

zatem

$$\frac{e}{1 + \frac{1}{t}} < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t.$$

Mamy więc:

$$\frac{e}{1 + \frac{1}{t}} < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e, \quad \text{dla } t > 0,$$

zatem, wobec $t_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$\frac{e}{1 + \frac{1}{t_n}} < \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n} < e, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

co daje, w granicy dla $n = \infty$, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e, \quad \text{c. b. d. o.}$$

4) Udowodnić, że jeżeli $t_n > 1$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^{-t_n} = e.$$

ROZDZIAŁ V.

Logarytmy.

§ 48. Logarytmem liczby dodatniej x przy zasadzie $a > 1$ nazywamy liczbę rzeczywistą y , spełniającą równanie

$$a^y = x; \quad (1)$$

liczbę tę oznaczamy symbolem

$$\lg_a x.$$

Twierdzenie 64. Każda liczba rzeczywista dodatnia x posiada przy każdej danej zasadzie $a > 1$ oznaczony w zupełności logarytm $\lg_a x$.

Dowód. Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą dodatnią, zaś a — daną liczbę > 1 . Gdyby liczba x posiadała przy zasadzie a dwa różne logarytmy: y oraz $y' > y$, to w myśl definicji logarytmu, mielibyśmy

$$a^y = x \quad \text{oraz} \quad a^{y'} = x.$$

skąd $a^{y'} = a^y$, gdy tymczasem, wobec $y' > y$ oraz $a > 1$ i w myśl własności 5 potęg, musiałoby być $a^{y'} > a^y$. Dowiedliśmy więc, że każda liczba rzeczywista posiada przy każdej danej zasadzie $a > 1$ co najwyżej jeden logarytm. Dla dowodu naszego twierdzenia pozostaje więc do okazania, że równanie (1) posiada, przy danem dodatnim x oraz danem $a > 1$, co najmniej jedno rozwiązanie względem y .

Niech n oznacza dowolną daną liczbę naturalną: liczba x^{2^n} będzie więc pewną liczbą dodatnią. Wobec $a > 1$ mamy, w myśl tw. 56:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = 0;$$

istnieją więc liczby całkowite k , dla których (przy danem n):

$$a^k \leq x^{2^n}; \quad (2)$$

z drugiej strony, dla dostatecznie wielkich k będzie

$$a^k > x^{2^n},$$

gdyż $\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = +\infty$. Wśród liczb całkowitych k , spełniających nierówność (2), istnieje więc największa: oznaczmy ją przez k_n . Będzie więc

$$a^{k_n} \leq x^{2^n} < a^{k_n+1} \quad (3)$$

(gdyż liczba $k_n + 1$ nierówności (2) już nie spełnia).

Położmy

$$u_n = \frac{k_n}{2^n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Wobec (3) mamy

$$a^{2k_n} \leq x^{2^{n+1}},$$

a ponieważ k_{n+1} oznacza największą liczbę całkowitą k , spełniającą nierówność

$$a^k \leq x^{2^{n+1}},$$

więc musi być

$$2k_n \leq k_{n+1},$$

skąd, wobec (4):

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Ciąg nieskończony u_n jest więc niemalejący, zatem posiada granicę. Położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = y \quad (5)$$

— będzie to więc liczba rzeczywista, skończona lub nieskończona.

Ponieważ ciąg u_n jest niemalejący, więc

$$u_1 \leq u_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots; \quad (6)$$

z drugiej strony, niech l oznacza liczbę całkowitą, dla której

$$a^l > x$$

(liczba taka istnieje oczywiście, gdyż wobec $a > 1$, mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$):

wobec (3) będzie

$$a^{k_n} \leq x^{2^n} < a^{2^{n+1}},$$

skąd

$$k_n < 2^n l, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

czyli, w myśl (4):

$$u_n < l, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Nierówności (6) i (7) dają, wobec (5):

$$u_1 \leq y \leq l,$$

co dowodzi, że y jest liczbą rzeczywistą skończoną.

