

i przeto, ponieważ $N \geq 10^p$, zaś $M < \frac{1}{2}$:

$$|\delta| < \frac{1}{2 \cdot 10^{2p}}.$$

skąd, dla $q \leq 2p$, otrzymujemy nierówność (55), c. b. d. o.

Ćwiczenia.

1) Dowiedzieć, że jeżeli liczba g jest średnią geometryczną liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$, to liczba $\lg g$ jest średnią arytmetyczną liczb $\lg a_1, \lg a_2, \dots, \lg a_n$.

2) Udowodnić wzór $|x| = e^{\frac{1}{2} \lg x^2}$, przy wszelkim rzeczywistym $x \neq 0$.

3) Udowodnić, że dla wzoru $a^b = c$ może zachodzić każda z ośmiu kombinacji co do wymierności lub niewymierności liczb a, b i c . (A więc: 1) a, b i c wymierne; 2) a i b wymierne, c niewymierne, i t. d.).

Uwaga: Następujące przykłady dają wszystkie możliwe kombinacje:

$$1) 2^2 = 4, \quad 2) 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 3) (\sqrt{2})^2 = 2, \quad 4) (\sqrt{2})^3 = \sqrt{8},$$

$$5) 10^{\lg 2} = 2, \quad 6) 10^{\lg \sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad 7) (\sqrt{10})^{\lg 2} = 2, \quad 8) \sqrt{10}^{\lg 2} = \sqrt{2}.$$

ROZDZIAŁ VI.

Wiadomości podstawowe z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

§ 53. Niech X oznacza dany zbiór, którego elementami są liczby rzeczywiste skończone lub nieskończone. Utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy B każdą liczbę rzeczywistą (skończoną), większą od każdej z liczb zbioru X . Przekrój $[A, B]$ wyznaczy, jak wiemy, pewną liczbę rzeczywistą skończoną lub nieskończoną L , którą nazywamy *kresem górnym* zbioru X .

Podobnie, utwórzmy przekrój $[A_1, B_1]$, zaliczając do klasy A_1 każdą liczbę rzeczywistą, która jest mniejszą od każdej z liczb zbioru X : przekrój ten wyznaczy pewną (skończoną lub nieskończoną) liczbę rzeczywistą l , którą nazywamy *kresem dolnym* zbioru X .

Łatwo widzieć, że dla każdej liczby x zbioru X zachodzić będzie nierówność.

$$x \leq L.$$

W samej rzeczy, gdyby dla pewnej liczby x zbioru X zachodziła nierówność

$$x > L,$$

to, oznaczając przez a liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność $x > a > L$, musielibyśmy liczbę a , jaką mniejszą od pewnego elementu x zbioru X , zaliczyć w przekroju $[A, B]$ do klasy A , co niemożliwe, wobec $a > L$. Kres górny zbioru jest więc niemniejszy od każdej z liczb tego zbioru. Wynika stąd też natychmiast, że jeżeli kres górny danego zbioru sam jest liczbą tego zbioru, to jest on największą liczbą uważanego zbioru.

Łatwo, dalej, widzieć, że żadna liczba $L' < L$ nie posiada tej własności, że spełnia nierówność

$$x \leq L'$$

przy wszelkiem x należącym do zbioru X . Gdyby bowiem $L' < L$ było taką właśnie liczbą, to oznaczając przez b liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność $L' < b < L$, mielibyśmy (wobec $L' < b$) nierówność $x < b$ dla każdej liczby x zbioru X i przeto musielibyśmy liczbę b zaliczyć w przekroju $[A, B]$ do klasy B , co niemożliwe, wobec $b < L$.

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 67. Dla każdego danego zbioru liczb rzeczywistych (skończonych lub nieskończonych) X , wśród liczb niemniejszych od żadnej z liczb zbioru X istnieje jedna najmniejsza: jest to kres górny zbioru X .

Podobnie udowodnilibyśmy

Twierdzenie 67^a. Dla każdego danego zbioru liczb rzeczywistych (skończonych lub nieskończonych) X , wśród liczb niewiększych od żadnej z liczb zbioru X istnieje jedna największa: jest to kres dolny zbioru X .

Z definicji kresów wynika natychmiast, że jeżeli wszystkie liczby zbioru X są $\geq a$, to oba kresy jego (górny i dolny) są $\geq a$; podobnie, jeżeli wszystkie liczby zbioru X są $\leq b$, to oba kresy jego są $\leq b$. Kresy zbioru dają więc *najściślejsze granice*, w których liczby uważanego zbioru są zawarte.

Zbiór liczb rzeczywistych X , którego kresy są skończone, nazywamy *ograniczonym*. Łatwo widzieć, że definicja ta równoważna jest następującej:

Zbiór liczb rzeczywistych X jest ograniczony, jeżeli istnieje liczba skończona M , taka iż dla każdej liczby x zbioru X mamy

$$|x| < M.$$

Samo przez się zrozumiałem jest, dalej, co należy rozumieć przez zbiór ograniczony zgóry lub zbiór ograniczony zdołu.

