ROZDZIAŁ VII.

Teorja liczb zespolonych.

§ 59. Zajmiemy się obecnie dalszem rozszerzeniem pojęcia liczby. W rozdziale I-szym rozszerzyliśmy pojęcie liczby wymiernej, wprowadzając zapomocą przekrojów liczby niewymierne, przyczem dowiedliśmy, że na tej samej drodze, t. j. za pomocą przekrojów zbioru liczb rzeczywistych, ten ostatni dalszemu rozszerzeniu już nie podlega (§ 7). Musimy więc dalszego rozszerzenia pojęcia liczby szukać na innej drodze.

Potrzeba dalszego rozszerzenia pojęcia liczby powstaje z tego względu, że wyciąganie pierwiastków naturalnego stopnia nie zawsze jest w sferze liczb rzeczywistych wykonalne. Nie istnieją mianowicie pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych (ponieważ potęga parzysta każdej liczby rzeczywistej jest nieujemną). Ten brak zbioru liczb rzeczywistych możemy usunąć przez dołączenie do zbioru liczb rzeczywistych nowych elementów, jeszcze w tym zbiorze nie zawartych (podobnie jak przez dołączenie do zbioru liczb wymiernych liczb niewymiernych utworzyliśmy zbiór liczb rzeczywistych). Chodzi więc teraz o to, w jaki sposób owo dołączenie nowych elementów ma być uskutecznione.

Przedewszystkiem żądamy naturalnie, aby w nowoutworzonym zbiorze Z (złożonym z liczb rzeczywistych i dołączonych do tego zbioru nowych elementów) suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch jakichkolwiek elementów zbioru Z (z jedynym wyjątkiem dzielenia przez 0) były określonemi elementami zbioru Z (t. j. iżby zbiór ten przedstawiał *ciało liczbowe*), przyczem dodawanie i mnożenie elementów zbioru Z mogą być określone całkiem dowolnie (jako dwa rodzaje przyporządkowania każdym dwum elementom zbioru Z oznaczonego trzeciego elementu tegoż zbioru) tak jedynie, iżby przytem zachowane były następujące warunki: 1°. Dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych musi być przypadkiem szczególnym dodawania i mnożenia elementów zbioru Z (gdy składniki, względnie czynniki, są liczbami rzeczywistemi). 2°. Suma i iloczyn elementów zbioru Z powinny posiadać prawa: przemienności, łączności i rozdzielności, przyczem 0 ma być modułem dodawania, zaś 1 modułem mnożenia (t. j. dla każdego elementu z zbioru Z ma być

$$z + 0 = z \quad \text{oraz} \quad z \cdot 1 = z)$$

Odejmowanie i dzielenie, określone jako działania odwrotne względem dodawania i mnożenia, winny być jednoznacznie wykonalne, z wyjątkiem dzielenia przez 0. Dalej, żądamy iżby pierwiastkowanie naturalnego stopnia było zawsze w zbiorze Z wykonalne, t. j. dla każdej liczby naturalnej n oraz każdego elementu z_0 zbioru Z musi zawsze istnieć w tymże zbiorze conajmniej jeden element z taki, iż $z^n = z_0$ (przyczem przez potęgę naturalną z^n rozumiemy iloczyn n czynników, z których każdy $= z$).

Załóżmy, że zbiory, spełniające wszystkie nasze warunki, istnieją, i niech Z oznacza jeden z tych zbiorów.

Z warunku wykonalności pierwiastkowania w zbiorze Z wynika w szczególności, że w zbiorze tym istnieje conajmniej jeden element spełniający równanie $z^2 = -1$; oznaczmy literą i jeden z takich właśnie elementów zbioru Z: będzie więc

$$i^2 = -1; \tag{1}$$

element i będzie oczywiście różnym od każdej liczby rzeczywistej, gdyż żadna liczba rzeczywista uważanego równania nie spełnia.

Z warunku, że suma i iloczyn dwóch jakichkolwiek elementów zbioru Z są zawsze oznaczonemi elementami tegoż zbioru, oraz z uwagi, że zbiór Z zawiera wszystkie liczby rzeczywiste (gdyż został utworzony przez dołączenie do zbioru liczb rzeczywistych nowych elementów) wynika, że przy wszelkich rzeczywistych a i b wyrażenie

$$a + bi \tag{2}$$

jest elementem zbioru Z.

Oznaczmy przez Z_0 zbiór wszystkich tych elementów zbioru Z, które dadzą się przedstawić w postaci (2). Każdemu układowi (a, b) będzie więc odpowiadał oznaczony w zupełności element $a + bi$ zbioru Z_0 (przyczem naturalnie musimy układy (a, b) i (b, a), różniące się tylko porządkiem liczb a i b — o ile $a \neq b$ — uważać jako różne).

Powiadam, że przytem różnym układom (a, b) oraz (c, d) będą zawsze odpowiadały różne elementy $a + bi$ oraz $c + di$ zbioru Z_0. Gdyby bowiem było

$$a + bi = c + di, \tag{3}$$

to, w razie $b = d$, znaleźlibyśmy w jednej chwili $a = c$, zatem $(a, b) = (c, d)$ — wbrew założeniu, że układy nasze są różne, w razie zaś $b \neq d$ otrzymalibyśmy z łatwością, w myśl naszych warunków:

$i = \frac{c-a}{b-d}$, gdy tymczasem i jest elementem, różnym od każdej liczby rzeczywistej.

Równość $(a, b) = (c, d)$ jest więc możliwa tylko dla $a = c$, $b = d$.

Każdemu układowi (a, b) odpowiada więc oznaczony element $a + bi$ zbioru Z_0 i naodwrót: każdy element $a + bi$ zbioru Z_0 odpowiada oznaczonemu (jednemu tylko) układowi (a, b).

Sumą elementów $a + bi$ oraz $c + di$ zbioru Z_0, wobec wynikającego z naszych warunków (mianowicie przemienności, łączności i rozdzielności) wzoru

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

będzie element

$$(a + c) + (b + d)i$$

tegoż zbioru. Nazwijmy sumą układów (a, b) oraz (c, d) układ (x, y), któremu odpowiada suma elementów zbioru Z_0, odpowiadających danym układom: będzie to więc układ

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d). \tag{4}$$

Iloczynem elementów $a + bi$ oraz $c + di$ zbioru Z_0 będzie, w myśl prawa przemienności, łączności i rozdzielności, oraz wobec (1):

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 =$$
$$= ac + bci + adi + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Nazwijmy iloczynem układów (a, b) oraz (c, d) układ (x, y), któremu odpowiada iloczyn elementów zbioru Z_0, odpowiadających danym układom: będzie to więc układ

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc). \tag{5}$$

Między zbiorem Z_0, a zbiorem U wszystkich układów (a, b) dwóch liczb rzeczywistych a i b istnieje więc tego rodzaju odpowiedniość, że każdemu układowi zbioru U odpowiada oznaczony w zupełności element zbioru Z_0 i naodwrót, każdy element zbioru Z_0 odpowiada pewnemu i tylko jednemu układowi zbioru U. Dalej, dodawanie i mnożenie układów zbioru U określone jest w ten sposób, że sumie oraz iloczynowi układów zbioru U, którym odpowiadają elementy z_1 i z_2 zbioru Z_0, odpowiadają elementy $z_1 + z_2$ oraz $z_1 z_2$ zbioru Z_0 i naodwrót. Własności te wyrażamy, mówiąc, że zbiór Z_0 i zbiór układów U są ze względu na dodawanie i mnożenie *izomorficzne*.

Nie przesądzając, czy istnieją zbiory Z, spełniające wszystkie postawione na początku niniejszego rozdziału warunki, doszliśmy więc do wniosku, że w każdym takim zbiorze Z istnieje część Z_0 izomorficzna ze względu na dodawanie i mnożenie ze zbiorem układów U, w którym dodawanie i mnożenie określonem jest przez wzory (4) i (5).

Jeżeli teraz udowodnimy, że istnieje zbiór Z, spełniający wszystkie żądane warunki i izomorficzny (ze względu na dodawanie i mnożenie) ze zbiorem układów U, to będzie to najprostszy zbiór, spełniający te warunki, w tem znaczeniu, że każdy inny zbiór, który je spełnia, posiada część izomorficzną ze zbiorem Z. W ten sposób otrzymamy *najprostsze* rozszerzenie pojęcia liczb rzeczywistych [1]).

§ **60.** Nazywać będziemy *liczbą zespoloną* każdy symbol

$$(a, b),$$

gdzie a i b są dwie liczby rzeczywiste.

Zrobimy następujące umowy.

I. Definicja równości. Dwie liczby zespolone (a, b) oraz (c, d) uważać będziemy jako równe w tym i w tym tylko razie, jeżeli jednocześnie

$$a = c, \quad \text{oraz} \quad b = d.$$

II. Definicja sumy. Sumą liczb zespolonych (a, b) oraz (c, d) nazywać będziemy liczbę zespoloną $(a + c, b + d)$, pisząc

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \tag{6}$$

III. Definicja iloczynu. Iloczynem liczb zespolonych (a, b) oraz (c, d) nazywać będziemy liczbę zespoloną $(ac - bd, ad + bc)$, pisząc

$$(a, b)\ (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{7}$$

Z definicji sumy wynika natychmiast jej przemienność i łączność. Podobnież, ze wzoru (7) wnosimy natychmiast o przemienności iloczynu. Udowodnimy łączność iloczynu.

[1]) Możnaby jednak okazać, że istnieją szersze zbiory, spełniające wszystkie postawione przez nas warunki. Takim zbiorem jest np. zbiór wszystkich funkcyj algebraicznych jednej zmiennej.

W myśl (7) mamy:

$$[(a, b)\ (c, d)]\ (e, f) =$$
$$= ([ac - bd]\, e - [ad + bc] f,\ [ac - bd] f + [ad + bc] e), \tag{8}$$

zaś, wobec

$$(c, d)\ (e, f) = (ce - df,\ cf + de), \tag{9}$$

znajdujemy:

$$(a, b)\ [(c, d)\ (e, f)] =$$
$$= (a\ [ce - df] - b\ [cf + de],\ a\ [cf + de] + b\ [ce - df]).$$

Lecz prawe strony wzorów (8) i (9) przedstawiają, jak to wykazuje łatwy rachunek, tę samą liczbę zespoloną, skąd

$$[(a, b)\ (c, d)]\ (e, f) = (a, b)\ [(c, d)\ (e, f)],$$

co dowodzi, że iloczyn liczb zespolonych posiada własność łączności.

Udowodnimy teraz własność rozdzielności. Mamy w myśl definicji iloczynu:

$$[(a, b) + (c, d)]\ (e, f) = (a + c, b + d)\ (e, f) =$$
$$= ([a + c] e - [b + d] f,\ [a + c]\ f + [b + d] e),$$

zaś

$$(a, b)\ (e, f) + (c, d)\ (e, f) = (ae - bf,\ af + be) + (ce - df,\ cf + de) =$$
$$= (ac - bf + ce - df,\ af + be + cf + de);$$

prawe strony tych wzorów przedstawiają, jak łatwo widzieć, tę samą liczbę zespoloną, skąd

$$[(a, b) + (c, d)]\ (e, f) = (a, b)\ (e, f) + (c, d)\ (e, f),$$

co dowodzi własności rozdzielności.

Powiadam dalej, że liczba zespolona (0, 0) jest modułem dodawania, zaś liczba (1, 0) — modułem mnożenia, t. j. że dla każdej liczby zespolonej (x, y) zachodzą wzory.

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \quad \text{oraz} \quad (x, y)\ (1, 0) = (x, y). \tag{10}$$

Dla dowodu tych wzorów wystarczy powołać się na definicję sumy i iloczynu.

Niech (a, b) i (c, d) będą dwie dane liczby zespolone.

Załóżmy, że liczba zespolona (x, y) spełnia równanie

$$(c, d) + (x, y) = (a, b). \tag{11}$$

W myśl definicji sumy, musi być, wobec (11):

$$c + x = a, \quad d + y = b,$$

co daje

$$x = a - c, \quad y = b - d.$$

Z drugiej strony bezpośrednio przekonywujemy się z łatwością, że liczba zespolona

$$(x, y) = (a - c,\ b - d)$$

spełnia równanie (11).

Dodawanie liczb zespolonych posiada więc oznaczone w zupełności i zawsze wykonalne (w sferze liczb zespolonych) działanie odwrotne. Będziemy pisali

$$(a - c,\ b - d) = (a, b) - (c, d). \tag{12}$$

Załóżmy, dalej, że dla danych (a, b) i (c, d) istnieje liczba zespolona (x, y) taka, iż

$$(c, d)\ (x, y) = (a, b). \tag{13}$$

W myśl definicji iloczynu, musi być, wobec (13):

$$cx - dy = a, \quad cy + dx = b. \tag{14}$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez c, drugie przez d i dodając, otrzymujemy

$$(c^2 + d^2)x = ac + bd, \tag{15}$$

mnożąc zaś pierwsze z równań (14) przez $-d$, drugie przez c i dodając, dostajemy

$$(c^2 + d^2)y = bc - ad. \tag{16}$$

Gdyby było $c^2 + d^2 = 0$, to z uwagi, że c i d są rzeczywiste, musiałoby być $c = 0$ oraz $d = 0$ [czyli $(c, d) = (0, 0)$], zatem, w myśl (14) musiałoby też być $a = 0$ oraz $b = 0$. Równanie (13) przyjęłoby wówczas postać

$$(0, 0)\ (x, y) = (0, 0)$$

i, jak łatwo widzieć [w myśl (7)] byłoby spełnione przez każdą liczbę zespoloną (x, y).

Gdyby zaś było $(c, d) = (0, 0)$, zaś $(a, b) \neq (0, 0)$, to równanie (13), jak łatwo widzieć, nie byłoby spełnione przez żadną liczbę zespoloną (x, y) (gdyż nie byłyby nigdy spełnione równania (14), których lewe strony zawsze byłyby równe zeru).

Jeżeli więc $(c, d) = (0, 0)$, to równanie (13) jest bądź nieoznaczone, bądź też nierozwiązalne. Załóżmy więc, że $(c, d) \neq 0$.

Wynika stąd, że $c^2 + d^2 \neq 0$ i równania (15) i (16) dają

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Z drugiej strony, drogą bezpośredniego podstawienia przekonywujemy się z łatwością (w myśl definicji iloczynu), że liczba zespolona

$$(x, y) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \tag{17}$$

spełnia równanie (13). Jeżeli więc $(c, d) \neq 0$, to równanie (13) posiada w sferze liczb zespolonych jedno i tylko jedno rozwiązanie. Liczbę zespoloną (17) będziemy nazywali ilorazem liczby zespolonej (a, b) przez liczbę zespoloną (c, d) i będziemy oznaczali przez

$$(a, b) : (c, d), \quad \text{lub} \quad \frac{(a, b)}{(c, d)}.$$

Iloraz dwóch liczb zespolonych istnieje więc zawsze i jest określonym w zupełności, jeżeli tylko dzielnik jest różny od liczby zespolonej $(0, 0)$.

