co, w myśl tw. 36, dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} u_n = \frac{x}{y},$$

czyli, w myśl (168) i (167):

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} x_n}{\lim\limits_{n=\infty} y_n}.$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 53. *Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych x_n i y_n są zbieżne, przytem $y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} y_n \neq 0$, to mamy wzór:*

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} x_n}{\lim\limits_{n=\infty} y_n}.$$

Twierdzenie to wyrażamy krócej, mówiąc, *że granicą ilorazu jest iloraz granic.*

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 53^a. *Jeżeli $x_n > 0$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$, to $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.*

Dowód. Niech A oznacza dowolną daną liczbę dodatnią: będzie więc, wobec $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$, w myśl tw. 14, $x_n \leq \frac{1}{A}$, dla $n \geq \mu$, skąd, w myśl tw. 51: $\frac{1}{x_n} \geq A$, dla $n \geq \mu$, co dowodzi, w myśl tw. 14, że $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$, *c. b. d. o.* Podobnież udowodnilibyśmy

Twierdzenie 54. *Jeżeli $\lim\limits_{n=\infty} |x_n| = \infty$, to $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.*

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że dla każdego ciągu nieskończonego liczb rzeczywistych u_n:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} (-u_n) = -\underline{\lim_{n=\infty}} u_n, \quad \underline{\lim_{n=\infty}} (-u_n) = -\overline{\lim_{n=\infty}} u_n.$$

2) Udowodnić, że dla każdych dwóch ciągów liczb rzeczywistych u_n i v_n:

$$\underline{\lim_{n=\infty}} (u_n + v_n) \leq \underline{\lim_{n=\infty}} u_n + \overline{\lim_{n=\infty}} v_n, \quad \underline{\lim_{n=\infty}} (u_n + v_n) \geq \underline{\lim_{n=\infty}} u_n + \underline{\lim_{n=\infty}} v_n.$$

3) Udowodnić, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych u_n i każdej liczby rzeczywistej $c > 0$ mamy:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} (cu_n) = c \overline{\lim_{n=\infty}} u_n, \quad \underline{\lim_{n=\infty}} (cu_n) = c \underline{\lim_{n=\infty}} u_n.$$

4) Okazać, że nie dla każdych dwóch ciągów u_n i v_n zachodzi nierówność:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} (u_n v_n) \leq \overline{\lim_{n=\infty}} u_n \cdot \overline{\lim_{n=\infty}} v_n.$$

[Np. dla $u_n = (-1)^n$, $v_n = -1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, będzie $\lim\limits_{n=\infty} (u_n v_n) = +1$, $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} u_n \cdot \overline{\lim\limits_{n=\infty}} v_n = (+1)(-1) = -1$].

5) Okazać, że przy wszelkich rzeczywistych a i b:

$$\frac{|a-b| + a + b}{2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq b \\ b & \text{dla } a \leq b. \end{cases}$$

6) Dowieść, że jeżeli ciąg x_n zmierza do zera, zaś ciąg t_n pozostaje ograniczonym (niekoniecznie będąc zbieżnym), to

$$\lim_{n=\infty} x_n t_n = 0.$$

(Z twierdzenia tego robimy często użytek przy obliczaniu granic).

ROZDZIAŁ IV.

Potęgowanie liczb rzeczywistych.

§ 36. Iloczyn n czynników, z których każdy jest równy liczbie rzeczywistej x, nazywamy *n-tą potęgą liczby* x i oznaczamy przez x^n. Przez x^1 rozumiemy samą liczbę x. W ten sposób symbol x^n jest określony dla wszelkiej liczby rzeczywistej x i wszelkiej liczby naturalnej n.

Liczbę x nazywamy *podstawą*, zaś liczbę n — *wykładnikiem* potęgi x^n.

Z tw. 48 wynika, że jeżeli

$$x > y \geq 0,$$

to przy wszelkiem naturalnem n mamy:

$$x^n > y^n.$$

Twierdzenie 55. *Przy wszelkiem rzeczywistem $d \geq -1$ oraz wszelkiem naturalnem n mamy:*

$$(1 + d)^n \geq 1 + nd. \tag{1}$$

Dowód. Nierówność (1) jest, przy danem rzeczywistem $d \geq -1$, oczywiście prawdziwa dla $n = 1$. Załóżmy, że jest ona prawdziwa przy pewnem naturalnem n. Wobec $d \geq -1$ mamy $1 + d \geq 0$, zatem wobec (1) i w myśl tw. 47:

$$(1 + d)^{n+1} \geq (1 + n\,d)\,(1 + d). \tag{2}$$

Lecz

$$(1+nd)\,(1+d) = 1 + nd + d + nd^2 = \\ = 1 + (n+1)\,d + nd^2 \geq 1 + (n+1)\,d,$$

gdyż zawsze $d^2 \geq 0$ i przeto $nd^2 \geq 0$. Wobec (2) mamy więc:

$$(1+d)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,d,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (1) dla $n+1$. Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości wzoru (1) przy wszelkiem naturalnem n. Udowodniliśmy zatem nasze twierdzenie.

§ **37. Ciąg potęgowy.** Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą. Weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony

$$x_n = x^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Zbadamy kiedy ciąg ten jest zbieżny i jaką ewentualnie posiada granicę. Rozróżnimy trzy przypadki: $|x| < 1$, $|x| > 1$, oraz $|x| = 1$.

1) $|x| < 1$. Jeżeli $x = 0$, to mamy, w myśl (3):

$$x_n = 0, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

zatem też

$$\lim_{n=\infty} x_n = 0.$$

Załóżmy więc, że $x \neq 0$: jest więc $|x| > 0$, oraz, wobec $|x| < 1$ i w myśl tw. 51:

$$\frac{1}{|x|} > 1;$$

połóżmy

$$\frac{1}{|x|} = 1 + d:$$

będzie więc $d > 0$, oraz

$$|x| = \frac{1}{1+d}. \tag{4}$$

W myśl tw. 55 mamy, dla $d > 0$, tembardziej

$$(1+d)^n > nd$$

i przeto, w myśl tw. 51:

$$\frac{1}{(1+d)^n} < \frac{1}{nd},$$

zatem, wobec (4):

$$|x^n| = |x|^n = \left(\frac{1}{1+d}\right)^n = \frac{1}{(1+d)^n} < \frac{1}{nd},$$

czyli, w myśl (3):

$$|x_n| < \frac{1}{nd}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią.

Dla $n > \frac{1}{d\varepsilon}$ będzie $\frac{1}{nd} < \varepsilon$ i przeto, w myśl (5):

$$|x_n| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu = \frac{1}{d\varepsilon},$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} x_n = 0.$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli $|x| < 1$, to

$$\lim_{n=\infty} x_n = 0.$$

2) $|x| > 1$. Połóżmy $|x| - 1 = d$: będzie to więc liczba dodatnia, oraz będzie

$$|x| = 1 + d,$$

skąd, w myśl (1):

$$|x^n| = |x|^n = (1+d)^n \geq 1 + nd > nd,$$

czyli, wobec (3):

$$|x_n| > nd, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Niech a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą: dla $n > \frac{a}{d}$ będzie $nd > a$, zatem, wobec (6):

$$|x_n| > a, \quad \text{dla} \quad n > \mu = \frac{a}{d},$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty. \tag{7}$$

Jeżeli mamy $x > 0$, zatem $x > 1$ (gdyż $|x| > 1$), to stale $x_n > 0$ oraz $|x_n| = x_n$, i przeto wzór (7) daje:

$$\lim_{n=\infty} x_n = +\infty.$$

Jeżeli zaś $x < 0$, zatem (wobec $|x| > 1$) $x < -1$, to moglibyśmy z łatwością okazać, że

$$\overline{\lim_{n=\infty}} x_n = +\infty, \quad \text{zaś} \quad \underline{\lim_{n=\infty}} x_n = -\infty.$$

W każdym więc razie dla $|x| > 1$ ciąg x_n nie jest zbieżny.

3) $|x| = 1$, zatem $x = 1$, albo też $x = -1$. W pierwszym przypadku mamy, wobec (3), stale

$$x_n = 1,$$

zatem też

$$\lim_{n=\infty} x_n = 1,$$

w drugim zaś mamy:

$$x_n = (-1)^n;$$

skąd, jak łatwo widzieć:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n=\infty}} x_n = -1.$$

Otrzymane wyniki możemy streścić w twierdzeniu:

Twierdzenie 56. *Ciąg x^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dla $-1 < x < 1$ ma granicę 0, dla $x = 1$ — granicę 1, dla $x > 1$ — granicę $+\infty$, zaś dla $x \leq -1$ nie posiada żadnej granicy.*

Jako zastosowanie dowiedzionego twierdzenia, udowodnimy wzór:

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{(x+1)^{2n} - (x-1)^{2n}}{(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n}} \tag{8}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x.

Połóżmy:

$$u_n = \frac{(x+1)^{2n} - (x-1)^{2n}}{(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n}}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Dla $x = 0$ mamy, w myśl (9), stale $u_n = 0$, zatem też $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ i przeto wzór (8) jest dla $x = 0$ prawdziwy.

Dla $x > 0$ mamy, jak łatwo widzieć:

$$z = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1, \tag{10}$$

a że, w myśl (9):

$$u_n = \frac{1 - z^n}{1 + z^n},$$

zaś, wobec (10) oraz w myśl tw. 56: $\lim\limits_{n=\infty} z^n = 0$, więc, w myśl tw. o sumie, różnicy i ilorazie granic:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 1,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (8) dla $x > 0$.

Dla $x < 0$ mamy, jak łatwo widzieć:

$$t = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 < 1,$$

a że, w myśl (9):

$$u_n = \frac{t^n - 1}{t^n + 1},$$

więc

$$\lim_{n=\infty} u_n = -1$$

i wzór (8) jest prawdziwy dla $x < 0$.

Dowiedliśmy więc wzoru (8) przy wszelkiem rzeczywistem x.

§ 38. Pierwiastki arytmetyczne.

Niech a oznacza daną liczbę dodatnią, zaś m — daną liczbę naturalną. Liczbę dodatnią x, spełniającą równanie

$$x^m = a$$

nazywamy *pierwiastkiem arytmetycznym m-go stopnia z liczby a* i oznaczamy przez

$$\sqrt[m]{a}.$$

Twierdzenie 57. *Z każdej danej liczby rzeczywistej dodatniej istnieje jeden i tylko jeden pierwiastek arytmetyczny każdego danego naturalnego stopnia.*

Dowód. Niech a oznacza daną liczbę dodatnią, m — daną liczbę naturalną. Oznaczmy, przy każdym danym wskaźniku n, przez k_n największą liczbę całkowitą, spełniającą nierówność:

$$k_n^m \leq 2^{mn} a. \tag{11}$$

Liczba taka istnieje, gdyż przy naturalnem k mamy $k^m \geq k$ i przeto dla $k > 2^{mn}a$ będzie już $k^m > 2^{mn}a$, z drugiej zaś strony jest, wobec założenia $a > 0$, $0 \leq 2^{mn}a$: wnosimy stąd, że

$$k_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Wobec definicji liczby k_n będzie już

$$(k_n + 1)^m > 2^{mn} a. \tag{13}$$

Połóżmy

$$u_n = \frac{k_n}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Wobec (11) mamy:

$$(2k_n)^m \leq 2^{m(n+1)} a,$$

a ponieważ k_{n+1} oznacza największą liczbę całkowitą, spełniającą nierówność

$$k_{n+1}^m \leq 2^{m(n+1)} a,$$

więc musi być

$$2k_n \leq k_{n+1},$$

skąd, wobec (14):

$$u_n \leq u_{n+1}: \tag{15}$$

ciąg nieskończony u_n jest więc niemalejący, zatem w myśl tw. 12, posiada granicę. Połóżmy:

$$\lim_{n=\infty} u_n = x \tag{16}$$

— będzie to więc liczba rzeczywista, skończona lub nieskończona. Wobec (14) i (12), mamy:

$$0 \leq u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{17}$$

z drugiej zaś strony, niech l oznacza liczbę naturalną, taką iż

$$l^m > a$$

(liczba taka istnieje oczywiście, gdyż przy naturalnem l stale $l^m \geq l$): wobec (11) będzie przy wszelkiem naturalnem n:

$$k_n^m < 2^{mn} l^m;$$

skąd

$$k_n < 2^n l,$$

i przeto, wobec (14):

$$u_n < l \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

Wobec (16), (17) i (18) oraz w myśl tw. 10, wnosimy, że

$$0 \leq x \leq l,$$

co dowodzi że x jest liczbą rzeczywistą skończoną, nieujemną.

Wobec (11), (13) i (14), znajdujemy:

$$u_n^m \leq a < \left(u_n + \frac{1}{2^n}\right)^m \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{19}$$

Lecz, w myśl tw. 56:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

zatem, wobec (16) i w myśl tw. o granicy sumy:

$$\lim_{n=\infty} \left(u_n + \frac{1}{2^n}\right) = x. \tag{20}$$

Wobec (16) i (20) oraz w myśl tw. o granicy iloczynu, mamy więc:

$$\lim_{n=\infty} u_n^m = x^m, \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \left(u_n + \frac{1}{2^n}\right)^m = x^m,$$

skąd, wobec (19) i w myśl tw. 10:

$$x^m \leq a \leq x^m,$$

co daje w jednej chwili:

$$x^m = a \tag{21}$$

i zarazem dowodzi (wobec $a > 0$), że liczba (jak wiemy, nieujemna) x nie może być zerem.

Dowiedliśmy więc, że istnieje liczba dodatnia x, spełniająca równanie (21). Okażemy obecnie, że liczba taka jest tylko jedna.

Załóżmy, że dla dwóch różnych liczb rzeczywistych dodatnich x i y mamy

$$x^m = a \quad \text{oraz} \quad y^m = a \tag{22}$$

i że np. $x < y$: mielibyśmy stąd $x^m < y^m$, gdy tymczasem, wobec (22), mamy $x^m = y^m$.

Dowiedliśmy zatem, że równanie (21) posiada (przy każdem danem dodatniem a oraz danem naturalnem m) jedno i tylko jedno rozwiązanie w liczbach dodatnich x. Twierdzenie 57 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Niech teraz a oznacza daną liczbę rzeczywistą, zaś m — daną liczbę naturalną.

