składników), lecz nie wiemy, ile składników należy w nim uwzględnić, aby otrzymać jego sumę z dokładnością do $1/3$. (Por. uwagi końcowe § 24).

nicowania), a nie liczby, podobnie jak w wyrażeniu $\lg x$ litery $\lg$ same przez się nie oznaczają żadnej liczby). Różnicę

$$\Delta a_{n+1} - \Delta a_n$$

umawiamy się oznaczać przez $\Delta^2 a_n$, ogólnie, różnicę

$$\Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n$$

— przez $\Delta^{k+1} a_n$. W ten sposób symbol $\Delta^k a_n$ jest określony dla każdego danego ciągu nieskończonego a_n przy wszelkiem naturalnem k . Przez $\Delta^0 a_n$ będziemy rozumieli sam wyraz a_n . (Mamy więc np., dla $a_n = n^2$: $\Delta a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = [2(n+1)+1] - (2n+1) = 2$, $\Delta^3 a_n = 2 - 2 = 0$).

Wzór (139) możemy przepisać w postaci

$$S(x) - a_0 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots; \quad (140)$$

z drugiej strony, wzór (139) daje

$$xS(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots \quad (141)$$

Wobec (140) i (141) oraz w myśl tw. 107^a, wnosimy, że szereg

$$(a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \dots$$

będzie zbieżny, oraz że sumą jego będzie liczba $(1-x)S(x) - a_0$: w myśl przyjętego znakowania, wynik ten możemy napisać w postaci:

$$(1-x)S(x) - a_0 = x\Delta a_0 + x^2\Delta a_1 + x^3\Delta a_2 + \dots \quad (142)$$

Położmy

$$S_1(x) = \Delta a_0 + x\Delta a_1 + x^2\Delta a_2 + \dots \quad (143)$$

— szereg ten będzie dla uważanej wartości x zbieżny: dla $x=0$ jest to oczywiste, zaś dla $x \neq 0$ wynika natychmiast ze zbieżności szeregu (142). Wobec (143), możemy wzór (142) przepisać w postaci:

$$(1-x)S(x) - a_0 = xS_1(x),$$

co daje, wobec założenia, że $x \neq 1$:

$$S(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_1(x). \quad (144)$$

Porównyując ze sobą wzory (143) i (139), widzimy, że szereg $S_1(x)$ tem tylko różni się od szeregu $S(x)$, że wyrazy a_n są w nim zastąpione wszędzie przez wyrazy Δa_n ($n = 0, 1, 2, \dots$): wobec wzoru (144) będziemy więc też mieli:

$$S_1(x) = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_2(x), \quad (145)$$

gdzie

$$S_2(x) = \Delta^2 a_0 + x \Delta^2 a_1 + x^2 \Delta^2 a_2 + \dots$$

(gdyż, w myśl przyjętego znakowania, przy zastąpieniu a_n przez Δa_n , Δa_n przechodzi na $\Delta^2 a_n$), przyczem szereg $S_2(x)$ będzie dla uważanej wartości x zbieżny.

Podobnie znajdziemy:

$$S_2(x) = \frac{\Delta^2 a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_3(x), \quad (146)$$

gdzie $S_3(x)$ oznacza szereg (zbieżny dla uważanej wartości x):

$$S_3(x) = \Delta^3 a_0 + x \Delta^3 a_1 + x^2 \Delta^3 a_2 + \dots,$$

i t. d., ogólnie:

$$S_{n-1}(x) = \frac{\Delta^{n-1} a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} S_n(x), \quad (147)$$

gdzie $S_n(x)$ oznacza szereg (zbieżny dla uważanej wartości x):

$$S_n(x) = \Delta^n a_0 + x \Delta^n a_1 + x^2 \Delta^n a_2 + \dots \quad (148)$$

Wzory (144), (145), (146), ... (147) dają w jednej chwili:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{1-x} + \frac{x \Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \dots + \\ &+ \frac{x^{n-1} \Delta^{n-1} a_0}{(1-x)^n} + \frac{x^n}{(1-x)^n} S_n(x). \end{aligned} \quad (149)$$

Jeżeli teraz (dla uważanej wartości x):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n S_n(x) = 0, \quad (150)$$

to wzór (149) daje rozwinięcie na szereg nieskończony:

$$S(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x \Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \dots$$

Zatem:

W razie zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ dla danej wartości $x \neq 1$,

oraz w razie zachowania warunku (150), mamy przekształcenie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Delta^n a_0}{(1-x)^{n+1}}. \quad (151)$$

Jest to wzór Eulera.

