

Z udowodnionego twierdzenia wynika natychmiast, że nie istnieje taki ciąg nieskończony, któryby zawierał każdą liczbę rzeczywistą. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie daje się więc ustawić w żaden ciąg nieskończony, a więc nie jest przeliczalny (gdy tymczasem, w myśl tw. 5, zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny). Zatem:

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

§ 17. Twierdzenie 23. *Na to, żeby ciąg nieskończony u_n był zbieżny, potrzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby wymiernej dodatniej ε istniały liczby wymierne a i b takie, iż*

$$0 < b - a < \varepsilon$$

oraz iż przy pewnym naturalnym p :

$$a < u_n < b, \text{ dla } n > p.$$

Dowód. Załóżmy, że ciąg u_n jest zbieżny (§ 10), że więc mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą skończoną. W myśl tw. 3, dla danej liczby wymiernej ε istnieją liczby wymierne a i b takie iż

$$a < x < b \text{ oraz } b - a < \varepsilon;$$

w myśl tw. 14 wnosimy stąd, że każda z nierówności

$$u_n > a \text{ oraz } u_n < b$$

będzie prawdziwą dla wszystkich dostatecznie dalekich wyrazów ciągu u_n . Dowiedliśmy więc, że warunek nasz jest konieczny.

Założmy teraz, że warunek nasz jest spełniony.

Gdyby ciąg u_n nie posiadał granicy, to w myśl tw. 11 (oraz definicji granicy) byłoby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

i, w myśl tw. 2, istniałyby liczby wymierne w i w' takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < w < w' < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n. \quad (56)$$

Położmy

$$w' - w = \varepsilon \quad (57)$$

— będzie to liczba wymierna dodatnia; w myśl naszych założeń istnieją więc liczby wymierne a i b , takie, iż

$$0 < b - a < \varepsilon, \quad (58)$$

oraz iż

$$a < u_n < b, \text{ dla } n > p. \quad (59)$$

Wobec (59) oraz w myśl tw. 10 znajdujemy:

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \text{ oraz } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \leq b,$$

zatem, wobec (56):

$$a < w < w' < b,$$

co daje, w jednej chwili:

$$b - a > w' - w,$$

zatem w myśl (57):

$$b - a > \varepsilon,$$

wbrew (58).

Dowiedliśmy więc, że ciąg u_n posiada granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. W myśl naszego warunku istnieją w każdym razie liczby wymierne a i b takie, iż dla wszystkich dostatecznie dalekich wyrazów ciągu u_n zachodzi nierówność

$$a < u_n < b$$

co daje, w myśl tw. 10:

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq b,$$

co dowodzi, że granica $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ jest liczbą skończoną, czyli że ciąg u_n jest zbieżny. Warunki nasze są więc wystarczające dla zbieżności ciągu u_n .

Twierdzenie nasze udowodniliśmy zatem w zupełności.

ROZDZIAŁ III.

Działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych.

§ 18. Niech x i y będą dwie dane liczby rzeczywiste, u_n i v_n — dwa ciągi nieskończone liczb wymiernych takie, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = y \quad (1)$$

(ciągi takie istnieją zawsze, w myśl tw. 19). Powiadam, że ciąg nieskończony

$$w_n = u_n + v_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

jest zbieżny.

W samej rzeczy, niech η oznacza jakąkolwiek liczbę wymierną dodatnią. Wobec (1) i w myśl tw. 23 (dla $\varepsilon = \eta/2$) istnieją liczby wymierne a_1, b_1, a_2, b_2 , takie iż

$$0 < b_1 - a_1 < \frac{\eta}{2}, \quad 0 < b_2 - a_2 < \frac{\eta}{2} \quad (3)$$

oraz liczby naturalne p_1 i p_2 , takie iż

$$a_1 < u_n < b_1 \text{ dla } n > p_1, \text{ oraz } a_2 < v_n < b_2 \text{ dla } n > p_2. \quad (4)$$

Kładąc

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad (5)$$

otrzymamy dwie liczby wymierne, takie iż [w myśl (3)]:

$$0 < b - a < \eta,$$

przyczem, wobec (2), (4) i (5), oznaczając przez p liczbę naturalną większą od p_1 i p_2 , będziemy mieli:

$$a < w_n < b, \text{ dla } n > p.$$

W myśl tw. 23 ciąg w_n jest więc zbieżny, *c. b. d. o.*

Położmy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z \quad (6)$$

— będzie to więc liczba rzeczywista skończona. Powiadam dalej, że jakiegokolwiek obralibyśmy ciągi nieskończone liczb wymiernych u'_n i v'_n , takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u'_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v'_n = y, \quad (7)$$

zawsze będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u'_n + v'_n) = z. \quad (8)$$

W samej rzeczy, niech u'_n i v'_n będą dwa jakiegokolwiek dane ciągi liczb wymiernych, dla których zachodzą wzory (7). Jak dowiedliśmy, ciąg

$$w'_n = u'_n + v'_n \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (9)$$

będzie zbieżny; położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w'_n = z'. \quad (10)$$

Założmy że $z' \neq z$, np. że

$$z < z'.$$

W myśl tw. 2 istnieją więc liczby wymierne w i w' , takie iż

$$z < w < w' < z'. \quad (11)$$

Położmy

$$\varepsilon = \frac{w' - w}{2} \quad (12)$$

— będzie to liczba wymierna dodatnia.

Wobec (11), (6) i (10) oraz w myśl tw. 7 musi być

$$w_n < w \text{ dla } n > \mu_1 \text{ oraz } w' < w'_n \text{ dla } n > \mu_2,$$

skąd, dla μ większego od μ_1 i μ_2 :

$$w_n - w'_n > w' - w, \text{ dla } n > \mu,$$

czyli wobec (12):

$$w'_n - w_n > 2\varepsilon, \text{ dla } n > \mu. \quad (13)$$

Z drugiej strony, wobec (1) i (7) oraz w myśl tw. 23, istnieją liczby wymierne a_1, b_1, a_2 i b_2 takie iż

$$0 < b_1 - a_1 < \varepsilon, \quad 0 < b_2 - a_2 < \varepsilon \quad (14)$$

oraz liczba naturalna p taka, iż

$$a_1 < u_n < b_1, \quad a'_1 < u'_n < b'_1, \quad a_2 < v_n < b_2, \quad a'_2 < v'_n < b'_2, \quad (15)$$

dla $n > p$.

Wobec (15), (2) i (9), znajdujemy:

$$a_1 + a_2 < w_n, \text{ oraz } w'_n < b_1 + b_2, \text{ dla } n > p,$$

skąd, w jednej chwili:

$$w'_n - w_n < b_1 + b_2 - (a_1 + a_2), \text{ dla } n > p,$$

zatem, w myśl (14):

$$w'_n - w_n < 2\varepsilon, \text{ dla } n > p,$$

co, wobec (13), jest niemożliwe.

Dowiedliśmy więc, że nie może być $z < z'$. Zupełnie taksamo wynika, że nie może być $z' < z$. Jest więc $z = z'$, czyli, w myśl (9) i (10), zachodzi wzór (8), *c. b. d. o.*

Jeżeli więc x i y są dwie dane liczby rzeczywiste, to jakiegokolwiek obralibyśmy ciągi liczb wymiernych u_n i v_n , których granicami są odpowiednio liczby x i y , ciąg sum $w_n = u_n + v_n$ będzie zawsze zmierzał do jednej i tej samej granicy. Granicę tę, jako zależną jedynie od x i y , oznaczmy przez $f(x, y)$. Symbol $f(x, y)$ ma więc określoną wartość dla każdego danych liczb rzeczywistych x i y .

Powiadam, że jeżeli liczby x i y są wymierne, to

$$f(x, y) = x + y. \quad (16)$$

W samej rzeczy. przyjmując

$$u_n = x, v_n = y, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

będziemy, w myśl tw. 17, mieli wzory (1), które, wobec definicji liczby $f(x, y)$, pociągają za sobą wzór:

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n). \quad (18)$$

Z drugiej strony, w myśl (17), mamy:

$$u_n + v_n = x + y, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, w myśl tw. 17:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = x + y. \quad (19)$$

Wzory (18) i (19) dają wzór (16), *c. b. d. o.*

Wzór (16) jest więc prawdziwy dla wszelkich liczb wymiernych x i y . Nie określiliśmy jeszcze, co mamy rozumieć przez sumę $x + y$, jeżeli jedna z liczb x, y , lub obie są niewymierne. Otóż umówimy się rozumieć w tym razie przez $x + y$ liczbę $f(x, y)$. W ten sposób suma $x + y$ będzie miała oznaczoną wartość dla wszelkich liczb rzeczywistych (skończonych) x i y .