Pierwiastkiem rzeczywistym m-go stopnia z liczby a nazywamy każdą liczbę rzeczywistą x, spełniającą równanie

$$x^m = a.$$

Łatwo widzieć, że, w razie $a > 0$ oraz m parzystego, istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste m-go stopnia z liczby a, mianowicie $\sqrt[m]{a}$ oraz $-\sqrt[m]{a}$ (gdyż w każdym razie musi, wobec $x^m = a$, być $|x|^m = a$, skąd $|x| = \sqrt[m]{a}$), w razie zaś $a < 0$ oraz m parzystego nie istnieje żaden pierwiastek rzeczywisty m-go stopnia z liczby a.

W razie m nieparzystego istnieje z każdej liczby rzeczywistej a jeden pierwiastek rzeczywisty m-go stopnia, mianowicie $x = \operatorname{sgn} a.\sqrt[m]{|a|}$

§ 39. Obliczanie pierwiastków arytmetycznych.

Podamy tu pewien sposób szybkiego obliczania pierwiastków stopnia drugiego z liczb rzeczywistych.

Niech D oznacza daną liczbę dodatnią, x_0 — jakąkolwiek liczbę rzeczywistą dodatnią. Połóżmy:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + \frac{D}{x_{n-1}}}{2}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

Ze wzoru (23) wynika (wobec $x_0 > 0$) drogą łatwej indukcji, że wszystkie wyrazy ciągu x_n są dodatnie.

Mamy dalej, wobec (23):

$$x_n^2 - D = \frac{(x_{n-1}^2 - D)^2}{4\, x_{n-1}^2}, \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

skąd wynika, że

$$x_n^2 > D, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{24}$$

skąd

$$x_n > \sqrt{D}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

[gdyż w razie $x_n \leq \sqrt{D}$, byłoby $x_{n-1}^2 \leq D$, wbrew (24)].

Wobec (23) mamy dalej:

$$D - \left(\frac{D}{x_n}\right)^2 = D\left(\frac{x_{n-1}^2 - D}{x_{n-1}^2 + D}\right)^2, \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

stąd wynika, że

$$D > \left(\frac{D}{x_n}\right)^2, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

i przeto

$$\sqrt{D} > \frac{D}{x_n}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{26}$$

Wobec (25) i (26) mamy więc

$$x_n > \sqrt{D} > \frac{D}{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

skąd

$$0 < x_n - \sqrt{D} < x_n - \frac{D}{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Wobec (23) znajdujemy:

$$x_n - \frac{D}{x_n} = \frac{x_{n-1}^2 - D}{x_{n-1}^2 + D} \cdot \frac{x_{n-1} - \frac{D}{x_{n-1}}}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{28}$$

Lecz, wobec (24), mamy:

$$\frac{x_{n-1}^2 - D}{x_{n-1}^2 + D} < 1 \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

skąd, wobec (28):

$$x_n - \frac{D}{x_n} < \frac{x_{n-1} - \frac{D}{x_{n-1}}}{2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

co daje w jednej chwili (wobec (27)):

$$0 < x_n - \frac{D}{x_n} < \frac{x_1 - \frac{D}{x_1}}{2^{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

i przeto

$$\lim_{n=\infty} \left(x_n - \frac{D}{x_n}\right) = 0,$$

co, wobec (27), dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} x_n = \sqrt{D}.$$

Godnem uwagi jest tu, że granica ciągu x_n nie zależy od obioru wyrazu początkowego x_0, od którego zależą wyrazy x_n.

Załóżmy, w szczególności, że $D \geq \frac{1}{4}$. Powiadam, że wówczas x_{n+1} przedstawia $\sqrt{D}$ z conajmniej dwa razy większą liczbą cyfr dziesiętnych dokładnych niż x_n. W samej rzeczy, załóżmy, że mamy przy pewnem n:

$$x_n - \sqrt{D} < \frac{1}{10^p}; \tag{29}$$

w myśl (23), będzie

$$x_{n+1} - \sqrt{D} = \frac{x_n^2 + D}{2x_n} - \sqrt{D} = \frac{(x_n - \sqrt{D})^2}{2x_n},$$

skąd, z uwagi, że wobec (25), oraz $D \geq \frac{1}{4}$, mamy $2x_n > 1$, otrzymujemy:

$$x_{n+1} - \sqrt{D} < (x_n - \sqrt{D})^2,$$

czyli, wobec (29):

$$x_{n+1} - \sqrt{D} < \frac{1}{10^{2p}},$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia. Jeżeli więc x_n przedstawia $\sqrt{D}$ z dokładnością do $\frac{1}{10}$, to x_{n+1} przedstawiać będzie $\sqrt{D}$ conajmniej z dokładnością do $\frac{1}{10^2}$, x_{n+2} — conajmniej z dokładnością do $\frac{1}{10^4}$, x_{n+3} — do $\frac{1}{10^8}$, x_{n+4} — do $\frac{1}{10^{16}}$ i t. d.; x_{n+10} — conajmniej z dokładnością do $\frac{1}{10^{1024}}$, czyli z dokładnością przeszło tysiąca cyfr dziesiętnych.

Dowodzi to, jak szybko zbieżnym jest podany algorytm obliczania pierwiastków.

Przykład. Połóżmy $D=2, x_0=1$. W myśl wzoru (23) otrzymamy:

$$x_1=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{17}{12},\quad x_3=\frac{577}{408},\quad x_4=\frac{665857}{470832}.$$

Wobec (27) mamy

$$0 < x_3 - \sqrt{2} < x_3 - \frac{2}{x_3} = \frac{1}{408.577} < \frac{1}{2.10^5},$$

czyli liczba x_3 przedstawia $\sqrt{2}$ z dokładnością conajmniej pięciu znaków dziesiętnych: wnosimy stąd, dalej, że liczba $x_4 = 1{,}414213562375\ldots$ przedstawiać będzie $\sqrt{2}$ z dokładnością conajmniej dziesięciu znaków dziesiętnych. Liczba x_8 dałaby nam więc $\sqrt{2}$ z dokładnością conajmniej 160-ciu cyfr dziesiętnych.

Jako ćwiczenie pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia drogą łatwej indukcji, że wyrazy ciągu x_n, określonego przez wzory (23), dają się przedstawić wzorem

$$x_n = \sqrt{D}\,\frac{(x_0+\sqrt{D})^{2^n} + (x_0-\sqrt{D})^{2^n}}{(x_0+\sqrt{D})^{2^n} + (x_0-\sqrt{D})^{2^n}}\quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Podamy tu jeszcze pewien wzór Hobsona na obliczanie pierwiastków arytmetycznych m-go stopnia.

Niech D oznacza jakąkolwiek daną liczbę rzeczywistą dodatnią, m — daną liczbę naturalną, zaś x_0 — liczbę dodatnią, taką iż

$$x_0^m \leq D < (x_0+1)^m. \tag{a}$$

Połóżmy

$$x_n = x_{n-1} + \frac{D - x_{n-1}^m}{m\,(x_{n-1}+1)^{m-1}}; \tag{b}$$

powiadam, że będzie

$$\lim_{n=\infty} x_n = \sqrt[m]{D}. \tag{c}$$

Wobec (b) mamy:

$$x_1 - x_0 = \frac{D - x_0^m}{m\,(x_0+1)^{m-1}}; \tag{d}$$

lecz, wobec (a):

$$0 \leq D - x_0^m < (x_0+1)^m - x_0^m =$$
$$= (x_0+1)^{m-1} + (x_0+1)^{m-2}x_0 + \ldots + x_0^{m-1} < m\,(x_0+1)^{m-1},$$

skąd, wobec (d):

$$0 \leq x_1 - x_0 < 1. \tag{e}$$

Wobec

$$x_1^m - x_0^m = (x_1 - x_0)\,(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x_0 + \ldots + x_0^{m-1})$$

oraz w myśl (e), mamy dalej:

$$(x_1-x_0)\,m\,x_0^{m-1} \leq x_1^m - x_0^m \leq (x_1-x_0)\,m\,x_1^{m-1} \leq (x_1-x_0)\,m\,(x_0+1)^{m-1},$$

skąd, w myśl (d):

$$(D - x_0^m)\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1} \leq x_1^m - x_0^m \leq D - x_0^m,$$

co, wobec

$$D - x_1^m = D - x_0^m - (x_1^m - x_0^m)$$

daje w jednej chwili:

$$0 \leq D - x_1^m \leq (D - x_0^m)\left[1 - \left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1}\right]. \tag{f}$$

Z drugiej strony, wobec (a) i (e) mamy, tembardziej

$$D < (x_1+1)^m.$$

Jeżeli więc x_0 oznacza liczbę rzeczywistą dodatnią, spełniającą nierówności (a), i jeżeli wyznaczymy liczbę x_1 ze wzoru (d), to będziemy mieli

$$x_1^m \leq D < (x_1+1)^m,$$

$$D - x_1^m \leq (D - x_0^m)\left[1 - \left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1}\right],$$

oraz

$$x_1 \geq x_0.$$

Wnosimy stąd natychmiast, że jeżeli x_{n-1} oznacza liczbę rzeczywistą dodatnią, taką iż

$$x_{n-1}^m \leq D < (x_{n-1}+1)^m,$$

i jeżeli wyznaczymy liczbę x_n ze wzoru (b), to będziemy mieli:

$$x_n^m \leq D < (x_n+1)^m, \tag{g}$$

$$D - x_n^m \leq (D - x_{n-1}^m)\left[1-\left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}\right)^{m-1}\right] \tag{h}$$

oraz

$$x^n \geq x_{n-1}. \tag{i}$$

Przez indukcję wnosimy stąd, że nierówności (g), (h), (i) zachodzą przy wszelkiem naturalnem n.

Wobec (h) znajdujemy w jednej chwili:

$$D-x_n^m \leq (D-x_0^m)\left[1-\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1}\right]\left[1-\left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{m-1}\right]\dots\left[1-\left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}\right)^{m-1}\right]. \tag{j}$$

Wobec (i) mamy

$$x_k \geq x_0, \quad \text{dla} \quad k=1, 2, 3, \dots$$

i przeto:

$$1-\left(\frac{x_k}{x_k+1}\right)^{m-1} \leq 1-\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1}; \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

nierówność (j) daje więc, wobec (g):

$$0 \leq D-x_n^m \leq (D-x_0^m)\left[1-\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1}\right]^n \quad (n=1, 2, \dots). \tag{k}$$

Lecz, wobec $x_0 > 0$, mamy

$$0 < \frac{x_0}{x_0+1} < 1$$

i przeto

$$0 < 1-\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1} < 1;$$

w myśl tw. 56 mamy więc

$$\lim_{n=\infty}\left[1-\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)^{m-1}\right]^n = 0,$$

wobec czego nierówność (k) daje:

$$\lim_{n=\infty} x_n^m = D. \tag{l}$$

Wobec (i), ciąg x_n jest niemalejący: w myśl tw. 12 posiada więc granicę

$$\lim_{n=\infty} x_n = g, \tag{m}$$

tóra będzie liczbą skończoną, gdyż wobec (g), ciąg x_n jest ograniczony. Wobec n) i w myśl tw. o granicy iloczynu, będzie

$$\lim_{n=\infty} x_n^m = g^m,$$

ąd, wobec (l):

$$g^m = D,$$

, z uwagi że liczba g, jako granica ciągu niemalejącego liczb dodatnich, jest odatnią, oraz w myśl definicji pierwiastka arytmetycznego, daje

$$g = \sqrt[m]{D},$$

wobec czego wzór (m) daje wzór (e), *c. b. d. o.*

§ 40. Nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej.

Twierdzenie 58. *Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ mamy zawsze nierówność*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}, \tag{30}$$

innemi słowy: *średnia geometryczna n liczb dodatnich jest zawsze nie większa od ich średniej arytmetycznej.*

Twierdzenia tego dowodzi Cauchy sposobem, który możnaby nazwać *indukcją wsteczną* (wnioskowaniem z $n+1$ na n). Dowodzi on mianowicie drogą zwykłej indukcji, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n=2^k$ $(k=1, 2, 3, \dots)$ liczb, a dalej dowodzi, że prawdziwość twierdzenia dla $n+1$ liczb pociąga za sobą jego prawdziwość dla n liczb. Stąd wynika prawdziwość twierdzenia dla dowolnej (skończonej) liczby liczb. W samej rzeczy, jeżeli m nie jest liczbą formy 2^k, to zawsze istnieje takie naturalne p, iż $2^p > m$: wobec prawdziwości twierdzenia dla 2^p liczb oraz uwagi, że z prawdziwości twierdzenia dla $n+1$ liczb wynika jego prawdziwość dla n liczb, wnosimy kolejno o prawdziwości twierdzednia dla 2^p-1, $2^p-2, \dots$, wreszcie dla m liczb.

Nierówność (30) jest oczywiście, dla dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$, równoważna nierówności

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^n. \tag{31}$$

Dla $n=2$ nierówność (31) zachodzi oczywiście, gdyż przy wszelkich dodatnich a_1 i a_2 mamy:

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2.$$

Załóżmy, że nierówność (31) jest prawdziwa dla 2^k liczb (co jest słuszne dla $k=1$) i niech $a_1, a_2, \ldots a_{2^{k+1}}$ będą dane 2^{k+1} liczb dodatnich.

Połóżmy:

$$A = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}, \quad B = \frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+a_{2^{k+1}}}{2^k}; \qquad (32)$$

w myśl założenia, że nierówność (31) jest prawdziwa dla 2^k liczb będzie

$$a_1 a_2 \ldots a_{2^k} \leq A^{2^k} \text{ oraz } a_{2^k+1} a_{2^k+2} \ldots a_{2^{k+1}} \leq B^{2^k}. \qquad (33)$$

Z drugiej strony, ponieważ nierówność (31) jest prawdziwa dla dwóch liczb:

$$AB \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

skąd, wobec (33) i (32):

$$a_1 a_2 \ldots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \ldots a_{2^{k+1}} \leq (AB)^{2^k} \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^{2^{k+1}} =$$

$$= \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}};$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (31) dla 2^{k+1} liczb.

Stąd, przez indukcję, wynika prawdziwość nierówności (31) dla $n=2^k$ liczb dodatnich przy wszelkiem naturalnem k.

Załóżmy teraz, że nierówność (31) jest prawdziwa dla $n+1$ liczb dodatnich i niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dane n liczb dodatnich. Połóżmy:

$$\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \ldots \alpha_n = a_n, \quad \alpha_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \qquad (34)$$

W myśl założenia, że nierówność (31) jest prawdziwa dla $n+1$ liczb, będziemy mieli:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1} \leq \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1},$$

skąd, wobec (34) i uwagi że (wobec (34)):

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}}{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

znajdujemy:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \alpha_{n+1} \leq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n+1},$$

co, wobec (34), daje w jednej chwili nierówność (31).