§ 54. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , spełniających nierówności

$$a \leq x \leq b \quad (1)$$

nazywamy *przedziałem* (a, b) . Jeżeli liczba rzeczywista x spełnia nierówności (1), to mówimy, że x jest punktem przedziału (a, b) , że x należy do przedziału (a, b) , lub wreszcie, że x leży w przedziale (a, b) . Jeżeli zaś zachodzi nierówność

$$a < x < b,$$

to mówimy, że x jest punktem wewnętrznym przedziału (a, b) , lub że x leży wewnątrz przedziału (a, b) .

Niech teraz $f(x)$ oznacza funkcję, ciągłą w całym przedziale (a, b) (według definicji podanej w § 41). W myśl tw. 61, wnosimy:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym przedziale (a, b) , to dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb przedziału (a, b) wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

pociąga za sobą wzór:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Udowodnimy obecnie twierdzenie odwrotne, mianowicie

Twierdzenie 68. *Jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb przedziału (a, b) , wzór*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (2)$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x), \quad (3)$$

to funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym przedziale (a, b) .

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale (a, b) i posiada tę własność, że dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb przedziału (a, b) wzór (2) pociąga za sobą wzór (3).

Niech, dalej, x_0 oznacza jakąkolwiek daną liczbę przedziału (a, b) , zaś ε — dowolną daną liczbę dodatnią.

Powiadamy przedewszystkiem, że istnieje takie $\delta > 0$ iż dla każdej liczby wymiernej w przedziału (a, b) , spełniającej nierówność

$$|w - x_0| < \delta, \quad (4)$$

mamy:

$$|f(w) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Założmy, dla dowodu, że liczby takiej δ nie ma.

Jak dowiedliśmy w § 9, można zbudować ciąg nieskończony o wyrazach wymiernych

$$u_1, u_2, u_3, \dots, \quad (6)$$

w którym figuruje każda liczba wymierna.

Niech n oznacza dowolną daną liczbę naturalną.

Gdyby dla każdej liczby wymiernej w przedziału (a, b) , spełniającej nierówność

$$|w - x_0| < \frac{1}{n}, \quad (7)$$

było

$$|f(w) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (8)$$

to moglibyśmy przyjąć $\delta = \frac{1}{n}$, wbrew założeniu, że nie ma liczby dodatniej δ , przy której dla każdej liczby wymiernej w przedziału (a, b) nierówność (4) pociąga za sobą nierówność (5).

Wnosimy stąd, że nie dla każdej liczby wymiernej przedziału (a, b) , spełniającej nierówność (7), zachodzi nierówność (8): w ciągu (6) istnieje zatem (co najmniej jeden) wyraz u_k , taki iż

$$a \leq u_k \leq b, \quad (9)$$

oraz

$$|u_k - x_0| < \frac{1}{n}, \quad (10)$$

natomiast

$$|f(u_k) - f(x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}; \quad (11)$$

oznaczymy przez w_n pierwszy z wyrazów u_k ciągu (6), dla których zachodzą nierówności (9), (10) i (11). W ten sposób każdemu wskaźnikowi naturalnemu n będzie odpowiadała oznaczona w zupełności liczba wymierna w_n , taka iż

$$a \leq w_n \leq b, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

$$|w_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

oraz

$$|f(w_n) - f(x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Wobec (12) i (13), w_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest ciągiem nieskończonym liczb przedziału (a, b) , takim iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = x_0,$$

co, w myśl założenia naszego twierdzenia, pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = f(x_0),$$

wbrew (14). Dowiedliśmy więc, że istnieje liczba $\delta > 0$, taka iż dla każdej liczby wymiernej w przedziału (a, b) nierówność (4) pociąga za sobą nierówność (5).

Niech teraz x oznacza jakąkolwiek liczbę przedziału (a, b) , spełniającą nierówność

$$|x - x_0| < \delta. \quad (15)$$

Niech, dalej, x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) będzie ciągiem liczb wymiernych przedziału (a, b) , spełniającym wzór (2): w myśl założenia naszego twierdzenia, będziemy więc mieli wzór (3). Wobec (2) i (15) wnosimy natychmiast, że

$$|x_n - x_0| < \delta, \text{ dla } n > \mu,$$

i przeto z uwagi, że dla wymiernych w w przedziale (a, b) nierówność (4) pociąga za sobą nierówność (5)):

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } n > \mu.$$

skąd, wobec (3), w jednej chwili:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

i, tembardziej:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (16)$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby x_0 przedziału (a, b) oraz każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba $\delta > 0$ taka iż przy wszelkiem x , należącym do przedziału (a, b) , nierówność (15) pociąga za sobą nierówność (16). W myśl definicji (Cauchy'ego), podanej w § 41, funkcja $f(x)$ jest więc ciągłą dla każdej wartości przedziału (a, b) . Udowodniliśmy więc twierdzenie 68.

Mówimy że funkcja $f(x)$, określona w zbiorze X , jest ciągłą dla wartości x_0 tego zbioru według definicji Heine'go, jeżeli, dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb zbioru X , wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła według Heinego dla każdej wartości zbioru X , to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą według Heinego w całym zbiorze X .