Można udowodnić, że dla $x < 0$ zbieżności szeregu (139) zawsze pociąga za sobą wzór (150), a więc i wzór (151).

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że drogą łatwej indukcji sprawdzić można wzór

$$\Delta^n a_k = \binom{n}{0} a_k - \binom{n}{1} a_{k+1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n},$$

skąd, wobec (148), znajdujemy:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left(\frac{x}{1-x} \right)^n S_n(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Delta^n a_k = \\ &= \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[\binom{n}{0} a_k - \binom{n}{1} a_{k+1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n} \right] = \\ &= \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^n \cdot \binom{n}{0} a_k x^k - x^{n-1} \cdot \binom{n}{1} a_{k+1} x^{k+1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{k+n} x^{k+n} \right]; \end{aligned}$$

oznaczając przez

$$r_n(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

resztę szeregu (139), będziemy stąd mieli

$$R_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} \left[\binom{n}{0} x^n r_0(x) - \binom{n}{1} x^{n-1} r_1(x) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} r_n(x) \right]. \quad (151a)$$

Niech teraz $x = -\varrho$, gdzie $\varrho > 0$. Wobec zbieżności szeregu (139) (dla danego x), mamy

$$|r_k(x)| < \varepsilon \quad \text{dla } k > \mu;$$

stąd, obierając wskaźnik $q > \mu$:

$$\begin{aligned} \left| \binom{n}{q} x^{n-q} r_q(x) + \binom{n}{q+1} x^{n-q-1} r_{q+1}(x) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} r_n(x) \right| &\leq \\ &\leq \left[\binom{n}{q} \varrho^{n-q} + \binom{n}{q+1} \varrho^{n-q-1} + \dots + \binom{n}{n} \varrho^n \right] \varepsilon < (1+\varrho)^n \varepsilon, \end{aligned}$$

ponieważ zaś przy stałym j , jak łatwo widzieć (dla $\varrho > 0$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{j} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho} \right)^n = 0,$$

więc

$$\left| \frac{\binom{n}{0} x^n r_0(x) + \dots + \binom{n}{q-1} x^{n-q+1} r_{q-1}(x)}{(1-x)^n} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \nu.$$

Zatem, w myśl (151^a):

$$|R_n(x)| < 2\varepsilon, \text{ dla } n > \mu + \nu,$$

co dowodzi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, czyli że mamy wzór (150), c. b. d. o.

Żałujemy, w szczególności, że $x = -1$: szereg (139) przyjmuje postać

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots, \quad (152)$$

zaś wzór (149) — postać

$$S = \frac{a_0}{2} - \frac{\Delta a_0}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_0}{2^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\Delta^{n-1} a_0}{2^n} + R_n, \quad (153)$$

gdzie

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2^n} [\Delta^n a_0 - \Delta^n a_1 + \Delta^n a_2 - \dots]. \quad (154)$$

Stąd

Twierdzenie 108. Jeżeli szereg (152) jest zbieżny, to mamy wzór:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots = \frac{a_0}{2} - \frac{\Delta a_0}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_0}{2^3} - \frac{\Delta^3 a_0}{2^4} + \dots \quad (155)$$

Często się zdarza, że wyrażenie (154) szybciej zmierza do zera, niż reszta szeregu (152): wówczas wzór (153) jest dogodniejszy do obliczania liczby S niż szereg (152):

Rozpatrzmy kilka przykładów.

Przyjmijmy

$$a_k = \frac{1}{k+1}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (156)$$

mamy tu

$$\Delta a_k = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{-1}{(k+1)(k+2)};$$

stąd, dalej:

$$\Delta^2 a_k = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = \frac{-1}{(k+2)(k+3)} - \frac{-1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Drogą łatwej indukcji znajdujemy:

$$\Delta^n a_k = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)(k+2) \dots (k+n+1)},$$

skąd, dla $k = 0$:

$$\Delta^n a_0 = \frac{(-1)^n}{n+1}. \quad (157)$$

mamy więc, w myśl (154):

$$R_n = \frac{n!}{2^n} \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} - \frac{1}{2 \cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{1}{3 \cdot 4 \dots (n+3)} + \dots \right].$$