Udowodniliśmy więc nierówność (31), a więc i nierówność Cauchy'ego (30) dla wszelkich n liczb dodatnich ($n=1, 2, 3, \ldots$).

Niech teraz $a_1, a_2, \ldots a_n$ będą n danych liczb dodatnich. Stosując nierówność Cauchy'ego względem liczb $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_n}$, otrzymamy:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

skąd

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Liczbę $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* z liczb $a_1, a_2, \ldots a_n$; mamy więc

Twierdzenie 58^a. *Średnia geometryczna n liczb dodatnich jest niemniejsza od ich średniej harmonicznej.*

Zauważymy, że w nierówności (31), a więc i w nierówności (30), znak = zachodzi jedynie wtedy, jeżeli wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots a_n$ są sobie równe.

W samej rzeczy, zakładając np. że $a_1 < a_2$, będziemy mieli

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2,$$

skąd, zastępując we wzorze (31) a_1 i a_2 przez $\frac{a_1+a_2}{2}$, otrzymujemy:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) a_3 \ldots a_n \leq$$

$$\leq \left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n,$$

czyli

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n. \tag{35}$$

c. b. d. o.

Załóżmy teraz, że $a_1, a_2, \ldots a_n$ są liczby dodatnie, których suma s jest daną. Jeżeli nie wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots a_n$ są równe, to mamy, jak dowiedliśmy przed chwilą, nierówność (35), skąd, wobec $a_1+a_2+\ldots+a_n=s$:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{s}{n}\right)^n;$$

jeżeli natomiast $a_1=a_2=\ldots=a_n$, to mamy oczywiście

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \left(\frac{s}{n}\right)^n;$$

stąd:

Twierdzenie 59. *Iloczyn n liczb dodatnich, których suma jest daną, jest największym wówczas, kiedy wszystkie liczby są równe.*

Godnem uwagi jest, że zachodzi też twierdzenie niejako wzajemne względem dowiedzionego, mianowicie

Twierdzenie 59[a]. *Suma n liczb dodatnich, których iloczyn jest danym, jest najmniejszą wówczas, kiedy wszystkie liczby są równe.*

W samej rzeczy, jeżeli $a_1 . a_2 \ldots a_n$ są liczby, których iloczyn p jest danym, to, w razie jeżeli nie wszystkie liczby $a_1\, a_2, \ldots a_n$ są równe, mamy, w myśl (35) i wobec $a_1 a_2 \ldots a_n = p$:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n > n\sqrt[n]{p},$$

zaś w razie $a_1=a_2=\ldots=a_n$, oczywiście

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = n\sqrt[n]{p},$$

skąd słuszność naszego twierdzenia.

Podamy tu teraz jeszcze drugi dowód nierówności Cauchy'ego (30), oparty na pewnem twierdzeniu, z którego skorzystamy w teorji iloczynów nieskończonych. Jest to

Twierdzenie 60. *Jeżeli $u_1, u_2, \ldots u_n$ są liczby rzeczywiste, spełniające nierówności*

$$u_k > -1, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n \tag{36}$$

oraz

$$u_1+u_2+\ldots+u_n \leq 0, \tag{37}$$

to zachodzi nierówność

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) \leq 1. \tag{38}$$

Dowód. W razie $n=1$ mamy, w myśl (37), $u_1 \leq 0$, skąd $1+u_1 \leq 1$, co dowodzi że tw. 60 jest prawdziwe dla $n=1$.

Załóżmy, że tw. 60 jest prawdziwe dla n liczb i niech

$$u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1} \tag{39}$$

będą liczby rzeczywiste, spełniające warunki:

$$u_k > -1, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n+1 \tag{40}$$

oraz

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1} \leq 0. \tag{41}$$

Jeżeli wszystkie liczby (39) są jednego znaku, to, wobec (41), muszą one być ≤ 0 i przeto mamy, wobec (40)

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_{n+1}) \leq 1, \tag{42}$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia dla liczb (39).

Załóżmy teraz, że liczby (39) nie są wszystkie jednego znaku: dwie z nich są więc różnych znaków, np. $u_n < 0$, $u_{n+1} > 0$. Połóżmy:

$$u'_k = u_k, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n-1, \quad \text{zaś} \quad u'_n = u_n + u_{n+1}; \tag{43}$$

będzie więc, wobec $u_{n+1} > 0$, oraz w myśl (40):

$$u'_n = u_n + u_{n+1} > u_n > -1, \tag{44}$$

zaś w myśl (41):

$$u'_1+u'_2+\ldots+u'_n = u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1} \leq 0. \tag{45}$$

Wobec (43), (40), (44) i (45) mamy więc

$$u'_k > -1, \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots n$$

oraz

$$u'_1+u'_2+\ldots+u'_n \leq 0,$$

skąd, w myśl założenia, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla n liczb, znajdujemy:

$$(1+u'_1)(1+u'_2)\ldots(1+u'_n) \leq 1,$$

czyli, wobec (43):

$$(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_{n-1})(1+u_n+u_{n+1})\leq 1. \tag{46}$$

Lecz

$$0<(1+u_n)(1+u_{n+1})=1+u_n+u_{n+1}+u_n u_{n+1}<1+u_n+u_{n+1},$$

gdyż, wobec (40), $u_n>-1$, $u_{n+1}>-1$, zaś $u_n u_{n+1}<0$ (skoro $u_n<0$, $u_{n+1}>0$). Jest więc

$$(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_{n+1})<(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})(1+u_n+u_{n+1}),$$

skąd, wobec (46), otrzymujemy nierówność (42).

Prawdziwość naszego twierdzenia dla n liczb pociąga więc za sobą w każdym razie jego prawdziwość dla $n+1$ liczb, a że, jak dowiedliśmy wyżej, jest ono prawdziwe dla $n=1$, więc przez indukcję wnosimy o jego prawdziwości przy wszelkiem naturalnem n. Twierdzenie 60 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Niech teraz $a_1, a_2, \dots a_n$ będą dane liczby dodatnie. Przyjmijmy:

$$u_k=\frac{na_k}{a_1+a_2+\dots+a_n}-1,\quad (k=1,2,\dots n) \tag{47}$$

będziemy mieli oczywiście $u_k>-1$ $(k=1,2,\dots n)$ oraz $u_1+u_2+\dots+u_n=0$: warunki twierdzenia 60 będą więc spełnione, skąd wynika nierówność (38), czyli, wobec (47), nierówność

$$\frac{n^n a_1 a_2\dots a_n}{(a_1+a_2+\dots+a_n)^n}\leq 1,$$

skąd w jednej otrzymujemy nierówność Cauchy'ego

$$\sqrt[n]{a_1 a_2\dots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}.$$

§ 40ª. **Twierdzenie 60ª: Hardy-Landau'a** [1]). *Jeżeli ciąg nieskończony liczb rzeczywistych a_n $(n=1,2,3,\dots)$ spełnia następujące dwa warunki:*

1⁰: $$n(a_n-a_{n-1})>-c,\quad \text{dla}\quad n=2,3,4,\dots, \tag{a}$$

gdzie c jest pewną liczbą skończoną dodatnią, niezależną od n;

2⁰: *istnieje granica*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=g, \tag{b}$$

[1]) *Prace mat.-fiz.* t. 21 (1910), str. 107.

to

$$\lim_{n=\infty} a_n=g. \tag{c}$$

Dowód [1]). Udowodnimy najprzód twierdzenie w założeniu, że granica (b) jest skończona.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią $<1/2$. Oznaczając przez $En\varepsilon$ największą całość, zawartą w $n\varepsilon$, mamy, przy wszelkiem naturalnem n:

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+En\varepsilon}}{n\varepsilon}=\frac{a_1+\dots+a_{n+En\varepsilon}}{n+En\varepsilon}\cdot\frac{n+En\varepsilon}{n\varepsilon}-\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\cdot\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\frac{a_{n-1}+a_{n-2}+\dots+a_{n-En\varepsilon}}{n\varepsilon}=\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n\varepsilon}-\frac{a_1+\dots+a_{n-En\varepsilon-1}}{n-En\varepsilon-1}\cdot\frac{n-En\varepsilon-1}{n\varepsilon}.$$

Stąd, w myśl (b) i wobec

$$\lim_{n=\infty}\frac{n+En\varepsilon}{n\varepsilon}=\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon},\quad \lim_{n=\infty}\frac{n-1}{n\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon},\quad \lim_{n=\infty}\frac{n-En\varepsilon-1}{n\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

znajdujemy:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}+\dots+a_{n+En\varepsilon}}{n\varepsilon}=g,\quad\text{oraz}\quad \lim_{n=\infty}\frac{a_{n-1}+\dots+a_{n-En\varepsilon}}{n\varepsilon}=g.$$

Istnieje więc wskaźnik $\mu=\mu(\varepsilon)$, taki, iż

$$\frac{a_{n+1}+\dots+a_{n+En\varepsilon}}{n\varepsilon}<g+\varepsilon,\quad\text{dla}\quad n>\mu \tag{d}$$

oraz

$$g-\varepsilon<\frac{a_{n-1}+\dots+a_{n-En\varepsilon}}{n\varepsilon},\quad\text{dla}\quad n>\mu. \tag{e}$$

Niech, dalej, n oznacza dowolny dany wskaźnik $>\mu$. Nie może być $a_k\geq g+\varepsilon$ dla $k=n+1,\dots, n+En\varepsilon$, gdyż przeczyłoby to nierówności (d). Istnieje więc wskaźnik p_n taki, iż

$$n+1\leq p_n\leq n+En\varepsilon \tag{f}$$

oraz

$$a_{p_n}<g+\varepsilon. \tag{g}$$

Podobnież, wobec (f), wnosimy o istnieniu takiego wskaźnika q_n, iż

$$n-En\varepsilon\leq q_n\leq n-1 \tag{h}$$

oraz

$$a_{q_n}>g-\varepsilon. \tag{i}$$

[1]) Dowód przeprowadzony jest według pomysłu pp. **Lauera i Rajchmana.**

Wobec (f) oraz (a), mamy (z uwagi, że $E n\varepsilon \leq n\varepsilon$):

$$a_{p_n} - a_n = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \ldots + (a_{p_n} - a_{p_n - 1}) >$$

$$> -c\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right) \geq -c\frac{p_n - n}{n+1} \geq -c\frac{n\varepsilon}{n+1} > -c\varepsilon,$$

skąd

$$a_n < a_{p_n} + c\varepsilon,$$

oraz, w myśl (g):

$$a_n < g + (c+1)\,\varepsilon. \tag{j}$$

Podobnież, wobec (h) i (a), mamy

$$a_n - a_{q_n} = (a_{q_n+1} - a_{q_n}) + (a_{q_n+2} - a_{q_n+1}) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) >$$

$$> -c\left(\frac{1}{q_n+1} + \frac{1}{q_n+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \geq -c\frac{n - q_n}{q_n+1} > -\frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

skąd, dla $\varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$a_n > a_{q_n} - 2c\varepsilon,$$

oraz, w myśl (i):

$$a_n > g - (2c+1)\,\varepsilon. \tag{k}$$

Nierówności (j) i (k) dają:

$$|\, a_n - g \,| < (2c+1)\,\varepsilon. \tag{l}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon < 1/2$ istnieje wskaźnik $\mu = \mu(\varepsilon)$, taki, iż nierówność $n > \mu$ pociąga za sobą nierówność (l). Wynika stąd wzór (c), *c. b. d. o.*

Łatwo widzieć, jakie zmiany należałoby poczynić w powyższym dowodzie, w razie $g = +\infty$, oraz w razie $g = -\infty$.

Twierdzenie 60[b]. *Jeżeli s_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest ciągiem ograniczonym liczb rzeczywistych*[1]*, i jeżeli, kładąc*

$$s_n' = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{m}$$

$$s_n'' = \frac{s_1' + s_2' + \ldots + s_n'}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots)^{2)} \tag{n}$$

mamy

$$\lim_{n=\infty} s_n'' = g, \tag{o}$$

[1]) Twierdzenie jest też prawdziwe dla ciągów ograniczonych liczb zespolonych.

[2]) Liczba s_n'' nazywa się *drugą średnią arytmetyczną* liczb $s_1, s_2, \ldots s_n$.

to mamy też:

$$\lim_{n=\infty} s_n' = g. \tag{p}$$

Dowód. Jeżeli s_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jest ciągiem ograniczonym, to stnieje liczba skończona dodatnia A, taka iż

$$|\, s_n \,| < A, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{q}$$

Wobec (m) i (q) znajdujemy w jednej chwili:

$$|\, s_n' \,| < A, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{r}$$

W myśl (m) mamy, dla $n = 2, 3, 4, \ldots$:

$$s_n = n s_n' - (n-1)\, s_{n-1}',$$

skąd

$$n\,(s_n' - s_{n-1}') = s_n - s_{n-1}'$$

i przeto, wobec (q) i (r):

$$n\,(s_n' - s_{n-1}') > -2A, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4 \ldots \tag{s}$$

Wobec (s), (n) i (o), ciąg $a_n = s_n'$ spełnia warunki twierdzenia Hardy-Landau'a: zachodzi więc wzór (p), *c. b. d. o.*

Udowodnione twierdzenie może być uogólnione jak następuje: *Niech $s_n^{(0)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ oznacza ciąg nieskończony ograniczony liczb rzeczywistych, i połóżmy*

$$s_n^{(k+1)} = \frac{s_1^{(k)} + s_2^{(k)} + \ldots + s_n^{(k)}}{n}, \quad \text{dla} \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \ldots \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

Jeżeli przy pewnem naturalnem k istnieje granica

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(k)} = g,$$

to mamy też

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(1)} = g.$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że liczby $s_n^{(k)}$ są drugiemi średniemi arytmetycznemi liczb $s_n^{(k-2)}$, oraz zastosować zasadę indukcji.

Zauważymy jeszcze następujące uogólnienie twierdzenia 60[b]: *Jeżeli ciąg s_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jest ograniczony, to ciągi $s_n^{(k)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ posiadają przy wszelkiem naturalnem k ten sam kres dolny oraz ten sam kres górny.*

§ 41. Pojęcie funkcji.