§ 19. Własności sumy.

I. Przemienność. Suma liczb rzeczywistych x i y nie zależy od porządku składników, t. j.

$$x + y = y + x.$$

W samej rzeczy, jeżeli zachodzą wzory (1), to, w myśl przyjętej definicji sumy liczb rzeczywistych, zachodzi wzór (19), jakoteż wzór:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n + u_n) = y + x, \quad (20)$$

a że lewe strony wzorów (19) i (20) przedstawiają granicę tego samego ciągu (gdyż, wobec przemienności sumy liczb wymiernych, mamy stale $u_n + v_n = v_n + u_n$), więc prawe strony muszą być równe, skąd wynika, że $x + y = y + x$, *c. b. d. o.*

II. Łączność. Jeżeli x, y, z są trzy dane liczby rzeczywiste, to

$$x + (y + z) = (x + y) + z. \quad (21)$$

Dowód. Niech x_n, y_n, z_n będą ciągi nieskończone liczb wymiernych, takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad (22)$$

(ciągi takie, jak wiemy, istnieją). Będziemy więc mieli

$$y + z = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n + z_n), \quad x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n);$$

stąd, kładąc

$$y_n + z_n = u_n, \quad x_n + y_n = v_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (23)$$

oraz

$$y + z = u, \quad x + y = v, \quad (24)$$

będziemy mieli dwa ciągi o wyrazach wymiernych u_n i v_n , takie iż,

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n,$$

zatem, wobec (22):

$$x + u = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + u_n), \quad v + z = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n + z_n). \quad (25)$$

Lecz, w myśl (23) i wobec łączności sumy liczb wymiernych, mamy

$$x_n + u_n = v_n + z_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

skąd, wobec (25):

$$x + u = v + z,$$

co, w myśl (24), daje wzór (21), który chcieliśmy udowodnić.

III. Dla każdej liczby rzeczywistej x mamy:

$$x + 0 = x. \quad (26)$$

Dowód. Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą. Istnieje, jak wiemy, ciąg liczb wymiernych u_n taki iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x. \quad (27)$$

Położmy

$$v_n = 0, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots; \quad (28)$$

w myśl tw. 17 będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0. \quad (29)$$

Wzory (27) i (29) dają, wobec definicji sumy:

$$x + 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n). \quad (30)$$

Lecz, wobec (28), mamy

$$u_n + v_n = u_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

i przeto, wobec (27):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = x. \quad (31)$$

Wzory (30) i (31) dają właśnie wzór (26), c. b. d. o.

Wobec przemienności sumy mamy więc też

$$0 + x = x$$

przy wszelkiem rzeczywistem x .

Pojęcie sumy liczb rzeczywistych możemy z łatwością uogólnić na dowolną (skończoną) liczbę składników.

Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą n danych liczb rzeczywistych. Położmy:

$$s_2 = x_1 + x_2,$$

$$s_3 = s_2 + x_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$s_n = s_{n-1} + x_n.$$

Wzory te wyznaczają nam kolejno liczby $s_2, s_3, \dots, s_n$. Liczbę s_n , otrzymaną w ten sposób, nazywamy *sumą* liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i oznaczamy przez

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Opierając się na prawach przemienności i łączności sumy dwóch składników, wyprowadzamy drogą indukcji własność przemienności oraz łączności sumy dowolnej (skończonej) liczby składników.

§ 20. Dodawanie nierówności.

Twierdzenie 24. Jeżeli x, y, x', y' są liczbami rzeczywistymi, takie iż

$$x < y \quad (32)$$

oraz

$$x' < y' \quad (33)$$

to

$$x + x' < y + y'. \quad (34)$$

Dowód. Z założeń (32) i (33) wynika, w myśl tw. 2, że istnieją liczby wymierne u, v, u', v' , takie iż

$$x < u < v < y. \quad (35)$$

oraz

$$x' < u' < v' < y' \quad (36)$$

W myśl tw. 19 istnieją ciągi nieskończone liczb wymiernych x_n, y_n, x'_n, y'_n , takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x', \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = y'. \quad (37)$$

Wobec (35), (36) i (37) oraz w myśl tw. 14, mamy dla $n > \mu$:

$$x_n < u, x'_n < u', v < y_n, v' < y'_n,$$

skąd (wobec prawidła dodawania nierówności dla liczb wymiernych):

$$x_n + x'_n < u + u', v + v' < y_n + y'_n, \text{ dla } n > \mu. \quad (38)$$

Lecz, jak dowiedliśmy w § 18, zbieżność ciągów o wyrazach wymiernych x_n, x'_n, y_n, y'_n , pociąga za sobą zbieżność ciągów $x_n + x'_n$, oraz $y_n + y'_n$: stąd, wobec (38) i w myśl tw. 10, mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x'_n) \leq u + u' \text{ oraz } v + v' \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n + y'_n). \quad (39)$$

Wobec (37) i w myśl definicji sumy mamy:

$$x + x' = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x'_n), y + y' = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n + y'_n);$$

nierówności (39) dają więc:

$$x + x' \leq u + u' \text{ oraz } v + v' \leq y + y'.$$

co, z uwagi że wobec (35) i (36), oraz prawidła dodawania nierówności dla liczb wymiernych, jest

$$u + u' < v + v',$$

daje w jednej chwili, w myśl tw. 1:

$$x + x' < y + y',$$

czyli nierówność (34), c. b. d. o.

Twierdzenie 24^a. Jeżeli x, y, z są liczbami rzeczywistymi, takie iż

$$x < y, \quad (40)$$

to

$$x + z < y + z. \quad (41)$$

Dowód. Wobec (40) istnieją liczby wymierne u i v takie iż

$$x < u < v < y. \quad (42)$$

W myśl tw. 3 istnieją liczby wymierne a i b , takie iż

$$a < z < b \quad (43)$$

oraz

$$b - a < v - u \quad (44)$$

(gdyż $v - u$ jest, wobec (42), liczbą wymierną dodatnią). Wobec (42) i (43) oraz w myśl tw. 24 mamy:

$$x + z < u + b, \text{ oraz } v + a < y + z. \quad (45)$$

Lecz, wobec (44):

$$u + b < v + a;$$

nierówności (45) dają więc w jednej chwili nierówność (44), c. b. d. o.

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Z twierdzeń 24 i 24^a wynika natychmiast

Twierdzenie 24^b. Jeżeli x, y, x', y' są liczby rzeczywiste, takie iż

$$x < y,$$

oraz

$$x' \leq y',$$

to

$$x + x' < y + y'.$$

Z twierdzenia tego wynika dalej natychmiast

Twierdzenie 24^c. Jeżeli dla liczb rzeczywistych x, y, x', y' zachodzą nierówności

$$x \leq y$$

oraz

$$x' \leq y',$$

to

$$x + x' \leq y + y'.$$

§ 21. Odejmowanie.

Niech a i b będą dwie dane liczby rzeczywiste. Powiadamy, że istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista x , spełniająca równanie

$$x + b = a. \quad (46)$$

Założmy, że istnieją dwie różne liczby rzeczywiste x' i x'' , spełniające powyższe równanie. Mamy więc

$$x' + b = a, \text{ oraz } x'' + b = a,$$

skąd

$$x' + b = x'' + b. \quad (47)$$

Skoro liczby x' i x'' są różne, więc jedna z nich, np. x' jest mniejsza, a druga większa. Jeżeli jednak

$$x' < x'',$$

to, w myśl tw. 24^a mamy:

$$x' + b < x'' + b,$$

wbrew (47).

Dowodiliśmy więc, że conajwyżej jedna liczba rzeczywista x spełnia równanie (46). Aby udowodnić, że istnieje liczba rzeczywista x , spełniająca nasze równanie, oznaczmy przez a_n i b_n dwa ciągi liczb wymiernych, takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (48)$$

(ciągi takie istnieją, w myśl tw. 19) i połączmy

$$x_n = a_n - b_n. \quad (49)$$

Powiadamy, że ciąg x_n jest zbieżny. W samej rzeczy, niech η oznacza jakąkolwiek liczbę wymierną dodatnią. Wobec zbieżności ciągów a_n i b_n oraz w myśl tw. 23, istnieją liczby wymierne a', b', a'' i b'' , takie iż

$$0 < b' - a' < \frac{\eta}{2}, \quad 0 < b'' - a'' < \frac{\eta}{2} \quad (50)$$

oraz iż dla $n > \mu$ zachodzi każda z nierówności:

$$a' < a_n < b', \text{ oraz } a'' < b_n < b''. \quad (51)$$

Kładąc

$$a_0 = a' - b'', \quad b_0 = b' - a'', \quad (52)$$

otrzymamy dwie liczby wymierne, takie, iż w myśl (50):

$$0 < b_0 - a_0 < \eta,$$

przyczem, wobec (49), (51) i (52), dla $n > \mu$ będzie zachodziła nierówność

$$a_0 < x_n < b_0.$$

W myśl tw. 23 ciąg x_n jest więc zbieżny, c. b. d. o.