Wszystkie cztery działania arytmetyczne (prócz dzielenia przez liczbę zespoloną $(0, 0)$) są więc w sferze liczb zespolonych jednoznacznie wykonalne.

Weźmy teraz pod rozwagę liczby zespolone typu $(a, 0)$, gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą. W myśl definicji równości liczb zespolonych, dwie liczby $(a, 0)$, oraz $(b, 0)$ będą równe wtedy i tylko wtedy, jeżeli $a = b$. Dalej, w myśl definicji sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu mamy:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$
$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0),$$
$$(a, 0)\ (b, 0) = (ab, 0),$$
$$(a, 0) : (b, 0) = \left(\frac{a}{b}, 0\right) \text{ (jeżeli } b \neq 0).$$

Wzory te dowodzą, że zbiór wszystkich liczb zespolonych typu $(a, 0)$ jest ze względu na cztery działania arytmetyczne izomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Wobec tego kwestją znakowania tylko będzie, jeżeli liczby zespolone $(a, 0)$ będziemy oznaczali wszędzie temi samemi symbolami, co odpowiednie liczby rzeczywiste a.

Umówimy się więc pisać poprostu a zamiast $(a, 0)$, czyli kładziemy

$$(a, 0) = a \tag{18}$$

przy wszelkiem rzeczywistem a.

Niech teraz (a, b) oznacza dowolną daną liczbę zespoloną. Wobec definicji sumy i iloczynu, możemy napisać:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1),$$

czyli wobec (18):

$$(a, b) = a + b(0, 1). \tag{19}$$

Oznaczmy, przez skrócenie, liczbę zespoloną $(0, 1)$ jedną literą i, czyli połóżmy

$$(0, 1) = i; \tag{20}$$

wzór (19) będziemy więc mogli napisać w postaci

$$(a, b) = a + bi. \tag{21}$$

Każda więc liczba zespolona daje się przedstawić w postaci (21), gdzie i jest liczbą zespoloną, określoną wzorem (20). Ze wzoru tego otrzymujemy, w myśl definicji iloczynu liczb zespolonych oraz wobec (18):

$$i^2 = (0, 1)\ (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

czyli

$$i^2 = -1,$$

wobec czego moglibyśmy liczbę zespoloną i oznaczać też symbolem $\sqrt{-1}$.

W myśl wzorów (10) oraz wobec (18), mamy, dla każdej liczby zespolonej $z = a + bi$:

$$z + 0 = z, \quad \text{oraz} \quad z.1 = z,$$

co dowodzi, że liczba 0 jest modułem dodawania, zaś liczba 1 — modułem mnożenia liczb zespolonych.

Dla działań arytmetycznych na liczbach zespolonych mamy w myśl (6), (12), (7) i (17), wzory:

$$\left.\begin{aligned} &(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,\\ &(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i,\\ &(a+bi)\ (c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i,\\ &(a+bi):(c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

przyczem wszystkie cztery działania są w sferze liczb zespolonych jednoznacznie wykonalne, z wyjątkiem jedynie dzielenia przez liczbę 0. Zbiór wszystkich liczb zespolonych tworzy więc *ciało liczbowe*.

Nadto dodawanie i mnożenie liczb zespolonych posiadają, jak dowiedliśmy wyżej, własności przemienności, łączności i rozdzielności, przyczem 0 jest modułem dodawania, zaś 1 modułem mnożenia.

Dalej, działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych mogą być uważane jako przypadek szczególny działań na liczbach zespolonych.

Dla okazania więc, że liczby zespolone przedstawiają żądane rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych (spełniające warunki, postawione w § 59), pozostaje tylko do udowodnienia, że pierwiastkowanie naturalnego stopnia jest zawsze w zbiorze liczb zespolonych wykonalne.

§ **61.** Nazywać będziemy *wartością bezwzględną*, albo *modułem* liczby zespolonej $a + bi$, liczbę rzeczywistą $\sqrt{a^2+b^2}$, pisząc

$$|\, a + bi \,| = \sqrt{a^2+b^2} \tag{23}$$

(przyczem przez $\sqrt{0}$ należy rozumieć liczbę 0).

Łatwo widzieć, że definicja ta jest tylko rozszerzeniem definicji modułu liczb rzeczywistych. W samej rzeczy, z definicji równości liczb zespolonych wynika natychmiast że liczba zespolona $a + bi$ jest wtedy i tylko wtedy liczbą rzeczywistą, jeżeli $b = 0$. (Gdyż, jeżeli $a + bi = c$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, to, z uwagi, ze, w myśl (21), $a + bi = (a, b)$, zaś w myśl (18), $c = (c, 0)$, mamy równość $(a, b) = (c, 0)$, skąd $a = c$. $b = 0$. Z drugiej strony w myśl (21) i (18), $a + 0i = (a, 0) = a$).

W razie zaś $b = 0$, wzór (23) daje

$$|\, a \,| = \sqrt{a^2}; \tag{24}$$

jeżeli $a > 0$, to (z uwagi, że pierwiastek arytmetyczny stopnia drugiego z liczby dodatniej a^2 jest jedynem rozwiązaniem dodatniem równania $x^2 = a^2$) znajdujemy stąd natychmiast: $|\, a \,| = a$; jeżeli $a = 0$, to wzór (24) daje $|\, 0 \,| = \sqrt{0} = 0$; wreszcie, jeżeli $a < 0$, to wzór (24) daje $|\, a \,| = -a$, w każdym razie zgodnie z definicją modułu liczby rzeczywistej.

Moduł liczby zespolonej jest, w myśl wzoru (23), zawsze oznaczoną w zupełności liczbą rzeczywistą nieujemną, przytem zerem tylko dla $a = b = 0$, t. j. dla $a + bi = 0$. Zatem:

Moduł zera jest zerem, moduł każdej liczby zespolonej różnej od zera jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Niech

$$z = a + bi$$

oznacza daną liczbę zespoloną. Liczbę a nazywamy *częścią rzeczywistą*, zaś liczbę bi — *częścią urojoną* liczby zespolonej $a + bi$. Liczbę, której część rzeczywista jest zerem, nazywamy *urojoną*. (Są to oczywiście tylko więcej lub mniej odpowiednie nazwy: symbol bi jest równie realny jak i symbol a. Usprawiedliwienie swe nazwy te znajdują w tem, że jeżeli rozwiązanie jakiegoś zagadnienia fizycznego lub mechanicznego (a nawet geometrycznego) wyraża się w liczbach zespolonych, których część urojona nie jest zerem, to rozwiązanie takie jest tylko fikcyjne i dowodzi, że odnośne zjawisko lub wielkość (względnie figura) fizycznie (względnie geometrycznie) nie istnieją).

Liczbę zespoloną $i = (0, 1)$ nazywamy niekiedy *jednostką urojoną* (dla odróżnienia od jednostki rzeczywistej $1 = (1, 0)$).

Liczbę zespoloną

$$a - bi,$$

różniącą się tylko znakiem współczynnika przy i od liczby $z = a + bi$, nazywamy *sprzężoną* z liczbą z. Liczbę sprzężoną z z będziemy oznaczali przez z'.

Z definicji liczb sprzężonych wynika natychmiast, że jeżeli $u = z'$, to $u' = z$, czyli, przy wszelkiem zespolonem z:

$$(z')' = z.$$

Jeżeli $z = z_1$, to mamy oczywiście $z' = z_1'$ i naodwrót. Jeżeli $z = z'$, to liczba z jest rzeczywistą i naodwrót. W szczególności, jeżeli $z = 0$, to $z' = 0$ i naodwrót.

Ze wzorów (22) wnosimy natychmiast, że przy wszelkich zespolonych z i z_1 mamy:

$$\left.\begin{aligned} (z + z_1)' &= z' + z_1' \\ (z - z_1)' &= z' - z_1' \\ (z z_1)' &= z' z_1' \\ \left(\frac{z}{z_1}\right)' &= \frac{z'}{z_1'} \qquad (\text{dla } z_1 \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Działania arytmetyczne na liczbach sprzężonych dają więc sprzężone wyniki.

W myśl definicji modułu, mamy:

$$|z'| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| = |z|:$$

liczby sprzężone mają więc ten sam moduł.

Iloczyn zz' nazywamy *normą* liczby zespolonej z: w myśl (22) jest

$$zz' = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

czyli, wobec (23):

$$zz' = |z|^2,$$

skąd

$$|z| = \sqrt{zz'}.$$

Stąd, dalej, wobec przemienności i łączności iloczynu liczb zespolonych, oraz w myśl (25):

$$|zz_1|^2 = (zz_1)(zz_1)' = zz_1 \cdot z'z_1' = (zz')(z_1 z_1') = |z|^2 \cdot |z_1|^2,$$

skąd, z uwagi, że moduł jest zawsze liczbą rzeczywistą nieujemną:

$$|zz_1| = |z| \cdot |z_1|,$$

czyli: *moduł iloczynu jest zawsze iloczynem modułów*. Podobnież udowodnilibyśmy, że *moduł ilorazu jest ilorazem modułów*.

Wobec definicji modułu oraz wzoru na iloczyn liczb zespolonych, wzór $|z|^2 \cdot |z_1|^2 = |zz_1|^2$, gdzie $z = a + bi$, $z_1 = c + di$, jest równoważny tożsamości

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2, \tag{26}$$

którą łatwo też sprawdzić bezpośrednio. Tożsamość ta zawiera ciekawe twierdzenie arytmetyczne, dowodzi ona mianowicie, że iloczyn dwóch liczb, z których każda rozkłada się na sumę dwóch kwadratów, sam jest sumą dwóch kwadratów.

$$\text{Np. } 53 \cdot 41 = (7^2 + 2^2)(5^2 + 4^2) = (7 \cdot 5 - 2 \cdot 4)^2 + (7 \cdot 4 + 2 \cdot 5)^2 = 27^2 + 38^2.$$

Zastępując w tożsamości (26) b przez $-b$, otrzymujemy jeszcze drugą tożsamość:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2; \tag{27}$$

więc np. $53 \cdot 41 = (7^2 + 2^2)(5^2 + 4^2) = (7 \cdot 5 + 2 \cdot 4)^2 + (7 \cdot 4 - 2 \cdot 5)^2 = 43^2 + 18^2$.

Z twierdzenia o module iloczynu wynika, że jeżeli $zz_1 = 0$, to $|z| \cdot |z_1| = |zz_1| = 0$, skąd, wobec rzeczywistości modułu: $|z| = 0$, lub $|z_1| = 0$, zatem $z = 0$, lub $z_1 = 0$.

Z drugiej strony, jeżeli jedna z liczb z lub z_1 jest zerem, to jeden z modułów $|z|$ lub $|z_1|$ jest zerem i przeto

$$|zz_1| = |z| \cdot |z_1| = 0, \quad \text{skąd} \quad zz_1 = 0.$$

Iloczyn dwóch liczb zespolonych jest więc wtedy i tylko wtedy zerem, jeżeli jeden conajmniej z czynników jest zerem.

Udowodnimy teraz, że *moduł sumy dwóch liczb zespolonych nie przenosi sumy modułów tych liczb.* Załóżmy, że twierdzenie to nie jest prawdziwe, że więc dla pewnych dwóch liczb zespolonych $z = a + bi$ oraz $z_1 = c + di$ mamy

$$|z + z_1| > |z| + |z_1|, \tag{28}$$

czyli, wobec (22) i (23):

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} > \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymalibyśmy stąd

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2},$$

skąd, odejmując po obu stronach $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, oraz dzieląc przez 2:

$$ac + bd > \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2},$$

zatem

$$(ac+bd)^2 > (a^2+b^2)\ (c^2+d^2),$$

gdy tymczasem, wobec tożsamości (27). musi być

$$(a^2+b^2)\ (c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2.$$

Nierówność (28) nie może więc zachodzić dla żadnych liczb zespolonych z i z_1. Musi więc być zawsze

$$|z + z_1| \leq |z| + |z_1|,$$

c. b. d. o. Podobnie jak dla liczb rzeczywistych, wnosimy stąd dalej, że *moduł różnicy jest niemniejszy od różnicy modułów.*

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że nierówności

$$|z + z_1| < A \quad \text{oraz} \quad |z - z_1| A$$

pociągają za sobą nierówności

$$|z| < A \quad \text{oraz} \quad |z_1| < A.$$

2) Okazać, że dla wszelkich zespolonych $z_1, z_2, \ldots z_n$, zachodzi nierówność:

$$\frac{|z_1 + z_2 + \ldots + z_n|}{1 + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|} \leq \frac{|z_1|}{1+|z_1|} + \frac{|z_2|}{1+|z_2|} + \ldots + \frac{|z_n|}{1+|z_n|}.$$

Dla $n = 1$ nierówność nasza jest prawdziwa oczywiście.

Aby ją udowodnić dla $n = 2$, czyli okazać, że zawsze

$$\frac{|z_1 + z_2|}{1 + |z_1 + z_2|} \leq \frac{|z_1|}{1+|z_1|} + \frac{|z_2|}{1+|z_2|},$$

wystarczy zauważyć, że po zniesieniu mianowników i po redukcji otrzymujemy równoważną nierówność

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| + |z_1 z_2| \cdot |z_1 + z_2| + 2|z_1 z_2|,$$

która zachodzi oczywiście, wobec tw. o module sumy.

Prawdziwość zaś naszej nierówności dla n liczb wynika natychmiast z jej prawdziwości dla $n-1$ liczb oraz dla dwóch liczb. (Nierówność tę zużytkował M. Fréchet dla zbudowania swej przestrzeni o nieskończenie wielu wymiarach).

§ 62. Dwumian Newtona.

Połóżmy przy wszelkiem zespolonem μ:

$$\binom{\mu}{k} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3.\ldots.k} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{29}$$

oraz

$$\binom{\mu}{0} = 1. \tag{30}$$

Dla $k > 1$ mamy, wobec (29):

$$\binom{\mu}{k-1} + \binom{\mu}{k} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+2)}{1.2.\ldots.(k-1)} + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.\ldots.k} =$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+2)}{1.2.\ldots.k}\left[k + (\mu - k + 1)\right] =$$

$$= \frac{(\mu+1)\ \mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+2)}{1.2.\ldots.k} = \binom{\mu+1}{k},$$

a że, wobec (29) i (30) mamy też

$$\binom{\mu}{0} + \binom{\mu}{1} = 1 + \mu = \binom{\mu+1}{1},$$

więc dowiedliśmy wzoru

$$\binom{\mu}{k-1} + \binom{\mu}{k} = \binom{\mu+1}{k} \tag{31}$$

przy wszelkiem zespolonem μ oraz wszelkiem naturalnem k.