Niech X oznacza jakikolwiek dany zbiór liczb rzeczywistych (np. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, albo zbiór wszystkich liczb wymiernych, albo zbiór wszystkich liczb naturalnych, albo zbiór wszystkich liczb rzeczywistych między 0 i 1, i t. p.). Jeżeli każdej liczbie x zbioru X przyporządkowana jest pewna liczba rzeczywista y, to mowimy, że mamy określoną pewną *funkcję* zmiennej x w zbiorze X. Liczbę y, odpowiadającą przy tem przyporządkowaniu liczbie x oznaczamy przez $f(x)$.

Np. każdy ze wzorów

$$f(x)=x^3,\ f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ f(x)=|x|,\ f(x)=\operatorname{sgn} x,\ f(x)=\mathrm{E}x$$

określa pewną funkcję zmiennej x w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Wzór

$$f(x)=\frac{1}{2^x}\quad (x=1,2,3,\ldots)$$

określa pewną funkcję zmiennej x w zbiorze wszystkich liczb naturalnych; wzór

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad \text{dla}\quad |x|>0$$

określa pewną funkcję zmiennej x w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera, i t. p.

Funkcja może być określoną niekoniecznie zapomocą wzoru: np. umowa, że $f(x)=0$ dla x niewymiernych, zaś $f(x)=1$ dla x wymiernych, określa w zupełności funkcję $f(x)$ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Ciągłość funkcji. (Definicja Cauchy'ego). Funkcję $f(x)$ określoną w zbiorze X nazywamy *ciągłą dla wartości* x_0 tego zbioru, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ, taka, iż nierówność

$$|x-x_0|<\delta \tag{48}$$

pociąga za sobą dla każdej liczby x zbioru X nierówność

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{49}$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w zbiorze X ciągła dla każdej wartości x, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w (całym) zbiorze X.

Przykład funkcji ciągłej. Połóżmy przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f(x)=x^m, \tag{50}$$

gdzie m oznacza daną liczbę naturalną. Okażemy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Niech x_0 oznacza daną liczbę rzeczywistą, ε — dowolną daną liczbę dodatnią.

Oznaczmy przez δ liczbę dodatnią, spełniającą warunki:

$$\delta\leq 1 \quad\text{oraz}\quad \delta\leq\frac{\varepsilon}{m(|x_0|+1)^{m-1}}. \tag{51}$$

Niech, dalej, x oznacza liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność (48). Wobec $\delta\leq 1$, będziemy mieli

$$|x-x_0|<1,$$

skąd

$$|x|=|x_0+(x-x_0)|\leq|x_0|+|x-x_0|<|x_0|+1.$$

Stąd, wobec tożsamości

$$x^m-x_0^m=(x-x_0)(x^{m-1}+x^{m-2}x_0+\ldots+xx_0^{m-2}+x_0^{m-1}),$$

otrzymujemy w jednej chwili, wobec (50):

$$|f(x)-f(x_0)|=|x^m-x_0^m|\leq|x-x_0|\,.\,m(|x_0|+1)^{m-1},$$

co, wobec (48) oraz (51) daje nierówność (49).

Funkcja $f(x)=x^m$ jest więc ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Jeżeli funkcja $f(x)$, określona w zbiorze X, nie jest w tym zbiorze ciągłą dla wartości x_0, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest *nieciągłą* dla wartości x_0.

Np. funkcja $f(x)$, określona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x)=\mathrm{E}x$ jest nieciągłą dla każdej wartości całkowitej x. W samej rzeczy, niech $x_0=k$, gdzie k oznacza daną liczbę całkowitą. Gdyby funkcja $f(x)=\mathrm{E}x$ była ciągłą dla wartości $x_0=k$, to dla liczby $\varepsilon=1$ istniałoby takie dodatnie x, przy którem nierówność (48) pociągałaby za sobą nierówność (49). Przyjmijmy, w szczególności $x=k-\frac{\delta}{2}$: nierówność (48) będzie spełniona, co pociąga za sobą nierówność (49), czyli wobec $\varepsilon=1$, nierówność

$$|\mathrm{E}x-\mathrm{E}x_0|<1. \tag{52}$$

Z drugiej strony będzie $x=k-\frac{\delta}{2}<k$, skąd (wobec definicji symbolu $\mathrm{E}x$): $\mathrm{E}x\leq k-1$, i przeto

$$\mathrm{E}x-\mathrm{E}x_0\leq(k-1)-k=-1,$$

wbrew (52).

Funkcja $f(x)=\mathrm{E}x$ jest więc nieciągłą dla każdej wartości całkowitej zmiennej. Pozostawiamy czytelnikowi łatwy dowód, że uważana funkcja jest ciągłą dla każdej wartości niecałkowitej.

Inny przykład funkcji nieciągłej przedstawia funkcja $F(x)$, równa zeru dla x niewymiernych oraz jedności dla x wymiernych. Pozostawiamy czytelnikowi łatwy dowód, że funcja ta jest nieciągłą dla każdej wartości rzeczywistej x.

Twierdzenie 61. *Jeżeli funkcja $f(x)$, określona w zbiorze X jest ciągłą dla wartości x_0 tego zbioru, to dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb zbioru X wzór*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0 \tag{53}$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{54}$$

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$, określona w zbiorze X, jest ciągła dla wartości x_0 tego zbioru i niech x_n oznacza ciąg nieskończony liczb zbioru X, spełniający warunek (53). Niech, dalej, ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Z założenia, że funkcja $f(x)$ jest w zbiorze X ciągła dla wartości x_0, wynika istnienie liczby dodatniej δ, takiej, iż nierówność (48) pociąga za sobą nierówność (49). Z drugiej strony, wobec (53) i w myśl tw. 36, dla liczby dodatniej δ istnieje takie μ, iż

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \text{dla} \quad n > \mu;$$

wyrazy ciągu x_n spełniają więc dla $n > \mu$ nierówność (48), która, jak wiemy, pociąga za sobą nierówność (49), czyli nierówność

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co, w myśl tw. 36, dowodzi prawdziwości wzoru (54). Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Gdyby dowiedzione twierdzenie dawało się odwrócić, t. j. gdyby z założenia, że przy pewnej liczbie x_0 zbioru X dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb tego zbioru wzór (53) pociąga za sobą wzór (54), wynikała ciągłość funkcji $f(x)$ w zbiorze X dla wartości x_0, to mielibyśmy stąd drugą, równoważną podanej wyżej, definicję ciągłości funkcji (definicja H e i n e'go). Okazuje się jednak, że *bez wprowadzenia nowego pewnika twierdzenie 61 odwrócić się nie daje*, co omówimy w jednym z późniejszych rozdziałów (§ 54).

§ **42.** Połóżmy, przy danem rzeczywistem dodatniem a i wszelkiem naturalnem x:

$$f(x) = a^x.$$

Z definicji potęgi o wykładniku naturalnym wynika natychmiast, że jest

$$f(1) = a \tag{55}$$

oraz, że dla wszelkich naturalnych x i y mamy

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y). \tag{56}$$

Okażemy obecnie, że dla każdej danej liczby rzeczywistej dodatniej a istnieje jedna i tylko jedna funkcja $f(x)$, określona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych x i ciągła w tym zbiorze,

spełniająca warunek (55), oraz warunek (56) dla wszelkich rzeczywistych x i y.

Udowodnimy przedewszystkiem, że (przy danem dodatniem a) istnieje conajwyżej jedna funkcja $f(x)$, spełniająca nasze warunki.

Załóżmy więc, że funkcja $f(x)$ spełnia nasze warunki. Z warunku (56) wynika drogą łatwej indukcji, że przy wszelkich rzeczywistych $x_1, x_2, \dots x_m$:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_m) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_m);$$

stąd, dla $x_1 = x_2 = \dots = x_m = x$

$$f(mx) = [f(x)]^m \tag{57}$$

— przy wszelkiem rzeczywistem x i naturalnem m. W szczególności dla $x = 1$, wobec (55):

$$f(m) = a^m, \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{58}$$

Niech t oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą: kładąc we wzorze (56) $x = y = \frac{t}{2}$, otrzymujemy

$$f(t) = \left[f\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2,$$

co dowodzi, że przy wszelkiem rzeczywistem t:

$$f(t) \geq 0.$$

Gdyby przy pewnem rzeczywistem t_0 było

$$f(t_0) = 0,$$

to kładąc we wzorze (56) $x = t_0$, $y = 1 - t_0$, otrzymalibyśmy

$$f(1) = f(t_0)\, f(1 - t_0),$$

zatem $f(1) = 0$, wbrew (55). Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem rzeczywistem t mamy:

$$f(t) > 0. \tag{59}$$

Niech l i m będą jakiekolwiek liczby naturalne; przyjmijmy we wzorze (57): $x = \frac{l}{m}$; otrzymamy

$$f(l) = \left[f\left(\frac{l}{m}\right)\right]^m,$$

skąd, z uwagi, że wobec (59) wartość funkcji f jest zawsze dodatnią, oraz w myśl definicji pierwiastka arytmetycznego:

$$f\left(\frac{l}{m}\right) \doteq \sqrt[m]{f(l)},$$

a że. wobec (58), $f(l) = a^l$, więc

$$f\left(\frac{l}{m}\right) = \sqrt[m]{a^l} \tag{60}$$

przy wszelkich naturalnych l i m.

Przyjmijmy, dalej, we wzorze (56): $x = y = 0$; otrzymamy

$$f(0) = [f(0)]^2,$$

skąd, wobec (59), wnosimy w jednej chwili, że

$$f(0) = 1. \tag{61}$$

Przyjmując we wzorze (56) $y = -x$, otrzymamy:

$$f(0) = f(x) f(-x),$$

skąd, wobec (59) oraz (61):

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x. Stąd, dla $x = \frac{l}{m}$, wobec (60):

$$f\left(-\frac{l}{m}\right) = \frac{1}{\sqrt[m]{a^l}} \tag{62}$$

przy wszelkich naturalnych l i m.

Niech w oznacza daną liczbę wymierną: liczbę taką możemy, jak wiadomo, przedstawić zawsze i to w jeden tylko sposób w postaci ułamka nieprzywiedlnego $\frac{p}{q}$ o naturalnym mianowniku q; licznik p będzie przytem dodatnim, ujemnym lub równym zeru jednocześnie z liczbą w. Przy danem dodatniem a oraz danem wymiernem w, równem ułamkowi nieprzywiedlnemu $\frac{p}{q}$ (o naturalnym mianowniku) umówimy się rozumieć przez symbol a^w liczbę $\sqrt[q]{a^p}$ jeżeli $w > 0$, liczbę $\frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}}$ jeżeli $w < 0$, i wreszcie liczbę 1, jeżeli $w = 0$. W ten sposób symbol a^w będzie miał określoną wartość przy wszelkiem dodatniem a i wszelkiem wymiernem w, przyczem wrazie naturalnego w (dającego oczywiście ułamek nieprzywiedlny $\frac{w}{1}$) będzie $a^w = \sqrt[1]{a^w}$, zgodnie z definicją potęgi naturalnej, którą w ten sposób rozpatrywać możemy jako przypadek szczególny potęgi o wykładniku wymiernym.

W myśl (60), (61) i (62) będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$f(w) = a^w \tag{63}$$

przy wszelkiem wymiernem w.

Załóżmy teraz, że prócz funkcji $f(x)$ istnieje jeszcze funkcja $\varphi(x)$, ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych i taka, iż

$$\varphi(1) = a,$$

oraz iż przy wszelkich rzeczywistych x i y:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Podobnie jak dla funkcji $f(x)$ znaleźlibyśmy, iż przy wszelkiem wymiernem w musi być

$$\varphi(w) = a^w,$$

zatem, w myśl (53):

$$\varphi(w) = f(w). \tag{64}$$

Niech teraz x oznacza jakąkolwiek daną liczbę rzeczywistą. W myśl tw. 19 istnieje ciąg nieskończony liczb wymiernych w_n, taki iż

$$\lim_{n=\infty} w_n = x. \tag{65}$$

W myśl (64) mamy

$$\varphi(w_n) = f(w_n), \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{66}$$

Z drugiej strony, wobec (65) oraz założenia, że funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe w zbiorze liczb rzeczywistych, znajdujemy, w myśl tw. 61:

$$\lim_{n=\infty} f(w_n) = f(x), \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \varphi(w_n) = \varphi(x),$$

skąd, wobec (66)

$$\varphi(x) = f(x). \tag{67}$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem rzeczywistem x zachodzi wzór (67), czyli że funkcje $\varphi(x)$ i $f(x)$ nie mogą być różne

Udowodniliśmy zatem, że istnieje conajwyżej jedna funkcja zmiennej rzeczywistej $f(x)$, spełniająca nasze warunki, i że jeżeli funkcja taka istnieje, to przy wszelkiem wymiernem w zachodzi wzór (63).

Zajmiemy się teraz dowodem, że funkcja taka rzeczywiście istnieje. W tym celu udowodnimy przedewszystkiem szereg własności potęgi o wykładniku wymiernym.

§ 43. Własności potęgi o wykładniku wymiernym.

Własność I. Jeżeli $w = \frac{l}{m}$, gdzie l jest liczbą całkowitą, zaś m liczbą naturalną, to (przy dodatniem a):

$$a^w = \sqrt[m]{a^l}.$$

Dówód. Niech $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ oznacza ułamek nieprzywiedlny dla liczby w. Będzie więc $\frac{l}{m} = \frac{p}{q}$, skąd, z uwagi, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieprzywiedlny, wnosimy, że $l = kp$ oraz $m = kq$, gdzie k jest liczbą całkowitą; z uwagi, że liczby q i m są naturalne, wnosimy dalej, że i k jest liczbą naturalną.