W myśl tw. 61, funkcja, określona w zbiorze X , oraz ciągła dla wartości x_0 tego zbioru według definicji Cauchy'ego (podanej w § 41) jest zarazem ciągłą dla wartości x_0 według definicji Heine'go. Wobec tw. 68 wnosimy dalej, że funkcja, ciągła w całym przedziale (a, b) według definicji Heine'go, jest zarazem ciągłą w tym przedziale według definicji Cauchy'ego. Zatem:

Dla funkcji ciągłych w całym przedziale, definicje ciągłości Cauchy'ego i Heine'go są równoważne.

Co się tyczy równoważności definicji Cauchy'ego i Heine'go ciągłości funkcji dla danej wartości przedziału, lub, ogólniej, jakiegokolwiek zbioru X , w którym funkcja jest określona, to można ją udowodnić, opierając się na następującym pewniku:

Dla każdego ciągu nieskończonego zbiorów liczb rzeczywistych

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

istnieje ciąg nieskończony liczb rzeczywistych

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

taki, iż przy wszelkiem naturalnem n liczba x_n należy do zbioru X_n .

Pewnik ten wynika z łatwością z głośniego w dzisiejszej teorii mnogości pewnika Zermelo, który brzmi jak następuje:

Pewnik Zermelo. *Dla każdej mnogości zbiorów Z , nie mających elementów wspólnych, istnieje mnogość, zawierająca po jednym i tylko po jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z .*

W samej rzeczy, założmy prawdziwość pewnika Zermelo i niech

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

oznacza dany ciąg nieskończony zbiorów liczb rzeczywistych (mogących posiadać elementy wspólne).

Przy każdym danem naturalnem n oznaczmy przez Z_n zbiór wszystkich dwumianów $x^n + a$, których wyrazy wolne a są liczbami zbioru X_n . Zbiory dwumianów

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

nie będą oczywiście posiadały elementów wspólnych, gdyż do różnych Z_n będą należały dwumiany różnych stopni. W myśl pewnika Zermelo istnieje więc

zbiór U , zawierający po jednym i tylko jednym dwumianem z każdego ze zbiorów Z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Oznaczmy przy wszelkiem danem naturalnem n przez z_n ten (jedyne) dwumian zbioru Z_n , który należy do zbioru U : ciąg nieskończony

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

będzie więc określonym w zupełności. Oznaczmy wreszcie dla $n = 1, 2, 3, \dots$ przez x_n wyraz wolny dwumianu z_n : otrzymamy w ten sposób określony w zupełności ciąg nieskończony liczb rzeczywistych

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

przyczem z definicji zbiorów Z_n wynika, że liczba x_n będzie należała do zbioru X_n , dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Udowodniliśmy więc, że pewnik nasz wynika z pewnika Zermelo.

Opierając się na naszym pewniku udowodnimy teraz, że definicje ciągłości funkcji Cauchy'ego i Heine'go są równoważne. Ponieważ, jak zauważyliśmy wyżej, funkcja określona w zbiorze X oraz ciągła dla wartości x_0 tego zbioru według definicji Cauchy'ego, jest zarazem ciągłą dla wartości x_0 według definicji Heine'go, więc dla dowodu równoważności obu definicji wystarczy udowodnić, że funkcja, określona w zbiorze X , oraz ciągła dla wartości x_0 tego zbioru według definicji Heine'go, jest też dla wartości x_0 ciągłą według definicji Cauchy'ego.

Niech więc $f(x)$ oznacza funkcję, określoną w danym zbiorze liczb rzeczywistych X oraz ciągłą dla wartości x_0 tego zbioru w myśl definicji Heine'go. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ nie jest dla wartości x_0 ciągłą według definicji Cauchy'ego. Nie dla każdej więc liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ , taka, iż nierówność

$$|x - x_0| < \delta$$

pociąga za sobą dla każdej liczby x zbioru X nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (17)$$

Istnieje więc taka liczba dodatnia ε , dla której niema odpowiedniego δ . Niema więc takiego naturalnego n , przy którym nierówność

$$|x - x_0| < \frac{1}{n} \quad (18)$$

pociągałaby za sobą dla każdej liczby x zbioru X nierówność (17).

Oznaczmy przy każdym danem naturalnem n przez X_n zbiór

tych wszystkich liczb x zbioru X , dla których zachodzi jednocześnie nierówność (18) oraz nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Żaden ze zbiorów X_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) nie jest pustym: gdyby bowiem przy pewnym naturalnem n zbiór X_n był pustym, to znaczyłoby to, że dla każdej liczby x zbioru X nierówność (18) pociąga za sobą nierówność (17), co, jak widzieliśmy, nie może mieć miejsca. W myśl naszego pewnika, dla ciągu nieskończonego zbiorów liczb rzeczywistych

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

istnieje więc ciąg nieskończony liczb rzeczywistych

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

taki, iż liczba x_n należy do zbioru X_n (dla $n = 1, 2, 3, \dots$). Z definicji zbiorów X_n , oraz z uwagi, że x_n należy do X_n , wynika, że wszystkie wyrazy ciągu x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są liczbami zbioru X , oraz spełniają nierówności

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (19)$$

tudzież

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Nierówność (19) dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

co, w myśl założenia, że funkcja $f(x)$ jest ciągła dla wartości x_0 według definicji Heine'go, pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

wbrew (20).