Wobec (3) i (4) znajdujemy:

$$a^{u_n} \leq x < a^{u_n + \frac{1}{2^n}}. \quad (8)$$

Lecz, wobec (5) i w myśl własności 2 potęg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n} = a^y \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{2^n}} = 1,$$

skąd, w myśl tw. o granicy iloczynu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{u_n} \cdot a^{\frac{1}{2^n}}) = a^y;$$

nierówności (8) dają więc, w granicy dla $n = \infty$:

$$a^y \leq x \leq a^y,$$

skąd

$$a^y = x.$$

Dowiedliśmy więc, że istnieje liczba rzeczywista y , spełniająca równanie (1). Twierdzenie 64 udowodniliśmy zatem w zupełności.

§ 49. Ogólne własności logarytmów. Pod nazwą tą rozumiemy własności, prawdziwe dla logarytmów o każdej zasadzie > 1 , mogą być bowiem własności logarytmów zależne od poszczególnego obioru zasady.

Wszędzie dalej, w tym paragrafie, rozpatrywać będziemy logarytmy o jęej i tej samej zasadzie a , zresztą dowolnej, byle większej od jedności.

Zamiast $\lg_a x$ będziemy przez skrócenie pisali poprostu $\lg x$.

Własność 1. Logarytm iloczynu jest równy sumie logarytmów czynników, czyli:

$$\lg xy = \lg x + \lg y, \quad (9)$$

przy wszelkich dodatnich x i y .

Dowód. Połóżmy

$$\lg x = \xi, \quad \lg y = \eta: \quad (10)$$

liczby ξ i η spełniać będą równania:

$$a^\xi = x, \quad a^\eta = y,$$

skąd

$$a^{\xi+\eta} = xy,$$

a ponieważ liczba $\lg(xy)$ jest jedynym rozwiązaniem ξ równania $a^\xi = xy$, więc musi być

$$\lg(xy) = \xi + \eta,$$

co daje, w myśl (10), wzór (9), c. b. d. o.

Dowiedziona własność uogólnić możemy natychmiast na dowolną skończoną liczbę czynników:

$$\lg(x_1 x_2 \dots x_n) = \lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n.$$

(Np. $\lg(n!) = \lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n$ — wzór, który ma zastosowanie przy sprawdzaniu tablic logarytmicznych).

Własność 2. Logarytm ilorazu jest równy różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika, czyli

$$\lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y \quad (11)$$

dla wszelkich dodatnich x i y .

Dowód. Kładąc $\lg x = \xi$, $\lg y = \eta$, będziemy mieli

$$a^\xi = x, \quad a^\eta = y, \quad \text{skąd} \quad a^{\xi-\eta} = \frac{x}{y},$$

co daje $\xi - \eta = \lg \frac{x}{y}$, czyli wzór (11), c. b. d. o.

Własność 3. Przy wszelkiem rzeczywistem λ mamy:

$$\lg(x^\lambda) = \lambda \lg x. \quad (12)$$

Dowód. Połóżmy $\lg x = \xi$: będzie

$$a^\xi = x,$$

skąd, w myśl własności 8 potęg:

$$a^{2\xi} = x^2,$$

skąd

$$\lambda \xi = \lg(x^\lambda),$$

co daje wzór (12), c. b. d. o.

Własność 4. Większej liczbie odpowiada większy logarytm, czyli

$$\lg x > \lg y, \text{ dla } x > y > 0. \quad (13)$$

Dowód. Połóżmy $\lg x = \xi$, $\lg y = \eta$ i załóżmy, że $x > y$. Gdyby było $\xi \leq \eta$, mielibyśmy, w myśl własności 5 potęg:

$$a^\xi \leq a^\eta,$$

czyli (z uwagi że $a^\xi = x$, $a^\eta = y$)

$$x \leq y,$$

wbrew założeniu. Mamy więc nierówność (13), c. b. d. o.

Wniosek. Logarytmy liczb większych od jedności są dodatnie, zaś mniejszych od jedności ujemne. W samej rzeczy, mamy $a^0 = 1$, skąd $\lg 1 = 0$, przeto w myśl własności 4 będzie, dla $x > 1$, $\lg x > \lg 1$, czyli $\lg x > 0$, zaś dla $x < 1$ będzie $\lg x < \lg 1$, czyli $\lg x < 0$.

Własność 5. Jeżeli $x_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad (14)$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lg x_n = \infty. \quad (15)$$

Dowód. Niech A oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią.

Wobec (14) będzie

$$x_n > a^A, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, w myśl własności 4:

$$\lg x_n > \lg(a^A), \text{ dla } n > \mu,$$

czyli

$$\lg x_n > A, \text{ dla } n > \mu.$$

co dowodzi wzoru (15).