Połóżmy

$$a^w = x:$$

z definicji potęgi o wykładniku wymiernym wynika, że

$$x = \sqrt[q]{a^p}, \tag{68}$$

zatem, wobec definicji pierwiastka arytmetycznego:

$$x^q = a^p,$$

skąd

$$(x^q)^k = (a^p)^k$$

czyli, jak łatwo widzieć:

$$x^{kq} = a^{kp},$$

t. j. (wobec $l = kp$ oraz $m = kq$):

$$x^m = a^l,$$

skąd, z uwagi, że wobec (68) jest $x > 0$, otrzymujemy natychmiast, w myśl definicji pierwiastka arytmetycznego:

$$x = \sqrt[m]{a^l}, \text{ c. b. d. o.}$$

Własność II. Dla wszelkich wymiernych w i w' mamy (przy dodatniem a):

$$a^{w+w'} = a^w \cdot a^{w'}. \tag{69}$$

Dowód. Połóżmy

$$a^w = x, \quad a^{w'} = y \tag{70}$$

niech $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ oraz $\frac{p'}{q'}$ $(q' > 0)$ będą odpowiednio ułamki nieprzywiedlne dla liczb w i w'. Będzie więc, w myśl definicji potęgi o wykładniku wymiernym:

$$x = \sqrt[q]{a^p}, \quad y = \sqrt[q']{a^{p'}}, \tag{71}$$

zatem, w myśl definicji pierwiastków arytmetycznych:

$$x^q = a^p, \quad y^{q'} = a^{p'},$$

skąd

$$(x^q)^{q'} = (a^p)^{q'}, \quad (y^{q'})^q = (a^{p'})^q,$$

co daje, jak łatwo widzieć:

$$x^{qq'} = a^{pq'}, \quad y^{q'q} = a^{p'q},$$

skąd

$$x^{qq'} \cdot y^{qq'} = a^{pq'} \cdot a^{p'q},$$

czyli

$$(xy)^{qq'} = a^{pq'+p'q},$$

skąd, z uwagi że, wobec (71), liczby x, y są dodatnie, oraz w myśl definicji pierwiastka arytmetycznego:

$$xy = \sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}},$$

zatem, w myśl własności I:

$$xy = a^{\frac{pq'+p'q}{qq'}},$$

czyli, wobec $w = \frac{p}{q}$ i $w' = \frac{p'}{q'}$:

$$xy = a^{w+w'},$$

co, wobec (70), dowodzi prawdziwości wzoru (69). Udowodniliśmy więc własność II.

Przyjmijmy we wzorze (69) $w' = -w$: wobec $a^0 = 1$, będzie

$$1 = a^w \cdot a^{-w},$$

skąd

$$a^{-w} = \frac{1}{a^w};$$

otrzymujemy więc następujący

Wniosek. Przy wszelkiem wymiernem w mamy dla $a > 0$:

$$a^{-w} = \frac{1}{a^w}. \tag{72}$$

Własność III. Dla wszelkich wymiernych w i w' mamy przy dodatniem a:

$$(a^w)^{w'} = a^{ww'}. \tag{73}$$

Dowód. Niech

$$w = \frac{p}{q}, \quad w' = \frac{p'}{q'} \quad (q > 0, \; q' > 0) \tag{74}$$

będą ułamki nieprzywiedlne dla liczb w i w' i połóżmy

$$a^w = x, \quad x^{w'} = y. \tag{75}$$

W myśl definicji potęgi wymiernej oraz pierwiastków arytmetycznych, będzie

$$x^q = a^p \quad \text{oraz} \quad y^{q'} = x^{p'}.$$

skąd

$$(y^{q'})^q = (x^{p'})^q = (x^q)^{p'} = (a^p)^{p'},$$

czyli

$$y^{qq'} = a^{pp'},$$

co dowodzi, że

$$y = \sqrt[qq']{a^{pp'}},$$

zatem, w myśl własności I:

$$y = a^{\frac{pp'}{qq'}},$$

co, wobec (74) i (75), daje wzór (73). Udowodniliśmy więc własność III.

Własność IV. Przy dodatnich a i b oraz wymiernem w mamy:

$$(ab)^w = a^w \,.\, b^w. \tag{76}$$

Dowód. Niech

$$w = \frac{p}{q} \quad (q > 0) \tag{77}$$

oznacza ułamek nieprzywiedlny dla liczby w i połóżmy

$$a^w = x, \quad b^w = y. \tag{78}$$

Będzie, wobec (77):

$$x^q = a^p, \quad y^q = b^p,$$

skąd

$$(xy)^q = x^q y^q = a^p b^p = (ab)^p,$$

zatem (z uwagi, że wobec (78), liczby x i y są dodatnie):

$$xy = \sqrt[q]{(ab)^p},$$

skąd, w myśl własności I:

$$xy = (ab)^{\frac{p}{q}},$$

co, wobec (77) i (78), daje wzór (76), *c. b. d. o.*

Wniosek. Przy dodatnich a i b oraz wymiernem w mamy:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^w = \frac{a^w}{b^w}.$$

W samej rzeczy, w myśl własności IV, mamy dla dodatnich a i b:

$$a^w = \left(\frac{a}{b}\, b\right)^w = \left(\frac{a}{b}\right)^w b^w,$$

skąd, z uwagi że $b^w > 0$, otrzymujemy natychmiast żądany wniosek.

Własność V^a. Jeżeli $a > 1$, to przy wymiernem w:

$$a^w > 1, \quad \text{dla} \quad w > 0,$$

zaś

$$a^w < 1, \quad \text{dla} \quad w < 0.$$

Dowód. Załóżmy, że $a > 1$, $w > 0$ i niech $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ oznacza ułamek nieprzywiedlny dla liczby w; połóżmy:

$$a^w = x; \tag{79}$$

w myśl definicji potęgi o wykładniku wymiernym oraz pierwiastka arytmetycznego, będzie:

$$x^q = a^p. \tag{80}$$

Wobec $w > 0$ musi być $p > 0$, zatem, z uwagi że $a > 1$:

$$a^p > 1. \tag{81}$$

Gdyby było $x \leq 1$, mielibyśmy

$$x^q \leq 1 \tag{82}$$

i nierówności (82) i (81) dałyby

$$x^q < a^p,$$

wbrew (80). Musi więc być

$$x > 1,$$

czyli, wobec (79), $a^w > 1$. Dowiedliśmy więc pierwszej części naszego twierdzenia.

Załóżmy teraz, że $a > 1$, $w < 0$: będzie więc

$$w' = -w > 0.$$

Wobec $a > 1$, oraz $w' > 0$, mamy, jak dowiedliśmy:
$$a^{-w} = a^{w'} > 1,$$
zatem, w myśl tw. 51:
$$\frac{1}{a^{-w}} < 1,$$
skąd, wobec (72):
$$a^{w} < 1,$$
co dowodzi prawdziwości drugiej części naszego twierdzenia. Udowodniliśmy więc własność V^a w zupełności.

Własność V^b. Jeżeli $0 < a < 1$, to przy wymiernem w:
$$a^{w} < 1, \quad \text{dla} \quad w > 0,$$
zaś
$$a^{w} > 1, \quad \text{dla} \quad w < 0.$$

Dowód. Połóżmy $b = \frac{1}{a}$, wobec $0 < a < 1$ i w myśl tw. 51 będzie $b > 1$, zatem, w myśl własności V^a:
$$b^{w} > 1 \quad \text{dla} \quad w > 0, \quad \text{oraz} \quad b^{w} < 1 \quad \text{dla} \quad w < 0. \tag{83}$$
Lecz, w myśl własności III oraz wniosku z własności II:
$$a^{w} = \left(\frac{1}{b}\right)^{w} = (b^{-1})^{w} = b^{-w} = \frac{1}{b^{w}},$$
skąd, wobec (83) i w myśl tw. 51:
$$a^{w} < 1 \quad \text{dla} \quad w > 0, \quad \text{oraz} \quad a^{w} > 1 \quad \text{dla} \; w < 0.$$
Udowodniliśmy więc własność V^b.

Własność VII. Jeżeli w i w' są liczby wymierne, oraz $w > w'$, to mamy:
$$a^{w} > a^{w'} \quad \text{dla} \quad a > 1,$$
zaś
$$a^{w} < a^{w'} \quad \text{dla} \quad 0 < a < 1.$$

Dowód. Załóżmy, że w i w' są liczby wymierne, takie iż
$$w > w'. \tag{84}$$
W myśl własności II możemy napisać, dla $a > 0$:
$$a^{w} = a^{w-w'} . a^{w'}. \tag{85}$$
Jeżeli $a > 1$, to wobec (84) oraz własności V^a, mamy
$$a^{w-w'} > 1,$$

skąd, mnożąc obie strony przez $a^{w'}$, otrzymujemy wobec (85):
$$a^{w} > a^{w'},$$
jeżeli zaś $0 < a < 1$, to, wobec (84) oraz własności V^b mamy
$$a^{w-w'} < 1,$$
skąd, mnożąc obie strony przez (liczbę dodatnią) $a^{w'}$, dostajemy
$$a^{w} < a^{w'}.$$

Udowodniliśmy więc własność VI.

Własność VII. Jeżeli $a > b > 0$, to, przy wymiernem w:
$$a^{w} > b^{w}, \quad \text{dla} \quad w > 0,$$
zaś
$$a^{w} < b^{w}, \quad \text{dla} \quad w < 0.$$

Dowód. Załóżmy, że $a > b > 0$: będzie więc $\frac{a}{b} > 1$ i przeto, przy wymiernem w, w myśl własności V^a:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{w} > 1 \quad \text{dla} \quad w > 0, \quad \text{oraz} \left(\frac{a}{b}\right)^{w} < 1 \quad \text{dla} \quad w < 0,$$
skąd, w myśl wniosku z własności IV, mnożąc przez $b^{w} > 0$:
$$a^{w} > b^{w} \quad \text{dla} \quad w > 0, \quad \text{oraz} \quad a^{w} < b^{w} \quad \text{dla} \quad w < 0,$$
c. b. d. o.

Własność VIII. Przy wszelkiem dodatniem a mamy
$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{86}$$

Dowód. Jeżeli $a > 1$, to, w myśl własności I oraz V^a:
$$\sqrt[n]{a} > 1: \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
możemy więc położyć
$$\sqrt[n]{a} = 1 + d_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{87}$$
gdzie $d_n > 0$. Stąd, w myśl tw. 55 mamy:
$$a = (1 + d_n)^n \geq 1 + n d_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
co daje
$$d_n \leq \frac{a-1}{n} \quad (n = 1. 2, 3, \ldots).$$

Dla $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ będzie więc $0 < d_n < \varepsilon$, co dowodzi, że

$$\lim_{n=\infty} d_n = 0,$$

skąd, wobec (87), otrzymujemy wzór (86).

Jeżeli $a = 1$, to mamy oczywiście stale

$$\sqrt[n]{a} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i wzór (86) znowu jest prawdziwy.

Jeżeli wreszcie $0 < a < 1$, to możemy położyć

$$a = \frac{1}{b},$$

gdzie $b > 1$, przyczem, w myśl wniosku z własności IV (z uwagi że $\sqrt[n]{1} = 1$), będzie

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}, \tag{88}$$

a że dla $b > 1$ mamy, jak dowiedliśmy

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{b} = 1,$$

więc, wobec (88) i w myśl tw. o granicy ilorazu, znowu otrzymujemy wzór (86).

Własność VIII udowodniliśmy zatem w zupełności.

Własność IX. Jeżeli $a > 0$ i jeżeli ciąg liczb wymiernych w_n jest zbieżny, to ciąg a^{w_n} również jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że $a > 1$. Wobec tw. 40, ciąg w_n, jako zbieżny, jest ograniczony: istnieje więc liczba całkowita M, taka iż

$$w_n < M, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, w myśl własności VI:

$$|a^{w_n}| = a^{w_n} < a^M, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{89}$$

Niech teraz ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

W myśl własności VIII mamy wzór (86): istnieje więc taka liczba naturalna k iż

$$|\sqrt[k]{a} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}. \tag{90}$$

Z założenia, że ciąg w_n jest zbieżny, wynika dalej, w myśl tw. 39, że istnieje takie μ, iż

$$|w_n - w_{n'}| < \frac{1}{k}, \quad \text{dla} \quad n > \mu,\ n' > \mu. \tag{91}$$

Niech n i n' będą wskaźniki większe od μ.

W myśl własności II możemy napisać:

$$a^{w_n} - a^{w_{n'}} = a^{w_{n'}} (a^{w_n - w_{n'}} - 1). \tag{92}$$

Jeżeli $w_n > w_{n'}$, to, w myśl wł. V^a mamy $a^{w_n - w_{n'}} > 1$ i przeto, wobec (92):

$$|a^{w_n} - a^{w_{n'}}| = |a^{w_{n'}}| \,.\, (a^{w_n - w_{n'}} - 1). \tag{93}$$

Lecz, wobec (91), oraz w myśl własności VI:

$$a^{w_n - w_{n'}} < a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a},$$

skąd, wobec (90):

$$a^{w_n - w_{n'}} - 1 < \sqrt[k]{a} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^M}$$

przeto, wobec (89), wzór (93) daje:

$$|a^{w_n} - a^{w_{n'}}| < \varepsilon. \tag{94}$$

Gdyby było $w_n < w_{n'}$, czyli $w_{n'} > w_n$, to podobnież znaleźlibyśmy

$$|a^{w_{n'}} - a^{w_n}| < \varepsilon,$$

czyli znowu nierówność (94).

Wreszcie, dla $w_n = w_{n'}$ nierówność (94) zachodzi oczywiście (gdyż wówczas jej lewa strona jest zerem).

Nierówność (94) zachodzi więc w każdym razie dla n i n' większych od μ, co, w myśl tw. 39, dowodzi zbieżności ciągu a^{w_n}. Dowiedliśmy więc, że dla $a > 1$ ciąg a^{w_n} jest zbieżny.

Gdyby było $0 < a < 1$, to moglibyśmy położyć $a = \frac{1}{b}$, gdzie $b > 1$ i, wobec dowiedzionego przed chwilą, wnioskowalibyśmy o zbieżności ciągu $a^{w_n} = b^{-w_n}$ (gdyż, w myśl tw. 31, zbieżność ciągu w_n pociąga za sobą zbieżność ciągu $-w_n$).

Gdyby wreszcie było $a = 1$, to, jak łatwo widzieć, mielibyśmy (wobec definicji potęgi o wykładniku wymiernym) stale $a^{w_n} = 1$ i ciąg a^{w_n} byłby oczywiście zbieżny.

Własność IX udowodniliśmy zatem w zupełności.

Własność X. Jeżeli $a > 0$ i jeżeli u_n i v_n są ciągi zbieżne liczb wymiernych, mające tę samą granicę, to

$$\lim_{n=\infty} a^{u_n} = \lim_{n=\infty} a^{v_n}. \tag{95}$$

Dowód. Połóżmy

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} v_n = x;$$

oraz

$$x_{2n-1} = u_n, \quad x_{2n} = v_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{96}$$

ciąg x_n będzie więc ciągiem liczb wymiernych.

W myśl tw. 18 będzie

$$\lim_{n=\infty} x_n = x,$$

a że liczba x jest skończona (gdyż ciągi u_n i v_n są, jak zakładamy, zbieżne), więc ciąg x_n jest zbieżny.