Udowodniliśmy więc równoważność definicji ciągłości Cauchy'ego i Heine'go.

Streszczając otrzymane w tym paragrafie wyniki, możemy powiedzieć:

Opierając się na pewniku Zermelo można udowodnić równoważność definicji Cauchy'ego i Heine'go ciągłości funkcji dla danej wartości x_0 zbioru X , w którym funkcja jest określoną, natomiast dla funkcji ciągłych w całym przedziale, równoważność definicji Cauchy'ego i Heine'go może być udowodnioną bez żadnego specjalnego pewnika.

Pewnik Zermelo jest więc wystarczającym dla dowodu równoważności definicji ciągłości Cauchy'ego i Heine'go. Zauważymy, że możnaby dowieść, iż wystarczającym i zarazem koniecznym dla dowodu równoważności definicji ciągłości Cauchy'ego i Heine'go jest pewnik następujący:

Dla każdego ciągu nieskończonego zbiorów liczb rzeczywistych, nie mających elementów wspólnych,

$$X_1, X_2, X_3, \dots \quad (21)$$

istnieje ciąg nieskończony liczb rzeczywistych

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

taki, iż wyrazy jego o różnych wskaźnikach należą zawsze do różnych zbiorów (21) (lecz niekoniecznie x_n do X_n ; może np. należeć x_n do X_{2n-1} , dla $n = 1, 2, 3, \dots$, albo też może należeć x_{2n-1} do X_{2n-1} , zaś x_{2n} do X_{2n} , dla $n = 1, 2, 3, \dots$, i t. p.).

§ 55. Twierdzenie 69. Funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale (a, b) , przyjmuje w tym przedziale każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$.

Dowód. Możemy oczywiście założyć, że $f(a) < f(b)$: gdyby bowiem było $f(a) > f(b)$, wystarczyłoby zamiast funkcji $f(x)$ wziąć pod rozwagę funkcję — $f(x)$, która jest oczywiście ciągłą jednocześnie z daną; gdyby wreszcie było $f(a) = f(b)$, to nie mielibyśmy żadnej liczby pośredniej między $f(a)$ i $f(b)$.

Niech y_0 oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$f(a) < y_0 < f(b). \quad (22)$$

Oznaczmy przez X_0 zbiór wszystkich liczb x przedziału (a, b) , dla których

$$f(x) \leq y_0. \quad (23)$$

i niech x_0 oznacza kres górny zbioru X_0 : liczba x_0 będzie więc należała do przedziału (a, b) .

Powiadamy, że nie może być

$$f(x_0) < y_0. \quad (24)$$

W samej rzeczy, gdyby zachodziła nierówność (24), to, wobec (22), mielibyśmy $f(x_0) < f(b)$, i przeto byłoby $x_0 \neq b$, zatem $x_0 < b$. Wobec ciągłości funkcji $f(x)$ dla wartości x_0 , istniałaby dla liczby dodatniej $\varepsilon = y_0 - f(x_0)$ liczba dodatnia δ taka, iż dla każdej liczby x przedziału (a, b) , spełniającej nierówność

$$|x - x_0| < \delta,$$

mielibyśmy nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = y_0 - f(x_0),$$

zatem, nierówność (23). W szczególności więc, oznaczając przez x_1 liczbę przedziału (a, b) , spełniającą nierówności

$$x_0 < x_1 < x_0 + \delta$$

(liczba taka oczywiście istnieje, wobec $x_0 < b$), mielibyśmy

$$f(x_1) \leq y_0,$$

wbrew definicji liczby x_0 , jako kresu górnego liczb x przedziału (a, b) , spełniających nierówność (23). Dowiedliśmy zatem, że nie może zachodzić nierówność (24).

Powiadamy, dalej, że nie może też zachodzić nierówność

$$f(x_0) > y_0. \quad (25)$$

W samej rzeczy, założmy, że zachodzi nierówność (25). Wobec ciągłości funkcji $f(x)$ dla wartości x_0 , istnieje dla liczby dodatniej $\varepsilon = f(x_0) - y_0$ liczba dodatnia δ , taka iż dla każdej liczby x przedziału (a, b) , spełniającej nierówność

$$|x - x_0| < \delta,$$

zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0) - y_0,$$

zatem, nierówność

$$f(x) > y_0.$$

Mielibyśmy więc

$$f(x) > y_0, \text{ dla } x_0 - \delta < x \leq x_0. \quad (26)$$

Wobec (26), oraz definicji zbioru X_0 , liczba x_0 nie mogłaby więc być kresem górnym tego zbioru, wbrew założeniu. Dowiedliśmy więc, że nie może zachodzić nierówność (24), ani też nierówność (25), i przeto musi być

$$f(x_0) = y_0.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby y_0 , spełniającej nierówność (22), istnieje w przedziale (a, b) conajmniej jedna wartość x , spełniająca równanie

$$f(x) = y_0.$$

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie. Twierdzenie to możemy jeszcze wypowiedzieć w formie następującej:

Przechodząc od jednej wartości do drugiej, funkcja ciągła musi przejść przez wszystkie wartości pośrednie.