Dowodzoną własność wyrażamy zapomocą równości symbolicznej:

$$\lg(+\infty) = +\infty.$$

Własność 6. Jeżeli $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad (16)$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lg x_n = -\infty. \quad (17)$$

Dowód. Połóżmy $\frac{1}{x_n} = y_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$); wobec $x_n > 0$

oraz (16), będzie, w myśl tw. 53^a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

skąd, w myśl własności 5:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lg y_n = +\infty, \quad (18)$$

a ponieważ, w myśl własności 2, oraz z uwagi że $\lg 1 = 0$ (gdyż $a^0 = 1$), mamy

$$\lg x_n = \lg \frac{1}{y_n} = \lg 1 - \lg y_n = -\lg y_n, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

więc w myśl tw. 32, wzór (18) daje wzór (17), c. b. d. o.

Zależność między logarytmami tej samej liczby przy różnych zasadach. Niech x oznacza daną liczbę dodatnią, zaś a i b — dwie dane liczby > 1 : znajdziemy zależność między logarytmami $\lg_a x$ oraz $\lg_b x$. Połóżmy

$$\lg_a x = z; \quad (19)$$

będzie

$$x = a^z,$$

skąd, w myśl własności 3:

$$\lg_a x = z \lg_a b,$$

czyli, wobec (19):

$$\lg_a x = \lg_a b \cdot \lg_b x,$$

skąd (z uwagi, że wobec $b > 1$, $\lg_a b > 0$):

$$\lg_b x = \frac{\lg_a x}{\lg_a b}. \quad (20)$$

Aby więc znaleźć logarytm liczby x przy nowej zasadzie b , należy go obliczyć przy zasadzie a i podzielić przez logarytm nowej zasady, obliczony przy zasadzie a . Widzimy więc, że przy zmianie zasady, logarytmy wszystkich liczb zmieniają się tylko proporcjonalnie: współczynnikiem tej proporcjonalności jest liczba $\frac{1}{\lg_a b}$, zwana modulem przejścia od zasady a do zasady b .

§ 50. Logarytmy przy zasadzie e noszą nazwę *logarytmów naturalnych* lub *neperowskich*: będziemy je oznaczali dalej stałe przez $\lg x$, zachowując znakowanie $\lg_a x$ dla logarytmów o zasadzie a , innej niż e . Wyprowadzimy kilka własności logarytmów naturalnych, z których z łatwością otrzymać będzie można własności logarytmów o dowolnej danej zasadzie.

W § 47 (wzór 190), dowiedliśmy, że

$$e^x \geq 1 + x \quad (21)$$

przy wszelkiem rzeczywistym x . Niech, w szczególności, x oznacza liczbę rzeczywistą > -1 . W myśl własności 4 logarytmów, wzór (21) daje:

$$x \geq \lg(1+x), \text{ dla } x > -1. \quad (22)$$

Z drugiej strony, zastępując we wzorze (21) x przez $-\frac{x}{1+x}$ otrzymujemy, dla $x > -1$:

$$e^{\frac{x}{1+x}} \geq 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x},$$

skąd

$$e^{\frac{x}{1+x}} \leq 1 + x, \text{ dla } x > -1$$

i przeto, w myśl własności 4 logarytmów:

$$\frac{x}{1+x} \leq \lg(1+x), \text{ dla } x > -1. \quad (23)$$

Wobec (22) i (23) mamy więc nierówność:

$$\frac{x}{1+x} \leq \lg(1+x) \leq x, \text{ dla } x > -1. \quad (24)$$

Wychodząc z nierówności tej, udowodnimy z łatwością, że funkcja $\lg x$ jest ciągłą w całym zbiorze liczb dodatnich.

Niech x_0 oznacza daną liczbę dodatnią, ε — dowolną daną liczbę > 0 . Położmy

$$\delta = \frac{x_0 \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (25)$$

— będzie to liczba dodatnia.