Położmy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (53)$$

— będzie to więc liczba rzeczywista skończona.

Wobec (49) mamy

$$a_n = x_n + b_n,$$

zatem, z uwagi że x_n , b_n i a_n są ciągi liczb wymiernych, dla których zachodzą wzory (53) i (48), oraz wobec definicji sumy liczb rzeczywistych, znajdujemy:

$$x + b = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

skąd wynika wzór (46).

Dowiedliśmy więc, że dla każdych dwóch danych liczb rzeczywistych a i b istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista x , spełniająca równanie (46). (Wobec przemienności sumy, ta sama liczba x jest też jedynym rozwiązaniem równania $b + x = a$). Liczbę tę nazywamy *różnicą* liczb a i b i oznaczamy przez $a - b$.

Liczbę $0 - x$ oznaczamy poprostu przez $-x$.

Dla każdej liczby rzeczywistej (skończonej) x liczba $-x$ jest więc oznaczoną liczbą rzeczywistą (skończoną).

§ 22. Z definicji różnicy $a - b$ wynika bezpośrednio, że zawsze

$$(a - b) + b = a$$

oraz

$$b + (a - b) = a.$$

Stąd, w szczególności, dla $a = 0$, przy wszelkiem rzeczywistem b :

$$(-b) + b = 0, \text{ oraz } b + (-b) = 0. \quad (55)$$

Wobec (55) oraz w myśl własności II i III sumy, mamy przy wszelkich rzeczywistych a i b :

$$[a + (-b)] + b = a + [(-b) + b] = a + 0 = a,$$

co dowodzi, że liczba

$$x = a + (-b)$$

jest rozwiązaniem równania $x + b = a$, a ponieważ jedynym rozwiązaniem tego równania jest, jak wiemy (§ 21) liczba $a - b$, więc musi być:

$$a - b = a + (-b).$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 25. Przy wszelkich rzeczywistych a i b mamy:

$$a - b = a + (-b).$$

Jako łatwe wnioski z otrzymanego twierdzenia udowodnimy kilka twierdzeń:

Twierdzenie 26. Przy wszelkich rzeczywistych x i y mamy:

$$-(x + y) = -x - y. \quad (56)$$

Dowód. W myśl tw. 25 mamy:

$$-x - y = (-x) - y = (-x) + (-y),$$

a że, wobec własności I i II sumy, oraz w myśl (55):

$$[(-x) + (-y)] + (x + y) = [(-x) + x] + [(-y) + y] = 0,$$

więc mamy:

$$(-x - y) + (x + y) = 0,$$

co dowodzi, że

$$(-x - y) = 0 - (x + y) = -(x + y),$$

zatem

$$-x - y = -(x + y),$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (56).

Twierdzenie 27. Mamy przy wszelkiem rzeczywistem x :

$$-(-x) = x.$$

Dowód. Mamy, w myśl (55):

$$x + (-x) = 0,$$

skąd

$$x = 0 - (-x) = -(-x), \text{ c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 28. Mamy przy wszelkiem rzeczywistem x :

$$x - x = 0.$$

Dowód. W myśl tw. 25 (dla $a = b = x$), mamy:

$$x - x = x + (-x),$$

skąd, w myśl (55) znajdujemy w jednej chwili: $x - x = 0$, c. b. d. o.

Twierdzenie 29. Przy wszelkich rzeczywistych a , b , c mamy:

$$a + (b - c) = (a + b) - c,$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c,$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

Dowód. Mamy, w myśl tw. 25, 26 i 27, oraz wobec łączności sumy:

$$a + (b - c) = a + [b + (-c)] = (a + b) + (-c) = (a + b) - c,$$

$$a - (b - c) = a - [b + (-c)] = a + \{-[b + (-c)]\} =$$

$$= a + \{-b - (-c)\} = a + \{-b + c\} =$$

$$= a + (-b) + c = (a - b) + c,$$

$$a - (b + c) = a + [-(b + c)] = a + [(-b) + (-c)] =$$

$$= [a + (-b)] + (-c) = (a - b) + (-c) = (a - b) - c.$$

c. b. d. o.

Twierdzenie 30. Jeżeli $x > y$, to $x - y > 0$ i naodwrot.

Dowód. Załóżmy, że mamy $x > y$: stąd w myśl tw. 24^a mamy

$$x + (-y) > y + (-y),$$

co, wobec tw. 25 i wzoru (55), daje

$$x - y > 0.$$

Założmy teraz, że mamy $x - y > 0$; stąd, w myśl tw. 24^a, mamy

$$(x - y) + y > y,$$

co, z uwagi, że wobec tw. 25 i wzoru (55)

$$(x - y) + y = x + (-y) + y = x,$$

daje:

$$x > y.$$

Udowodniliśmy więc obie części naszego twierdzenia.

Twierdzenie 31. Jeżeli dla liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność

$$x < y, \quad (57)$$

to

$$-x > -y. \quad (58)$$

Dowód. W myśl tw. 24^a [dla $z = (-x) + (-y)$], mamy, wobec (57):

$$x + (-x) + (-y) < y + (-x) + (-y),$$

skąd, wobec wzoru (55) (i przemienności sumy):

$$(-y) < (-x),$$

co daje wzór (58).

Twierdzenie 32. Jeżeli dla ciągu liczb rzeczywistych u_n zachodzi wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x, \quad (59)$$

gdzie x jest liczbą rzeczywistą skończoną lub nieskończoną, to mamy też wzór:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = -x. \quad (60)$$

Dowód. Założmy naprzód, że x jest liczbą skończoną. Niech a i b będą jakiegokolwiek liczby rzeczywiste, takie iż

$$a < -x < b. \quad (61)$$

Wobec (61) i w myśl tw. 31 i 27, będzie

$$-a > x > -b$$

i przeto, w myśl tw. 14 będzie

$$-b < u_n < -a, \text{ dla } n > \mu,$$

co daje, w myśl tw. 31 i 27:

$$b > -u_n > a, \text{ dla } n > \mu$$

i dowodzi, w myśl tw. 14, że liczba $-x$ jest granicą ciągu $-u_n$, czyli, że zachodzi wzór (60), c. b. d. o.

Założmy teraz, że liczba x jest nieskończoną, np. $x = +\infty$.

W myśl tw. 14 mamy więc przy wszelkiem danem rzeczywistem a (wobec $-a < +\infty$):

$$u_n > -a, \text{ dla } n > \mu,$$

co, w myśl tw. 31, daje

$$-u_n < a, \text{ dla } n > \mu$$

i dowodzi (w myśl tw. 14), że $\lim_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = -\infty$.

Podobnie udowodnilibyśmy nasze twierdzenie w przypadku $x = -\infty$.

§ 23. Liczby dodatnie i ujemne. Wartość bezwzględna i jej własności.

Liczbę rzeczywistą > 0 nazywamy *dodatnią*, zaś liczbę rzeczywistą < 0 — *ujemną*. Powiadam, że jeżeli $x \neq 0$, to z liczb x oraz $-x$ jedna jest zawsze dodatnią, a druga ujemną.

W samej rzeczy, ponieważ, jak wiemy, każde dwie różne liczby rzeczywiste dadzą się połączyć jednym i tylko jednym ze znaków $>$ i $<$, więc skoro jest $x \neq 0$, to mamy albo $x > 0$, albo też $x < 0$. Jeżeli jest

$$x > 0,$$

to, w myśl tw. 31 będzie

$$-x < 0,$$

jeżeli zaś jest

$$x < 0$$

to, w myśl tw. 31 będzie

$$-x > 0,$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Tę z liczb x oraz $-x$, która jest dodatnią, nazywamy *wartością bezwzględną*, albo *modułem* liczby rzeczywistej x i oznaczamy przez

$$|x|$$

Jako wartość bezwzględną liczby 0 przyjmujemy 0.