Suma szeregu w nawiasie, jako naprzemiennego, jest, w myśl tw. 106, liczbą dodatnią, mniejszą od pierwszego składnika, zatem:

$$0 < R_n < \frac{n!}{2^n} \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} = \frac{1}{2^n (n+1)}; \quad (158)$$

przeto: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, i wzór (155) daje, wobec (156) i (157):

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots, \quad (159)$$

czyli

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \cdot 2^p},$$

przezem błąd, który popełnimy, biorąc sumę cząstkową zamiast sumy szeregu, będzie, w myśl (158), mniejszy od ostatniego uwzględnionego składnika

W szczególności np dla $n = 10$ wnosimy (wobec $2^{10} \cdot 11 < 10^4$), że suma pierwszych dziesięciu składników szeregu, stojącego po prawej stronie wzoru (159), przedstawia $\lg 2$ z dokładnością czterech cyfr dziesiętnych.

Rozpatrzmy tu bliżej jeszcze jeden przykład, mianowicie t. zw. szereg Leibniz'a

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (160)$$

Szereg ten, jako naprzemienny, jest zbieżny: sumę jego oznaczmy przez $\frac{\pi}{4}$ (znakowanie to usprawiedlimy w jednym z późniejszych rozdziałów). Obliczymy dokładnie, ile należałoby uwzględnić składników szeregu (160), aby przy jego pomocy wyznaczyć liczbę π z błędem nie przenoszącym $\frac{1}{n}$ - tej.

Oznaczmy przez s_n sumę n pierwszych składników szeregu (160). Mamy oczywiście, przy naturalnych n i k :

$$|s_{k+2n} - s_k| = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} - \dots - \frac{1}{2k+4n-1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{2}{(2k+5)(2k+7)} + \dots + \frac{2}{(2k+4n-3)(2k+4n-1)} > \\
 &> \frac{2}{(2k+1)(2k+5)} + \frac{2}{(2k+5)(2k+9)} + \dots + \frac{2}{(2k+4n-3)(2k+4n+1)} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+5} + \frac{1}{2k+5} - \dots - \frac{1}{2k+4n+1} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+4n+1} \right],
 \end{aligned}$$

zatem:

$$|s_{k+2n} - s_k| > \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+4n+1)},$$

skąd, przechodząc do granicy dla $n = \infty$, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{\pi}{4}$:

$$\left| \frac{\pi}{4} - s_k \right| \geq \frac{1}{2(2k+1)} > \frac{1}{2(2k+2)},$$

skąd

$$|\pi - 4s_k| > \frac{1}{k+1} \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \dots). \quad (161)$$

Z drugiej strony mamy przy wszelkiem naturalnem p :

$$(2p+1)(2p+3) = 4p^2 + 8p + 3 > 4p^2 + 8p = 4p(p+2);$$

kładąc kolejno $p = k, k+2, k+4, \dots, k+2n-2$ i dodając, otrzymujemy stąd:

$$\begin{aligned}
 |s_{k+2n} - s_k| &= \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} + \\
 &+ \frac{2}{(2k+5)(2k+7)} + \dots + \frac{2}{(2k+4n-3)(2k+4n-1)} < \\
 &< \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+4)} + \dots + \frac{1}{(k+2n-2)(k+2n)} \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2n} \right] < \frac{1}{4k},
 \end{aligned}$$

czyli

$$|s_{k+2n} - s_k| < \frac{1}{4k},$$

skąd przechodzą do granicy dla $n = \infty$:

$$\left| \frac{\pi}{4} - s_k \right| \leq \frac{1}{4k} \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \dots) \quad (162)$$

Mamy więc, wobec (161) i (162), przy wszelkiem naturalnem k :

$$\frac{1}{k+1} < |\pi - 4s_k| \leq \frac{1}{k}. \quad (163)$$

Jeżeli teraz chcemy zapomocą szeregu Leibniz'a obliczyć liczbę π z dokładnością do $\frac{1}{n}$, to potrzeba i wystarcza obrać wskaźnik k tak iżbyśmy mieli

$$|\pi - 4s_k| \leq \frac{1}{n}.$$

Wobec (163), nierówność ta nie będzie jeszcze spełnioną dla $k = n-1$, ale już będzie spełnioną dla $k = n$. Stąd wniosek:

Chcąc obliczyć zapomocą szeregu Leibniz'a liczbę π z dokładnością do $\frac{1}{n}$, musimy uwzględnić n pierwszych składników tego szeregu (więcej niż n nie potrzeba, mniej niż n nie wystarcza). Np. chcąc mieć π z dokładnością trzech tylko miejsc dziesiętnych, musieliśmy obliczyć aż *tysiąc* składników. Szereg Leibniz'a jest więc praktycznie nieprzydatny do obliczania liczby π .