Niech, dalej, x oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią, spełniającą nierówność

$$|x - x_0| < \delta. \quad (26)$$

Wobec $x > 0$, $x_0 > 0$, będzie

$$\frac{x - x_0}{x_0} > -1,$$

skąd, w myśl (24) (pisząc $\frac{x - x_0}{x_0}$ zamiast x):

$$\frac{x - x_0}{x} \leq \lg\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) \leq \frac{x - x_0}{x_0}. \quad (27)$$

W myśl własności 2 logarytmów, mamy:

$$\lg\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) = \lg \frac{x}{x_0} = \lg x - \lg x_0, \quad (28)$$

zaś, wobec (26) i (25):

$$x > x_0 - \delta = \frac{x_0}{1 + \varepsilon},$$

skąd

$$\frac{x - x_0}{x} = 1 - \frac{x_0}{x} > -\varepsilon, \quad (29)$$

oraz

$$x - x_0 < \delta = \frac{x_0 \varepsilon}{1 + \varepsilon} < x_0 \varepsilon,$$

skąd

$$\frac{x - x_0}{x_0} < \varepsilon. \quad (30)$$

Wobec (28), (29) i (30), nierówność (27) daje:

$$|\lg x - \lg x_0| < \varepsilon. \quad (31)$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej x nierówność (26) pociąga za sobą nierówność (31), co dowodzi (w myśl definicji ciągłości, podanej w § 41), że funkcja $f(x) = \lg x$ jest ciągłą z zbiorze liczb dodatnich dla wartości x_0 .

Udowodniliśmy więc, że funkcja $\lg x$ jest ciągłą w całym zbiorze liczb dodatnich.

Wobec ciągłości $\lg x$ w zbiorze liczb dodatnich, oraz w myśl tw. 61, otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 65. Jeżeli x_n jest ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do liczby dodatniej x_0 , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lg x_n = \lg x_0.$$

W szczególności, wnosimy stąd, że jeżeli x_n jest ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do jedności, to ciąg $\lg x_n$ zbiega do zera.

Wyprowadzimy jeszcze jeden wniosek z nierówności (24).

Wobec (24) możemy napisać

$$0 \leq x - \lg(1+x) \leq \frac{x^2}{1+x}, \quad \text{dla } x > -1, \quad (32)$$

skąd, w jednej chwili:

$$\left| \frac{\lg(1+x)}{x} - 1 \right| \leq \frac{|x|}{1+x}, \quad \text{dla } x > -1. \quad (33)$$

Niech teraz x_n oznacza ciąg nieskończony, taki iż

$$0 \neq x_n > -1, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad (34)$$

w myśl (33) będzie więc

$$\left| \frac{\lg(1+x_n)}{x_n} - 1 \right| \leq \frac{|x_n|}{1+x_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (34), w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

Stąd

Twierdzenie 66. Jeżeli

$$0 \neq x_n > -1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \text{oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad (35)$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(1+x_n)}{x_n} = 1. \quad (36)$$

Przyjmijmy w otrzymanym twierdzeniu w szczególności

$$x_n = \sqrt[n]{x} - 1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (37)$$

gdzie x oznacza liczbę dodatnią $\neq 1$. Będzie więc stale

$$0 \neq x_n > -1.$$

W myśl wzoru 86 z § 43, będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1,$$

skąd, w myśl (37):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Ciąg x_n spełnia więc warunki (35), które pociągają za sobą wzór (36). Lecz, wobec (37) mamy:

$$\lg(1+x_n) = \lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x; \quad (n = 1, 2, \dots)$$

wzór (36) przyjmuje więc postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg x}{n(\sqrt[n]{x} - 1)} = 1,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\lg x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1). \quad (38)$$

Wzór (38) wyprowadziliśmy w założeniu, że x jest liczbą dodatnią $\neq 1$, lecz, jak łatwo widzieć, pozostaje on prawdziwy i dla $x = 1$ (gdyż wówczas obie jego strony są równe zero). Udowodniliśmy więc wzór (38) przy wszelkim dodatnim x .

Niech teraz a oznacza dowolną daną zasadę logarytmów: kładąc we wzorze (38) $x = a$, otrzymamy:

$$\lg_a a = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1). \quad (39)$$

Lecz, w myśl (20) (dla $a = e$, $b = a$):

$$\lg_a x = \frac{\lg x}{\lg a},$$

skąd, wobec (38) i (39) w jednej chwili:

$$\lg_a x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{a} - 1}$$

przy wszelkim $x > 0$ oraz $a > 1$. Przedstawiliśmy więc $\lg_a x$ jako granicę wyrażenia algebraicznego względem a i x .