Dowodzona własność nie jest jednak wystarczającą na to, żeby funkcja była ciągłą: funkcja, która przechodząc od jednej wartości do drugiej przechodzi zawsze przez wszystkie wartości pośrednie, nie musi być ciągłą. Może ona nawet nie być ciągłą dla żadnej wartości x : podamy właśnie przykład takiej funkcji.

Określmy funkcję $f(x)$ dla wartości rzeczywistych x w sposób następujący.

Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą, zaś

$$x = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)_2$$

— jej rozwinięcie na ułamek normalny przy zasadzie 2 (rozwinięcie takie, jest, w myśl tw. 20, dla każdej danej liczby x jedyne). Położmy:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}. \quad (27)$$

Ponieważ liczby c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są cyframi w układzie dwójkowym, więc każde c_n ma jedną z dwóch wartości: 0 lub 1, zatem stale

$$0 \leq \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \leq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

i przeto, w myśl (27):

$$0 \leq f(x) \leq 1. \quad (28)$$

Funkcja $f(x)$ ma więc oznaczoną w zupełności wartość rzeczywistą dla każdej liczby rzeczywistej x , przytem zachodzi zawsze nierówność (28).

Niech, dalej a i $b > a$ będą dwie dowolne dane liczby rzeczywiste i niech y oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$0 < y < 1. \quad (29)$$

Powiadamy, że wewnątrz przedziału (a, b) istnieje taka liczba x , iż

$$f(x) = y.$$

Położmy

$$s = \frac{a+b}{2} \quad (30)$$

i niech

$$s = (\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots)_2 \quad (31)$$

oznacza rozwinięcie normalne liczby s na ułamek dwójkowy. Wyznamy, dalej, liczbę naturalną k taką wielką, aby było

$$\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{2}. \quad (32)$$

Położmy, dalej:

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \bar{c}_n, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, k \\ c_n &= Eny - E(n-1)y, \quad \text{dla } n = k+1, k+2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Nierówności oczywiste

$$Eny \leq ny, \quad E(n-1)y > (n-1)y - 1,$$

dają, wobec (29):

$$Eny - E(n-1)y < y + 1 < 2,$$

z drugiej zaś strony (wobec $y > 0$) oczywiście $Eny \geq E(n-1)y$: wzory (33) dowodzą więc, że liczby c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są cyframi układu dwójkowego.

Położmy

$$x = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)_2 \quad (34)$$

będzie to (w myśl tw. 21) pewna liczba rzeczywista.

Powiadamy, dalej, że ułamek dwójkowy (34) będzie rozwinięciem normalnem. Założmy, dla dowodu, że ułamek (34) nie jest rozwinięciem normalnem, czyli że co najwyżej skończona liczba cyfr jego jest różnych od liczby $2-1=1$. Istniałoby więc takie naturalne $p > k$, iż dla $n > p$ stale $c_n = 1$, czyli w myśl (33):

$$Eny - E(n-1)y = 1, \quad \text{dla } n > p.$$

Drogą łatwej indukcji wnosimy stąd, że byłoby

$$Eny = n - p + Epy, \quad \text{dla } n > p,$$

skąd

$$ny \geq Eny = n + Epy - 1$$

oraz

$$y \geq 1 + \frac{Epy - 1}{n} \quad \text{dla } n > p,$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$:

$$y \geq 1,$$

wbrew (29).

Dowiedliśmy więc, że wzór (34) przedstawia rozwinięcie normalne na ułamek dwójkowy. W myśl definicji funkcji $f(x)$ mamy więc wzór (27).

Wobec (33) mamy, jak łatwo obliczyć, dla $n > k$:

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{n} + \frac{Eny}{n} - \frac{Eky}{n}. \quad (35)$$

Lecz, oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{n} = 0, \quad \text{jakoż } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Eky}{n} = 0,$$

zaś

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Eny}{n} = y$$

(gdyż $y - \frac{1}{n} < \frac{Eny}{n} \leq y$); wzór (35) daje więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} = y,$$

skąd, wobec (27):

$$f(x) = y.$$

Powiadamy wreszcie, że $a < x < b$. Ponieważ rozwinięcia (31) i (34) są normalne, więc, w myśl tw. 20, muszą zachodzić nierówności:

$$(\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k)_2 \leq s < (c_0, c_1, \dots, c_k)_2 + \frac{1}{2^k}.$$

oraz

$$(c_0, c_1 \dots c_k)_2 \leq x < (c_0, c_1 \dots c_k)_2 + \frac{1}{2^k},$$

a ponieważ lewe i prawe strony tych nierówności są, w myśl (33), odpowiednio równe, więc znajdujemy w jednej chwili:

$$s - \frac{1}{2^k} < x < s + \frac{1}{2^k}; \quad (36)$$

lecz, w myśl (30) i (32):

$$s - \frac{1}{2^k} > a, \quad s + \frac{1}{2^k} < b;$$

mamy więc, wobec (36):

$$a < x < b.$$

c. b. d. o.