Z definicji tej wynika natychmiast, że wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x jest określona w zupełności jako liczba rzeczywista $|x|$, spełniająca warunki:

$$|x| = x \text{ dla } x \geq 0.$$

oraz

$$|x| = -x, \text{ dla } x < 0.$$

Wobec tw. 27 wynika stąd natychmiast, że przy wszelkiem rzeczywistem x :

$$|-x| = |x|.$$

Twierdzenie 33. Nierówność

$$|x| \leq \varepsilon \quad (62)$$

jest (dla rzeczywistych x i ε) równoważna warunkowi:

$$-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon. \quad (63)$$

Dowód. Załóżmy, że dla liczb rzeczywistych x i ε zachodzi warunek (62). Ponieważ mamy zawsze $|x| \geq 0$, więc nierówność (62) dowodzi, że $\varepsilon \geq 0$. Jeżeli $x \geq 0$, to mamy $|x| = x$, zatem nierówność (62) daje $x \leq \varepsilon$, a że $\varepsilon \geq 0$, skąd w myśl tw. 31, $-\varepsilon \leq 0$, więc $-\varepsilon \leq x$; warunki (63) są więc spełnione. Jeżeli zaś $x < 0$, to $|x| = -x$ i nierówność (62) daje $-x \leq \varepsilon$, skąd w myśl tw. 31, $x \geq -\varepsilon$; z drugiej zaś strony, wobec $x < 0$ oraz $\varepsilon \geq 0$, mamy $x < \varepsilon$; warunki (63) są więc znowu spełnione. Dowiedliśmy więc, że nierówność (62) pociąga za sobą zawsze warunki (63).

Założmy teraz, że spełnione są warunki (63). Jeżeli $x \geq 0$, to mamy $|x| = x$ i prawa część nierówności (63) daje $|x| \leq \varepsilon$, czyli nierówność (62). Jeżeli zaś $x < 0$, to mamy $|x| = -x$, a że lewa część nierówności (63) daje $-\varepsilon \leq x$, skąd, w myśl tw. 31, $\varepsilon \geq -x$ więc mamy $\varepsilon \geq |x|$, co znowu daje nierówność (62). Warunki (63) pociągają więc za sobą zawsze nierówność (62).

Dowiedliśmy więc, że warunki (62) i (63) są równoważne, c. b. d. o.

Jako natychmiastowy wniosek z dowiedzonego twierdzenia otrzymujemy

Twierdzenie 33^a. Nierówność

$$|x| < \varepsilon$$

jest równoważna nierówności

$$-\varepsilon < x < \varepsilon.$$

W samej rzeczy, wystarczy oprzeć się na tw. 33 i zauważyć, że jeżeli $|x| = \varepsilon$, to mamy $x = \varepsilon$ lub $x = -\varepsilon$, i naodwrot.

Udowodnimy teraz t. zw. twierdzenia o module sumy i o module różnicy:

Twierdzenie 34. Dla wszelkich rzeczywistych x i y zachodzi nierówność

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (64)$$

Dowód. Mamy, w myśl tw. 33 (dla $\varepsilon = |x|$);

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

i podobnież

$$-|y| \leq y \leq |y|,$$

skąd, w myśl tw. 24^c:

$$(-|x|) + (-|y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

czyli, w myśl tw. 25 i 26:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

co, w myśl tw. 34 (dla $\varepsilon = |x| + |y|$) daje nierówność (64), c. b. d. o.

Udowodnione twierdzenie wyrażamy, mówiąc że *moduł sumy nie przenosi sumy modułów*.

Twierdzenie to daje się, jak łatwo widzieć, drogą łatwej indukcji uogólnić na dowolną liczbę składników. Mamy więc dla wszelkich n liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nierówność:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Twierdzenie 35. Dla wszelkich rzeczywistych x i y zachodzi nierówność:

$$|x - y| \geq |x| - |y|. \quad (65)$$

Dowód. Załóżmy, że dla pewnych rzeczywistych x i y nierówność (65) nie jest prawdziwą, że więc

$$|x - y| < |x| - |y|;$$

mielibyśmy stąd, dodając po obu stronach $|y|$, w myśl tw. 24^a

$$|x - y| + |y| < |x|,$$

co możemy napisać w postaci:

$$|(x - y) + y| > |x - y| + |y|,$$

wbrew twierdzeniu 34. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Tw. 35 wyrażamy mówiąc, że *moduł różnicy jest niemni od różnicy modułów*.

§ 24. Twierdzenie 36. *Na to, żeby granicą ciągu nieskończonego liczb rzeczywistych u_n była liczba rzeczywista (skończona) x trzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba (zależna od ε), taka iż*

$$|u_n - x| < \varepsilon \text{ dla } n > \mu.$$

Dowód. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą skończoną i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W tw. 24^a oraz wobec $\varepsilon > 0$, znajdujemy w jednej chwili:

$$x - \varepsilon < x < x + \varepsilon.$$

W myśl tw. 14 mamy stąd, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$:

$$x - \varepsilon < u_n < x + \varepsilon, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd

$$- \varepsilon < u_n - x < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu,$$

czyli w myśl tw. 33^a:

$$|u_n - x| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu.$$

Dowiedliśmy więc, że warunek nasz jest konieczny.

Założmy teraz, że warunek naszego twierdzenia jest spełni i niech a i b będą dowolne dane liczby rzeczywiste, takie iż

$$a < x < b.$$

Położmy

$$\varepsilon = b - x$$

— w myśl (66) oraz wobec tw. 30, liczba ε będzie dodatnią. Za w myśl naszego warunku, istnieje liczba μ_1 taka iż

$$|u_n - x| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu_1,$$

skąd, wobec (67) i w myśl tw. 33^a:

$$u_n - x < b - x, \text{ dla } n > \mu_1,$$

co daje w jednej chwili:

$$u_n < b, \text{ dla } n > \mu_1.$$

Podobnie, kładąc

$$\varepsilon = x - a,$$

wnosimy, wobec (66) i tw. 30, że $\varepsilon > 0$ i przeto, w myśl naszego warunku istnieje liczba μ_2 , taka iż

$$|u_n - x| < x - a, \text{ dla } n > \mu_2,$$

skąd, w myśl tw. 33^a

$$u_n - x > -(x - a), \text{ dla } n > \mu_2,$$

co daje w jednej chwili:

$$u_n > a, \text{ dla } n > \mu_2. \quad (69)$$

Dla wszelkich liczb rzeczywistych a i b , spełniających nierówność (66), istnieją więc liczby μ_1 i μ_2 , przy których zachodzą nierówności (68) i (69), skąd, w myśl tw. 14, wnosimy że $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.

Dowiedliśmy więc, że warunek nasz jest wystarczający.

Udowodniliśmy więc tw. 36 w zupełności.

Jako natychmiastowy wniosek z tw. 19 oraz 36 otrzymujemy:

Twierdzenie 37. *Dla każdej liczby rzeczywistej (skończonej) x i każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba wymierna w , taka iż*

$$|x - w| < \varepsilon.$$

Wynik ten wyrażamy też, mówiąc, że *dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba wymierna, przedstawiająca ją z dowolną dokładnością*.

Nie należy stąd jednak wysnuwać wniosku, że dla każdej danej liczby rzeczywistej istotnie potrafimy wyznaczyć liczbę wymierną, przedstawiającą ją z dowolną daną dokładnością (nawet, jeżeli przez słowo „potrafić“ będziemy rozumieli jedynie możliwość teoretyczną, t. j. możliwość wykonania rachunku w skończonym czasie, pomijając zupełnie trudności praktyczne odnośnego rachunku, oraz długość potrzebnego do jego wykonania czasu, mogącego nawet przerosnąć długość życia ludzkiego).

Jeżeli dla danej liczby rzeczywistej α potrafimy przy wszelkiem naturalnem n znaleźć liczbę wymierną, różniącą się (bezwzględnie) od α mniej niż o $\frac{1}{n}$, to liczbę α nazywamy według Borela *obliczalną* (nombre calculable)¹⁾.

¹⁾ Pojęcie obliczalności jest więc oczywiście względne: liczba, która przy dzisiejszym stanie nauki nie jest obliczalną, może się, z biegiem postępów nauki, stać obliczalną.