Zauważymy, że i funkcję a^x można by przedstawić jako granicę wyrażenia algebraicznego względem a i x : można by mianowicie dowieść, że

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \sqrt[n]{a} - x + 1)$$

przy wszelkiem rzeczywistym x oraz $a > 0$.

§ 51. Przyjmijmy teraz w nierówności (24) $x = 1/n$: otrzymamy nierówność

$$\frac{1}{n+1} \leq \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

Kładąc

$$t_n = \frac{1}{n+1} - \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (40)$$

będziemy mieli, wobec (39):

$$t_n \leq 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (41)$$

Położmy dalej:

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \lg n; \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (42)$$

będziemy mieli, wobec (40):

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} - [\lg(n+1) - \lg n] = \frac{1}{n+1} - \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = t_n,$$

zatem, wobec (41):

$$s_{n+1} - s_n \leq 0,$$

czyli

$$s_{n+1} \leq s_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

co dowodzi, że ciąg s_n jest nierosnący.

Z drugiej strony, kładąc w prawej części nierówności (39) kolejno $n = 1, 2, \dots, n-1$ i dodając stronami, z uwagi, że $\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg n$, oraz że $\lg 1 = 0$, otrzymujemy po łatwej redukcji:

$$\lg n \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1},$$

skąd, wobec (42):

$$s_n \geq \frac{1}{n}$$

i przeto

$$s_n > 0, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ciąg s_n jest więc nierosnący i ograniczony zdołu, zatem zbieżny. Położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = C \quad (43)$$

— będzie to liczba rzeczywista przedziału $(0,1)$ (jako granica ciągu nierosnącego liczb dodatnich s_n , którego pierwszy wyraz s_1 ; w myśl (42), jest $= 1$).

Wobec (42) i (43) mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \lg n \right) = C, \quad (44)$$

gdzie C oznacza pewną stałą (t. zw. *stałą Eulera*), której wartość wynosi z dokładnością do 20-tu znaków dziesiętnych

$$C = 0,57721566490153286060.$$

Nie wiadomo dotąd, czy stała Eulera jest wymierna, czy niewymierna i nie znamy żadnej drogi, która mogłaby doprowadzić do rozstrzygnięcia tego zagadnienia, pomimo że potrafimy obliczyć liczbę C z dowolną daną dokładnością. Obliczeniem wartości przybliżonej stałej Eulera zajmijmy się w jednym z dalszych rozdziałów.

Wobec (42) mamy przy naturalnem k , dla $n > k$:

$$s_k - s_n = \lg n - \lg k - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \dots - \frac{1}{n}, \quad (45)$$

sumując zaś nierówności (39) dla $n = k, k+1, \dots, n-1$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{n} \leq \lg n - \lg k \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1},$$

i przeto, wobec (45):

$$0 \leq s_k - s_n \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{n},$$

skąd, wobec (43), otrzymujemy natychmiast, w granicy dla $n = \infty$:

$$0 \leq s_k - C \leq \frac{1}{k},$$

czyli, wobec (42):

$$0 \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} - \lg k - C \leq \frac{1}{k}, \quad (46)$$

przy wszelkiem naturalnem k . A więc:

Suma k pierwszych składników szeregu harmonicznego

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

wynosi $\lg n + C$ z błędem (nieujemnym), nie przynoszącym ostatniego składnika.

Nierówność (46) daje, dalej, po podzieleniu przez 2:

$$0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} \lg k - \frac{C}{2} \leq \frac{1}{2k}, \quad (47)$$

zastępując zaś w nierówności (46) k przez $2k$, otrzymujemy:

$$0 \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \lg 2k - C \leq \frac{1}{2k}. \quad (48)$$

Nierówności (47) i (48) dają w jednej chwili, po łatwej redukcji:

$$-\frac{1}{2k} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \lg k - \frac{C}{2} - \lg 2 \leq \frac{1}{2k}, \quad (49)$$

zatem:

Suma k pierwszych składników szeregu

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

wynosi $\frac{1}{2} \lg k + \frac{C}{2} + \lg 2$, z błędem mniejszym bezwzględnie od ostatniego składnika.