Niech teraz a i b będą dwie dane liczby zespolone. Powiadam, że przy wszelkiem naturalnem m zachodzi wzór

$$(a+b)^m=\binom{m}{0}a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+\ldots+\binom{m}{m-1}ab^{m-1}+\binom{m}{m}b^m. \quad (32)$$

Wzór (32) jest oczywiście prawdziwy dla $m=1$, gdyż, w myśl (30) i (29):

$$\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b.$$

Załóżmy, że wzór (32) jest prawdziwy przy pewnem naturalnem m. Mnożąc obie strony wzoru (32) przez $a+b$, otrzymamy:

$$(a+b)^{m+1}=\binom{m}{0}a^{m+1}+\binom{m}{1}a^mb+\binom{m}{2}a^{m-1}b^2+\ldots+$$
$$+\binom{m}{m-1}a^2b^{m-1}+\binom{m}{m}ab^m+\binom{m}{0}a^mb+\binom{m}{1}a^{m-1}b^2+\ldots+$$
$$+\binom{m}{m-2}a^2b^{m-1}+\binom{m}{m-1}ab^m+\binom{m}{m}b^{m+1}=$$
$$=\binom{m}{0}a^{m+1}+\left[\binom{m}{1}+\binom{m}{0}\right]a^mb+\left[\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\right]a^{m-1}b^2+\ldots+$$
$$+\left[\binom{m}{m}+\binom{m}{m-1}\right]ab^m+\binom{m}{m}b^{m+1},$$

skąd, w myśl (31) i z uwagi, że $\binom{m}{0}=1=\binom{m+1}{0}$, $\binom{m}{m}=1=\binom{m+1}{m+1}$ znajdujemy:

$$(a+b)^{m+1}=\binom{m+1}{0}a^{m+1}+\binom{m+1}{1}a^mb+\binom{m+1}{2}a^{m-1}b^2+\ldots+$$
$$+\binom{m+1}{m}ab^m+\binom{m+1}{m+1}b^{m+1},$$

co dowodzi, że wzór (32) pozostaje prawdziwym, gdy w nim zastąpimy m przez $m+1$. Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości wzoru (32) przy wszelkiem naturalnem m.

Wzór (32), czyli wzór

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\ldots+b^m$$

znany jest pod nazwą *dwumianu Newtona*.

Kładąc, w szczególności, we wzorze (32) $a=b=1$, otrzymujemy:

$$2^m=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{m},$$

kładąc zaś $a=1$, $b=-1$, otrzymujemy:

$$0=\binom{m}{0}-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\ldots.+(-1)^m\binom{m}{m}$$

przy wszelkiem naturalnem m.

§ 63. Udowodnimy obecnie, że z każdej liczby zespolonej istnieje pierwiastek stopnia drugiego. Pierwiastkiem stopnia drugiego z liczby zespolonej $a+bi$ nazywamy liczbę zespoloną $x+yi$, spełniającą równanie

$$(x+yi)^2=a+bi. \quad (33)$$

Załóżmy, że liczba zespolona $x+yi$ spełnia wypisane równanie. Mamy stąd, w myśl definicji iloczynu liczb zespolonych:

$$x^2-y^2+2xyi=a+bi,$$

skąd, w myśl definicji równości liczb zespolonych:

$$x^2-y^2=a \quad (34)$$

oraz

$$2xy=b \quad (35)$$

Podnosząc te równania do kwadratu i dodając, otrzymujemy, jak łatwo widzieć [wobec tożsamości $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2$]:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2,$$

skąd, z uwagi, że $x^2+y^2\geq 0$, oraz w myśl definicji pierwiastka arytmetycznego:

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}. \quad (36)$$

Wzory (34) i (36) dają w jednej chwili (przez dodawanie, względnie odejmowanie):

$$2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a, \quad \text{oraz} \quad 2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a. \quad (37)$$

Lecz $\sqrt{a^2+b^2}\geq\sqrt{a^2}=|a|$, zaś $|a|\geq a$ oraz $|a|\geq -a$: prawe strony wzorów (37) są więc nieujemne: wzory te dają więc, w jednej chwili:

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad (38)$$

oraz

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}. \tag{39}$$

Znaki $\pm$ we wzorach (38) i (39) nie są od siebie niezależne: w myśl (35) musi bowiem być

$$\operatorname{sgn} x \,.\, \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} b. \tag{40}$$

Z drugiej strony, przez bezpośrednie podstawienie otrzymujemy, wobec (38) i (39):

$$x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} = a,$$

czyli wzór (34), oraz

$$4x^2y^2 = (\sqrt{a^2+b^2}+a)(\sqrt{a^2+b^2}-a) = a^2+b^2-a^2 = b^2,$$

skąd

$$|\,2xy\,| = |\,b\,|,$$

óraz

$$2xy = \operatorname{sgn}(2xy) \,.\, |\,2xy\,| = \operatorname{sgn}(2xy) \,.\, |\,b\,| = \operatorname{sgn} x \,.\, \operatorname{sgn} y \,.\, |\,b\,|,$$

czyli, wobec (40):

$$2xy = \operatorname{sgn} b \,.\, |\,b\,|,$$

co daje

$$2xy = b,$$

zatem wzór (35).

Liczby x i y, wyznaczone ze wzorów (38) i (39) przy warunku (40), spełniają więc równania (34) i (35), zatem też równanie (33).

Dowiedliśmy więc, że na to iżby liczba zespolona $x+yi$ spełniała równanie (33), potrzeba i wystarcza, iżby zachodziły wzory (38) i (39), w których znaki $\pm$ podlegają warunkowi (40).

Rozróżnimy dalej następujące przypadki:

1) $b=0$, $a=0$. W tym przypadku mamy, jak łatwo widzieć: $x=0$ oraz $y=0$ i równanie (33) posiada jedyne rozwiązanie

$$x+yi=0.$$

2) $b=0$, $a>0$. Wzór (39) daje w tym przypadku $y=0$ (gdyż $\sqrt{a^2}=|\,a\,|=a$) i mamy $\operatorname{sgn} b=0$, $\operatorname{sgn} y=0$: warunek (40) jest więc sam przez się spełniony.

Znaki $\pm$ we wzorach (38) i (39) możemy brać całkiem dowolnie, co jednak, wobec $y=0$, daje tylko dwa rozwiązania równania (33), mianowicie

$$x+yi = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2}+a}{2}} = \sqrt{a},$$

oraz

$$x+yi = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} = -\sqrt{a}$$

(rozwiązania te są, wobec $a>0$, jak łatwo widzieć, różne). Oba rozwiązania są rzeczywiste, różne co do znaku.

3) $b=0$, $a<0$. Wzór (38) daje w tym przypadku $x=0$ (gdyż $\sqrt{a^2}=|\,a\,|=-a$). Jak wyżej, znajdujemy w tym razie dwa różne rozwiązania równania (33), mianowicie

$$x+yi = i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2}-a}{2}} = i\sqrt{-a}$$

oraz

$$x+yi = -i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = -i\sqrt{-a}.$$

Oba rozwiązania są urojone.

4) $b\neq 0$. Wzór (40) jest w tym razie równoważny wzorowi

$$\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} b \;\; \operatorname{sgn} x \tag{41}$$

(gdyż wzór (35) wskazuje, że $x\neq 0$, skąd $(\operatorname{sgn} x)^2=1$).

Znak liczby x, czyli znak $\pm$ we wzorze (38), możemy więc obrać całkiem dowolnie, przez co znak liczby y, czyli znak we wzorze (39), będzie określony wzorem (41). Znajdujemy więc w tym przypadku dwa i tylko dwa rozwiązania równania (33), mianowicie

$$\left.\begin{aligned} x+yi &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\operatorname{sgn} b \,.\, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ \text{oraz} \\ x+yi &= -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\,\operatorname{sgn} b \,.\, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Rozwiązania te są różne, gdyż w razie ich równości znaleźlibyśmy $b=0$, wbrew założeniu.

Zestawiając otrzymane wyniki, dochodzimy do wniosku, że równanie (33), z wyjątkiem przypadku $a+bi=0$, posiada zawsze dwa różne rozwiązania.

Z każdej więc liczby zespolonej różnej od zera istnieją dwa różne pierwiastki kwadratowe (zespolone).

Przykłady.

1) Wyznaczmy pierwiastki kwadratowe z liczby i. W myśl wzorów (42) (dla $a=0$, $b=1$) pierwiastkami temi, czyli rozwiązaniami w liczbach zespolonych z równania $z^2=i$, będą liczby zespolone

$$z_1=\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad \text{oraz}\quad z_2=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

2) Dla $a=5$, $b=-12$, wzory (42) dają jako pierwiastki kwadratowe z liczby $5-12i$ liczby

$$z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{169}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{169}-5}{2}}=3+2i \quad \text{oraz} \quad z_2=-3-2i.$$

§ 64. Niech teraz m oznacza daną liczbę naturalną i przypuśćmy, że rozwiązaniami (w liczbach zespolonych z) równania

$$z^m=a+bi \tag{43}$$

są liczby zespolone

$$z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_k,\ \ldots \tag{44}$$

(nie przesądzając, czy wypisany ciąg jest skończony czy nie).

Powiadam, że pierwiastki kwadratowe z liczb (44) będą rozwiązaniami równania

$$z^{2m}=a+bi \tag{45}$$

i naodwrót, każde rozwiązanie równania (45) będzie pierwiastkiem kwadratowym z jednej z liczb (44).

W samej rzeczy, załóżmy, że liczba zespolona ζ jest pierwiastkiem kwadratowym z jednej z liczb (44) np. z liczby z_k: mamy więc

$$\zeta^2=z_k. \tag{46}$$

Lecz liczba z_k jest, jak zakładamy, jednem z rozwiązań równania (43): mamy więc

$$z_k^m=a+bi,$$

a że, wobec (46)

$$\zeta^{2m}=z_k^m$$

więc jest

$$\zeta^{2m}=a+bi,$$

co dowodzi, że liczba ζ jest rozwiązaniem równania (45).

Załóżmy, z drugiej strony, że liczba zespolona ζ spełnia równanie (45), t. j że

$$\zeta^{2m}=a+bi;$$

wzór ten możemy przepisać w postaci

$$(\zeta^2)^m=a+bi,$$

co dowodzi, że liczba ζ^2 jest jednem z rozwiązań równania (43). Ponieważ zaś wszystkie rozwiązania równania (43) są, jak zakładamy, wypisane w ciągu (44), więc ζ^2 musi być jedną z liczb tego ciągu, np.

$$\zeta^2=z_k,$$

co dowodzi, że liczba ζ jest pierwiastkiem kwadratowym z jednej z liczb (44).

Dowiedliśmy więc, że zbiór wszystkich rozwiązań równania (45) jest identyczny ze zbiorem wszystkich pierwiastków kwadratowych z każdego z rozwiązań równania (43). W ten sposób rozwiązywanie równania (45) sprowadza się do rozwiązywania równania (43).

Jeżeli przytem $a+bi\neq 0$, to żadna z liczb (44) nie może być zerem (gdyż w razie $z_k=0$ byłoby $a+bi=z_k^m=0$), a że z każdej różnej od zera liczby zespolonej istnieją (jak dowiedliśmy w § 63) dwa różne pierwiastki kwadratowe, i ponieważ pierwiastki kwadratowe z różnych liczb są zawsze różne (skoro ich kwadraty są różne), więc dochodzimy do wniosku, że w razie $a+bi\neq 0$ równanie (45) posiada dwa razy większą liczbę rozwiązań niż równanie (43).

Innemi słowy: z liczby różnej od zera istnieje dwa razy więcej pierwiastków stopnia $2m$-go niż m-go.

W szczególności więc, ponieważ, jak dowiedliśmy w § 63, z każdej różnej od zera liczby zespolonej istnieją dwa różne pierwiastki stopnia drugiego, wnosimy kolejno, że z każdej różnej od zera liczby zespolonej istnieją cztery różne pierwiastki stopnia czwartego, 8 różnych pierwiastków stopnia 8-go, ogólnie: 2^p różnych pierwiastków stopnia 2^p-go ($p=1,2,3,\ldots$). Mamy też zarazem metodę wyznaczania tych pierwiastków zapomocą kolejnego obliczania pierwiastków kwadratowych.

Przykłady. Z liczby 1 mamy dwa pierwiastki stopnia drugiego:

1 oraz -1,

każda z tych liczb posiada znowu dwa pierwiastki stopnia drugiego:

$$1, -1 \quad \text{oraz} \quad i, -i;$$

te cztery liczby są więc pierwiastkami stopnia czwartego z jedności. Obliczając pierwiastki kwadratowe z każdej z tych czterech liczb, otrzymujemy 8 pierwiastków stopnia 8-go z jedności, mianowicie

$$1, -1, i, -i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, -\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Aby mieć wszystkie pierwiastki stopnia 16-go z jedności, należałoby do ostatnich ośmiu liczb dopisać jeszcze liczby:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i,$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i,$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i,$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i,$$

Ze znalezionego przez nas związku między liczbą rozwiązań równań (43) i (45) wnosimy dalej, że jeżeli udowodnimy, że istnieją pierwiastki każdego nieparzystego stopnia z każdej danej liczby zespolonej, to będzie stąd wynikało, że istnieją też pierwiastki każdego naturalnego stopnia z każdej danej liczby zespolonej. Każdą bowiem liczbę naturalną możemy przedstawić w postaci $2^p m$, gdzie m jest liczbą nieparzystą, zaś p jest liczbą całkowitą ≥ 0, zaś z istnienia pierwiastków stopnia m-go będziemy kolejno wnosili o istnieniu pierwiastków dowolnego stopnia $2m$, $2^2 m, \ldots 2^p m$.

Wystarczy więc, dla dowodu istnienia pierwiastków dowolnego stopnia z liczb zespolonych, okazać, że istnieją pierwiastki każdego nieparzystego stopnia z każdej danej liczby zespolonej.

Niech więc $a+bi$ oznacza daną liczbę zespoloną, m — daną liczbę nieparzystą; chcemy dowieść, że równanie

$$z^m = a+bi \tag{47}$$

posiada conajmniej jedno rozwiązanie w liczbach zespolonych z.

Jeżeli $b=0$, to liczba

$$z = \operatorname{sgn} a. \sqrt[m]{|a|}$$

spełnia nasze równanie (gdyż $z^m = (\operatorname{sgn} a)^m . |a| = \operatorname{sgn} a . |a| = a$). Możemy więc dalej założyć, że $b \neq 0$.