Dowiedliśmy więc, że przechodząc od wartości $f(a)$ do wartości $f(b)$, funkcja $f(x)$ musi przejść przez każdą wartość y , spełniającą nierówności (29).

Z drugiej strony, każda wartość y pośrednia między $f(a)$ i $f(b)$ (o ile takowa istnieje, t. j. o ile $f(a) \neq f(b)$) musi spełniać nierówności (29) (gdyż liczby $f(a)$ i $f(b)$ są, wobec (28), ≥ 0 oraz ≤ 1). Udowodniliśmy zatem, że przechodząc od jednej wartości do drugiej, funkcja $f(x)$ musi zawsze przejść przez każdą wartość pośrednią.

Okażemy jednak, że funkcja $f(x)$ nie jest ciągłą i to dla żadnej wartości rzeczywistej x .

W samej rzeczy, gdyby funkcja $f(x)$ była ciągłą dla wartości x_0 , to dla dowolnej danej liczby dodatniej ε istniałaby liczba dodatnia δ taka, iż wewnątrz przedziału (a, b) , gdzie $a = x_0 - \delta$, $b = x_0 + \delta$, wartości funkcji $f(x)$ będą się różniły od wartości $f(x_0)$ bezwzględnie mniej niż o ε , gdy tymczasem, jak dowiedliśmy wyżej, funkcja $f(x)$ przechodzi wewnątrz (a, b) przez każdą wartość y , spełniającą nierówności (29).

Daliśmy więc przykład funkcji wszędzie nieciągłej, która ma z funkcjami ciągłymi tę własność wspólną, że przechodząc od jednej wartości do drugiej, musi zawsze przejść przez wszystkie wartości pośrednie.

§ 56. Niech $f(x)$ oznacza funkcję, określoną w przedziale (a, b) ; oznaczmy przez Y zbiór wszystkich wartości, jakie przyjmuje funkcja $f(x)$ dla liczb x przedziału (a, b) . (Dana liczba rzeczywista y należy więc wtedy i tylko wtedy do zbioru Y , jeżeli w przedziale (a, b) istnieje liczba x taka, iż $f(x) = y$). Kresy dolny i górny zbioru Y nazywamy odpowiednio *kresami funkcji* $f(x)$ w przedziale (a, b) , dolnym i górnym.

Niech $f(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale (a, b) . Oznaczmy przez W zbiór wszystkich liczb wymiernych przedziału (a, b) i niech V oznacza zbiór wszystkich wartości, jakie przyjmuje

funkcja $f(x)$ dla liczb x zbioru W . Powiadam, że kresy zbioru V będą odpowiednio kresami funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) .

Oznaczmy przez m i M odpowiednio kresy dolny i górny funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) , zaś przez l i L — kresy dolny i górny zbioru V . Zbiór V jest oczywiście częścią¹⁾ zbioru Y wszystkich wartości, jakie przyjmuje funkcja $f(x)$ w przedziale (a, b) ; ponieważ zaś oczywiście kres górny części zbioru jest zawsze nie większy od kresu górnego całego zbioru, zaś kres dolny części jest nie mniejszy od kresu dolnego całego zbioru, więc musi być

$$m \leq l, \quad \text{oraz} \quad L \leq M. \quad (37)$$

Niech teraz x oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą przedziału (a, b) , zaś x_n — ciąg nieskończony liczb wymiernych przedziału (a, b) , taki iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x;$$

wobec ciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) , wynika stąd wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x). \quad (38)$$

Liczby $f(x_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) należą wszystkie do zbioru V , przeto

$$l \leq f(x_n) \leq L, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (38):

$$l \leq f(x) \leq L. \quad (39)$$

Przy wszelkiem rzeczywistym x , należącym do przedziału (a, b) mamy więc nierówność (39), co dowodzi, że kresy m i M funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) spełniają nierówności

$$l \leq m \quad \text{oraz} \quad M \leq L. \quad (40)$$

Nierówności (37) i (40) dają w jednej chwili:

$$m = l \quad \text{oraz} \quad M = L,$$

c. b. d. o.

Jak dowiedliśmy w § 9, można zbudować ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich liczb wymiernych; opuścimy w tym ciągu

¹⁾ O dwóch zbiorach A i B mówimy, że zbiór B jest częścią zbioru A , jeżeli każdy element zbioru B jest zarazem elementem zbioru A . Jeżeli zbiór B jest częścią zbioru A , lecz nie naodwrot, to zbiór B nazywamy częścią właściwą zbioru A .

wszystkie wyrazy, nie będące liczbami wymiernymi przedziału (a, b) :
pozostanie w ten sposób ciąg nieskończony

$$w_1, w_2, w_3, \dots, \quad (41)$$

utworzony ze wszystkich liczb wymiernych przedziału (a, b) .