Nie każda dana liczba rzeczywista jest obliczalną: liczba może nie być obliczalną, nawet jeżeli zgóry wiadomo, że jest ona całkowitą. Aby dać przykład takiej właśnie liczby, oznaczmy przez k liczbę naturalną, spełniającą następujące dwa warunki: 1°. Każda liczba naturalna jest sumą k lub mniej czwartych potęg liczb naturalnych. 2°. Nie każda liczba naturalna jest sumą $k-1$ lub mniej czwartych potęg liczb naturalnych. W Teorii liczb dowodzi się¹⁾, że liczba naturalna k , spełniająca powyższe warunki, istnieje (oczywiście jedyne i że spełnia nierówności: $19 \leq k \leq 37$). Nie wiadomo jednak dotąd, czy mamy $k=19$, czy też $k>19$, ani też nie znamy żadnej metody, która by mogła choćby po najdłuższych rachunkach, doprowadzić do rozstrzygnięcia, który z tych dwóch przypadków zachodzi. Liczba k nie jest więc *obliczalną* w znaczeniu Borela (gdyż już nawet dla $n=1$ nie potrafimy obliczyć k z dokładnością do $1/n$).

Warto też zauważyć, że jeżeli mamy dwie liczby obliczalne: a i b , to nie zawsze potrafimy rozstrzygnąć, czy są one równe, czy też nie. Określimy np. liczbę a jako ułamek dziesiętny, którego całkowitą częścią jest zero, zaś n -tą cyfrą liczba 0 lub liczba 1, zależnie od tego czy liczba naturalna n rozkłada się, czy też nie, na sumę 19-tu czwartych potęg liczb całkowitych (≥ 0). Możnaby z łatwością dowiedzieć, że określoną tak liczbą a jest w znaczeniu Borela obliczalną; nie potrafimy jednak rozstrzygnąć, czy mamy $a=0$, czy też $a>0$ (gdyż równość $a=0$ jest oczywiście równoważną równości $k=19$).

§ 25. Twierdzenie 38. Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych x_n i y_n są zbieżne, to mamy równość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (70)$$

Twierdzenie to wyrażamy krócej, mówiąc: *Granica sumy jest sumą granic.*

Dowód. Załóżmy, że ciągi x_n i y_n są zbieżne, że więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad (71)$$

gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi skończonymi.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl tw. 2, istnieje liczba wymierna w taka iż $0 < w < \varepsilon$. W myśl tw. 36 (dla $\varepsilon = w/2$) będziemy mieli:

$$|x_n - x| < \frac{w}{2}, \quad \text{dla } n > \mu_1 \quad (72)$$

oraz

$$|y_n - y| < \frac{w}{2}, \quad \text{dla } n > \mu_2. \quad (73)$$

¹⁾ Zob. np. moja *Teoria liczb*, Warszawa 1914, str. 70.

Oznaczmy przez μ liczbę większą od μ_1 i μ_2 . Dla $n > \mu$ prawdziwe będą obie nierówności (72) i (73), skąd, w myśl tw. 34 i 24:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = w < \varepsilon$$

co dowodzi, w myśl tw. 36, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

skąd, wobec (71), otrzymujemy wzór (70), c. b. d. o.

Dowodzone twierdzenie daje się natychmiast uogólnić na dowolną, skończoną liczbę ciągów.

Niech teraz u_n i v_n będą dwa dane ciągi zbieżne liczb rzeczywistych. W myśl tw. 32, wobec zbieżności ciągu v_n , ciąg $-v_n$ również będzie zbieżnym, przytem będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-v_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} v_n. \quad (74)$$

Przyjmijmy teraz w tw. 38 $x_n = u_n$, $y_n = -v_n$: w myśl (70) będzie więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-v_n),$$

skąd, wobec (74):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 38^a. Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych u_n i v_n są zbieżne, to mamy równość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Twierdzenie to wyrażamy krócej, mówiąc: *granica różnicy jest różnica granic.*

§ 26. Twierdzenie 39. Na to żeby ciąg nieskończony liczb rzeczywistych x_n był zbieżny, potrzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba μ taka, aby dla $n > \mu$ oraz $n' > \mu$ było zawsze:

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon.$$

Dowód. Załóżmy, że ciąg x_n jest zbieżny: niech x oznacza jego granicę, i niech ε będzie dowolną daną liczbą dodatnią. W myśl tw. 2 istnieje liczba wymierna dodatnia $w < \varepsilon$. W myśl tw. 36 istnieje takie μ , iż

$$|x_n - x| < \frac{w}{2}, \quad \text{dla } n > \mu,$$

zatem też

$$|x'_n - x| < \frac{w}{2}, \text{ dla } n' > \mu.$$

Stąd, w myśl tw. o module sumy i o dodawaniu nierówności:

$$|x_n - x'_n| = |(x_n - x) + (x - x'_n)| \leq |x_n - x| + |x - x'_n| \\ < \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = w < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu, n' > \mu,$$

czyli

$$|x_n - x'_n| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu, n' > \mu,$$

co dowodzi, że warunek nasz jest konieczny.

Załóżmy teraz, że warunek nasz jest spełniony i niech ε oznacz daną liczbę dodatnią, zaś w — liczbę wymierną dodatnią $< \varepsilon$. W myśl naszego warunku istnieje dla liczby dodatniej $w/4$ liczba μ taka i

$$|x_n - x'_n| < \frac{w}{4}, \text{ dla } n > \mu, n' > \mu. \quad (75)$$

Oznaczmy przez s najmniejszą liczbę naturalną $> \mu$ i przyjmijmy w nierówności (75) $n' = s$: będzie więc

$$|x_n - x_s| < \frac{w}{4}, \text{ dla } n > \mu,$$

czyli, w myśl tw. 33:

$$-\frac{w}{4} < x_n - x_s < \frac{w}{4}, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd:

$$x_s - \frac{w}{4} < x_n < x_s + \frac{w}{4}, \text{ dla } n > \mu. \quad (76)$$

W myśl tw. 2 istnieją liczby wymierne a i b , spełniające warunki:

$$x_s - \frac{w}{2} < a < x_s - \frac{w}{4}. \quad (77)$$

$$x_s + \frac{w}{4} < b < x_s + \frac{w}{2}. \quad (78)$$

Wobec (76), (77) i (78) znajdujemy w jednej chwili:

$$a < x_n < b, \text{ dla } n > \mu;$$

z drugiej strony, wobec (77) i (78) dla liczb wymiernych a i b znajdujemy nierówność:

$$0 < b - a < x_s + \frac{w}{2} - \left(x_s - \frac{w}{2}\right) = w < \varepsilon,$$

czyli

$$0 < b - a < \varepsilon;$$

w myśl tw. 23 wnosimy więc, że ciąg x_n jest zbieżny. Warunek nasz jest więc wystarczający.

Twierdzenie 39 udowodniliśmy zatem w zupełności.

§ 27. Jeżeli dla ciągu nieskończonego u_n istnieje liczba rzeczywista (skończona) A , taka iż

$$A < u_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

to ciąg u_n nazywamy *ograniczonym zdółu*, jeżeli zaś istnieje liczba rzeczywista (skończona) B , taka iż

$$u_n < B, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

to ciąg u_n nazywamy *ograniczonym zgóry*. Ciąg nieskończony, ograniczony jednocześnie zdółu i zgóry nazywamy poprostu *ograniczonym*.

Jeżeli więc ciąg u_n jest ograniczony, to mamy przy pewnych (skończonych) rzeczywistych A i B :

$$A < u_n < B, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (79)$$

Oznaczmy przez M większą z liczb $|A|$ i $|B|$ (lub ich wspólną wartość, jeżeli są równe). Będzie więc:

$$-M \leq -|A| \leq A$$

oraz

$$M \geq |B| \geq B,$$

skąd, wobec (79):

$$-M < u_n < M, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

czyli

$$|u_n| < M, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (80)$$

Dla każdego ciągu nieskończonego ograniczonego u_n istnieje więc taka liczba rzeczywista (skończona) M , iż zachodzi nierówność (80) (i, oczywiście, naodwrot). W szczególności, istnieje dla każdego ciągu ograniczonego u_n liczba wymierna M , taka iż zachodzi nierówność (80). (Gdyby bowiem liczba M była niewymierna, to wystarczyłoby ją zastąpić przez liczbę wymierną, leżącą między M i $M + 1$).

Łatwo widzieć, że na to iżby ciąg u_n był ograniczony, potrzeba i wystarcza, iżby liczby $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ były skończone.

Twierdzenie 40. Ciąg nieskończony zbieżny jest ograniczony.
Dowód. Załóżmy, że ciąg u_n jest zbieżny i położmy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.

Położmy $x - 1 = a$, $x + 1 = b$: będzie $a < x < b$ i przet w myśl tw. 14:

$$a < u_n < b, \text{ dla } n > \mu, \quad (8)$$

Oznaczmy przez M liczbę większą od każdej z $E\mu + 2$ liczb

$$|a|, |b|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{E\mu}| \quad (8)$$

Wobec (81) i (82) będziemy mieli, jak łatwo widzieć

$$|u_n| < M, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

co dowodzi, że ciąg u_n jest ograniczony.