Przypuśćmy, że liczba zespolona $z = x+yi$ spełnia równanie (47). Nie może tu być $y=0$, gdyż wówczas mielibyśmy $x^m = a+bi$, skąd wobec rzeczywistości lewej strony, $b=0$, wbrew założeniu. Jest więc $y \neq 0$. Położmy:

$$\frac{x}{y} = t; \tag{48}$$

będzie więc

$$x+yi = y(t+i),$$

zatem, w myśl (47):

$$y^m (t+i)^m = a+bi, \tag{49}$$

a że, jak wiemy (§ 61), wyniki działań arytmetycznych na liczbach sprzężonych są sprzężone, więc, wobec (49), możemy jeszcze napisać:

$$y^m (t-i)^m = a-bi. \tag{50}$$

Mnożąc równanie (49) przez $i(a-bi)$, równanie (50) przez $i(a+bi)$ oraz odejmując drugie od pierwszego, otrzymujemy, po podzieleniu przez y^m (z uwagi, że $y \neq 0$):

$$(t+i)^m (ia+b) - (t-i)^m (ia-b) = 0. \tag{51}$$

Mnożąc zaś stronami równania (49) i (50), otrzymujemy (z uwagi że iloczyn liczb sprzężonych jest ich normą):

$$y^{2m} (t^2+1)^m = a^2+b^2,$$

skąd, wobec rzeczywistości liczby y:

$$y = \pm \sqrt[2m]{\frac{a^2+b^2}{(t^2+1)^m}}. \tag{52}$$

Naodwrót, załóżmy teraz, że t jest liczbą rzeczywistą, spełniającą równanie (51) i wyznaczmy liczbę rzeczywistą y ze wzoru (52). Położmy dalej $x = ty$. Będzie więc

$$x+yi = y(t+i),$$

skąd

$$(x+yi)^{2m} = y^{2m} (t+i)^{2m}. \tag{53}$$

Wobec (52), mamy dalej:

$$y^{2m} = \frac{a^2+b^2}{(t^2+1)^m}. \tag{54}$$

Lecz, w myśl (51) (wobec $(t+i)(t-i) = t^2+1$):

$$(t+i)^{2m} (ia+b) = (t^2+1)^m (ia-b),$$

skąd, mnożąc przez $-ia+b$, z uwagi, że $(ia-b)(-ia+b)=(a+bi)^2$, otrzymujemy:

$$(t+i)^{2m}(a^2+b^2)=(t^2+1)^m(a+bi)^2. \tag{55}$$

Wzór (53) daje więc, wobec (54) i (55):

$$[(x+yi)^m]^2=(a+bi)^2,$$

czyli

$$[(x+yi)^m-(a+bi)]\,[(x+yi)^m+(a+bi)]=0,$$

skąd (z uwagi że iloczyn dwóch liczb zespolonych może być zerem tylko jeżeli jeden conajmniej z czynników jest zerem) wynika, że albo

$$(x+yi)^m=a+bi,$$

albo też

$$(x+yi)^m=-(a+bi);$$

w tym ostatnim przypadku moglibyśmy napisać (wobec nieparzystości m).

$$(-x-yi)^m=a+bi.$$

W każdym więc razie dowiedliśmy, że jeżeli tylko istnieje liczba rzeczywista t, spełniająca równanie (51), to istnieje też liczba zespolona z, spełniająca równanie (47). Pozostaje więc tylko do udowodnienia, że równanie (51) posiada conajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Równanie (51) po rozwinięciu wyrażeń $(t+i)^m$ oraz $(t-i)^m$ według dwumianu Newtona, oraz po łatwej redukcji i podzieleniu przez 2, sprowadza się do równania

$$bt^m-\binom{m}{1}at^{m-1}-\binom{m}{2}bt^{m-2}+\binom{m}{3}at^{m-2}+\binom{m}{4}bt^{m-4}-\ldots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}a=0$$

o współczynnikach rzeczywistych, przyczem współczynnikiem przy t^m jest liczba różna od zera (gdyż, jak zakładamy, $b\neq 0$).

Równanie (51) jest więc równaniem stopnia nieparzystego m o współczynnikach rzeczywistych.

W myśl tw. 72 wnosimy więc, że równanie (51) posiada conajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Wynika stąd, jak wiemy, że istnieje conajmniej jedna liczba zespolona z, spełniająca równanie (47).

Dowiedliśmy więc w tym paragrafie w zupełności, że *z każdej liczby zespolonej istnieje conajmniej jeden pierwiastek każdego danego naturalnego stopnia.*

§ 65. Zajmiemy się teraz dowodem t. zw. zasadniczego twierdzenia algebry, mianowicie twierdzenia, że każde równanie algebraiczne posiada conajmniej jeden pierwiastek.

Niech

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_{m-1}z+a_m \tag{56}$$

oznacza wielomian stopnia m-go o współczynnikach zespolonych $a_0, a_1, \ldots a_m$, przyczem $a_0\neq 0$.

Lemmat I. *Jeżeli, dla danej liczby zespolonej z_0, jest $f(z_0)\neq 0$, to istnieje liczba zespolona z, taka iż $|f(z)|<|f(z_0)|$.*

Dowód. Załóżmy, że dla danej liczby zespolonej z_0 mamy

$$f(z_0)\neq 0. \tag{57}$$

Zastąpmy we wzorze (56) z przez z_0+h i uporządkujmy wielomian $f(z_0+h)$ według potęg rosnących h: otrzymamy

$$f(z_0+h)=b_0+b_1h+b_2h^2+\ldots+b_mh^m, \tag{58}$$

gdzie, jak łatwo widzieć:

$$b_0=a_0z_0^m+a_1z_0^{m-1}+\ldots a_{m-1}z_0+a_m=f(z_0), \tag{59}$$

zatem, w myśl (57):

$$b_0\neq 0. \tag{60}$$

Dalej, jak łatwo obliczyć, będzie

$$b_m=a_0,$$

zatem

$$b_m\neq 0: \tag{61}$$

wśród współczynników

$$b_1, b_2, \ldots, b_m$$

istnieją więc różne od zera: niech b_k oznacza pierwszy z nich (będzie więc $1\leq k\leq m$). Wzór (58) będziemy mogli przepisać w postaci:

$$f(z_0+h)=b_0+b_kh^k+b_{k+1}h^{k+1}+\ldots+b_mh^m. \tag{62}$$

Połóżmy

$$c=-\frac{b_0\cdot|b_k|}{b_k\cdot|b_0|}$$

— będzie to pewna liczba zespolona. W myśl dowiedzionego w § 64 twierdzenia, istnieje conajmniej jeden pierwiastek stopnia k-go z liczby

zespolonej c. Oznaczmy przez α jeden z takich pierwiastków: będzie więc

$$\alpha^k = -\frac{b_0 \cdot |b_k|}{b_k \cdot |b_0|}. \tag{63}$$

skąd, w myśl twierdzenia o module iloczynu:

$$|\alpha|^k = |\alpha^k| = \frac{|b_0| \cdot |b_k|}{|b_k| \cdot |b_0|} = 1,$$

co daje w jednej chwili (z uwagi, że moduł jest liczbą rzeczywistą nieujemną):

$$|\alpha| = 1. \tag{64}$$

Oznaczmy, dalej, przez ϱ liczbę dodatnią, spełniającą nierówności

$$\varrho < 1, \quad \varrho < \left|\frac{b_0}{b_k}\right|, \quad \text{oraz} \quad \varrho < \frac{|b_k|}{|b_{k+1}| + |b_{k+2}| + \ldots + |b_m|} \tag{65}$$

(odrzucając trzeci z tych warunków w razie $k = m$).

Przyjmijmy wreszcie

$$h = \varrho\alpha. \tag{66}$$

Wzór (58) daje, w myśl twierdzenia o module sumy:

$$|f(z_0+h)| \leq |b_0 + b_k h^k| + |b_{k+1}h^{k+1} + b_{k+2}h^{k+2} + \ldots + b_m h^m|. \tag{67}$$

Lecz, w myśl (66) i (63):

$$b_0 + b_k h^k = b_0 + b_k \varrho^k \alpha^k = b_0 \left(1 - \left|\frac{b_k}{b_0}\right| \varrho^k\right). \tag{68}$$

zaś, wobec (65):

$$1 - \left|\frac{b_k}{b_0}\right| \varrho^k \geq 1 - \left|\frac{b_k}{b_0}\right| \varrho > 0,$$

zatem, wobec (68):

$$|b_0 + b_k h^k| = |b_0| \cdot \left(1 - \left|\frac{b_k}{b_0}\right| \varrho^k\right) = |b_0| - |b_k| \varrho^k. \tag{69}$$

Dalej, wobec (66) i (64), oraz w myśl tw. o module sumy:

$$|b_{k+1}h^{k+1} + b_{k+2}h^{k+2} + \ldots + b_m h^m| \leq$$
$$\leq |b_{k+1}| \cdot |h|^{k+1} + \ldots + |b_m| \cdot |h|^m = |b_{k+1}| \varrho^{k+1} + \ldots + |b_m| \varrho^m,$$

skąd, wobec (65):

$$|b_{k+1}h^{k+1} + \ldots + b_m h^m| \leq \varrho^{k+1}(|b_{k+1}| + |b_{k+2}| + \ldots + |b_m|) < \varrho^k |b_k|. \tag{70}$$

Wobec (67), (69) i (70) jest więc

$$|f(z_0+h)| < (|b_0| - |b_k|\varrho_k) + |b_k|\varrho^k,$$

czyli

$$|f(z_0+h)| < |b_0|,$$

zatem, wobec (59), dla $z = z_0 + h$:

$$|f(z)| < |f(z_0)|. \tag{71}$$

Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Położmy

$$a_k = \alpha_k + \beta_k i, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots:$$

wobec (56) będzie, przy wszelkich rzeczywistych x i y:

$$f(x+yi) = (\alpha_0 + \beta_0 i)(x+yi)^m + (\alpha_1 + \beta_1 i)(x+yi)^{m-1} + \ldots + \alpha_m + \beta_m i,$$

co, po rozwinięciu i zastąpieniu potęg i^{2k} przez $(-1)^k$, zaś potęg i^{2k-1} przez $(-1)^{k-1} i$, przedstawić możemy w postaci:

$$f(x+yi) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

gdzie $P(x,y)$ oraz $Q(x,y)$ są wielomiany całkowite względem x, y, o współczynnikach rzeczywistych [1]). Wnosimy stąd natychmiast, że

$$|f(x+yi)|^2 = P^2(x,y) + Q^2(x,y) = W(x,y) \tag{72}$$

jest wielomianem całkowitym względem x, y, o współczynnikach rzeczywistych.

Niech teraz $z = x + yi$ oznacza liczbę zespoloną, spełniającą nierówność (71) i niech x_n oraz y_n będą dwa ciągi nieskończone liczb wymiernych, zmierzające odpowiednio do x i y. Wobec

$$\lim_{n=\infty} x_n = x, \quad \lim_{n=\infty} y_n = y$$

oraz w myśl tw. o granicy sumy i iloczynu, wnosimy natychmiast, że

$$\lim_{n=\infty} W(x_n, y_n) = W(x,y),$$

a że, wobec (72):

$$|f(x_n + y_n i)|^2 = W(x_n, y_n), \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\text{oraz} \quad |f(x+yi)|^2 = W(x,y),$$

więc mamy:

$$\lim_{n=\infty} |f(x_n + y_n i)|^2 = |f(x+yi)|^2 = |f(z)|^2,$$

[1]) Np. dla $m = 2$ będzie

$$P(x,y) = \alpha_0(x^2 - y^2) - 2\beta_0 xy + \alpha_1 x - \beta_1 y + \alpha_2,$$
$$Q(x,y) = \beta_0(x^2 - y^2) + 2\alpha_0 xy + \beta_1 x + \alpha_1 y + \beta_2.$$

co dowodzi, wobec (71), że

$$|f(x_n+y_ni)|^2<|f(z_0)|^2, \quad \text{dla} \quad n>\mu,$$

skąd, w jednej chwili:

$$|f(x_n+y_ni)|<|f(z_0)|, \quad \text{dla} \quad n>\mu.$$

Udowodniliśmy więc

Lemmat II. *Jeżeli dla danej liczby zespolonej* z_0, $f(z_0)\neq 0$, *to istnieją liczby wymierne* u *i* v, *takie iż*

$$|f(u+vi)|<|f(z_0)|.$$

Niech

$$w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots\ldots$$

oznacza ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich liczb wymiernych (ciąg taki można zbudować, jak dowiedliśmy w § 9).

Weźmy pod rozwagę zbiór W wszystkich liczb zespolonych

$$w_k+w_li, \tag{73}$$

gdzie k i l są dowolne dane liczby naturalne.

Podzielmy liczby zbioru W na klasy, zaliczając do n-tej klasy wszystkie liczby (73), dla których $k+l=n+1$. Liczby każdej klasy możemy ustawić w pewien ciąg skończony, porządkując je np. według rosnących wskaźników k: liczby n-tej klasy dadzą więc ciąg o n wyrazach:

$$w_1+w_1i,\ w_2+w_{n-1}i,\ w_3+w_{n-2}i,\ldots w_n+w_1i. \tag{74}$$

Wypisując ciągi (74) kolejno dla $n=1,2,3,\ldots$, otrzymamy oznaczony w zupełności ciąg nieskończony liczb zespolonych

$$w_1+w_1i,\ w_1+w_2i,\ w_2+w_1i,\ w_1+w_3i,\ w_2+w_2i,\ w_3+w_1i,\ w_1+w_4i,\ldots\ldots, \tag{75}$$

utworzony ze wszystkich liczb zespolonych $u+vi$, których część rzeczywista oraz współczynnik przy i są wymierne.

Udowodniliśmy więc, że *zbiór wszystkich liczb zespolonych, których część rzeczywista oraz współczynnik przy* i *są wymierne, można ustawić w pewien ciąg nieskończony.*

Zauważymy, że zastępując w ciągu (75) każdą liczbę zespoloną $u+vi$ przez przedział (u, v), otrzymalibyśmy ciąg nieskończony

$$(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_1, w_3), (w_2, w_3), \ldots\ldots$$

utworzony ze wszystkich przedziałów (u, v) o końcach wymiernych. Udowodniliśmy więc też, że *zbiór wszystkich przedziałów* (u, v) *o końcach wymiernych można ustawić w pewien ciąg nieskończony.* (Z wyniku tego będziemy korzystali w dalszych działach Analizy).

Powróćmy znowu do wielomianu (56). Oznaczmy przez U zbiór wszystkich wartości jakie przyjmuje

$$|f(u+vi)|$$

przy wymiernych u i v, zaś przez g oznaczamy kres dolny zbioru U: g będzie więc liczbą rzeczywistą nieujemną.