Przekształcimy go obecnie metodą Euler'a. Przyjmijmy w tym celu

$$a_k = \frac{1}{2k+1}; \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (164)$$

Mamy stąd

$$\begin{aligned}
 \Delta a_n &= \frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+1} = \frac{-2}{(2k+1)(2k+3)}, \\
 \Delta^2 a_n &= \frac{2}{(2k+3)(2k+5)} - \frac{-2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2 \cdot 4}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)},
 \end{aligned}$$

drogą łatwej indukcji znajdujemy:

$$\Delta^n a_k = \frac{(-1)^n 2^n \cdot n!}{(2k+1)(2k+3) \dots (2k+2n+1)},$$

skąd, w szczególności, dla $k = 0$:

$$\Delta^n a_0 = \frac{(-1)^n 2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}; \quad (165)$$

mamy więc, w myśl (154):

$$R_n = n! \left[\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+3)} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+5)} - \dots \right].$$

Stąd, ponieważ szereg w nawiasie jest naprzemienny, znajdujemy (w myśl tw. 106):

$$0 < R_n < \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}. \quad (166)$$

Lecz

$$\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} < \frac{1}{2^n}$$

(gdyż $\frac{k}{2k+1} < \frac{1}{2}$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$); mamy więc, wobec (106):

$$0 < R_n < \frac{1}{2^n}, \quad (167)$$

skąd $\lim R_n = 0$, i wzór (155) daje, wobec (164) i (165):

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

Biorąc dwanaście składników tego szeregu, mielibyśmy, wobec (167): $4R_{12} < \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{10^3}$ i przeto otrzymalibyśmy stąd liczbę π z dokładnością do 0,001, na co w szeregu Leibniz'a, jak obliczyliśmy wyżej, należałoby uwzględnić aż tysiąc składników.

§ 82^a. Przekształcimy obecnie szereg Leibniz'a na szereg szybciej zbieżny inną jeszcze metodą, polegającą na zastąpieniu każdego składnika u_n szeregu wolno zbieżnego $\sum u_n$ przez sumę kilku, np. trzech składników: $u_n = u'_n + u''_n + v_n$, tak iżby sumę każdego z szeregów $\sum u'_n$ oraz $\sum u''_n$ można było obliczyć z łatwością, zaś szereg $\sum v_n$ był szybciej zbieżny niż $\sum u_n$.

Napiszmy w tym celu szereg Leibniz'a w postaci:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Z łatwością sprawdzamy tożsamość

$$\frac{2}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(4n+1)^2} - \frac{1}{(4n+5)^2} \right) - \frac{16}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2}.$$

skąd, wobec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n+1)^2} - \frac{1}{(4n+5)^2} \right) = 1,$$

znajdujemy w jednej chwili:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2} \quad (168)$$

— jest to szereg Lucas.

Mamy oczywiście, dla $n \geq p$:

$$\frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2} \leq \frac{1}{(4p+1)(4p+3)(4p+5)} \cdot \frac{1}{(4n+1)(4n+5)^2},$$

stąd

$$\begin{aligned} r_p &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{(4p+1)(4p+3)(4p+5)} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)^2} = \frac{1}{4(4p+1)^2(4p+3)(4p+5)^2}, \end{aligned}$$

skąd wnosimy, że błąd, który popełnimy przy obliczaniu liczby π uwzględniając tylko p pierwszych składników szeregu (168), nie będzie przerosł liczby $\frac{16}{(4p+1)^2(4p+3)(4p+5)^2}$. Więc np. dla

$p = 9$ błąd będzie mniejszy od $\frac{1}{10^5}$. Uwzględniając zatem w szeregu Lucas zaledwie dziewięć składników, otrzymamy liczbę π z dokładnością pięciu znaków dziesiętnych, na co w szeregu Leibniz'a trzeba by, jak wiemy, uwzględnić aż *sto tysięcy* składników.