Dowiedliśmy więc twierdzenia 40.

§ 28. Twierdzenie 41. Dla każdego ciągu nieskończonego u istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_k , taki iż

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Dowód. Położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L; \quad (83)$$

rozróżnimy tu trzy przypadki: 1) L jest liczbą skończoną, 2) $L = +\infty$, 3) $L = -\infty$.

1) L jest liczba skończona. Niech k oznacza dowolną daną liczbę naturalną. W myśl tw. 6 i wobec $L - \frac{1}{k} < L$, nierówność

$$u_n > L - \frac{1}{k}$$

zachodzi (przy danem k) dla nieskończenie wielu różnych wartości n . W szczególności więc, dla $k = 1$, istnieją wskaźniki n takie iż

$$u_n > L - 1:$$

niech n_1 oznacza najmniejszy z nich. Dalej, z uwagi, że dla nieskończenia wielu n musi być

$$u_n > L - \frac{1}{2},$$

wnosimy, że istnieją wskaźniki n , dla których jednocześnie

$$n > n_1, \text{ oraz } u_n > L - \frac{1}{2};$$

niech n_2 oznacza najmniejszy z nich.

Ogólnie, wyznaczwszy wskaźniki $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$, z uwagi, że dla nieskończenia wielu n musi być

$$u_n > L - \frac{1}{k},$$

wnosimy, że istnieją wskaźniki n , dla których jednocześnie

$$n > n_{k-1}, \text{ oraz } u_n > L - \frac{1}{k};$$

niech n_k oznacza najmniejszy z nich.

Ciąg nieskończony $n_1, n_2, n_3, \dots$ jest w ten sposób wyznaczony w zupełności.

Powiadamy, że

$$\lim u_{n_k} = L \quad (84)$$

W samej rzeczy, niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią, zaś w — liczbę wymierną dodatnią $< \varepsilon$. Dla $k > \frac{1}{w}$ będzie

$$L - \frac{1}{k} > L - w,$$

zaś, w myśl definicji ciągu u_{n_k} ($k = 1, 2, 3, \dots$), mamy przy wszelkiem naturalnem k :

$$u_{n_k} > L - \frac{1}{k};$$

jest więc (wobec $w < \varepsilon$):

$$u_{n_k} > L - w > L - \varepsilon, \text{ dla } k > \frac{1}{w} \quad (85)$$

Z drugiej strony, w myśl tw. 6 i wobec $L + w > L$, nierówność

$$u_n > L + w$$

zachodzić może co najwyżej dla skończonej liczby różnych wartości n : dla dostatecznie wielkich k , np. dla $k > \mu$, będzie więc stale

$$u_{n_k} \leq L + w < L + \varepsilon \quad (86)$$

Oznaczając przez ν liczbę większą od $\frac{1}{w}$ i od μ , będziemy więc, w myśl (85) i (86), mieli:

$$L - \varepsilon < u_{n_k} < L + \varepsilon, \text{ dla } n > \nu$$

skąd

$$|u_{n_k} - L| < \varepsilon, \text{ dla } n > \nu,$$

co, w myśl tw. 36, dowodzi wzoru (84).

2) $L = +\infty$. Wobec (83) i w myśl tw. 6, dla dowolnej danej liczby naturalnej k , z uwagi, że $k < L = +\infty$, nierówność

$$u_n > k$$

będzie spełnioną przez nieskończenie wiele różnych n . Oznaczmy przez n_1 najmniejszy wskaźnik, dla którego

$$u_{n_1} > 1;$$

przez n_2 oznaczmy najmniejszy wskaźnik $> n_1$, dla którego

$$u_{n_2} > 2,$$

ogólnie, przez n_k oznaczmy najmniejszy wskaźnik $> n_{k-1}$, dla którego

$$u_{n_k} > k.$$

Ciąg wskaźników n_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) będzie w ten sposób określony w zupełności, przyczem będzie

$$u_{n_k} > k, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (87)$$

Wobec (87) będzie przy wszelkiem danem rzeczywistym a :

$$u_{n_k} > a, \text{ dla } k > \mu,$$

skąd w myśl tw. 14, wnosimy, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = +\infty.$$

3) $L = -\infty$. Wobec tw. 6, dla dowolnej danej liczby rzeczywistej b (z uwagi, że $b - 1 > -\infty$), nierówność

$$u_n > b - 1$$

może zachodzić co najwyżej dla skończonej liczby różnych n : będzie więc

$$u_n \geq b - 1 < b, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, w myśl tw. 14, wnosimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

(Dowiedliśmy więc też zarazem, że równość $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ pociąga za sobą równość: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$).

Twierdzenie nasze udowodniliśmy zatem we wszystkich trzech przypadkach.

Analogicznie udowodnilibyśmy

Twierdzenie 41^a. Dla każdego ciągu nieskończonego u_n istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), taki iż

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Jako natychmiastowy wniosek z tw. 41, otrzymujemy

Twierdzenie 42. Jeżeli ciąg u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest ograniczony, to istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), taki iż ciąg u_{n_k} ($k = 1, 2, 3, \dots$) jest zbieżny.

Jeżeli bowiem ciąg u_n jest ograniczony, to liczba $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$ jest skończoną i przeto ciąg u_{n_k} , spełniający tw. 41, jest zbieżny.

§ 29. Iloczyn liczb rzeczywistych.

Niech x_n i y_n będą dwa dane ciągi nieskończone zbieżne liczb wymiernych. Powiadam, że ciąg

$$u_n = x_n y_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (88)$$

będzie zbieżny.

W samej rzeczy, niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Ponieważ ciąg x_n jest zbieżny, więc, w myśl tw. 40, istnieje liczba wymierna (oczywiście dodatnia) M taka, iż

$$|x_n| < M, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (89)$$

Podobnie, wobec zbieżności ciągu y_n , istnieje liczba wymierna dodatnia N , taka iż

$$|y_n| < N, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (90)$$

Niech w oznacza liczbę wymierną dodatnią $< \varepsilon$.

Położmy

$$\eta = \frac{w}{M + N} \quad (91)$$

— będzie to więc liczba wymierna dodatnia.

Wobec zbieżności ciągów x_n i y_n , oraz w myśl tw. 39, istnieją liczby μ i ν takie iż

$$|x_n - x_{n'}| < \eta, \text{ dla } n > \mu, n' > \mu \quad (92)$$

oraz

$$|y_n - y_{n'}| < \eta, \text{ dla } n > \nu, n' > \nu \quad (93)$$

Z uwagi, że liczby $x_n, y_n, x_{n'}, y_{n'}$ są wymierne, mamy tożsamość:

$$u_n - u_{n'} = x_n y_n - x_{n'} y_{n'} = (x_n - x_{n'}) y_n + x_{n'} (y_n - y_{n'}); \quad (94)$$

dla liczb wymiernych moduł iloczynu jest oczywiście iloczynem modułów: wzór (94) daje więc, w myśl tw. o module sumy:

$$|u_n - u_{n'}| \leq |x_n - x_{n'}| \cdot |y_n| + |x_{n'}| \cdot |y_n - y_{n'}|,$$

skąd, wobec (89), (90), (91), (92) i (93), dla $n > \mu + \nu$:

$$u_n - u_{n'} < \eta M + N \eta,$$

czyli, wobec (91), z uwagi że $\eta M + N \eta = w < \varepsilon$:

$$|u_n - u_{n'}| < \varepsilon, \text{ dla } n > \lambda$$

(gdzie $\lambda = \mu + \nu$), co, w myśl tw. 39, dowodzi, że ciąg (88) jest zbieżny, *c. b. d. o.*

Niech teraz x i y będą dwie dane liczby rzeczywiste (skończone), zaś x_n , x'_n , y_n i y'_n — ciągi nieskończone liczb wymiernych, takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = y; \quad (95)$$

powiadam że ciągi

$$u_n = x_n y_n \text{ oraz } u'_n = x'_n y'_n \quad (96)$$

zmierzają do tej samej granicy.

W samej rzeczy, każdy z ciągów (96) jest, w myśl tego cośmy dowiedli wyżej, zbieżny.

Położmy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z, \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n = z'; \quad (97)$$

będą to więc liczby rzeczywiste skończone, przyczem, w myśl (97) oraz wobec tw. 38^a, będzie:

$$z - z' = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u'_n). \quad (98)$$

Niech teraz ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią, zaś w — liczbę dodatnią $< \varepsilon$.