Nierówności (47) i (49) dają jeszcze:

$$-\frac{1}{k} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} - \lg 2 \leq \frac{1}{2k}, \quad (50)$$

zatem:

Suma $2k$ pierwszych składników szeregu anharmonicznego

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

przedstawia $\lg 2$ z dokładnością do $\frac{1}{k}$.

Z nierówności (50) znajdujemy też w jednej chwili:

$$\lg 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right). \quad (51)$$

Niech teraz x oznacza liczbę rzeczywistą > 1 . Wobec (46) mamy, przy naturalnem n :

$$0 \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{Enx} - \lg Enx - C \leq \frac{1}{Enx}$$

oraz

$$0 \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \lg n - C \leq \frac{1}{n},$$

skąd

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{Enx} - \lg \frac{Enx}{n} \leq \frac{1}{Enx},$$

co, z uwagi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Enx}{n} = x$, i przeto, w myśl tw. 65, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg \frac{Enx}{n} = \lg x$, daje natychmiast:

$$\lg x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{Enx} \right), \quad (52)$$

przy wszelkiem rzeczywistem $x > 1$.

Wyprowadzimy jeszcze pewien wzór na $\lg(1+x)$. Dla $x > -1$, wobec własności 1 i 2 logarytmów (§ 49) z łatwością sprawdzamy tożsamość:

$$\lg(1+x) = \sum_{k=1}^n \left[\lg \left(1 + \frac{kx}{n} \right) - \lg \left(1 + \frac{(k-1)x}{n} \right) \right] = - \sum_{k=1}^n \lg \left(1 - \frac{x}{n+kx} \right). \quad (a)$$

Dla $x > -1$, $k = 1, 2, \dots, n$, mamy

$$n+kx > 0, \quad \text{oraz} \quad -\frac{x}{n+kx} > -1,$$

skąd, w myśl wzoru (24):

$$\frac{x}{n+(k-1)x} \geq -\lg \left(1 - \frac{x}{n+kx} \right) \geq \frac{x}{n+kx}. \quad (b)$$

Wzór (a) daje, wobec (b), dla $x > -1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x}{n+(k-1)x} \geq \lg(1+x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{x}{n+kx},$$

skąd:

$$\frac{x^2}{n(1+x)} \geq \lg(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{x}{n+kx} \geq 0, \quad \text{dla } x > -1,$$

zatem:

$$\lg(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{n+x} + \frac{x}{n+2x} + \dots + \frac{x}{n+nx} \right], \quad \text{dla } x > -1.$$

§ 52. Uzasadnimy teraz tak zwaną interpolację, stosowaną przy używaniu tablic logarytmicznych.

Logarytmy, używane w praktyce, obliczone są przy zasadzie 10: zamiast $\lg_{10} x$ będziemy pisali po prostu $\text{Lg } x$. W tablicach logarytmów podane są bezpośrednio logarytmy liczb 10^p , $10^p + 1$, $10^p + 2$, ... $10^{p+1} - 1$, każdy z dokładnością q znaków dziesiętnych. Liczby p i q zależą od rodzaju tablic, przy czym w najczęściej używanych w praktyce tablicach jest $q \leq 2p$. Dla $q = 5$, t. j. w tak zwanych tablicach pięciodziesiętnych jest $p = 3$; w tablicach siedmiodziesiętnych ($q = 7$) mamy $p = 4$.

Wyznaczanie logarytmów liczb dodatnich sprowadzamy do wyznaczania logarytmów liczb, zawartych w przedziale $(10^p, 10^{p+1})$ na zasadzie wzoru $\text{Lg } 10^m x = \text{Lg } 10^m + \text{Lg } x$ (wykładnik całkowity m możemy oczywiście zawsze tak obrać, iżby było $10^p \leq 10^m x < 10^{p+1}$).

Wyznaczanie zaś logarytmów liczb rzeczywistych przedziału $(10^p, 10^{p+1})$ skutecznia się za pomocą t. zw. *interpolacji*, która polega na założeniu, że w każdym z przedziałów $(N, N+1)$ (dla $N = 10^p, 10^p + 1, \dots, 10^{p+1} - 1$) przyrost logarytmu jest proporcjonalny do przyrostu zmiennej, innymi słowy, na założeniu iż (dla $N = 10^p, 10^p + 1, \dots, 10^{p+1} - 1$) zachodzi wzór

$$\text{Lg}(N+x) = \text{Lg } N + x [\text{Lg}(N+1) - \text{Lg } N] \quad (\text{dla } 0 < x < 1). \quad (53)$$

Liczbę $\text{Lg}(N+1) - \text{Lg } N = \Delta \text{Lg } N$, czyli tak zwaną różnicę logarytmów (*differentia*) obliczamy z łatwością bezpośrednio [odszukując w tablicach $\text{Lg } N$ oraz $\text{Lg}(N+1)$], zaś do obliczania iloczynu $x \cdot \Delta \text{Lg } N$ służą tak zwane *partes proportionales*.