W myśl własności IX, ciąg a^{x_n} jest więc zbieżny: połóżmy

$$\lim_{n=\infty} a^{x_n} = l:$$

w myśl tw. 16 będziemy mieli

$$\lim_{n=\infty} a^{x_{2n-1}} = l \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} a^{x_{2n}} = l,$$

czyli, wobec (96):

$$\lim_{n=\infty} a^{u_n} = l \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} a^{v_n} = l,$$

co daje wzór (95). Udowodniliśmy więc własność X.

Własność XI. Jeżeli $a > 0$ i jeżeli ciąg liczb wymiernych w_n zmierza do granicy wymiernej w, to

$$\lim_{n=\infty} a^{w_n} = a^w$$

Dowód. Połóżmy

$$u_n = w_n, \quad \text{zaś} \quad v_n = w, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{97}$$

będziemy mieli

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} v_n = w$$

i przeto, w myśl własności X:

$$\lim_{n=\infty} a^{u_n} = \lim_{n=\infty} a^{v_n},$$

czyli, wobec (97):

$$\lim_{n=\infty} a^{w_n} = a^w,$$

co dowodzi własności XI.

§ 44. Niech teraz a oznacza daną liczbę rzeczywistą dodatnią x — jakąkolwiek daną liczbę rzeczywistą. Jakikolwiek obralibyśmy ciąg liczb wymiernych x_n, którego granicą jest x, ciąg a^{x_n} będzie, w myśl własności IX i X, zmierzał zawsze do tej samej (skończonej) granicy, którą, jako zależną (przy danem stałem a) jedynie od x, oznaczmy przez $f(x)$.

Wobec definicji funkcji $f(x)$ i w myśl własności XI, będzie przy wszelkiem wymiernem x:

$$f(x) = a^x,$$

skąd, w szczególności, dla $x = 1$:

$$f(1) = a.$$

Niech teraz x i y będą jakiekolwiek dwie dane liczby rzeczywiste, zaś x_n i y_n — dwa ciągi liczb wymiernych, których granicami są odpowiednio liczby x i y. W myśl własności II, mamy:

$$a^{x_n + y_n} = a^{x_n} \cdot a^{y_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{98}$$

Lecz, w myśl definicji funkcji $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} a^{x_n}, \quad f(y) = \lim_{n=\infty} a^{y_n},$$

oraz

$$f(x+y) = \lim_{n=\infty} a^{x_n + y_n}$$

(gdyż, wobec $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} y_n = y$, $x_n + y_n$ będzie ciągiem liczb wymiernych, zmierzającym do $x + y$); wobec (98) i w myśl tw. o granicy iloczynu mamy więc

$$f(x+y) = f(x) f(y).$$

Dowiedliśmy więc, że funkcja $f(x)$ spełnia warunek (55) oraz warunek (56) dla wszelkich rzeczywistych x i y. Okażemy teraz, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

Niech więc x_0 oznacza jakąkolwiek daną liczbę rzeczywistą, zaś ε — dowolną daną liczbę dodatnią.

W § 42 dowiedliśmy, że każda funkcja, spełniająca warunki (55) i (56) jest stale dodatnią: mamy więc

$$f(x) > 0.$$

W myśl (86), oraz wobec definicji potęgi o wykładniku wymiernym, mamy (dla $a > 0$):

$$\lim_{n=\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,$$

zatem też

$$\lim_{n=\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1;$$

istnieje więc taki wskaźnik m, iż

$$| a^{\frac{1}{m}} - 1 | < \frac{\varepsilon}{2f(x_0)} \quad \text{oraz} \quad | a^{-\frac{1}{m}} - 1 | < \frac{\varepsilon}{2f(x_0)}. \tag{99}$$

Połóżmy

$$\delta = \frac{1}{m}. \tag{100}$$

Niech teraz x oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, taką iż

$$| x - x_0 | < \delta; \tag{101}$$

powiadam, że będziemy mieli

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon. \tag{102}$$

W samej rzeczy, w myśl własności (56), mamy

$$f(x) = f(x - x_0)\, f(x_0),$$

zatem:

$$| f(x) - f(x_0) | = f(x_0) \,.\, | f(x - x_0) - 1 |. \tag{103}$$

Niech t_n oznacza ciąg liczb wymiernych, taki iż

$$\lim_{n=\infty} t_n = x - x_0; \tag{104}$$

wobec (104) oraz (101) będzie

$$| t_n | < \delta \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

zatem, wobec (100):

$$-\frac{1}{m} < t_n < \frac{1}{m}; \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, w myśl własności VI:

$$a^{-\frac{1}{m}} < a^{t_n} < a^{\frac{1}{m}} \quad \text{dla} \quad a > 1, \quad n > \mu$$

oraz

$$a^{-\frac{1}{m}} > a^{t_n} > a^{\frac{1}{m}} \quad \text{dla} \quad 0 < a < 1, \quad n > \mu,$$

zatem, wobec (99), w każdym razie

$$1 - \frac{\varepsilon}{2f(x_0)} < a^{t_n} < 1 + \frac{\varepsilon}{2f(x_0)}, \quad \text{dla} \quad a > 0, \quad n > \mu. \tag{105}$$

Z drugiej strony, z definicji funkcji $f(x)$ wynika, wobec (104), że

$$f(x - x_0) = \lim_{n=\infty} a^{t_n},$$

skąd, wobec (105),

$$1 - \frac{\varepsilon}{2f(x_0)} \leq f(x - x_0) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2f(x_0)},$$

czyli

$$| f(x - x_0) - 1 | \leq \frac{\varepsilon}{2f(x_0)}. \tag{106}$$

Wzór (103) daje więc, wobec (106), nierówność

$$| f(x) - f(x_0) | \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

i, tembardziej, nierówność (102).

Dowiedliśmy więc, że dla każdej danej liczby rzeczywistej x_0 oraz danej liczby dodatniej ε istnieje takie dodatnie δ, iż nierówność (101) pociąga za sobą (przy wszelkiem rzeczywistem x) nierówność (102): z definicji ciągłości (§ 41) wynika więc, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych, *c. b. d. o.*

Zestawiając otrzymane w tym § wyniki z wynikami § 42, dochodzimy do wniosku, że dla każdej danej liczby rzeczywistej dodatniej a istnieje jedna i tylko jedna funkcja $f(x)$, określona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i ciągła w tym zbiorze, spełniająca warunek (55) oraz warunek (56) dla wszelkich rzeczywistych x i y. Funkcja $f(x)$ jest przytem dodatnią przy wszelkiem rzeczywistem x.

W szczególności, dla wymiernych w mamy (w myśl (63)):

$$f(w) = a^w,$$

dla niewymiernych zaś x symbol a^x nie jest jeszcze określonym. Przyjmijmy dla niewymiernych x jako definicję symbolu a^x równość

$$a^x = f(x).$$

Będzie więc przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f(x) = a^x. \tag{107}$$

Pojęcie potęgi mamy mamy w ten sposób określone dla wszelkiej dodatniej podstawy oraz wszelkiego rzeczywistego wykładnika.

W szczególności, dla $x=0$ mamy, w myśl (61) i (107):

$$a^0 = 1 \tag{108}$$

przy wszelkiem dodatniem a.

Przy wszelkiem wymiernem w mamy, jak to wynika natychmiast z definicji potęgi o wykładniku wymiernym:

$$1^w = 1,$$

skąd, wobec definicji funkcji $f(x)$ oraz wzoru (107) wnosimy natychmiast, że

$$1^x = 1 \tag{109}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x.

§ 45. Własności potęgi o wykładniku rzeczywistym.

Własność 1. *Przy wszelkich rzeczywistych x i y mamy (dla $a>0$):*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y. \tag{110}$$

Wynika to natychmiast ze wzorów (56) oraz (107).

Własność 2. *Jeżeli $a>0$, oraz jeżeli ciąg liczb rzeczywistych x_n zmierza do granicy (skończonej) x, to mamy*

$$\lim_{n=\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Wynika to natychmiast z ciągłości funkcji $f(x)$ oraz z tw. 61.

Własność 3. *Przy dodatnich a i b mamy dla wszelkiego rzeczywistego x:*

$$(ab)^x = a^x b^x. \tag{111}$$

Dowód. Niech x_n oznacza ciąg liczb wymiernych, zmierzający do x. W myśl własności IV potęg o wykładniku wymiernym, mamy

$$(ab)^{x_n} = a^{x_n} b^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{112}$$

zaś w myśl własności 2, wobec $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$:

$$\lim_{n=\infty} a^{x_n} = a^x, \quad \lim_{n=\infty} b^{x_n} = b^x, \quad \lim_{n=\infty} (ab)^{x_n} = (ab)^x,$$

skąd wobec (112) i w myśl tw. o granicy iloczynu, otrzymujemy w jednej chwili wzór (111), *c. b. d. o.*

Własność 4. *Przy dodatnich a i b mamy dla rzeczywistych x:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \tag{113}$$

Dowód. Wobec własności 3 mamy dla dodatnich a i b:

$$a^x = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x b^x,$$

skąd, z uwagi że $b^x > 0$, otrzymujemy natychmiast wzór (113).

Własność 5. *Dla rzeczywistych a, x i x' mamy:*

$$a^x > a^{x'}, \quad \text{dla} \quad a>1, \quad x > x' \tag{114}$$

oraz

$$a^x < a^{x'}, \quad \text{dla} \quad 0<a<1, \quad x > x'. \tag{115}$$

Dowód. Niech w i w' będą dwie liczby wymierne, takie iż

$$x > w > w' > x' \tag{116}$$

i niech x_n i x'_n będą dwa ciągi liczb wymiernych, takie iż

$$\lim_{n=\infty} x_n = x \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} x'_n = x'. \tag{117}$$

Wobec (117) i (116) będzie

$$x_n > w > w' > x'_n, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

zatem w myśl własności VI potęg o wykładniku wymiernym:

$$a^{x_n} > a^w > a^{w'} > a^{x'_n} \quad \text{dla} \quad a>1, \quad n>\mu$$

oraz

$$a^{x_n} < a^w < a^{w'} < a^{x'_n} \quad \text{dla} \quad 0<a<1, \quad n>\mu,$$

skąd, przechodząc do granicy dla $n=\infty$, wobec (117) i w myśl własności 2:

$$a^x \geq a^w > a^{w'} \geq a^{x'}, \quad \text{dla} \quad a>1$$

oraz

$$a^x \leq a^w < a^{w'} \leq a^{x'}, \quad \text{dla} \quad 0<a<1,$$

skąd w jednej chwili wynikają wzory (114) i (115), *c. b. d. o.*

Własność 6. *Dla rzeczywistych a, b i x mamy:*

$$a^x > b^x \quad \text{dla} \quad a > b > 0, \quad x > 0, \tag{118}$$

oraz

$$a^x < b^x \quad \text{dla} \quad a > b > 0, \quad x < 0. \tag{119}$$

Dowód. Załóżmy, że $a > b > 0$: mamy więc $\frac{a}{b} > 1$ i przeto w myśl własności 5 (dla $x' = 0$), oraz wobec (108):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x > 1 \quad \text{dla} \quad x > 0, \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x < 1 \quad \text{dla} \quad x < 0,$$

skąd, mnożąc przez $b^x > 0$, w myśl własności 4:

$$a^x > b^x \quad \text{dla} \quad x > 0, \quad \text{oraz} \quad a^x < b^x \quad \text{dla} \quad x < 0,$$

c. b. d. o.

Własność 7. *Jeżeli a_n jest ciągiem zbieżnym liczb dodatnich, oraz*

$$\lim_{n=\infty} a_n = a > 0, \tag{120}$$

to przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\lim_{n=\infty} a_n^x = a^x. \tag{121}$$

Dowód. Niech k oznacza liczbę naturalną, taką iż

$$|x| < k. \tag{122}$$

Wobec (120) mamy (w myśl tw. o granicy iloczynu):

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{a_n}{a}\right)^k = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{a_n}{a}\right)^{-k} = 1;$$

dla dowolnego danego dodatniego ε istnieje zatem liczba μ taka iż

$$\left|\left(\frac{a_n}{a}\right)^k - 1\right| < \frac{\varepsilon}{a^x} \quad \text{oraz} \quad \left|\left(\frac{a_n}{a}\right)^{-k} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{a^x} \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{123}$$

Wobec (122) mamy

$$-k < x < k,$$

zatem, w myśl własności 5:

$$\left(\frac{a_n}{a}\right)^{-k} < \left(\frac{a_n}{a}\right)^x < \left(\frac{a_n}{a}\right)^k \quad \text{dla} \quad a_n > a, \quad n > \mu$$

oraz

$$\left(\frac{a_n}{a}\right)^{-k} > \left(\frac{a_n}{a}\right)^x > \left(\frac{a_n}{a}\right)^k \quad \text{dla} \quad a_n < a, \quad n > \mu$$

i wreszcie, w myśl (109):

$$\left(\frac{a_n}{a}\right)^{-k} = \left(\frac{a_n}{a}\right)^x = \left(\frac{a_n}{a}\right)^k \quad \text{dla } a_n = a.$$

W każdym z tych trzech przypadków znajdujemy, wobec (123):

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^x} < \left(\frac{a_n}{a}\right)^x < 1 + \frac{\varepsilon}{a^x}, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

czyli, wobec (113):

$$a^x - \varepsilon < a_n^x < a^x + \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

t. j.

$$|a_n^x - a^x| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co, w myśl tw. 36, dowodzi równości (121), *c. b. d. o.*

Własność 8. *Przy wszelkich rzeczywistych x i y mamy (dla $a > 0$)*

$$(a^x)^y = a^{xy}. \tag{124}$$

Dowód. Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą, x_n — ciąg liczb wymiernych, taki iż

$$\lim_{n=\infty} x_n = x. \tag{125}$$

W myśl własności III potęg o wykładniku wymiernym, mamy przy wszelkiem wymiernem w (dla $a > 0$):

$$(a^{x_n})^w = a^{x_n w} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots). \tag{126}$$

Wobec (125) i w myśl własności 2, mamy:

$$\lim_{n=\infty} a^{x_n} = a^x \tag{127}$$

oraz

$$\lim_{n=\infty} a^{x_n w} = a^{xw} \tag{128}$$

Wzór (127) daje, w myśl własności 7:

$$\lim_{n=\infty} (a^{x_n})^w = (a^x)^w. \tag{129}$$

Wobec (126), (129) i (128) znajdujemy:

$$(a^x)^w = a^{xw} \tag{130}$$

przy wszelkiem wymiernem w.