W myśl (95), ciągi x'_n oraz y_n są zbieżne: wobec tw. 40 istnieją więc liczby wymierne (dodatnie) M i N , takie iż

$$|x'_n| < M, |y_n| < N, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (99)$$

Dalej, wobec (95) i w myśl tw. 38^a, znajdujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x'_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y'_n) = 0,$$

skąd, w myśl tw. 36, wnosimy, że dla liczb dodatniej

$$\eta = \frac{w}{M + N} \quad (100)$$

istnieją liczby μ i ν , takie iż

$$|x_n - x'_n| < \eta, \text{ dla } n > \mu, \quad (101)$$

zaś

$$|y_n - y'_n| < \eta, \text{ dla } n > \nu. \quad (102)$$

Wobec (96) (oraz wymierności liczb x_n , x'_n , y_n , y'_n), mamy tożsamość:

$$u_n - u'_n = x_n y_n - x'_n y'_n = (x_n - x'_n) y_n + x'_n (y_n - y'_n),$$

skąd:

$$|u_n - u'_n| \leq |x_n - x'_n| \cdot |y_n| + |x'_n| \cdot |y_n - y'_n|,$$

co daje w jednej chwili, wobec (101), (99), (102) i (100) (z uwagi, że $\eta M + N \eta = w < \varepsilon$):

$$|u_n - u'_n| < \varepsilon, \text{ dla } n > \lambda = \mu + \nu,$$

skąd, w myśl tw. 39, wnosimy, że ciąg $t_n = u_n - u'_n$ zmierza do zera. W myśl (98) mamy więc $z = z'$, skąd, wobec (97), wnosimy, że ciągi (96) zmierzają do wspólnej granicy, *c. b. d. o.*

Jeżeli więc x i y są dwie dane liczby rzeczywiste, to jakiegokolwiek obralibyśmy ciągi liczb wymiernych x_n i y_n , których granicami są odpowiednio liczby x i y , ciąg iloczynów $u_n = x_n y_n$ będzie zawsze zmierzał do jednej i tej samej (skończonej) granicy. Granicę tę, jako zależną jedynie od x i y , oznaczmy przez $\varphi(x, y)$. Symbol $\varphi(x, y)$ ma więc określoną (skończoną) wartość dla każdych danych liczb rzeczywistych x i y .

Powiadam, że jeżeli liczby x i y są obie wymierne, to

$$\varphi(x, y) = xy. \quad (103)$$

W samej rzeczy, kładąc

$$x_n = x, y_n = y, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (104)$$

będziemy, w myśl tw. 17, mieli wzory:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y,$$

które, wobec definicji liczby $\varphi(x, y)$, pociągają za sobą wzór:

$$\varphi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n), \quad (105)$$

a że, z drugiej strony, w myśl (104) (wobec wymierności liczb x i y) oczywiście

$$x_n y_n = xy, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

więc wzór (105) daje, w myśl tw. 17, wzór (103), *c. b. d. o.*

Wzór (103) jest więc prawdziwy dla wszelkich liczb rzeczywistych x i y . Nie określiliśmy dotąd, co mamy rozumieć przez iloczyn xy , jeżeli jedna z liczb x, y , lub obie są niewymierne. Otóż umówimy się rozumieć w tym przypadku przez xy liczbę $\varphi(x, y)$.

W ten sposób iloczyn xy będzie miał oznaczoną (skończoną) wartość dla wszelkich liczb rzeczywistych (skończonych) x i y .

§ 30. Własności iloczynu.

I. Przemienność. Mamy dla wszelkich rzeczywistych x i y :

$$xy = yx.$$

W samej rzeczy, niech x_n oraz y_n będą ciągi nieskończone liczb wymiernych, których granicami są odpowiednio liczby x i y (ciągi takie istnieją, w myśl tw. 19). W myśl definicji iloczynu mamy:

$$xy = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$$

$$yx = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n x_n),$$

a że prawe strony tych wzorów są równe (gdyż, wobec przemienności iloczynu liczb wymiernych, mamy $x_n y_n = y_n x_n$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$), więc mamy $xy = yx$, c. b. d. o.

II. Łączność. Jeżeli x, y i z są trzy dane liczby rzeczywiste, to

$$(xy)z = x(yz) \quad (106)$$

Dowód. Niech x_n, y_n, z_n będą ciągi nieskończone liczb wymiernych, takie iż

$$\lim x_n = x, \lim y_n = y, \lim z_n = z. \quad (107)$$

W myśl definicji iloczynu, będziemy mieli:

$$xy = \lim (x_n y_n), \quad yz = \lim (y_n z_n). \quad (108)$$

Stąd, kładąc

$$x_n y_n = u_n, \quad y_n z_n = v_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

oraz

$$xy = u, \quad yz = v, \quad (109)$$

będziemy mieli dwa ciągi liczb wymiernych u_n i v_n , takie iż

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n;$$

zatem, wobec (107), oraz w myśl definicji iloczynu dwóch liczb rzeczywistych:

$$uz = \lim (u_n z_n), \quad xv = \lim (x_n v_n). \quad (110)$$

Lecz, w myśl (108) i wobec łączności iloczynu liczb wymiernych, mamy:

$$u_n z_n = x_n v_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots;$$

prawie strony wzorów (110) są więc równe, skąd wnosimy, że

$$uz = xv,$$

co, wobec (109), daje wzór (106), który chcieliśmy udowodnić.

III. Rozdzielność. Mamy, dla wszelkich rzeczywistych x, y, z :

$$\begin{aligned} (x + y)z &= xz + yz \\ (x - y)z &= xz - yz \end{aligned} \quad (111)$$

Dowód. Niech x_n, y_n, z_n będą ciągi nieskończone liczb wymiernych, takie, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z. \quad (112)$$

Wobec (112) będziemy mieli:

$$\begin{aligned} x + y &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n), & x - y &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n), \\ xz &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n z_n), & yz &= \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n z_n); \end{aligned}$$

stąd, kładąc

$$x_n + y_n = u_n, \quad x_n - y_n = t_n, \quad x_n z_n = v_n, \quad y_n z_n = w_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (113)$$

oraz

$$x + y = u, \quad x - y = t, \quad xz = v, \quad yz = w, \quad (114)$$

będziemy mieli

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n, \quad v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \quad w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n, \quad (115)$$

zatem, wobec (112) i (115):

$$\left. \begin{aligned} uz &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n z_n), & tz &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n z_n), & v + w &= \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n + w_n) \\ v - w &= \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - w_n). \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Lecz w myśl (113) i wobec rozdzielności iloczynu liczb wymiernych:

$$u_n z_n = v_n + w_n, \quad t_n z_n = v_n - w_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (116):

$$uz = v + w, \quad tz = v - w,$$

co, wobec (114), daje wzory (111), c. b. d. o.

IV. Przy wszelkiem rzeczywistym x mamy

$$x \cdot 1 = x. \quad (117)$$

Dowód. Niech x_n oznacza ciąg nieskończony liczb wymiernych, zmierzający do x , i połóżmy:

$$y_n = 1, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots; \quad (118)$$

będzie więc

$$x_n y_n = x_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

a że, wobec (118), $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$, więc, w myśl definicji iloczynu, mamy stąd wzór (117). c. b. d. o.

Wobec przemienności iloczynu, wzór (117) daje

$$1 \cdot x = x,$$

przy wszelkiem rzeczywistem x .

IV^a. Przy wszelkiem rzeczywistem x :

$$(-1) x = -x. \quad (119)$$

Dowód. Niech x_n i u_n będą ciągi nieskończone liczb wymiernych, takie iż:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad u_n = -1, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots;$$

będzie więc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1;$$

stąd, wobec definicji iloczynu:

$$(-1) x = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n x_n,$$

czyli

$$(-1) x = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n), \quad (120)$$

gdyż, wobec wymierności wyrazów x_n :

$$u_n x_n = (-1) x_n = -x_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, oraz w myśl tw. 32, wzór (120) daje wzór (119). c. b. d. o.

V. Przy wszelkiem rzeczywistem x :

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

Dowód. Przyjmijmy w drugim ze wzorów (111): $x = y = 1$: otrzymamy, przy wszelkiem rzeczywistem z :

$$(1 - 1) z = 1 \cdot z - 1 \cdot z,$$

skąd, wobec własności IV iloczynu oraz w myśl tw. 28:

$$0 \cdot z = 0;$$

wobec przemienności iloczynu mamy zatem przy wszelkiem rzeczywistem z :

$$z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0,$$

co dowodzi prawdziwości własności V.