Podamy dla szeregu Leibniz'a jeszcze inne przekształcenie, oparte na łatwo sprawdzić się dającej tożsamości:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)} &= \frac{1}{384} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \right) + \\ &+ \frac{3}{128} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) - \frac{1}{32} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy obie strony tej tożsamości przez $(-1)^{n-1}$ i sumujmy dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Zważywszy, że wobec wzoru Leibniz'a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-3} = -1 - \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = 1 - \frac{\pi}{4},$$

wreszcie, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = 1,$$

otrzymamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)} = \frac{1}{384} \left(-1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \right) + \frac{3}{128} \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{32},$$

skąd, w jednej chwili:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)}.$$

Wyrażenie $(4n^2-1)^2(4n^2-9)$ jest dla $n > 1$ dodatnie i stale wzrasta, składniki naszego szeregu są więc, poczynając od drugiego, naprzemian ujemne i dodatnie, bezwzględnie malejące. Błąd zatem, jaki popełnimy, zatrzymując się na kilku składnikach, będzie mniejszy bezwzględnie od pierwszego odrzuconego składnika. Biorąc tylko dwa składniki, czyli kładąc

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} + 24 \left(\frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{15^2 \cdot 7} \right)$$

otrzymamy liczbę $\frac{\pi}{4}$ z błędem mniejszym niż $\frac{24}{35^2 \cdot 27} < \frac{1}{10^3}$, czyli z dokładnością trzech znaków dziesiętnych.

§ 83. Metoda Kummera-Knoppa przyspieszania zbieżności szeregów¹⁾.

Niech Σu_n oznacza dany szereg wolno zbieżny, zaś $\Sigma a_n = A$ szereg o składnikach $\neq 0$, którego suma A jest znana, taki iż istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{a_n} = \gamma \neq 0. \quad (169)$$

¹⁾ K. Knopp: *Einige Bemerkungen zur Kummerschen und Markoffschen Reihentransformation*. Sitzb. Berliner Math. Ges. 1919.

Wówczas mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \gamma A + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \gamma a_n), \quad (170)$$

Dowód wzoru (170) jest natychmiastowy, gdyż, wobec zbieżności szeregów Σu_n i Σa_n , prawa strona daje $\gamma A + \Sigma u_n - \gamma \Sigma a_n = \Sigma u_n$.

Szereg, $\Sigma v_n = \Sigma (u_n - \gamma a_n)$ jest przytem szybciej zbieżny niż szereg Σu_n , gdyż $v_n = u_n \left(1 - \gamma \frac{a_n}{u_n} \right)$, przyczem, wobec (169), drugi czynnik zmierza do zera.

Np. dla $v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, kładąc $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$, otrzymamy $\gamma = \frac{1}{4}$,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = -1, \quad u_n - \gamma a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)(2n+2)}, \text{ i przeto}$$

wzór (170) daje przekształcenie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n+1)(2n+2)},$$

czyli, w myśl wzoru Leibniz'a:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots$$

Biorąc tylko 7 składników, otrzymalibyśmy π z dokładnością trzech znaków dziesiętnych.

Metoda Markowa-Knoppa przekształcania szeregów¹⁾.

Niech $s = \Sigma u_n$ oznacza dany szereg zbieżny, zaś $a_{k,n}$ ciąg powodzący, taki iż, skoro położymy

$$r_{k,n} = u_n - (a_{k,1} + a_{k,2} + \dots + a_{k,n}), \quad (k, n \text{ naturalne}), \quad (a)$$

to

$$1) \text{ szeregi} \quad s_n = a_{1,n} + a_{2,n} + a_{3,n} + \dots \quad (b)$$

będą zbieżne ($n = 1, 2, \dots$);

$$2) \text{ kładąc} \quad R_n = r_{1,n} + r_{2,n} + r_{3,n} + \dots \quad (c)$$

będziemy mieli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0. \quad (d)$$

¹⁾ Knopp l. c.

Mamy wówczas

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \quad (171)$$

Uwaga. Że szeregi (c) są zbieżne (dla $n = 1, 2, \dots$), wynika natychmiast ze wzoru (a) i uwagi, że szeregi (b) oraz szereg $s = \sum u_n$ są zbieżne.