Niech teraz y_n oznacza ciąg liczb wymiernych, taki iż

$$\lim_{n=\infty} y_n = y. \tag{131}$$

Wobec (130) będziemy mieli:

$$(a^x)^{y_n} = a^{xy_n}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{132}$$

Z drugiej strony, wobec (131) i w myśl własności 2:

$$\lim_{n=\infty} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} a^{xy_n} = a^{xy},$$

skąd, wobec (132), otrzymujemy wzór (124), *c. b. d. o.*

Własność 9. *Jeżeli x_n jest ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, takim iż*

$$\lim_{n=\infty} x_n = +\infty, \tag{133}$$

oraz jeżeli $\lambda > 0$, to mamy

$$\lim_{n=\infty} x_n^\lambda = +\infty. \tag{134}$$

Dowód. Niech a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą > 1: w myśl własności 5 oraz wzoru (108) będzie $a^{\frac{1}{\lambda}} > 1$.

Wobec (133) będzie

$$x_n > a^{\frac{1}{\lambda}} > 1, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, w myśl własności 5 i 8:

$$x_n^\lambda > \left(a^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda = a, \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

co dowodzi wzoru (134), *c. b. d. o.*

Własność 10. *Jeżeli $a > 0$ i jeżeli x_n jest ciągiem liczb dodatnich, takim iż*

$$\lim_{n=\infty} x_n = +\infty, \tag{135}$$

to przy wszelkiem rzeczywistem λ mamy:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a^{x_n}}{x_n^\lambda} = +\infty. \tag{136}$$

Dowód. Wobec (135) mamy

$$x_n > 1, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{137}$$

Niech k oznacza liczbę naturalną $> \lambda + 1$; wobec $a > 1$ liczba $\sqrt[k]{a}$ będzie > 1: połóżmy

$$\sqrt[k]{a} = 1 + d:$$

będzie więc $d > 0$, oraz

$$a = (1 + d)^k. \tag{138}$$

Wobec $a > 1$ oraz z uwagi, że $x_n \geq \mathrm{E}x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, będzie, w myśl własności 5, oraz wobec (138):

$$a^{x_n} \geq a^{\mathrm{E}x_n} = \left[(1+d)^k\right]^{\mathrm{E}x_n} = \left[(1+d)^{\mathrm{E}x_n}\right]^k; \tag{139}$$

lecz, w myśl tw. 55 (wobec $d > 0$):

$$(1+d)^{\mathrm{E}x_n} \geq 1 + d\,\mathrm{E}x_n > d\,\mathrm{E}x_n;$$

wobec (139) i z uwagi, że $\mathrm{E}x_n > x_n - 1$, będzie więc, w myśl (137):

$$a^{x_n} > (d\,\mathrm{E}x_n)^k > d^k (x_n - 1)^k, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{140}$$

Z drugiej strony, wobec $k > \lambda + 1$ oraz wobec (137), będzie w myśl własności 5:

$$x_n^\lambda < x_n^{k-1}, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{141}$$

Nierówności (140) i (141) dają:

$$\frac{x_n^\lambda}{a^{x_n}} < \frac{x_n^{k-1}}{d^k (x_n - 1)^k} = \frac{1}{d^k}\left(1 + \frac{1}{x_n - 1}\right)^{k-1} \frac{1}{x_n - 1}, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{142}$$

Lecz, wobec (135), mamy

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n - 1}\right)^{k-1} = 1, \quad \text{zaś} \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{x_n - 1} = 0:$$

nierówność (142) daje więc w jednej chwili

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n^\lambda}{a^{x_n}} = 0,$$

skąd wynika natychmiast wzór (136), *c. b. d. o.*

§ **46. Twierdzenie 62.** *Przy rzeczywistych d oraz x mamy:*

$$(1+d)^x \leq \frac{1}{1 - xd}, \quad \text{dla} \quad x > 0, \; -1 < d < \frac{1}{x}; \tag{143}$$

$$(1+d)^x \geq 1 + \frac{xd}{1+d}, \quad \text{dla} \quad x > 0, \quad d > -1; \tag{144}$$

$$(1+d)^x \geq 1 + xd, \quad \text{dla} \quad x < 0, \quad d > -1; \tag{145}$$

$$(1+d)^x \leq \frac{1}{1 - \dfrac{xd}{1+d}}, \quad \text{dla} \quad x < 0, \quad d > \frac{1}{x-1}. \tag{146}$$

Dowód. Udowodnimy przedewszystkiem nierówność (143) dla naturalnych x.

Niech więc $x = n$, gdzie n jest liczbą naturalną i niech d oznacza liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówności

$$-1 < d < \frac{1}{n}. \tag{147}$$

Wobec (147) będzie

$$1 + d > 0$$

i przeto, kładąc

$$\delta = \frac{1}{1+d} - 1 \tag{148}$$

będziemy mieli

$$\delta > -1 \tag{149}$$

oraz

$$1 + \delta = \frac{1}{1+d} > 0. \tag{150}$$

Wobec (149) i w myśl tw. 55, mamy:

$$(1+\delta)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,\delta,$$

skąd, wobec (150) i (148):

$$\frac{1}{(1+d)^{n+1}} \geq 1 + (n+1)\left(\frac{1}{1+d} - 1\right),$$

skąd, mnożąc przez liczbę dodatnią $1 + d$:

$$\frac{1}{(1+d)^n} \geq 1 - nd,$$

co, z uwagi, że liczba $1 - nd$ jest, w myśl (147) dodatnią, daje

$$(1+d)^n \leq \frac{1}{1-nd}. \tag{151}$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem naturalnem n oraz wszelkiem rzeczywistem d, spełniającem nierówność (147), zachodzi nierówność (151). Udowodniliśmy więc wzór (143) dla naturalnych x.

Niech teraz m oznacza daną liczbę naturalną, zaś d liczbę rzeczywistą > -1. Połóżmy

$$\sqrt[m]{1+d} - 1 = \delta \tag{152}$$

(gdzie $\sqrt[m]{1+d}$ oznacza pierwiastek arytmetyczny m-go stopnia z liczby dodatniej $1 + d$). Będzie oczywiście $\delta > -1$, zatem, w myśl tw. 55:

$$(1+\delta)^m \geq 1 + m\,\delta,$$

skąd, z uwagi że, w myśl (152): $(1+\delta)^m = 1 + d$:

$$1 + d \geq 1 + m\left(\sqrt[m]{1+d} - 1\right),$$

zatem

$$\sqrt[m]{1+d} \leq 1 + \frac{1}{m}\,d, \quad \text{dla} \quad d > -1, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{153}$$

Niech teraz l i m będą dwie dane liczby naturalne, zaś d niech oznacza liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówności:

$$-1 < d < \frac{m}{l}. \tag{154}$$

Wyznaczmy liczbę δ ze wzoru (152): w myśl (152) i (153) będzie

$$-1 < \delta \leq \frac{1}{m}\,d, \tag{155}$$

zatem, wobec (154):

$$-1 < \delta < \frac{1}{l}. \tag{156}$$

Ponieważ, jak dowiedliśmy, nierówność (143) jest prawdziwą dla naturalnych x, więc, wobec (156), mamy:

$$(1+\delta)^l \leq \frac{1}{1-l\delta}. \tag{157}$$

Lecz, wobec (155):

$$l\delta \leq \frac{l}{m}\,d,$$

skąd

$$1 - l\delta \geq 1 - \frac{l}{m}\,d, \tag{158}$$

zaś, wobec (154):

$$1 - \frac{l}{m}\,d > 0:$$

nierówność (158) daje więc

$$\frac{1}{1-l\delta} \leq \frac{1}{1 - \frac{l}{m}\,d},$$

skąd, wobec (157):

$$(1+\delta)^l \leq \frac{1}{1-\frac{l}{m}d},$$

co, z uwagi, że, wobec (152), $(1+\delta)^l = \left(\sqrt[m]{1+d}\right)^l = (1+d)^{\frac{l}{m}}$, daje

$$(1+d)^{\frac{l}{m}} \leq \frac{1}{1-\frac{l}{m}d}. \tag{159}$$

Udowodniliśmy więc, że, przy wszelkich naturalnych l oraz m, nierówność (154) pociąga za sobą nierówność (159), co dowodzi, że wzór (143) jest prawdziwy przy wszelkiem wymiernem dodatniem x.

Niech teraz x oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą dodatnią, zaś d — liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówności

$$-1 < d < \frac{1}{x}. \tag{160}$$

Niech w_k oznacza ciąg nieskończony o wyrazach wymiernych dodatnich, mniejszych od x, zmierzający do x. Wobec $0 < w_k < x$, będzie

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{w_k} \quad (k=1,2,\ldots),$$

zatem, wobec (160), tembardziej

$$-1 < d < \frac{1}{w_k} \quad (k=1,2,3,\ldots). \tag{161}$$

Ponieważ, jak dowiedliśmy, nierówność (143) jest prawdziwa dla wymiernych x, więc, wobec (161), mamy:

$$(1+d)^{w_k} \leq \frac{1}{1-w_k d}, \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

skąd, w granicy dla $k=\infty$ (wobec własności 2 potęg):

$$(1+d)^x \leq \frac{1}{1-xd}. \tag{162}$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem rzeczywistem $x>0$ nierówność (160) pociąga za sobą nierówność (162). Wzór (143) udowodniliśmy zatem w zupełności.

Zajmiemy się teraz dowodem wzoru (144). Zauważymy przedewszystkiem, że wzór (144) jest prawdziwy dla

$$x>0, \quad -1 < d \leq -\frac{1}{x+1}, \tag{163}$$

gdyż, wobec (163), mamy

$$0 < 1+d \leq \frac{x}{x+1} \quad \text{oraz} \quad xd \leq -\frac{x}{x+1},$$

skąd w jednej chwili:

$$\frac{xd}{1+d} \leq -1,$$

oraz

$$1+\frac{xd}{1+d} \leq 0 < (1+d)^x.$$

Wystarczy więc udowodnić wzór (144), w założeniu, że x jest liczbą rzeczywistą dodatnią, zaś d liczbą rzeczywistą $> -\frac{1}{x+1}$.

Niech więc x oznacza liczbę rzeczywistą >0, zaś d — liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność:

$$d > -\frac{1}{x+1}. \tag{164}$$

W myśl (164) mamy, wobec $x>0$:

$$1+d > \frac{x}{x+1} > 0,$$

skąd:

$$0 < \frac{1}{1+d} < \frac{x+1}{x}$$

oraz

$$-1 < \frac{1}{1+d} - 1 < \frac{1}{x};$$

kładąc

$$\delta = \frac{1}{1+d} - 1 \tag{165}$$

będziemy więc mieli:

$$-1 < \delta < \frac{1}{x}$$

skąd, w myśl wzoru (143):

$$(1+\delta)^x \leq \frac{1}{1-x\delta},$$

co z uwagi, że wobec (165), $1+\delta = \frac{1}{1+d}$, daje

$$\frac{1}{(1+d)^x} \leq \frac{1}{1-x\delta}$$

i przeto (wobec $1+d>0$):

$$(1+d)^x \geq 1-x\delta,$$

czyli, wobec (165):

$$(1+d)^x \geq 1+\frac{xd}{1+d}.$$

Wzór (144) udowodniliśmy zatem w zupełności.

Przejdźmy teraz do dowodu wzoru (145). Dla

$$x<0, \quad d \geq -\frac{1}{x}$$

mamy $xd \leq -1$, skąd

$$1+xd \leq 0$$

i nierówność

$$(1+d)^x \geq 1+xd$$

jest prawdziwa oczywiście: wystarczy więc, dla dowodu wzoru (145) założyć, że x jest liczbą rzeczywistą ujemną, zaś d — liczbą rzeczywistą, spełniającą nierówności

$$-1<d<-\frac{1}{x}. \tag{166}$$

Połóżmy

$$-x=y \tag{167}$$

— będzie to więc liczba rzeczywista dodatnia, przytem, wobec (166), będzie

$$-1<d<\frac{1}{y};$$

skąd, w myśl wzoru (143):

$$(1+d)^y \leq \frac{1}{1-yd},$$

zatem wobec (167):

$$\frac{1}{(1+d)^x} \leq \frac{1}{1+xd},$$

co, z uwagi, że wobec (166), $1+d>0$, daje:

$$(1+d)^x \geq 1+xd.$$

Wzór (145) udowodniliśmy zatem w zupełności.

Udowodnimy wreszcie wzór (146). Niech więc x oznacza liczbę rzeczywistą ujemną, zaś d — liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$d>\frac{1}{x-1}. \tag{168}$$

Połóżmy

$$-x=y \tag{169}$$

— będzie to liczba rzeczywista dodatnia, przytem, wobec (168), będzie $d>-1$: w myśl wzoru (144) będzie więc

$$(1+d)^y \geq 1+\frac{yd}{1+d},$$

czyli, wobec (169):

$$\frac{1}{(1+d)^x} \geq 1-\frac{xd}{1+d}. \tag{170}$$

Lecz, wobec (168) i z uwagi że $-x>0$, mamy:

$$-xd > -\frac{x}{x-1}$$

oraz

$$1+d > \frac{x}{x-1} > 0,$$

skąd

$$-\frac{xd}{1+d} > -1$$

oraz

$$1-\frac{xd}{1+d} > 0;$$

nierówność (170) daje więc w jednej chwili

$$(1+d)^x \leq \frac{1}{1-\frac{xd}{1+d}}.$$

Udowodniliśmy więc wzór (146).

Twierdzenie 62 zostało zatem dowiedzione w zupełności.