Weźmy, dalej, pod rozwagę ciąg nieskończony

$$v_1, v_2, v_3, \dots, \quad (42)$$

gdzie

$$v_n = f(w_n), \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (43)$$

Oznaczmy, przy każdym danym naturalnym n , przez t_n największą z liczb

$$v_1, v_2, \dots, v_n; \quad (44)$$

w ciągu (44) istnieje więc conajmniej jedna liczba $= t_n$: jeżeli jest ich więcej niż jedna, to niech k_n oznacza najmniejszy wskaźnik, przy którym

$$v_{k_n} = t_n. \quad (45)$$

Ciąg nieskończony t_n będzie oczywiście ciągiem niemalejącym, przeto w myśl tw. 12, będzie posiadał granicę (co do której nie przesądzamy narazie czy jest skończoną, czy też nieskończoną).

Położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T. \quad (46)$$

Powiadam, że $T = L$. W samej rzeczy, z definicji liczby L jako kresu górnego zbioru V , który jest zarazem zbiorem wszystkich liczb (42), wynika natychmiast, wobec (45), że

$$t_n \leq L, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (46):

$$T \leq L. \quad (47)$$

Z drugiej strony, z definicji liczb t_n wynika natychmiast, że przy wszelkim danym naturalnym k :

$$v_k \leq t_n, \text{ dla } n \geq k,$$

skąd, wobec (46), w granicy dla $n = \infty$;

$$v_k \leq T;$$

wszystkie wyrazy ciągu (42), czyli wszystkie liczby zbioru V są więc $\leq T$, skąd wnosimy, że kres górny L zbioru V spełnia nierówność

$$L \leq T. \quad (48)$$

Nierówności (47) i (48) dają w jednej chwili

$$T = L,$$

c. b. d. o. Z uwagi, że $L = M$, mamy więc, wobec (46):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = M, \quad (49)$$

gdzie M oznacza kres górny funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) .

Położmy, dalej:

$$u_n = w_{k_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (50)$$

— będzie to pewien ciąg nieskończony liczb (wymiernych) przedziału (a, b) . Położmy

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \xi$$

— będzie to więc pewna liczba rzeczywista przedziału (a, b) . W myśl tw. 41 istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_p ($p = 1, 2, 3, \dots$) taki iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_p} = \xi. \quad (51)$$

W myśl (51) i wobec ciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) , znajdujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_{n_p}) = f(\xi). \quad (52)$$

Wobec (43), (45) i (50) mamy oczywiście

$$f(u_n) = t_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

zatem też

$$f(u_{n_p}) = t_{n_p}, \text{ dla } p = 1, 2, 3, \dots$$

i przeto, wobec (49) i w myśl tw. 16:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_{n_p}) = M,$$

skąd, wobec (52):

$$f(\xi) = M.$$

Udowodniliśmy więc, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b) , to istnieje w tym przedziale wartość ξ , dla której $f(\xi) = M$, gdzie M oznacza kres górny funkcji $f(x)$ w uważanym przedziale. Mówiąc krócej: funkcja ciągła w przedziale (a, b) osiąga w tym przedziale swego kresu górnego. Zupełnie taksamo

udowodnilibyśmy, że funkcja ciągła w przedziale (a, b) osiąga w tym przedziale swego kresu dolnego¹⁾.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 70. *Funkcja ciągła w przedziale (skończonym) (a, b) , osiąga w tym przedziale swych kresów dolnego i górnego.*

Kresy funkcji ciągłej w danym przedziale (skończonym) są więc zarazem jej wartościami w tym przedziale, zatem liczbami skończonymi. Wynika stąd, że zbiór wszystkich wartości funkcji ciągłej w danym przedziale jest ograniczony, innymi słowy, że funkcja ciągła w danym przedziale (skończonym) jest w tym przedziale ograniczona.

Własność ta może jednak nie być prawdziwą dla funkcji ciągłych w przedziale nieskończonym, np. w przedziale $(-\infty, +\infty)$, t. j. w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Np. funkcja $f(x) = x$ jest ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych, natomiast nie jest w tym zbiorze ograniczona.

Podobnie, twierdzenie 70 może nie być prawdziwym dla funkcji ciągłych w przedziale nieskończonym: np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest oczywiście ciągłą dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \geq 1$, t. j. w przedziale $(1, \infty)$, lecz nie osiąga w tym przedziale swego kresu dolnego, którym jest liczba 0.

§ 57. Niech $f_1(x)$ i $f_2(x)$ będą funkcje ciągłe w przedziale (a, b) Połóżmy

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad g(x) = f_1(x)f_2(x), \quad \text{dla } a \leq x \leq b; \quad (53)$$

powiadam, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą ciągłe w przedziale (a, b) . Dla dowodu wystarczy okazać, w myśl tw. 68, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są dla każdej wartości x przedziału (a, b) ciągłe według definicji Heinego. Niech więc x_0 oznacza dowolną daną liczbę przedziału (a, b) , x_n — ciąg nieskończony liczb przedziału (a, b) , zmierzający do x_0 .