Dla dowodu wzoru (171) wystarczy zauważyć, że z (a) wynika, wobec (b) i (c):

$$R_n = s - (s_1 + s_2 + \dots + s_n), \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

co, wobec (d), pociąga za sobą wzór (171).

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że jeżeli $\sum a_n$ jest szeregiem zbieżnym o składnikach dodatnich, $\sum b_n$ szeregiem rozbieżnym o składnikach dodatnich, to szereg o składnikach dodatnich $\sum u_n$ jest

$$\text{zbieżny, jeżeli } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \text{dla } n > \mu,$$

$$\text{rozbieżny, jeżeli } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{dla } n > \mu,$$

2) Udowodnić, że jeżeli $0 < u_{n+1} < u_n$ (dla $n = 1, 2, 3, \dots$), to szereg $\sum u_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, jeżeli zbieżnym jest szereg

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \dots + 2^n u_{2^n} + \dots \quad (\text{Cauchy})$$

Zastosować to twierdzenie do szeregów $\zeta(s)$.

3) Udowodnić, że jeżeli $0 < u_{n+1} < u_n$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$, to szeregi $\sum u_n$ oraz

$$u_1 + 2u_4 + 3u_9 + \dots + n u_{n^2} + \dots$$

są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

4) Udowodnić, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Dla dowodu wystarczy się oprzeć na nierówności

$$\left| \frac{a_n}{n} \right| = \sqrt{a_n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

5) Udowodnić, że dla każdego szeregu zbieżnego o składnikach dodatnich $\sum u_n$, istnieje szereg zbieżny o składnikach dodatnich, $\sum v_n$, taki iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \infty.$$

Dowód. Niech $\sum u_n$ oznacza dany szereg zbieżny o składnikach dodatnich; oznaczmy przez s_n jego sumy częściowe ($s_0 = 0$), zaś przez s — jego sumę i położymy

$$v_n = \frac{u_n}{\sqrt{s - s_{n-1}} + \sqrt{s - s_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (172)$$

Wobec (172) będziemy mieli oczywiście

$$v_n = \sqrt{s - s_{n-1}} - \sqrt{s - s_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

skąd, w jednej chwili:

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \sqrt{s} - \sqrt{s - s_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

co, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, dowodzi, że szereg $\sum v_n$ jest zbieżny, dając sumę $\sigma = \sqrt{s}$. Z drugiej strony, ze wzoru (172) wynika, że składniki v_n są wszystkie dodatnie, oraz że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \infty$ (gdyż $\lim_{n \rightarrow \infty} (s - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s - s_n) = 0$). Szereg $\sum v_n$ spełnia

więc żądane warunki. Mamy tu też, jak łatwo widzieć: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n} = x$. Otrzymany wynik możemy wyrazić, mówiąc że *nie istnieje szereg najwolniej zbieżny*.

6) Udowodnić, że dla każdego szeregu rozbieżnego o składnikach dodatnich $\sum u_n$ istnieje szereg rozbieżny o składnikach dodatnich $\sum v_n$, taki iż $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

Dowód. Niech $\sum u_n$ oznacza szereg rozbieżny o składnikach dodatnich. Oznaczmy przez s_n jego sumy częściowe i położymy

$$v_1 = \sqrt{u_1}, \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{s_{n-1}} + \sqrt{s_n}} \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots \quad (173)$$

Będzie oczywiście $v_n = \sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}}$, dla $n > 1$, skąd, w jednej chwili $\sigma_n = v_1 + \dots + v_n = \sqrt{s_n}$ i przeto, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, wnosimy o rozbieżności

szeregu $\sum v_n$, zaś wzór (173) daje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Otrzymany wynik, możemy wyrazić, mówiąc że *nie istnieje szereg najwolniej rozbieżny*.

7) Udowodnić, że jeżeli ε_n jest ciągiem malejącym, zmierzającym do zera, to istnieje szereg rozbieżny o składnikach dodatnich $\sum u_n$, taki iż szereg $\sum u_n \varepsilon_n$ jest zbieżny.

Dowód. Założmy, że mamy $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$ ($n = 2, 3, \dots$) oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Położymy

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}}} \quad (n = 2, 3, \dots);$$

będziemy stąd mieli (wobec $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$) $u_n > 0$ oraz

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

zatem, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, szereg $\sum u_n$ będzie rozbieżny.