Zauważymy, że nierówność (144), po pomnożeniu przez $1+d>0$ oraz zastąpieniu x przez $x-1$, daje w jednej chwili:

$$(1+d)^x \geq 1+xd, \quad \text{dla} \quad x \geq 1, \quad d > -1. \tag{171}$$

Podobnież, nierówność (146), po podzieleniu przez $1+d>0$ oraz zastąpienie x przez $x+1$, daje

$$(1+d)^x \leq \frac{1}{1-xd}, \quad \text{dla} \quad x < -1, \quad d > \frac{1}{x}. \tag{172}$$

Jako ciekawe zastosowanie wzoru (171) wyprowadzimy nierówność dla x^x. Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą dodatnią <1. W myśl własności 5 potęgi, będzie

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} > 1;$$

kładąc

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = 1+d \tag{173}$$

będziemy więc mieli $d>0$. Wobec (173) będzie

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = (1+d)^{\frac{1}{x}}, \tag{174}$$

zaś. w myśl wzoru (171), z uwagi że wobec $0<x<1$, mamy $\frac{1}{x}>1$:

$$(1+d)^{\frac{1}{x}} \geq 1+\frac{d}{x},$$

skąd, wobec (174):

$$d \leq \sqrt{x}-x. \tag{175}$$

Wobec (173) mamy

$$x^x = \frac{1}{(1+d)^2},$$

zatem, wobec (175):

$$1-x^x \leq 1-\frac{1}{(1+\sqrt{x}-x)^2} = \frac{2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}-x+x^2}{(1+\sqrt{x}-x)^2},$$

skąd, wobec $x<1$, w jednej chwili:

$$1-x^x < 2\sqrt{x},$$

a że, wobec $0<x<1$, oraz w myśl własności 5 potęg:

$$x^x < 1,$$

więc mamy ostatecznie nierówność:

$$0 < 1-x^x < 2\sqrt{x}, \quad \text{dla} \quad 0<x<1, \tag{176}$$

Niech teraz x_n oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony liczb dodatnich, zmierzający do zera. Wobec $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$ będzie, dla $n>\mu$: $x_n<1$, przeto, w myśl (176):

$$0 < 1-x_n^{x_n} < 2\sqrt{x_n}, \quad \text{dla} \quad n>\mu,$$

skąd, z uwagi, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$:

$$\lim_{n=\infty} x_n^{x_n} = 1. \tag{177}$$

Udowodniliśmy więc, że jeżeli x_n jest ciągiem nieskończonym liczb dodatnich, zmierzającym do zera, to mamy wzór (177). W szczególności, dla $x_n = \frac{1}{n}$, wzór (177) daje:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

co, jak łatwo widzieć, równoważne jest równości:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{178}$$

Zauważymy jednak, że jeżeli x_n i y_n są dwa ciągi nieskończone liczb dodatnich, zmierzające oba do zera, to niekoniecznie

$$\lim_{n=\infty} x_n^{y_n} = 1.$$

Np. dla $x_n = \frac{1}{n^n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ mamy oczywiście $x_n^{y_n} = \frac{1}{n}$, zatem

$$\lim_{n=\infty} x_n^{y_n} = 0,$$

kładąc zaś $x_n = a^n$, gdzie $0<a<1$, $y_n = \frac{1}{n}$; będziemy mieli stale $x_n^{y_n} = a$, zatem

$$\lim_{n=\infty} x_n^{y_n} = a,$$

pomimo, że w obu przypadkach $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

§ 47. Udowodnimy obecnie, że istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista dodatnia a, taka, iż przy wszelkiem rzeczywistem x

$$a^x \geq 1+x. \tag{179}$$

Załóżmy, że istnieje liczba dodatnia a, taka iż przy wszelkiem rzeczywistem x zachodzi nierówność (179). Mamy więc stąd, w szczególności

$$a^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

oraz

$$a^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Nierówności te dają w jednej chwili:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{180}$$

Powiadam, że ciągi nieskończone

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{oraz} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{181}$$

zmierzają do tej samej granicy, pierwszy rosnąc, drugi malejąc.

W samej rzeczy, w myśl (181) mamy:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{182}$$

dalej, przy wszelkiem naturalnem $p > 1$ mamy tożsamość

$$1 - x^p = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1})\,(1 - x),$$

skąd, dla $0 < x < 1$:

$$1 - x^p < p\,(1 - x),$$

zatem

$$x^p > 1 - p\,(1 - x), \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1: \tag{182a}$$

kładąc w tej nierówności $p = n+1$, $x = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, otrzymujemy w jednej chwili:

$$\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}. \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

i przeto, (wobec 182):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

czyli

$$u_{n+1} > u_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{183}$$

Ciąg u_n jest więc stale rosnący i przeto, w myśl tw. 12, posiada granicę skończoną lub nieskończoną.

Lecz, wobec (181):

$$u_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

zaś, w myśl (143) (dla $d = \frac{1}{n}$, $x = \frac{n}{2}$):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leq 2, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

zatem

$$u_n \leq 4, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{184}$$

skąd wynika, że granica ciągu u_n jest skończoną.

Połóżmy

$$\lim_{n=\infty} u_n = e; \tag{185}$$

będzie więc, wobec (183):

$$e > u_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{186}$$

Wobec (181) mamy:

$$v_n = u_n + \frac{u_n}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

zatem, wobec (185), z uwagi że u_n są liczby dodatnie, stale ≤ 4 (w myśl (184)):

$$\lim_{n=\infty} v_n = \lim_{n=\infty} u_n = e.$$

Łatwo też widzieć, że ciąg v_n stale maleje; mamy bowiem, w myśl (181):

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

skąd, z uwagi, że

$$\left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} > 1 + \frac{n+2}{n(n+2)} = \frac{n+1}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

znajdujemy w jednej chwili

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1, \quad \text{czyli} \quad v_{n+1} < v_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wobec $\lim\limits_{n=\infty} v_n = e$ mamy więc:

$$e < v_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{187}$$

Dowiedliśmy więc, że ciągi u_n i v_n zmierzają do tej samej granicy e, przyczem, wobec (181), (186) i (187) mamy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{188}$$

Wobec

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

oraz w myśl (180), znajdujemy

$$a = e.$$

Dowiedliśmy więc, że conajwyżej jedna tylko liczba rzeczywista a spełnia przy wszelkiem rzeczywistem x nierówność (179), mianowicie liczba

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{189}$$

Udowodnimy obecnie, że dla liczby e, określonej wzorem (186), istotnie zachodzi nierówność

$$e^x \geq 1 + x \tag{190}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x.

Niech x oznacza liczbę rzeczywistą > 0. Przy naturalnem $n \geq \frac{1}{x}$ będzie

$$nx \geq 1,$$

zatem, w myśl wzoru (171):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} \geq 1 + x, \quad \text{dla} \quad n \geq \frac{1}{x}; \tag{191}$$

z drugiej strony, wobec (188) oraz w myśl własności 6 potęg, mamy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} < e^x; \tag{192}$$

nierówności (191) i (192) dają więc w jednej chwili:

$$e^x > 1 + x, \quad \text{dla} \quad x > 0. \tag{193}$$

Niech teraz x oznacza liczbę rzeczywistą < 0; przy naturalnem $n \geq -\frac{1}{x}$ będzie

$$-nx \geq 1,$$

zatem, wobec (171):

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nx} \geq 1 + x, \quad \text{dla} \quad n \geq -\frac{1}{x}; \tag{194}$$

lecz, wobec (188), mamy dla $n = 2, 3, \ldots$:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > e, \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > e,$$

skąd

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > e, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots,$$

co daje, w myśl własności 6 potęg (wobec $x < 0$):

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nx} < e^x, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots \tag{195}$$

Nierówności (194) i (195) dają więc

$$e^x > 1 + x, \quad \text{dla} \quad x < 0. \tag{196}$$

Wobec (193) i (196) mamy więc

$$e^x > 1 + x, \quad \text{dla} \quad x \neq 0, \tag{197}$$

a że dla $x = 0$ oczywiście $e^x = 1 + x$ (gdyż obie strony są wówczas $= 1$), więc udowodniliśmy nierówność (190) dla wszelkich rzeczywistych x.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 63. *Liczba e, określona wzorem*

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

spełnia przy wszelkiem rzeczywistem $x \neq 0$ nierówność

$$e^x > 1 + x,$$

która jest dla niej charakterystyczną.

Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą, n — daną liczbę naturalną. Zastępując we wzorze (190) x przez $\frac{x}{n}$, otrzymamy, po podniesieniu obu stron do n-tej potęgi:

$$e^x \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{198}$$

Niech, dalej, n oznacza liczbę naturalną $> -x$. Zastępując w nierówności (198) x przez $-\frac{nx}{n+x}$, otrzymamy:

$$e^{-\frac{nx}{n+x}} \geq \left(1-\frac{x}{n+x}\right)^n = \left(\frac{n}{n+x}\right)^n,$$

skąd

$$e^{\frac{nx}{n+x}} \leq \left(\frac{n+x}{n}\right)^n, \quad \text{dla} \quad n > -x. \tag{199}$$

Nierówności (198) i (199) dają:

$$e^{\frac{nx}{n+x}} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x, \quad \text{dla} \quad n > -x; \tag{200}$$

lecz, w myśl własności 2 potęg $\left(\text{dla } x_n = \frac{nx}{n+x}\right)$:

$$\lim_{n=\infty} e^{\frac{nx}{n+x}} = e^x;$$

nierówności (200) dają więc w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{201}$$

przy wszelkiem rzeczywistem x.

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że przy wszelkiem wymiernem, lecz niecałkowitem w liczba 2^w jest niewymierna.

2) Dowieść, że równanie

$$m^n = n^m$$

nie posiada w liczbach naturalnych m i n $(m < n)$ innego rozwiązania prócz $2^4 = 4^2$.

Dowód. Równanie $m^n = n^m$ jest oczywiście równoważne równaniu $\sqrt[m]{m} = \sqrt[n]{n}$. Okażemy, że, poczynając od $\sqrt[3]{3}$, wyrazy $u_k = \sqrt[k]{k}$ $(k = 3, 4, 5, \ldots)$ stale maleją.

Mamy oczywiście

$$\left(\frac{u_{k-1}}{u_k}\right)^{k(k-1)} = k\left(1-\frac{1}{k}\right)^k.$$

Lecz, w myśl (171), dla $k \geq 2$:

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}} \geq 1 - \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{2},$$

skąd

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^k \geq \frac{1}{4}$$

i przeto

$$\left(\frac{u_{k-1}}{u_k}\right)^{k(k-1)} \geq \frac{k}{4}, \quad \text{dla} \quad k \geq 2,$$

zatem

$$u_{k-1} > u_k, \quad \text{dla} \quad k \geq 5,$$

a że oczywiście $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$ (gdyż $3^4 > 4^3$), więc mamy też $u_3 > u_4$. Ponieważ wreszcie mamy oczywiście $\sqrt[2]{2} = \sqrt[4]{4}$, zaś $\sqrt[k]{k} > 1$, dla $k > 1$, więc ostatecznie możemy napisać

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[2]{2} = \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[7]{7} > \ldots\ldots\ldots > \sqrt[1]{1},$$

skąd wnosimy natychmiast, że w ciągu $u_k = \sqrt[k]{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ tylko dwa wyrazy są równe, mianowicie $\sqrt[2]{2}$ oraz $\sqrt[4]{4}$. Wynika stąd, że równanie $m^n = n^m$ posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych m i n $(m < n)$, mianowicie $2^4 = 4^3$, *c. b. d. o.*

3) Udowodnić, że jeżeli $t_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ oraz $\lim_{n=\infty} t_n = \infty$, to

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e.$$

Dowód. Wobec (193) mamy dla $t > 0$:

$$e^{\frac{1}{t}} > 1 + \frac{1}{t},$$

skąd, w myśl własności 6 potęg:

$$e > \left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$$

Z drugiej strony, wobec (196) (dla $t > 0$):

$$e^{-\frac{1}{t+1}} > 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}},$$

skąd

$$e^{\frac{1}{t+1}} < 1 + \frac{1}{t}$$

oraz

$$e < \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1},$$

zatem

$$\frac{e}{1+\frac{1}{t}} < \left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$$

Mamy więc:

$$\frac{e}{1+\frac{1}{t}} < \left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e, \quad \text{dla} \quad t>0,$$

zatem, wobec $t_n > 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$:

$$\frac{e}{1+\frac{1}{t_n}} < \left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} < e, \quad \text{dla} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

co daje, w granicy dla $n=\infty$, wobec $\lim\limits_{n=\infty} t_n = \infty$:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e, \quad c.\ b.\ d.\ o.$$

4) Udowodnić, że jeżeli $t_n > 1$, oraz $\lim\limits_{n=\infty} t_n = \infty$, to

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{t_n}\right)^{-t_n} = e.$$

ROZDZIAŁ V.

Logarytmy.

§ 48. *Logarytmem liczby dodatniej x przy zasadzie $a>1$* nazywamy liczbę rzeczywistą y, spełniającą równanie

$$a^y = x; \tag{1}$$

liczbę tę oznaczamy symbolem

$$\lg_a x.$$

Twierdzenie 64. *Każda liczba rzeczywista dodatnia x posiada przy każdej danej zasadzie $a>1$ oznaczony w zupełności logarytm $\lg_a x$.*

Dowód. Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą dodatnią, zaś a — daną liczbę >1. Gdyby liczba x posiadała przy zasadzie a dwa różne logarytmy: y oraz $y'>y$, to w myśl definicji logarytmu, mielibyśmy

$$a^y = x \quad \text{oraz} \quad a^{y'} = x,$$

skąd $a^{y'} = a^y$, gdy tymczasem, wobec $y'>y$ oraz $a>1$ i w myśl własności 5 potęg, musiałoby być $a^{y'} > a^y$. Dowiedliśmy więc, że każda liczba rzeczywista posiada przy każdej danej zasadzie $a>1$ conajwyżej jeden logarytm. Dla dowodu naszego twierdzenia pozostaje więc do okazania, że równanie (1) posiada, przy danem dodatniem x oraz danem $a>1$, conajmniej jedno rozwiązanie względem y.

Niech n oznacza dowolną daną liczbę naturalną: liczba x^{2^n} będzie więc pewną liczbą dodatnią. Wobec $a>1$ mamy, w myśl tw. 56:

$$\lim_{m=\infty} a^{-m} = 0;$$

istnieją więc liczby całkowite k, dla których (przy danem n):

$$a^k \leq x^{2^n}; \tag{2}$$

z drugiej strony, dla dostatecznie wielkich k będzie

$$a^k > x^{2^n},$$

gdyż $\lim\limits_{k=\infty} a^k = +\infty$. Wśród liczb całkowitych k, spełniających nierówność (2), istnieje więc największa: oznaczmy ją przez k_n. Będzie więc

$$a^{k_n} \leq x^{2^n} < a^{k_n+1} \tag{3}$$

(gdyż liczba k_n+1 nierówności (2) już nie spełnia).

Połóżmy

$$u_n = \frac{k_n}{2^n}, \quad \text{dla} \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Wobec (3) mamy

$$a^{2k_n} \leq x^{2^{n+1}},$$

a ponieważ k_{n+1} oznacza największą liczbę całkowitą k, spełniającą nierówność

$$a^k \leq x^{2^{n+1}},$$

więc musi być

$$2k_n \leq k_{n+1},$$

skąd, wobec (4):

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Ciąg nieskończony u_n jest więc niemalejący, zatem posiada granicę. Połóżmy

$$\lim_{n=\infty} u_n = y \tag{5}$$

— będzie to więc liczba rzeczywista, skończona lub nieskończona.