Połóżmy

$$R=\frac{g+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_m|}{|a_0|} \tag{76}$$

Wobec (76) i uwagi, że $g\geq 0$, będzie

$$R\geq 1$$

i przeto, dla

$$|z|>R \tag{77}$$

będzie

$$|z|>1,$$

skąd

$$|a_1z^{m-1}+a_2z^{m-2}+\ldots+a_m|\leq|z^{m-1}|\,(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_m|).$$

W myśl (56) i wobec tw. o module różnicy mamy więc, dla $|z|>R$:

$$\begin{aligned}|f(z)|&\geq|a_0z_m|-|a_1z^{m-1}+a_2z^{m-2}+\ldots+a_m|\geq\\&\geq|a_0z^m|-|z^{m-1}|\,(|a_1|+\ldots+|a_m|)=\\&=|z^{m-1}|\,\{|a_0|\cdot|z|-(|a_1|+\ldots+|a_m|)\};\end{aligned} \tag{79}$$

lecz, w myśl (77) i (76):

$$|a_0|\cdot|z|>|a_0|\cdot R=g+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_m|,$$

zaś, wobec (78):

$$|z^{m-1}|\geq 1;$$

nierówność (79) daje więc w jednej chwili:

$$|f(z)|>g+|a_0|. \tag{80}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby zespolonej z, spełniającej nierówność (77), zachodzi nierówność (80).

Oznaczmy, dalej, przez U_1 zbiór wszystkich wartości, jakie przyjmować może $|f(u+vi)|$ dla wymiernych u i v, spełniających nierówność $u^2+v^2\leq R^2$. Powiadam, że kresy dolne zbiorów U i U_1 są równe.

W samej rzeczy, oznaczmy przez g_1 kres dolny zbioru U_1. z jednej strony mamy oczywiście

$$g_1 \geq g, \tag{81}$$

gdyż zbiór U_1 jest częścią zbioru U. Oznaczmy teraz przez U_2 zbiór wszystkich wartości, jakie przyjmować może $|f(u+vi)|$ dla wymiernych u i v, spełniających nierówność $u^2+v^2>R^2$ i niech g_2 oznacza kres dolny zbioru U_2. Ponieważ, jak dowiedliśmy, nierówność (77) pociąga za sobą nierówność (80), więc dla $u^2+v^2>R^2$, czyli dla $|u+vi|>R$, będziemy mieli stale

$$|f(u+vi)|>g+|a_0|.$$

co dowodzi, że kres dolny zbioru U_2 jest $\geq g+|a_0|$, zatem (wobec $a_0 \neq 0$):

$$g_2>g.$$

Gdyby było również $g_1>g$, to każda liczba zbioru U, należąc bądź do U_1, bądź do U_2, byłaby niemniejszą od jednej przynajmniej z liczb g_1 i g_2, i przeto kres dolny zbioru U byłby niemniejszy od mniejszej z liczb g_1 i g_2, zatem (wobec $g_1>g$ oraz $g_2>g$) — w każdym razie większy od g, wbrew definicji liczby g.

Musi więc być

$$g_1 \leq g,$$

skąd, wobec (81), otrzymujemy $g_1=g$, *c. b. d. o.*

Oznaczmy przez W_1 zbiór wszystkich liczb zespolonych $u+vi$, gdzie u i v są liczby wymierne, spełniające nierówność $u^2+v^2 \leq R$. Usuńmy z ciągu (75) wszystkie te wyrazy, które nie należą do zbioru W_1: pozostanie w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg nieskończony liczb zespolonych

$$z_1=u_1+v_1i, \quad z_2=u_2+v_2i, \quad z_3=u_3+v_3i, \ldots\ldots,$$

utworzony ze wszystkich liczb zbioru W_1.

Oznaczmy przy każdem danem naturalnem n przez t_n najmniejszą z n liczb

$$|f(z_1)|, \quad |f(z_2)|, \ldots. |f(z_n)|; \tag{82}$$

w ciągu (82) istnieje więc conajmniej jedna liczba $=t_n$: jeżeli jest ich więcej niż jedna, to niech k_n oznacza najmniejszy wskaźnik, przy którym

$$|f(z_{k_n})|=t_n. \tag{83}$$

Ciąg nieskończony t_n będzie oczywiście ciągiem nierosnącym liczb nieujemnych, przeto będzie posiadał granicę nieujemną

$$\lim_{n=\infty} t_n = t_0. \tag{84}$$

Powiadam, że $t_0=g$. W samej rzeczy, ponieważ liczba g jest, jak wiemy, kresem dolnym zbioru U_1, który, jak to wynika z definicji zbioru W_1, jest identyczny ze zbiorem wszystkich wyrazów ciągu nieskończonego

$$|f(z_1)|, \quad |f(z_2)|, \quad |f(z_3)|, \ldots\ldots, \tag{85}$$

więc, wobec (83), mamy stale

$$t_n \geq g; \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

skąd, wobec (84):

$$t_0 \geq g. \tag{86}$$

Z drugiej strony, z definicji liczb t_n wynika natychmiast, że przy naturalnem k:

$$|f(z_k)| \geq t_n, \quad \text{dla} \quad n \geq k,$$

skąd, wobec (84), w granicy dla $n=\infty$:

$$|f(z_k)| \geq t_0;$$

wszystkie wyrazy ciągu (85), czyli wszystkie liczby zbioru U_1 są są więc $\geq t_0$, skąd wnosimy, że kres dolny g zbioru U_1 spełnia nierówność

$$g \geq t_0,$$

która, wobec (86), daje

$$t_0=g,$$

c. b. d. o. Mamy więc, wobec (84):

$$\lim_{n=\infty} t_n = g. \tag{87}$$

Z definicji zbioru W_1 wynika, że stale

$$u_n^2+v_n^2 \leq R^2, \quad (\text{dla } n=1,2,3,\ldots)$$

i, tembardziej:

$$u_n^2 \leq R^2 \quad \text{oraz} \quad v_n^2 \leq R^2, \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

skąd

$$|u_n| \leq R \quad \text{oraz} \quad |v_n| \leq R, \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots \tag{88}$$

Położmy dalej

$$x_n = u_{k_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{89}$$

oraz

$$\overline{lim}_{n=\infty} x_n = x_0. \tag{90}$$

W myśl tw. 41 istnieje, wobec (90), ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, taki iż

$$lim_{n=\infty} x_{n_p} = x_0. \tag{91}$$

Położmy

$$y_p = v_{k_{n_p}} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{92}$$

oraz

$$\overline{lim}_{n=\infty} y_p = y_0; \tag{93}$$

w myśl tw. 41 istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników p_q $(q = 1, 2, 3, \ldots)$, taki iż

$$lim_{q=\infty} y_{p_q} = y_0. \tag{94}$$

Wobec (88) oraz (89), mamy:

$$| x_n | \leq R, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

zaś, wobec (88) oraz (92) mamy

$$| y_p | \leq R, \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots;$$

ciągi nieskończone x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ oraz y_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ są więc ograniczone i przeto, wobec (90) i (93), liczby x_0 i y_0 są skończone. Położmy

$$z_0 = x_0 + y_0 i$$

— będzie to więc pewna liczba zespolona. Położmy dalej

$$x_{n_{p_q}} = \xi_q, \quad y_{p_q} = \eta_q, \quad \text{dla} \quad q = 1, 2, 3, \ldots \tag{95}$$

Wobec (72), będzie

$$| f(\xi_q + \eta_q i) |^2 = W(\xi_q, \eta_q), \quad \text{dla} \quad q = 1, 2, 3, \ldots \tag{96}$$

oraz

$$| f(x_0 + y_0 i) |^2 = W(x_0, y_0), \tag{97}$$

gdzie $W(x, y)$ jest wielomianem względem x, y, o współczynnikach całkowitych.

Wobec (91), (94) i (95) mamy

$$lim_{q=\infty} \xi_q = x_0 \quad \text{oraz} \quad lim_{q=\infty} \eta_q = y_0,$$

skąd, w myśl tw. o granicy sumy i iloczynu:

$$lim_{q=\infty} W(\xi_q, \eta_q) = W(x_0, y_0),$$

zatem, w myśl (96) i (97):

$$lim_{q=\infty} | f(\xi_q + \eta_q i) |^2 = f(x_0 + y_0 i) |^2. \tag{98}$$

Z drugiej strony, wobec (83) i uwagi, że $z_k = u_k + v_k i$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, mamy w myśl (87)

$$lim_{n=\infty} | f(u_{k_n} + v_{k_n} i) | = g; \tag{99}$$

skąd, wobec (89), (92) i (95), w jednej chwili, w myśl tw. 16:

$$lim_{q=\infty} | f(\xi_q + \eta_q i) | = g. \tag{100}$$

Wzory (98) i (100) dają:

$$| f(x_0 + y_0 i) | = g. \tag{101}$$

Gdyby było

$$f(z_0) = f(x_0 + y_0 i) \neq 0,$$

to, w myśl lemmatu II, istniałyby liczby wymierne u i v, takie iż

$$| f(u + vi) | < | f(x_0 + y_0 i) |,$$

i, w myśl (101), byłoby

$$| f(u + vi) | < g,$$

wbrew definicji liczby g, jako kresu dolnego zbioru U. Jest więc

$$f(x_0 + y_0 i) = 0.$$

Dowiedliśmy więc w tym paragrafie, że dla każdego wielomianu całkowitego $f(z)$ o współczynnikach zespolonych, w którym współczynnik przy najwyższej potędze nie jest zerem, istnieje liczba zespolona z_0, dla której wielomian ten staje się zerem. Innemi słowy dowiedliśmy, że *każde równanie algebraiczne m-go stopnia* $(m \geq 1)$ *o współczynnikach zespolonych posiada conajmniej jeden (zespolony) pierwiastek*. Jest to tak zwane *zasadnicze twierdzenie algebry*.

§ 66. Niech

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m \tag{102}$$

oznacza dany wielomian stopnia m-go o współczynnikach zespolonych, przyczem $a_0 \neq 0$.

W myśl dowiedzionego w poprzednim paragrafie twierdzenia, istnieje conajmniej jedna liczba zaspolona z_1, dla której

$$f(z_1) = 0 \tag{103}$$

W myśl (103) i wobec (102), mamy przy wszelkiem zespolonem z:

$$f(z) = f(z) - f(z_1) = a_0(z^m - z_1^m) + a_1(z^{m-1} - z_1^{m-1}) + \ldots + a_{m-1}(z - z_1). \tag{104}$$

Lecz, przy naturalnem k, mamy łatwo dającą się sprawdzić tożsamość

$$z^k - z_1^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z_1 z^{k-2} + z_1^2 z^{k-3} + \ldots + z_1^{k-2} z + z_1^{k-1}),$$

wypisując tożsamość tę kolejno dla $k = m,\ m-1,\ m-2, \ldots, 1$ i mnożąc odpowiednio przez $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$, otrzymamy, po dodaniu stronami, wobec (104):

$$f(z) = (z - z_1) f_1(z), \tag{105}$$

gdzie $f_1(z)$ oznacza wielomian stopnia $m-1$-go względem z:

$$f_1(z) = a_0 z^{m-1} + (a_0 z_1 + a_1) z^{m-2} + (a_0 z_1^2 + a_1 z_1 + a_2) z^{m-3} + \ldots + (a_1 z_1^{m-1} + \ldots + a_{m-1}).$$

Współczynnikiem przy najwyższej potędze z jest więc w wielomianie $f_1(z)$, podobnie jak w wielomianie $f(z)$, liczba a_0.

Jeżeli $m > 1$, to, w myśl zasadniczego tw. algebry, dla wielomianu $f_1(z)$ istnieje liczba zespolona z_2, taka iż

$$f_1(z_2) = 0$$

i rozumując podobnie jak wyżej co do $f(z)$, będziemy mogli wypisać tożsamość

$$f_1(z) = (z - z_2) f_2(z), \tag{106}$$

gdzie $f_2(z)$ oznacza wielomian stopnia $m-2$-go względem z, w którym współczynnik przy największej potędze z jest znowu a_0.

Jeżeli $m > 2$, to dla wielomianu $f_2(z)$ będziemy mogli wypisać tożsamość

$$f_2(z) = (z - z_3) f_3(z), \tag{107}$$

gdzie $f_3(z)$ oznacza wielomian stopnia $m-3$-go względem z, w którym współczynnik przy najwyższej potędze jest znowu a_0, i t. d. aż dojdziemy do tożsamości

$$f_{m-2}(z) = (z - z_{m-1}) f_{m-1}(z),$$

w której $f_{m-1}(z)$ oznacza wielomian stopnia $m - (m-1)$, czyli stopnia pierwszego względem z, gdzie współczynnik przy z jest a_0, czyli

$$f_{m-1}(z) = a_0 z + b, \tag{108}$$

gdzie b oznacza współczynnik, niezależny od z. Kładąc $z_m = -\frac{b}{a_0}$, będziemy mogli wzór (108) przepisać w postaci:

$$f_{m-1}(z) = (z - z_m) a_0. \tag{109}$$

Wzory (105), (106), ... (109) dają w jednej chwili tożsamość:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m). \tag{110}$$

Dowiedliśmy więc, że dla *każdego wielomianu całkowitego m-go stopnia o współczynnikach zespolonych, w którym współczynnikiem przy z^m jest $a_0 \neq 0$, istnieją liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots z_m$, przy których zachodzi tożsamość* (110).

Wzór (110) nazywamy *rozkładem wielomianu na czynniki linjowe.*

Każda z liczb $z_1, z_2, \ldots, z_m$ jest oczywiście pierwiastkiem równania

$$f(z) = 0 \tag{111}$$

(gdyż dla każdej z nich jeden conajmniej z czynników prawej strony wzoru (110) jest zerem).

Lecz i naodwrót: każdy pierwiastek równania (111) musi być jedną z liczb $z_1, z_2, \ldots, z_m$, gdyż jeżeli dla danej liczby zespolonej z jest $f(z) = 0$, to prawa strona wzoru (110) musi być zerem, skąd, wobec $a_0 \neq 0$, wnosimy, że jeden conajmniej z czynników $z - z_1,\ z - z_2, \ldots z - z_m$ musi być zerem, co dowodzi, że z jest jedną z liczb $z_1, z_2, \ldots z_m$.

Wynika stąd, że *każde równanie stopnia m-go* (w którem współczynnik przy najwyższej potędze jest różny od zera) *posiada conajwyżej m różnych pierwiastków.* Może ono jednak posiadać ich mniej niż m, gdyż wśród liczb $z_1, z_2, \ldots z_m$ mogą być równe.