W rzeczywistości jednak wzór (53) nie zachodzi: posługiwanie się nim przy używaniu tablic logarytmicznych jest atoli usprawiedliwionem przez to, że wyznaczając $\text{Lg}(N+x)$ ze wzoru (53), otrzymamy ten logarytm z dokładnością nie mniejszą, niż gdyby q jego znaków dziesiętnych były bezpośrednio podane w tablicach. Innymi słowy, powiadam, że lewa i prawa strona wzoru (53) różnią się bezwzględnie mniej niż o $\frac{1}{2 \cdot 10^q}$.

Niech więc N oznacza jedną z liczb $10^p, 10^p + 1, \dots, 10^{p+1} - 1$, zaś x — liczbę rzeczywistą dodatnią < 1 , i połóżmy

$$\delta = \text{Lg}(N+x) - \text{Lg } N - x [\text{Lg}(N+1) - \text{Lg } N]; \quad (54)$$

chcemy dowieść, że

$$|\delta| < \frac{1}{2 \cdot 10^q}, \quad (55)$$

gdzie $q \leq 2p$.

W myśl wzoru (20), mamy (dla $t > 0$):

$$\lg_{10} t = \frac{\lg t}{\lg 10},$$

czyli

$$\text{Lg } t = M \lg t, \quad (56)$$

gdzie

$$M = \frac{1}{\lg 10}$$

jest liczbą dodatnią $< \frac{1}{2}$, gdyż, wobec $e < 3$, mamy $e^2 < 10$ oraz $\lg 10 > 2$. (Z dokładnością 10-ciu znaków jest $M = 0,4342944819$. Liczbę M obliczył J. C. Adams w r. 1878 z 282 cyframi dziesiętnymi).

Wobec (56) i z uwagi, że

$$\lg(N+x) - \lg N = \lg \left(1 + \frac{x}{N}\right),$$

oraz

$$\lg(N+1) - \lg N = \lg \left(1 + \frac{1}{N}\right),$$

wzór (54) przyjmuje postać:

$$\frac{\delta}{M} = \lg \left(1 + \frac{x}{N}\right) - x \lg \left(1 + \frac{1}{N}\right). \quad (57)$$

Lecz, wobec (24), mamy:

$$\frac{x}{N+x} \leq \lg \left(1 + \frac{x}{N}\right) \leq \frac{x}{N},$$

oraz

$$\frac{1}{N+x} \leq \lg \left(1 + \frac{1}{N}\right) \leq \frac{1}{N},$$

skąd, wobec (57) (z uwagi że $x > 0$):

$$\frac{x}{N+x} - \frac{x}{N} \leq \frac{\delta}{M} \leq \frac{x}{N} - \frac{x}{N+1},$$

czyli

$$-\frac{x^2}{N(N+x)} \leq \frac{\delta}{M} \leq \frac{x}{N(N+1)},$$

co, wobec $0 < x < 1$, daje:

$$|\delta| < \frac{M}{N^2}$$

i przeto, ponieważ $N \geq 10^p$, zaś $M < \frac{1}{2}$:

$$|\delta| < \frac{1}{2 \cdot 10^{2p}}.$$

skąd, dla $q \leq 2p$, otrzymujemy nierówność (55), c. b. d. o.

Ćwiczenia.

1) Dowiedzieć, że jeżeli liczba g jest średnią geometryczną liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$, to liczba $\lg g$ jest średnią arytmetyczną liczb $\lg a_1, \lg a_2, \dots, \lg a_n$.

2) Udowodnić wzór $|x| = e^{\frac{1}{2} \lg x^2}$, przy wszelkim rzeczywistym $x \neq 0$.