Z drugiej strony, wobec $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$, mamy

$$0 < u_n \varepsilon_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_{n-1}} - \sqrt{\varepsilon_n}}{\sqrt{\varepsilon_n} \sqrt{\varepsilon_{n-1}}} \varepsilon_n < \sqrt{\varepsilon_{n-1}} - \sqrt{\varepsilon_n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

skąd, dla $n > 1$:

$$0 < u_1 \varepsilon_1 + u_2 \varepsilon_2 + \dots + u_n \varepsilon_n < u_1 \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_n} < u_1 \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1},$$

co dowodzi ograniczonosci, a więc i zbieżności szeregu $\sum u_n \varepsilon_n$.

Szereg $\sum u_n$ spełnia więc żądane warunki.

Pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia, że jeżeli ε_n jest jakimkolwiek ciągiem liczb zespolonych, zmierzającym do zera, to istnieje szereg rozbieżny o składnikach dodatnich $\sum u_n$, taki iż szereg $\sum u_n \varepsilon_n$ jest zbieżny.

8) Obliczyć zapomocą wzoru Eulera (151) sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n, \quad (174)$$

gdzie k oznacza liczbę naturalną, zaś $|x| < 1$.

Szereg (174) jest zbieżny dla $|x| < 1$, co wnosimy np. na podstawie tw. 91: wzór (151) jest więc dla szeregu (174) stosowalny. Dla $a_n = n^k$ mamy, jak łatwo widzieć $\Delta^{k+1} a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), zatem, wobec (148): $S_{k+1}(x) = 0$ i przeto, w myśl (149) (dla $n = k+1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n = \frac{x \Delta^0 0^k}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^1 0^k}{(1-x)^3} + \dots + \frac{x^k \Delta^k 0^k}{(1-x)^{k+1}} \quad (dla |x| < 1)$$

(gdzie $\Delta^k 0^k$ oznacza $\Delta^k a_0$, dla $a_n = n^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Wobec np., dla $k = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad (175)$$

zaś dla $k = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

9) Niech x oznacza daną liczbę dodatnią. Oznaczmy przez k_1 najnniejszą liczbę naturalną, spełniającą nierówność $k_1 x > 1$, i połóżmy $k_1 x = 1 + x_1$; będzie znowu $x_1 > 0$. Z liczbą x_1 postąpmy jak z liczbą x , wyznaczając najnniejszą liczbę naturalną k_2 , taką iż $k_2 x_1 > 1$, i kładąc $k_2 x_1 = 1 + x_2$ i t. d. Udowodnić że w ten sposób dochodzimy do rozwinięcia liczby x na szereg nieskończony:

$$x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2 k_3} + \dots,$$

gdzie k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są liczby naturalne niemalejące.

Okazać, że każda liczba dodatnia daje jedno tylko rozwinięcie na taki szereg oraz że na iżby liczba x była niewymierna, potrzeba i wystarcza by było $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ ¹⁾.

¹⁾ Zob. moją pracę: „O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi nieskończone“. Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. 1911.

ROZDZIAŁ IX.

Mnożenie szeregów. Szeregi podwójne.

§ 84. Twierdzenie 109 (Cesàro). Jeżeli mamy dwa szeregi zbieżne (o składnikach zespolonych)

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (1)$$

i jeżeli utworzymy szereg Σc_n , kładąc

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

oraz położymy

$$C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

to będziemy mieli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} = AB. \quad (4)$$

Dowód. Połóżmy

$$\left. \begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Mamy oczywiście, wobec (3) i (2), przy naturalnem n :

$$C_n = \begin{cases} a_1 b_1 \\ + a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\ + \dots \\ + a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_n b_1, \end{cases}$$

skąd w jednej chwili, wobec (5):

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + a_3 B_{n-2} + \dots + a_n B_1 = \\ &= B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + \dots + B_n a_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Wobec (6), mamy:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = \begin{cases} B_1 a_1 \\ + B_1 a_2 + B_2 a_1 \\ + B_1 a_3 + B_2 a_2 + B_3 a_1 \\ + \dots \\ + B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + B_3 a_{n-2} + \dots + B_n a_1, \end{cases}$$