Przypuśćmy teraz, że wielomiam stopnia m-go

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$$

staje się zerem dla $m+1$ (lub większej liczby) różnych liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots z_m, z_{m+1}$; powiadam, że wówczas wszystkie współczynniki $a_0, a_1, \ldots a_m$ są równe zeru. W samej rzeczy załóżmy, że wśród współczynników $a_0, a_1, \ldots a_m$ są różne od zera i niech a_k oznacza pierwszy z nich. Gdyby było $k < m$, to

$$f(z) = a_k z^{m-k} + a_{k-1} z^{m-k-1} + \ldots + a_m = 0$$

byłoby równaniem stopnia $m-k$, w którem współczynnik przy najwyższej potędze nie jest zerem i posiadającem więcej niż $m-k$ (gdyż $m+1$) różnych pierwiastków, wbrew udowodnionemu wyżej twierdzeniu. Jest więc $k = m$, czyli przy wszelkiem zespolonem z

$$f(z) = a_m,$$

skąd, dla $z = z_1$, z uwagi, że $f(z_1) = 0$:

$$a_m = 0.$$

W każdym więc razie wszystkie współczynniki $a_0, a_1, \ldots a_m$ są równe zeru, *c. b. d. o.* Mamy tedy przy wszelkiem zespolonem z

$$f(z) = 0,$$

skąd

Twierdzenie 73. *Jeżeli wielomian stopnia m-go staje się zerem dla więcej niż m różnych wartości zmiennej, to jest on tożsamościowo równy zeru.*

Jako natychmiastowy wniosek stąd otrzymujemy

Twierdzenie 73ª. *Jeżeli dwa wielomiany stopni nie większych od m są sobie równe dla więcej niż m różnych wartości zmiennej, to są one sobie równe tożsamościowo.*

W samej rzeczy, jeżeli $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ są uważane wielomiany, to $f(z) = \varphi(z) - \psi(z)$ przedstawia wielomian stopnia nie większego od m, który staje się zerem dla więcej niż m różnych wartości zmiennej i przeto musi być tożsamościowo zerem, skąd wynika, tożsamościowo $\varphi(z) = \psi(z)$.

Powróćmy do rozwinięcia wielomianu na czynniki linjowe. Niech więc (102) oznacza dany wielomian stopnia m-go, gdzie $a \neq 0$, zaś wzór (110) niech przedstawia jego rozwinięcie na czynniki linjowe. (Rozwinięcie takie istnieje, jak dowiedliśmy wyżej: nie przesądzamy narazie czy jest ono tylko jedno).

Jeżeli wśród liczb $z_1, z_2, \ldots z_m$ jest α_1 równych liczbie ζ_1, to odpowiednie czynniki we wzorze (110) możemy połączyć w jeden czynnik $(z-\zeta_1)^{\alpha_1}$. Podobnież, jeżeli wśród liczb $z_1, z_2, \ldots z_m$ jest α_2 równych liczbie ζ_2, to odpowiednie czynniki we wzorze (110) możemy połączyć w jeden czynnik $(z-\zeta_2)^{\alpha_2}$ i t. d. W ten sposób wzór (110) będziemy mogli przedstawić w postaci

$$f(z) = a_0 (z-\zeta_1)^{\alpha_1} (z-\zeta_2)^{\alpha_2} \ldots (z-\zeta_k)^{\alpha_k}, \qquad (112)$$

gdzie $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ są same różne liczby zespolone, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są wykładniki naturalne, przyczem oczywiście mamy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = m$.

Powiadam, że wielomian $f(z)$ daje tylko jedno rozwinięcie (112), jeżeli nie będziemy uważali jako różne rozwinięcia, różniące się jedynie porządkiem czynników.

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że w każdem rozwinięciu (112) liczby $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ są wszystkiemi różnemi pierwiastkami równania $f(z) = 0$: dwa rozwinięcia typu (112) dla wielomianu $f(z)$, pomijając porządek czynników, mogą się więc różnić conajwyżej wykładnikami. Załóżmy więc, że prócz rozwinięcia (112) mamy dla wielomianu $f(z)$ jeszcze rozwinięcie

$$f(z) = a_0 (z-\zeta_1)^{\beta_1} (z-\zeta_2)^{\beta_2} \ldots (z-\zeta_k)^{\beta_k}, \qquad (113)$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ są wykładniki naturalne.

Wobec (112) i (113), oraz uwagi, że $a_0 \neq 0$, mamy przy wszelkiem zespolonem z:

$$(z-\zeta_1)^{\alpha_1} (z-\zeta_2)^{\alpha_2} \ldots (z-\zeta_k)^{\alpha_k} = (z-\zeta_1)^{\beta_1} (z-\zeta_2)^{\beta_2} \ldots (z-\zeta_k)^{\beta_k}. \qquad (114)$$

Załóżmy, że $\alpha_1 \neq \beta_1$, np. że $\alpha_1 > \beta_1$: możemy więc położyć $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma$, gdzie γ jest liczbą naturalną. Dla każdej liczby zespolonej $z \neq \zeta_1$ wzór (114) daje, po podzieleniu obu stron przez $(z-\zeta_1)^{\beta_1}$:

$$(z-\zeta_1)^{\gamma} (z-\zeta_2)^{\alpha_2} \ldots (z-\zeta_k)^{\alpha_k} = (z-\zeta_2)^{\beta_2} \ldots (z-\zeta_k)^{\beta_k}. \qquad (115)$$

Wielomiany, przedstawiające lewą i prawą stronę wzoru (115) są więc sobie równe dla wszystkich, różnych od ζ_1 liczb zespolonych z, więc, w każdym razie, dla nieskończenie wielu różnych liczb z, skąd, w myśl tw. 73ª wynika, że są one równe tożsamościowo. Wzór (115) zachodzi więc przy wszelkiem zespolonem z, skąd, w szczególności, dla $z = \zeta_1$:

$$0 = (\zeta_1 - \zeta_2)^{\beta_2} \ldots (\zeta_1 - \zeta_k)^{\beta_k}$$

— wbrew założeniu, że liczby $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ są wszystkie różne.

Musi więc być $\alpha_1 \leq \beta_1$; podobnież dowiedlibyśmy, że $\beta_1 \leq \alpha_1$; jest więc $\alpha_1 = \beta_1$. Taksamo udowodnilibyśmy, że $\alpha_2 = \beta_2, \ldots \alpha_k = \beta_k$. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 74. *Każdy wielomian stopnia m-go o współczynnikach zespolonych*

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m,$$

gdzie $a_0 \neq 0$, *daje jeden i tylko jeden rozkład*

$$f(z) = a_0 (z - \zeta_1)^{\alpha_1} (z - \zeta_2)^{\alpha_2} \ldots (z - \zeta_k)^{\alpha_k},$$

gdzie $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ *są różne liczby zespolone, zaś* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — *wykładniki naturalne.*

W rozkładzie tym, zwanym rozkładem wielomianu $f(z)$ na czynniki pierwsze, liczby $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ są wszystkiemi różnemi pierwiastkami równania $f(z) = 0$. Wykładniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nazywamy *krotnościami* odpowiednich pierwiastków: mówimy że ζ_1 jest α_1-krotnym pierwiastkiem naszego równania i t. d. Każdy pierwiastek równania algebraicznego ma więc oznaczoną krotność: pierwiastki, których krotność wynosi 1, nazywamy *zwykłymi*, pierwiastki zaś, których krotność jest większą od jedności, nazywamy *wielokrotnymi*. Jeżeli każdy pierwiastek równania $f(z) = 0$ będziemy uwzględniali tyle razy, ile wynosi jego krotność, to, wobec wzoru $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_k = m$, będziemy mogli powiedzieć, że *każde równanie algebraiczne posiada tyle pierwiastków ile wynosi jego stopień* (lecz wtedy już niekoniecznie wszystkie pierwiastki będą różne).

Weźmy pod rozwagę, w szczególności, równanie dwumienne:

$$z^m - a = 0, \tag{116}$$

gdzie a oznacza daną liczbę zespoloną, różną od zera. Powiadam, że równanie to nie posiada pierwiastków wielokrotnych.

Załóżmy, dla dowodu, że liczba zespolona ζ_1 jest pierwiastkiem wielokrotnym równania (116). (Musi więc być $m > 1$). Mamy tedy rozkład

$$z^m - a = (z - \zeta_1)^{\alpha_1} (z - \zeta_2)^{\alpha_2} \ldots (z - \zeta_k)^{\alpha_k},$$

gdzie $\alpha_1 > 1$, i przeto możemy wypisać tożsamość

$$z^m - a = (z - \zeta_1)^2 \varphi(z), \tag{117}$$

gdzie $\varphi(z)$ oznacza wielomian całkowity względem z (oczywiście stopnia $m - 2$).

Z drugiej strony, wobec założenia, że ζ_1 jest pierwiastkiem równania (116), mamy

$$\zeta_1^m - a = 0, \tag{118}$$

czyli $\zeta_1^m = a$, i możemy wypisać tożsamość

$$z^m - a = z^m - \zeta_1^m = (z - \zeta_1)(z^{m-1} + \zeta_1 z^{m-2} + \ldots + \zeta_1^{m-2} z + \zeta_1^{m-1}). \tag{119}$$

Wobec (117) i (119) mamy tożsamość:

$$(z - \zeta_1)(z^{m-1} + \zeta_1 z^{m-2} + \ldots + \zeta_1^{m-2} z + \zeta_1^{m-1}) = (z - \zeta_1)^2 \varphi(z),$$

skąd, dla $z \neq \zeta_1$, znajdujemy po podzieleniu obu stron przez $z - \zeta_1$:

$$z^{m-1} + \zeta_1 z^{m-2} + \ldots + \zeta_1^{m-2} z + \zeta_1^{m-1} = (z - \zeta_1) \varphi(z). \tag{120}$$

Wielomiany, stojące po lewej i prawej stronie wzoru (120), są więc równe dla wszystkich, różnych od ζ_1 liczb zespolonych, skąd wnosimy, że muszą być równe tożsamościowo. Wzór (120) pozostaje więc prawdziwym przy wszelkiem zespolonem z, skąd, w szczególności, dla $z = \zeta_1$:

$$m \zeta_1^{m-1} = 0,$$

co, wobec $m > 1$, daje

$$\zeta_1 = 0$$

i przeto, wobec (118):

$$a = 0,$$

wbrew założeniu.

Dowiedliśmy więc, że równanie (116) nie posiada pierwiastków wielokrotnych. Krotność każdego pierwiastka tego równania wynosi więc 1, a że suma krotności wszystkich różnych pierwiastków równania m-go stopnia wynosi m, więc wnosimy, że równanie nasze posiada m różnych pierwiastków.

Innemi słowy, udowodniliśmy

Twierdzenie 75. *Z każdej, różnej od zera, liczby zespolonej istnieje dokładnie m różnych pierwiastków (zespolonych)* **m**-*go stopnia.*

§ 67. Okażemy obecnie, że *pierwiastki równania algebraicznego są funkcjami ciągłemi jego współczynników.* Udowodnimy mianowicie następujące

Twierdzenie 76. *Dla każdego danego wielomianu całkowitego m-go stopnia* ($m \geq 1$) *o współczynnikach zespolonych*

$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m, \tag{1}$$

gdzie $A_0 \neq 0$, *dającego rozwinięcie na czynniki linjowe*

$$f(z) = A_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m),$$

oraz dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ taka, iż każdy wielomian

$$g(z) = B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_{m-1} z + B_m, \tag{2}$$

którego współczynniki są liczbami zespolonemi, spełniającemi nierówności:

$$| B_k - A_k | < \delta, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots m, \tag{3}$$

daje rozwinięcie na czynniki linjowe

$$g(z) = B_0 (z - t_1)(z - t_2) \ldots (z - t_m),$$

gdzie t_k są (zależne od współczynników B) *liczby zespolone, spełniające nierówności*:

$$| t_k - z_k | < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots m.$$

Dowód. Niech (1) oznacza dany wielomian stopnia m-go, gdzie $A_0 \neq 0$; rozkład tego wielomianu na czynniki pierwsze przedstawimy w postaci:

$$f(z) = A_0 (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \ldots (z - z_r)^{\alpha_r}, \tag{4}$$

gdzie $z_1, z_2, \ldots z_r$ są same różne pierwiastki wielomianu $f(z)$, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ — odpowiednie ich krotności.

Oznaczmy przez M liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówności

$$| A_k | \leq M, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots m \tag{5}$$

(będzie to oczywiście liczba dodatnia) i położymy:

$$R = \frac{2M + | A_0 |}{| A_0 |} m; \tag{6}$$

będzie więc

$$R > 1. \tag{7}$$

Jeżeli $r > 1$, to dla liczb

$$z_1, z_2, \ldots z_r \tag{8}$$

utwórzmy wszystkie $\frac{r(r-1)}{2}$ różnic

$$z_p - z_q,$$

gdzie p i q są różne od siebie liczby ciągu $1, 2, \ldots r$, i oznaczmy przez l liczbę dodatnią, spełniającą nierówności

$$l \leq 1 \quad \text{oraz} \quad l \leq \frac{1}{2} | z_p - z_q |, \quad (p = 1, 2, \ldots r, \; q = 1, 2, \ldots r, \; p \neq q), \tag{9}$$

zaś przez L oznaczmy liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówności:

$$L \geq 1 \quad \text{oraz} \quad L \geq 2 | z_p - z_q |, \quad (p = 1, 2, \ldots r, \; q = 1, 2, \ldots r). \tag{10}$$

Jeżeli $r = 1$, to położymy $l = 1$ oraz $L = 1$: w każdym więc razie będzie

$$l \leq 1 \quad \text{oraz} \quad L \geq 1. \tag{11}$$

Niech, dalej, ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Oznaczmy przez ε_1 liczbę dodatnią, spełniającą nierówności:

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_1 < \frac{l^m}{2^{m+2} L^m} \tag{12}$$

— wobec (11) będzie w każdym razie

$$\varepsilon_1 < 1. \tag{13}$$

Obierzmy teraz jako δ liczbę

$$\delta = \frac{| A_0 | \, l^m \varepsilon_1^m}{2 (m+1) (R + \varepsilon_1)^m}; \tag{14}$$

będzie to oczywiście liczba dodatnia, przytem wobec (11), (13) i (7) będzie

$$\delta < \frac{| A_0 |}{2}. \tag{15}$$

Niech teraz (2) oznacza dowolny dany wielomian, którego współczynniki spełniają warunki (3).