3) Udowodnić, że dla wzoru $a^b = c$ może zachodzić każda z ośmiu kombinacji co do wymierności lub niewymierności liczb a, b i c . (A więc: 1) a, b i c wymierne; 2) a i b wymierne, c niewymierne, i t. d.).

Uwaga: Następujące przykłady dają wszystkie możliwe kombinacje:

$$1) 2^2 = 4, \quad 2) 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 3) (\sqrt{2})^2 = 2, \quad 4) (\sqrt{2})^3 = \sqrt{8},$$

$$5) 10^{\lg 2} = 2, \quad 6) 10^{\lg \sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad 7) (\sqrt{10})^{\lg 2} = 2, \quad 8) \sqrt{10}^{\lg 2} = \sqrt{2}.$$

ROZDZIAŁ VI.

Wiadomości podstawowe z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

§ 53. Niech X oznacza dany zbiór, którego elementami są liczby rzeczywiste skończone lub nieskończone. Utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy B każdą liczbę rzeczywistą (skończoną), większą od każdej z liczb zbioru X . Przekrój $[A, B]$ wyznaczy, jak wiemy, pewną liczbę rzeczywistą skończoną lub nieskończoną L , którą nazywamy *kresem górnym* zbioru X .

Podobnie, utwórzmy przekrój $[A_1, B_1]$, zaliczając do klasy A_1 każdą liczbę rzeczywistą, która jest mniejszą od każdej z liczb zbioru X : przekrój ten wyznaczy pewną (skończoną lub nieskończoną) liczbę rzeczywistą l , którą nazywamy *kresem dolnym* zbioru X .

Łatwo widzieć, że dla każdej liczby x zbioru X zachodzić będzie nierówność.

$$x \leq L.$$

W samej rzeczy, gdyby dla pewnej liczby x zbioru X zachodziła nierówność

$$x > L,$$

to, oznaczając przez a liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność $x > a > L$, musielibyśmy liczbę a , jaką mniejszą od pewnego elementu x zbioru X , zaliczyć w przekroju $[A, B]$ do klasy A , co niemożliwe, wobec $a > L$. Kres górny zbioru jest więc niemniejszy od każdej z liczb tego zbioru. Wynika stąd też natychmiast, że jeżeli kres górny danego zbioru sam jest liczbą tego zbioru, to jest on największą liczbą uważanego zbioru.

Łatwo, dalej, widzieć, że żadna liczba $L' < L$ nie posiada tej własności, że spełnia nierówność

$$x \leq L'$$

przy wszelkiem x należącym do zbioru X . Gdyby bowiem $L' < L$ było taką właśnie liczbą, to oznaczając przez b liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność $L' < b < L$, mielibyśmy (wobec $L' < b$) nierówność $x < b$ dla każdej liczby x zbioru X i przeto musielibyśmy liczbę b zaliczyć w przekroju $[A, B]$ do klasy B , co niemożliwe, wobec $b < L$.

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 67. Dla każdego danego zbioru liczb rzeczywistych (skończonych lub nieskończonych) X , wśród liczb niemniejszych od żadnej z liczb zbioru X istnieje jedna najmniejsza: jest to kres górny zbioru X .

Podobnie udowodnilibyśmy

Twierdzenie 67^a. Dla każdego danego zbioru liczb rzeczywistych (skończonych lub nieskończonych) X , wśród liczb niewiększych od żadnej z liczb zbioru X istnieje jedna największa: jest to kres dolny zbioru X .

Z definicji kresów wynika natychmiast, że jeżeli wszystkie liczby zbioru X są $\geq a$, to oba kresy jego (górny i dolny) są $\geq a$; podobnie, jeżeli wszystkie liczby zbioru X są $\leq b$, to oba kresy jego są $\leq b$. Kresy zbioru dają więc *najściślejsze granice*, w których liczby uważanego zbioru są zawarte.

Zbiór liczb rzeczywistych X , którego kresy są skończone, nazywamy *ograniczonym*. Łatwo widzieć, że definicja ta równoważna jest następującej:

Zbiór liczb rzeczywistych X jest ograniczony, jeżeli istnieje liczba skończona M , taka iż dla każdej liczby x zbioru X mamy

$$|x| < M.$$

Samo przez się zrozumiałem jest, dalej, co należy rozumieć przez zbiór ograniczony zgóry lub zbiór ograniczony zdółu.