Wobec ciągłości funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ w przedziale (a, b) , będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x_n) = f_1(x_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x_n) = f_2(x_0).$$

¹⁾ Dowód możnaby było przeprowadzić krócej, gdybyśmy zastosowali pewnik z § 54: chodziło nam tu jednak o podanie dowodu, nie odwołującego się do pewnika Zermelo.

skąd, w myśl tw o granicy sumy i iloczynu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_1(x_n) + f_2(x_n)] = f_1(x_0) + f_2(x_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x_n) f_2(x_n) = f_1(x_0) f_2(x_0),$$

czyli, w myśl (53):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0), \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0),$$

co dowodzi ciągłości funkcji $f(x)$ i $g(x)$ dla wartości x_0 , c. b. d. o.

Zupełnie taksamo udowodnilibyśmy, że jeżeli funkcje

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$$

są ciągłe w przedziale (a, b) , to ich suma oraz ich iloczyn są funkcjami ciągłymi w uważanym przedziale.

Podobnie, opierając się na tw. o granicy różnicy udowodnilibyśmy, że różnica dwóch funkcji ciągłych w danym przedziale jest funkcją ciągłą w tym przedziale, zaś, opierając się na tw. o granicy ilorazu, udowodnilibyśmy, że iloraz $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ dwóch funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$, ciągłych w przedziale (a, b) , gdzie $f_2(x) \neq 0$ dla $a \leq x \leq b$, jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b) . Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 71. *Suma oraz iloczyn dowolnej (skończonej) liczby funkcji ciągłych w danym przedziale jest funkcją ciągłą w tym przedziale. Różnica dwóch funkcji ciągłych w danym przedziale jest funkcją ciągłą w tym przedziale. Iloraz dwóch funkcji ciągłych w przedziale, w którym dzielnik nie staje się zerem, jest funkcją ciągłą w tym przedziale.*

Z dowiedzionego twierdzenia wynika natychmiast, że wielomiam całkowity

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

(gdzie m jest daną liczbą naturalną, zaś $a_0, a_1, \dots, a_m$ są liczby niezależne od x) jest funkcją ciągłą w każdym danym przedziale.

§ 58. Zajmiemy się teraz zastosowaniem tw. 69 do teorii równań algebraicznych. W tym celu udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemat. Wielomian całkowity stopnia m -go

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

o współczynnikach rzeczywistych $a_0, a_1, \dots, a_m$, gdzie $a_0 \neq 0$, ma dla dostatecznie wielkich bezwzględnie x znak swego pierwszego wyrazu (t. j. dla $|x| > \mu$ jest $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} a_0 x^m$).

Dowód. Wobec $a_0 \neq 0$, mamy, dla $|x| \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{a_0 x^m} &= 1 + \frac{1}{x} \left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 x} + \frac{a_3}{a_0 x^2} + \dots + \frac{a_m}{a_0 x^{m-1}} \right) \geq \\ &\geq 1 - \frac{1}{|x|} \left(\left| \frac{a_1}{a_0} \right| + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| + \dots + \left| \frac{a_m}{a_0} \right| \right); \end{aligned}$$

kładąc

$$A = \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|}{|a_0|}$$

będziemy więc mieli dla x większych bezwzględnie od A i nie mniejszych bezwzględnie od jedności:

$$\frac{f(x)}{a_0 x^m} > 0,$$

skąd

$$\operatorname{sgn} \frac{f(x)}{a_0 x^m} = 1,$$

i przeto

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} a_0 x^m,$$

co dowodzi prawdziwości naszego lematu.

Założmy teraz, w szczególności, że m jest liczbą nieparzystą. Dla $x \neq 0$ (wobec $a_0 \neq 0$) liczby $a_0 x^m$ oraz $a_0 (-x)^m$ będą różnych znaków (gdyż $a_0 (-x)^m = (-1)^m a_0 x^m = -a_0 x^m$): przeto, w myśl naszego lematu, dla dostatecznie wielkich bezwzględnie x , liczby $f(x)$ oraz $f(-x)$ też będą różnych znaków. Istnieją więc liczby rzeczywiste x_1 i x_2 takie iż

$$f(x_1) < 0, \quad f(x_2) > 0. \quad (54)$$

Lecz, wielomian całkowity jest funkcją ciągłą w każdym danym przedziale: w myśl tw. 69, funkcja $f(x)$, przechodząc od wartości $f(x_1)$ do wartości $f(x_2)$ musi więc przejść przez wszystkie wartości pośrednie, z których jedną jest, wobec (54), liczba zero. Dowiedliśmy więc, że istnieje wartość rzeczywista x taka iż

$$f(x) = 0.$$

Każdą taką wartość nazywamy *pierwiastkiem* równania $f(x) = 0$. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 72. Każde równanie algebraiczne stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych posiada co najmniej jeden rzeczywisty pierwiastek.