Położymy

$$B_k = A_k + a_k, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots m \tag{16}$$

oraz

$$\varphi(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m; \tag{17}$$

będzie więc przy wszelkiem z (wobec (1) i (2)):

$$f(z) = g(z) - \varphi(z). \tag{18}$$

Warunek (3) przyjmuje, wobec (16), postać:

$$| a_k | < \delta, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots m. \tag{19}$$

Dla

$$| z | > R \tag{20}$$

mamy, wobec (7), tembardziej:

$$| z | > 1. \tag{21}$$

Dalej, mamy, wobec (2) i (16):

$$| g(z) | = | (A_0 + a_0) z^m + (A_1 + a_1) z^{m-1} + \ldots + (A_m + a_m) | \geq$$
$$\geq | (A_0 + a_0) z^m | - | (A_1 + a_1) z^{m-1} + \ldots + (A_m + a_m) |,$$

skąd, z uwagi, że wobec (19) oraz (15):

$$| A_0 + a_0 | \geq | A_0 | - | a_0 | > | A_0 | - \delta > | A_0 | - \frac{| A |}{2} = \frac{| A_0 |}{2}, \tag{22}$$

oraz

$$| a_k | < \frac{| A_0 |}{2}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots m,$$

znajdujemy, wobec (5) i (21):

$$| g(z) | \geq \frac{| A_0 |}{2} | z^m | - \left(M + \frac{| A_0 |}{2} \right) m | z^{m-1} | = | z^{m-1} | \left\{ \frac{| A_0 |}{2} | z | - \left(M + \frac{| A_0 |}{2} \right) m \right\},$$

co, z uwagi, że wobec (21)

$$|z^{m-1}| \geq 1,$$

zaś, wobec (20), wobec $|A_0| > 0$, oraz (6):

$$\frac{|A_0|}{2}|z| - \left(M + \frac{|A_0|}{2}\right)m > \frac{|A_0|}{2}R - \left(M + \frac{|A_0|}{2}\right)m = 0,$$

daje w jednej chwili:

$$|g(z)| > 0,$$

t. j.

$$g(z) \neq 0.$$

Dowiedliśmy więc, że

$$g(z) \neq 0, \quad \text{dla} \quad |z| > R. \tag{23}$$

Jeżeli, w szczególności, przyjmiemy $a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0$, to wielomian $g(z)$ przejdzie oczywiście na wielomian $f(z)$: ponieważ zaś wniosek (23) wyprowadziliśmy niezależnie od poszczególnych wartości liczb $a_0, a_1, \ldots a_m$, byleby spełniających nierówności (19), więc, w szczególności, dla $a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0$, znajdujemy:

$$f(z) \neq 0, \quad \text{dla} \quad |z| > R. \tag{24}$$

Wobec (16) i (22) mamy:

$$|B_0| = |A_0 + a_0| > \frac{|A_0|}{2}, \tag{25}$$

zatem

$$B_0 \neq 0;$$

$g(z)$ jest więc wielomianem stopnia m-go i przeto rozwija się na m czynników linjowych. Niech ζ oznacza którykolwiek z pierwiastków wielomianu $g(z)$. Wobec (23) nie może być $|\zeta| > R$ (gdyż wówczas byłoby $g(\zeta) \neq 0$): jest więc

$$|\zeta| \leq R. \tag{26}$$

Gdyby było

$$|\zeta - z_k| \geq \varepsilon_1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots r, \tag{27}$$

to mielibyśmy, wobec (4) (oraz uwagi, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = m$):

$$|f(\zeta)| \geq |A_0| \cdot \varepsilon_1^m. \tag{28}$$

Z drugiej strony, wobec (18):

$$f(\zeta) = g(\zeta) - \varphi(\zeta),$$

zatem, ponieważ ζ oznacza pierwiastek wielomianu $g(z)$:

$$f(\zeta) = -\varphi(\zeta)$$

i przeto

$$|f(\zeta)| = |\varphi(\zeta)|. \tag{29}$$

Lecz, w myśl (17), (19), (26) i (7):

$$|\varphi(\zeta)| \leq \delta(R^m + R^{m-1} + \ldots + R + 1) < (m+1)\,\delta\,R^m,$$

skąd, wobec (29):

$$|f(\zeta)| < (m+1)\,\delta\,R_m. \tag{30}$$

Nierówności (28) i (30) dają:

$$(m+1)\,\delta\,R^m > |A_0| \cdot \varepsilon_1^m,$$

wbrew (14) (gdyż, wobec (11), $l \leq 1$, zaś $\varepsilon_1 > 0$).

Dowiedliśmy więc, że nie mogą zachodzić jednocześnie wszystkie nierówności (27). Jedna więc conajmniej z tych nierówności nie jest prawdziwą, t. j. dla jednego conajmniej wskaźnika k z ciągu $1, 2, \ldots, r$, będzie:

$$|\zeta - z_k| < \varepsilon_1. \tag{31}$$

Powiadam dalej, że nierówność (31) nie może zachodzić dla dwóch różnych wskaźników k z ciągu $1, 2, \ldots r$.

W samej rzeczy, gdybyśmy mieli dla $p \neq q$:

$$|\zeta - z_p| < \varepsilon_1 \quad \text{oraz} \quad |\zeta - z_q| < \varepsilon_1,$$

to byłoby

$$|z_p - z_q| = |(z_p - \zeta) + (\zeta - z_q)| \leq |z_p - \zeta| + |\zeta - z_q| < 2\,\varepsilon_1,$$

zatem, z uwagi, że ze wzoru (12) wynika, wobec (11):

$$\varepsilon_1 < l, \tag{32}$$

byłoby

$$|z_p - z_p| < 2\,l,$$

wbrew (9).

Dowiedliśmy zatem, że dla każdego pierwiastka ζ wielomianu $g(z)$ istnieje w ciągu $1, 2, \ldots r$ jeden i tylko jeden wskaźnik k, przy którym zachodzi nierówność (31). (Z drugiej atoli strony nie przesądzamy przez ile pierwiastków ζ wielomianu $g(z)$ może być spełnioną nierówność (31) przy danem k).

Niech

$$g(z) = B_0(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)\ldots(z - \zeta_m) \tag{33}$$

oznacza rozwinięcie wielomianu $g(z)$ na czynniki linjowe.

Każda z liczb ζ_j ($j = 1, 2, \ldots m$) (wśród których mogą być równe) spełnił więc, jak dowiedliśmy, przy pewnym (i tylko jednym, odpowiednim) wskaźniku k_j (z ciągu $1, 2, \ldots r$) nierówność

$$|\zeta_j - z_{k_j}| < \varepsilon_1.$$

Przypuśćmy, że z liczb

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m \tag{34}$$

pierwsze β_1 spełniają nierówności

$$|\zeta_j - z_1| < \varepsilon_1, \quad (j = 1, 2, \ldots \beta_1). \tag{35}$$

następne zaś β_2 z liczb (34) spełniają nierówności

$$|\zeta_j - z_2| < \varepsilon_1,$$

i t. d., wreszcie że ostanie β_r z liczb (34) spełniają nierówności

$$|\zeta_j - z_r| < \varepsilon_1.$$

Liczby $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ będą więc całkowite, nieujemne, przytem oczywiście $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r = m$.

Dla dowodu naszego twierdzenia wystarczy oczywiście, wobec (4), oraz $\varepsilon_1 < \varepsilon$ [w myśl (12)], okazać, że

$$\beta_k = \alpha_k, \quad \text{dla} \quad k = 1\ 2, \ldots\ r. \tag{36}$$

Udowodnimy w tym celu, że

$$\beta_k \leq \alpha_k, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots r: \tag{37}$$

stąd i z uwagi że

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r$$

(gdyż każda z tych sum wynosi m) będą wynikały natychmiast wzory (36). Możemy przytem zakładać, że $r > 1$, gdyż dla $r = 1$ wzór (36) zachodziłby oczywiście (wobec $\alpha_1 = \beta_1 = m$).

Okażemy, że $\beta_1 \leq \alpha_1$. W myśl (4) możemy położyć

$$f(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} \psi(z), \tag{38}$$

gdzie

$$\psi(z) = A_0 (z - z_2)^{\alpha_2} (z - z_3)^{\alpha_3} \ldots (z - z_r)^{\alpha_r}. \tag{39}$$

W myśl (39) będzie

$$\psi(z_1 + \varepsilon_1) = A_0 (z_1 - z_2 + \varepsilon_1)^{\alpha_2} \ldots (z_1 - z_r + \varepsilon_1)^{\alpha_r}. \tag{40}$$

Lecz, w myśl (9):

$$| z_1 - z_k | \geq 2l, \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots r,$$

skąd, wobec (32):

$$| z_1 - z_k + \varepsilon_1 | \geq | z_1 - z_k | - \varepsilon_1 > l, \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, r,$$

i przeto, wobec (40):

$$| \psi(z_1 + \varepsilon_1) | > | A_0 | \cdot l^{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_r}$$

skąd, wobec $l \leq 1$ oraz $\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_r = m-\alpha_1 < m$, tembardziej:

$$| \psi(z_1 + \varepsilon_1) | > | A_0 | \cdot l^m,$$

co, daje, wobec (38):

$$| f(z_1 + \varepsilon_1) | > \varepsilon_1^{\alpha_1} | A_0 | \cdot l^m. \tag{41}$$

Z drugiej strony, w myśl (33) możemy napisać:

$$g(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \ldots (z - \zeta_{\beta_1}) \vartheta(z), \tag{42}$$

gdzie

$$\vartheta(z) = B_0 (z - \zeta_{\beta_1+1})(z - \zeta_{\beta_1+2}) \ldots (z - \zeta_m) \tag{43}$$

(w razie $\beta_1 = m$, mielibyśmy poprostu $\vartheta(z) = B_0$).

W myśl (43) będzie

$$\vartheta(z_1 + \varepsilon_1) = B_0 (z_1 - \zeta_{\beta_1+1} + \varepsilon_1) \ldots (z_1 - \zeta_m + \varepsilon_1). \tag{44}$$

Lecz dla każdego wskaźnika j z ciągu $1, 2, \ldots m$ istnieje, jak dowiedliśmy, odpowiedni wkaźnik k, taki, iż

$$| \zeta_j - z_{k_j} | < \varepsilon_1,$$

skąd

$$| z_1 - \zeta_j + \varepsilon_1 | = | (z_1 - z_{k_j}) + (z_{k_j} - z_j) + \varepsilon_1 | < | z_1 - z_{k_j} | + 2\varepsilon_1,$$

zaś, wobec (10):

$$| z_1 - z_{k_j} | \leq \frac{L}{2};$$

z uwagi, że wobec (12) oraz (11):

$$\varepsilon_1 < \frac{l}{4} \leq \frac{L}{4},$$

mamy więc

$$| z_1 - \zeta_j + \varepsilon_1 | < L, \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Wzór (44) daje więc

$$| \vartheta(z_1 + \varepsilon_1) | \leq | B_0 | \cdot L^{m-\beta_1} \tag{45}$$

(co będzie słusznem i w razie $\beta_1 = m$); lecz, wobec (16), (19) i (15):

$$| B_0 | = | A_0 + a_0 | \leq | A_0 | + | a_0 | < | A_0 | + \delta < 2 | A_0 |,$$

zaś wobec (11): $L^{m-\beta_1} \leq L^m$; nierówność (45) daje więc:

$$| \vartheta(z_1 + \varepsilon_1) | < 2 | A_0 | L^m. \tag{46}$$

Mamy dalej, dla $j = 1, 2, \ldots \beta_1$, wobec (35):

$$| z_1 - \zeta_j + \varepsilon_1 | \leq | z_1 - \zeta_j | + \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1$$

i przeto, wobec (46), wzór (42) daje:

$$| g(z_1 + \varepsilon_1) | < (2\varepsilon_1)^{\beta_1} \cdot 2 | A_0 | L^m. \tag{47}$$

Wobec (24) i uwagi, że $f(z_1) = 0$, mamy:

$$| z_1 | \leq R,$$

skąd, wobec (17), (19) i uwagi na (7), znajdujemy:

$$| \varphi(z_1 + \varepsilon_1) | \leq \delta [(R+\varepsilon_1)^m + (R+\varepsilon_1)^{m-1} + \ldots + 1] < (m+1)\delta (R+\varepsilon_1)^m$$

i przeto, w myśl (14):

$$| \varphi(z_1 + \varepsilon_1) | < \frac{| A_0 |}{2} l^m \varepsilon_1^m. \tag{48}$$

W myśl (18) mamy, dalej:

$$| f(z_1 + \varepsilon_1) | \leq | g(z_1 + \varepsilon_1) | + | \varphi(z_1 + \varepsilon_1) |,$$

skąd, wobec (41), (47) i (48):

$$\varepsilon_1^{\alpha_1} | A_0 | l^m < (2\varepsilon_1)^{\beta_1} \cdot 2 | A_0 | L^m + \frac{| A_0 |}{2} l^m \varepsilon_1^m,$$

co daje, z uwagi, że $\varepsilon_1^m \leq \varepsilon_1^{\alpha_1}$ (gdyż, wobec (32), $\varepsilon_1 < l \leq 1$, zaś $m \geq \alpha_1$), oraz, że $2^{\beta_1} \leq 2^m$ gdyż $\beta_1 \leq m$):

$$\varepsilon_1^{\alpha_1} \mid A_0 \mid l^m < \varepsilon_1^{\beta_1} \cdot 2^{m+1} \mid A_0 \mid L^m + \frac{|A_0|}{2} l^m \varepsilon_1^{\alpha_1},$$

skąd, po łatwej redukcji i po podzieleniu obu stron przez $\mid A_0 \mid (\neq 0)$:

$$\varepsilon_1^{\alpha_1} l^m < \varepsilon_1^{\beta_1} 2^{m+2} L^m,$$

co możemy napisać w postaci:

$$\varepsilon_1^{\alpha_1} l^m < \varepsilon_1^{\beta_1 - 1} \cdot \varepsilon_1 \cdot 2^{m+2} L^m;$$

stąd, wobec (12), tembardziej:

$$\varepsilon_1^{\alpha_1} l^m < \varepsilon_1^{\beta - 1} l^m$$

i przeto (wobec $l > 0$):

$$\varepsilon_1^{\alpha_1} < \varepsilon_1^{\beta_1 - 1}$$

co daje, z uwagi że $\varepsilon_1 < 1$ (wobec (13)): $\alpha_1 > \beta_1 - 1$, czyli (wobec całkowitości α_1 i β_1):

$$\alpha_1 \geq \beta_1.$$

Zupełnie taksamo udowodnilibyśmy nierówność (37) dla $k = 2, 3, \ldots, r$. Twierdzenie 76 udowodniliśmy zatem w zupełności.

§ 68. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Nazywamy *ułamkiem prostym* wyrażenie

$$\frac{A}{(z-a)^m},$$

gdzie A i a są stałe zespolone, m — dana liczba naturalna, wreszcie z — zmienna zespolona.

Funkcję

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

gdzie $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ są wielomiany całkowite względem zmiennej zespolonej z, przytem $\varphi(z)$ stopnia (≥ 0) niższego niż $\psi(z)$, nazywamy *ułamkiem właściwym*.

Udowodnimy, że każdy ułamek właściwy daje się przedstawić jako suma samych tylko ułamków prostych.

Niech więc $\varphi(z)$ oraz $\psi(z)$ będą dane wielomiany całkowite, odpowiednio stopni $m \geq 0$ oraz $n > m$. Niech, dalej, a_1 oznacza jeden z pierwiastków wielomiann $\psi(z)$, zaś n_1 — jego krotność i położmy

$$\psi(z) = (z - a_1)^{n_1} \psi_1(z); \tag{1}$$

$\psi_1(z)$ będzie więc wielomianem całkowitym (stopnia $n - n_1 \geq 0$) przyczem będzie

$$\psi_1(a_1) \neq 0. \tag{2}$$

Liczba

$$A = \frac{\varphi(a_1)}{\psi_1(a_1)} \tag{3}$$

będzie, wobec (2), oznaczoną liczbą zespoloną.

Wobec (3) będzie

$$\varphi(a_1) - A\,\psi_1(a_1) = 0,$$

co dowodzi, że a_1 jest pierwiastkiem wielomianu

$$\varphi(z) - A\,\psi_1(z).$$

Wynika stąd (jak dowiedliśmy w § 66) tożsamość

$$\varphi(z) - A\,\psi_1(z) = (z - a_1)\,\varphi_1(z), \tag{4}$$

gdzie $\varphi_1(z)$ jest wielomianem całkowitym stopnia conajwyżej $n-2$ (gdyż inaczej prawa strona wzoru (4) byłaby wielomianem stopnia $\geq n$, gdy tymczasem $\varphi(z)$ jest stopnia $< n$, zaś $\psi_1(z)$ stopnia $n - n_1 < n$).

Wobec (1) i (4) możemy napisać przy wszelkiem zespolonem z, nie będącem pierwiastkiem wielomianu $\psi(z)$:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-a_1)^{n_1}\psi_1(z)} = \frac{A}{(z-a_1)^{n_1}} + \frac{\varphi_1(z)}{(z-a_1)^{n_1-1}\psi_1(z)}, \tag{5}$$

przyczem wielomian $\varphi_1(z)$ (będący stopnia $\leq n-2$) jest stopnia niższego od wielomianu $(z-a_1)^{n_1-1}\psi_1(z)$ (który jest stopnia $n-1$). Drugi składnik prawej strony (5) jest więc ułamkiem właściwym, którego mianownik jest wielomianem stopnia o jedność niższego niż mianownik ułamka $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

Dowiedliśmy więc, że każdy ułamek właściwy możemy przedstawić jako sumę ułamka prostego (którego mianownik jest jednym z czynników pierwszych mianownika ułamka danego) oraz ułamka właściwego, którego mianownik jest stopnia o jedność niższego niż mianownik ułamka danego (będąc jego dzielnikiem). Stosując dowiedzioną własność $n-1$ razy, dojdziemy do ułamka właściwego, którego mianownik będzie stopnia pierwszego (a licznik — liczbą stałą), zatem do ułamka prostego. Każdy więc ułamek właściwy $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

gdzie $\psi(z)$ jest wielomianem stopnia n-go, rozwijającym się na czynniki pierwsze

$$\psi(z) = (z-a_1)^{n_1} \dots (z-a_k)^{n_k},$$

daje się przedstawić jako suma n ułamków prostych, dając jak łatwo widzieć, dla zespolonych z, nie będących pierwiastkami mianownika $\psi(z)$, tożsamość

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = {} & \frac{A_1'}{(z-a_1)^{n_1}} + \frac{A_2'}{(z-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_{n_1}'}{z-a_1} + \\ & + \frac{A_1''}{(z-a_2)^{n_2}} + \frac{A_2''}{(z-a_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{A_{n_2}''}{z-a_2} + \dots + \\ & + \frac{A_1^{(k)}}{(z-a_1)^{n_k}} + \frac{A_2^{(k)}}{(z-a_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{A_{n_k}^{(k)}}{z-a_k},\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

gdzie $A_1' \dots A_{n_k}^{(k)}$ są liczby stałe, z których niektóre mogą być zerami.

Okażemy obecnie, że każdy ułamek właściwy daje jedno tylko rozwinięcie na ułamki proste. Załóżmy w tym celu, że prócz rozwinięcia (6) mamy jeszcze rozwinięcie na ułamki proste

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{B_1'}{(z-a_1)^{n_1}} + \frac{B_2'}{(z-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{B_{n_k}^{(k)}}{z-a_k}. \quad (7)$$

Wobec (6) i (7) otrzymujemy przy wszelkiem zespolonem z, dla którego $\psi(z) \neq 0$:

$$\frac{A_1'-B_1'}{(z-a_1)^{n_1}} + \frac{A_2'-B_2'}{(z-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_{n_k}^{(k)} - B_{n_k}^{(k)}}{z-a_k} = 0. \quad (8)$$

skąd, mnożąc przez $\psi(z) = (z-a_1)^{n_1} \dots (z-a_k)^{n_k}$:

$$(A_1'-B_1')(z-a_2)^{n_2} \dots (z-a_k)^{n_k} + (z-a_1)P(z) = 0, \quad (9)$$

gdzie $P(z)$ jest wielomianem całkowitym. Równość (9) zachodzi więc dla nieskończenie wielu różnych zespolonych z, skąd, w myśl tw. 73, wynika, że zachodzi ona tożsamościowo. Kładąc $z = a_1$, otrzymamy, wobec $a_1 \neq a_2, a_2, \dots a_n$:

$$A_1' - B_1' = 0,$$

czyli $A_1' = B_1'$. Podobnież udowodnilibyśmy dalej ze wzoru (8), że wszystkie odpowiednie współczynniki A i B muszą być sobie równe. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 77. *Każdy ułamek właściwy* $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ *daje jedno i tylko jedno rozwinięcie na ułamki proste.*

§ 69. Ciągi nieskończone o wyrazach zespolonych.

Jeżeli każdej liczbie naturalnej n odpowiada liczba zespolona u_n, to mamy określony ciąg nieskończony o wyrazach zespolonych

$$u_1, u_2, u_3, \dots .$$

Np. wzór $u_n = z^n$, gdzie z jest daną liczbą zespoloną, określa ciąg nieskończony o wyrazach zespolonych.

Liczbę zespoloną u nazywamy *granicą* ciągu nieskończonego u_n o wyrazach zespolonych, pisząc

$$u = \lim_{n=\infty} u_n,$$

jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie μ, iż

$$|u_n - u| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \quad (1)$$

Ciąg nieskończony, posiadający (skończoną) granicę, nazywamy *zbieżnym*. Definicje te są więc uogólnieniem definicji granicy oraz zbieżności ciągu liczb rzeczywistych (w myśl tw. 36).

Załóżmy, że

$$u = a + bi, \quad u_n = a_n + b_n i, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2)$$

gdzie a, b, a_n i b_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ są liczby rzeczywiste. Powiadam, że równość

$$\lim_{n=\infty} u_n = u \quad (3)$$

jest równoważna układowi równości

$$\lim_{n=\infty} a_n = a, \quad \lim_{n=\infty} b_n = b. \quad (4)$$

Załóżmy, dla dowodu, że zachodzi równość (3) i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

W myśl definicji granicy, istnieje więc takie μ, iż zachodzi nierówność (1) czyli, wobec (2) oraz definicji modułu, nierówność

$$\sqrt{(a_n-a)^2 + (b_n-b)^2} < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, tembardziej

$$\sqrt{(a_n-a)^2} < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \sqrt{(b_n-b)^2} < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

czyli

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co dowodzi, że zachodzą wzory (4). Dowiedliśmy więc, że wzór (3) pociąga za sobą wzory (4).

Okażemy obecnie, że wzory (4) pociągają za sobą wzór (3). Załóżmy więc, że zachodzą wzory (4) i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec (4) istnieje takie μ, iż

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, z uwagi, że wobec (2) i w myśl tw. o module sumy

$$|u_n - u| = |a_n - a + (b_n - b)i| \leq |a_n - a| + |(b_n - b)i| = \\ = |a_n - a| + |b_n - b|,$$

znajdujemy:

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co przedstawia nierówność (1), pociągającą za sobą (wobec dowolności ε oraz w myśl definicji granicy) wzór (3). Dowiedliśmy więc równoważności wzoru (3) warunkom (4). Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 78. *Na to żeby zachodził wzór*

$$\lim_{n=\infty} (a_n + b_n i) = a + bi$$

(gdzie, a, b, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są liczby rzeczywiste) *potrzeba i wystarcza, iżby zachodziły wzory*

$$\lim_{n=\infty} a_n = a, \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} b_n = b.$$

Jako wniosek z dowiedzionego twierdzenia, otrzymujemy

Twierdzenie 79. *Na to żeby ciąg nieskończony u_n o wyrazach zespolonych był zbieżny, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba μ taka iż*

$$|u_{n'} - u_n| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu \quad \text{oraz} \quad n' > \mu. \tag{5}$$

Jeżeli bowiem ciąg u_n jest zbieżny i u oznacza jego granicę, to dla liczby dodatniej ε istnieje takie μ iż

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd też

$$|u_{n'} - u| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{dla} \quad n' > \mu,$$

i przeto

$$|u_{n'} - u_n| = |(u_{n'} - u) + (u - u_n)| \leq |u_{n'} - u| + |u_n - u| < \varepsilon$$

dla $n > \mu$ oraz $n' > \mu$: warunek (5) jest więc konieczny.

Z drugiej strony, jeżeli zachodzi warunek (5), to kładąc $u_n = a_n + b_n i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, gdzie a_n i b_n są liczby rzeczywiste, będziemy mogli nierówność (5) przepisać w postaci

$$\sqrt{(a_{n'} - a_n)^2 + (b_{n'} - b_n)^2} < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \; n' > \mu,$$

skąd, tembardziej

$$|a_{n'} - a_n| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |b_{n'} - b_n| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \; n' > \mu,$$

co, w myśl tw. 39, dowodzi, że ciągi liczb rzeczywistych a_n i b_n są zbieżne, co, w myśl tw. 78, jak widzimy w jednej chwili, pociąga za sobą zbieżność ciągu u_n: warunek (5) jest więc wystarczającym dla zbieżności ciągu u_n. Twierdzenie 79 (będące oczywiście uogólnieniem twierdzenia 39) udowodniliśmy zatem w zupełności.

Dla ciągów nieskończonych o wyrazach zespolonych zachodzą, jak łatwo widzieć, podobnie jak dla ciągów o wyrazach rzeczywistych. twierdzenia o granicy sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, które się też dowodzą w ten sam sposób jak dla ciągów o wyrazach rzeczywistych.

Ciąg nieskończony o wyrazach zespolonych z_n nazywamy *ograniczonym*, jeżeli ciąg $|z_n|$ jest ograniczony.

Twierdzenie 80. *Jeżeli ciąg nieskończony o wyrazach zespolonych z_n jest ograniczony, to istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n taki, iż ciąg z_{k_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest zbieżny.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg nieskończony z_n jest ograniczony i połóżmy

$$z_n = x_n + y_n i \quad (n = 1, 2, 3, \ldots.)$$

gdzie x_n i y_n są liczby rzeczywiste. Ciągi x_n i y_n będą tembardziej ograniczone (gdyż stale $|x_n| \leq |z_n|$ oraz $|y_n| \leq |z_n|$). W myśl tw. 42 dla ciągów o wyrazach rzeczywistych, istnieje więc ciąg nieskończony rosnący wskaźników r_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ taki iż ciąg x_{r_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest zbieżny: połóżmy

$$\lim_{n=\infty} x_{r_n} = x. \tag{6}$$

Ciąg $\eta_n = y_{r_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, którego wszystkie wyrazy są wyrazami ciągu ograniczonego y_n, jest ograniczony: w myśl tw. 42 istnieje więc ciąg nieskończony rosnący wskaźników s_n taki iż ciąg

$$\eta_{s_n} = y_{r_{s_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

jest zbieżny: połóżmy

$$\lim_{n=\infty} \eta_{s_n} = y. \tag{8}$$

Ciąg wskaźników

$$k_n = r_{s_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

będzie oczywiście rosnący, przyczem wobec (6) i w myśl tw. 16, mamy

$$\lim_{n=\infty} x_{k_n} = x, \tag{10}$$

a że, wobec (7) i (9)

$$\eta_{s_n} = y_{k_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

więc, w myśl (8) mamy też

$$\lim_{n=\infty} y_{k_n} = y. \tag{11}$$

Wzory (10) i (11) dają, w myśl tw. 78:

$$\lim_{n=\infty} (x_{k_n} + y_{k_n} i) = x + yi,$$

czyli

$$\lim_{n=\infty} z_{k_n} = x + yi,$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Wniosek. *Jeżeli liczba z nie jest granicą ciągu nieskończonego ograniczonego o wyrazach zespolonych z_n, to istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników l_r $(r = 1, 2, \ldots)$, taki, iż ciąg z_{l_r} $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ zmierza do granicy różnej od z.*

Dowód. Załóżmy, że liczba z nie jest granicą ciągu nieskończonego ograniczonego z_n (t. j. albo ciąg z_n posiada inną niż z granicę, albo wogóle nie jest zbieżny). Wynika stąd, jak łatwo widzieć, że przy pewnem naturalnem p nierówność

$$|z_n - z| \geq \frac{1}{p} \tag{12}$$

jest spełnioną przez nieskończenie wiele różnych wskaźników n. (Gdyż w przeciwnym razie, gdyby przy każdem naturalnem p nierówność (12) zachodziła tylko dla skończonej conajwyżej liczby różnych n, to, jak łatwo widzieć, mielibyśmy też, przy wszelkiem dodatniem ε, $|z_n - z| < \varepsilon$ dla $n > \mu$, skąd $\lim_{n=\infty} z_n = z$, wbrew założeniu). Załóżmy np., że p oznacza najmniejszą liczbę naturalną,

przy której nierówność (12) zachodzi dla nieskończenie wielu różnych n, i niech

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots$$

będą kolejne wskaźniki, dla których zachodzi nierówność (12); ciąg wskaźników n_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ jest więc rosnącym, oraz

$$|z_{n_k} - z| \geq \frac{1}{p}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

Ciąg nieskończony

$$u_k = z_{n_k}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

którego wszystkie wyrazy są wyrazami ciągu ograniczonego z_n, jest ograniczony: w myśl tw. 80 istnieje więc ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$, taki iż ciąg u_{k_r} $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ jest zbieżny. Połóżmy

$$\lim_{n=\infty} u_{k_r} = u \tag{15}$$

oraz

$$l_r = n_{k_r} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots); \tag{16}$$

ciąg wskaźników l_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie oczywiście rosnący Wobec (14) i (16) będzie

$$z_{l_r} = u_{k_r} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd, wobec (15):

$$\lim_{n=\infty} z_{l_r} = u. \tag{17}$$

Z drugiej strony, wobec (13) i (16):

$$|z_{l_r} - z| \geq \frac{1}{p}, \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, 3 \ldots,$$

skąd, wobec (17), wnosimy że $u \neq z$. Udowodniliśmy więc nasz wniosek.

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZEJ TOMU PIERWSZEGO.