Pojęcie iloczynu liczb rzeczywistych możemy z łatwością uogólnić na dowolną (skończoną) liczbę czynników.

Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą n danych liczb rzeczywistych. Połóżmy

$$\begin{aligned} p_2 &= x_1 x_2 \\ p_3 &= p_2 x_3 \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= p_{n-1} x_n. \end{aligned}$$

Wzory te wyznaczają nam kolejno liczby $p_2, p_3, \dots, p_n$. Liczbę p_n , otrzymaną w ten sposób, nazywamy *iloczynem* liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i oznaczamy przez

$$x_1 x_2 \dots x_n.$$

Opierając się na własnościach przemienności, łączności i rozdzielności dla iloczynu dwóch czynników, wyprowadzamy, drogą indukcji, własności te dla dowolnej (skończonej) liczby czynników

§ 31. Mnożenie nierówności.

Twierdzenie 43. Jeżeli x i y są liczby rzeczywiste, takie iż

$$x > 0 \quad \text{oraz} \quad y > 0, \quad (121)$$

to

$$xy > 0.$$

Dowód. Niech x_n oraz y_n będą ciągi liczb wymiernych, takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y. \quad (122)$$

Wobec (121) oraz w myśl tw. 2, istnieją liczby wymierne u i v , takie iż

$$x > u > 0, \quad \text{oraz} \quad y > v > 0. \quad (123)$$

Wobec (122) i (123), oraz w myśl tw. 14, musi być

$$x_n > u, \quad \text{oraz} \quad y_n > v, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd, wobec prawidła mnożenia nierówności dla liczb wymiernych:

$$x_n y_n > uv, \quad \text{dla } n > \mu,$$

co, w myśl tw. 10, daje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq uv,$$

zatem, wobec (122) oraz definicji iloczynu:

$$xy \geq uv, \quad (124)$$

a że wobec (123) oraz prawidła mnożenia nierówności dla liczb wymiernych, $uv > 0$, więc nierówność (124) daje: $xy > 0$, c. b. d. o.

Z dowiedzonego twierdzenia wynika natychmiast, wobec własności V iloczynu:

Twierdzenie 43^a. *Jeżeli x i y są liczby rzeczywiste, takie iż*

$$x \geq 0 \quad \text{oraz} \quad y \geq 0,$$

to

$$xy \geq 0.$$

Twierdzenie 44. *Jeżeli*

$$x > 0 \quad \text{oraz} \quad y < 0, \quad (125)$$

to

$$xy < 0.$$

Dowód. Z założeń (125) wynika, że

$$x > 0, \quad -y > 0,$$

skąd, w myśl tw. 43:

$$x(-y) > 0; \quad (126)$$

lecz, w myśl własności I, II i IV^a iloczynu:

$$\begin{aligned} x(-y) &= x[(-1)y] = [x(-1)]y = [(-1)x]y = \\ &= (-1)(xy) = -xy, \end{aligned}$$

i przeto nierówność (126) daje:

$$-xy > 0$$

skąd: $xy < 0$, c. b. d. o.

Twierdzenie 45. *Jeżeli*

$$x < 0 \quad \text{oraz} \quad y < 0, \quad (127)$$

to

$$xy > 0.$$

Dowód. Z założeń (127) wynika, że

$$-x > 0, \quad \text{oraz} \quad -y > 0$$

skąd, w myśl tw. 43:

$$(-x)(-y) > 0; \quad (128)$$

lecz, w myśl własności I, II, IV i IV^a iloczynu:

$$(-x)(-y) = [(-1) \cdot x][(-1)y] = 1 \cdot (xy) = xy;$$

nierówność (128) daje więc: $xy > 0$, c. b. d. o.

Twierdzenie 46. *Iloczyn dwóch liczb rzeczywistych jest wtedy i tylko wtedy zerem, jeżeli conajmniej jeden z czynników jest zerem,*

Dowód. Wobec własności V iloczynu, wystarczy udowodnić tylko, że jeżeli iloczyn dwóch liczb rzeczywistych jest zerem, to conajmniej jeden z czynników jest zerem. Załóżmy więc, że liczby rzeczywiste x i y są takie, iż

$$xy = 0.$$

Gdyby żadna z liczb x , y nie była zerem, to zachodziłoby oczywiście jedno z dwojga: albo liczby x , y byłyby jednego znaku (obie dodatnie, lub obie ujemne), albo też liczby x , y byłyby różnych znaków (jedna z nich dodatnia, druga ujemna).

W pierwszym przypadku mielibyśmy, w myśl tw. 43, względnie tw. 45:

$$xy > 0,$$

w drugim zaś — w myśl tw. 44:

$$xy < 0,$$

w każdym więc z tych przypadków $xy \neq 0$, wbrew założeniu.

Musi więc conajmniej jedna z liczb x , y być zerem. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Opierając się na prawie łączności mnożenia, możemy dowiedzione twierdzenie drogą łatwej indukcji uogólnić na dowolną, skończoną liczbę czynników:

Iloczyn skończonej liczby, liczb rzeczywistych jest wtedy i tylko wtedy zerem, jeżeli conajmniej jeden z czynników jest zerem.

Twierdzenie 47. *Jeżeli x , y , z są liczby rzeczywiste takie, iż*

$$x > y, \quad \text{zaś} \quad z > 0, \quad (129)$$

to

$$xz > yz.$$

Dowód. Z założenia (129) wynika, w myśl tw. 30:

$$x - y > 0;$$

stad, wobec $z > 0$, oraz w myśl tw. 43:

$$(x - y)z > 0,$$

skąd, wobec rozdzielności iloczynu (drugi ze wzorów (111)):

$$xz - yz > 0,$$

czyli w myśl tw. 30:

$$xz > yz, \text{ c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 47^a. *Jeżeli*

$$x > y, \text{ oraz } z < 0, \quad (130)$$

to

$$xz < yz.$$

W samej rzeczy, wobec (130), mamy:

$$x > y, \text{ oraz } -z > 0,$$

skąd, w myśl tw. 47:

$$x(-z) > y(-z),$$

czyli (w myśl własności iloczynu):

$$-xz > -yz,$$

co daje, w myśl tw. 31:

$$xz < yz, \text{ c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 48. *Jeżeli*

$$x > y \geq 0, \quad (131)$$

oraz

$$x' > y' \geq 0, \quad (132)$$

to

$$xx' > yy'.$$

Dowód. Z założeń (131) i (132) wynika w myśl tw. 47:

$$xx' > yx', \text{ oraz } x'y > y'y,$$

skąd, z uwagi, że wobec przemienności iloczynu, $yx' = x'y$, oraz $y'y = yy'$, wnosimy o nierówności

$$xx' > yy', \text{ c. b. d. o.}$$

Zauważymy, że z założeń

$$x > y \text{ oraz } x' > y' > 0$$

nie wynika $xx' > yy'$. Np. mamy

$$-2 > -3, \text{ oraz } 5 > 1 > 0,$$

lecz $-10 < -3$.

Oznaczmy symbolem

$$\operatorname{sgn} x$$

(czytaj *signum* x) liczbę $+1$, -1 lub 0 , zależnie od tego, czy jest $x > 0$, < 0 , czy $= 0$. W myśl tw. 43–46, mamy, jak łatwo widzieć, dla wszelkich rzeczywistych x i y :

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y.$$

(Jeżeli bowiem jedna z liczb x , y (lub obie) jest zerem, to obie strony naszej równości są równe zeru; jeżeli obie liczby x , y są jednego znaku, to obie strony są $= +1$, jeżeli wreszcie liczby x , y są różnych znaków, to obie strony są $= -1$).

Z definicji symbolu $|x|$ wynika, dalej, natychmiast, że przy wszelkiem rzeczywistem x mamy:

$$|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x,$$

jakoteż

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

Jest więc, wobec przemienności i łączności iloczynu, przy wszelkich rzeczywistych x i y :

$$\begin{aligned} |xy| &= \operatorname{sgn}(xy) \cdot xy = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y \cdot x \cdot y = \\ &= (\operatorname{sgn} x \cdot x) \cdot (\operatorname{sgn} y \cdot y) = |x| \cdot |y|. \end{aligned}$$

Mamy więc

Twierdzenie 49. *Przy wszelkich rzeczywistych x i y zachodzi wzór:*

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

Twierdzenie to wyrażamy, mówiąc, że *moduł iloczynu jest iloczynem modułów*. Uogólnienie na dowolną skończoną liczbę czynników jest natychmiastowe.

§ 32. Twierdzenie 50. *Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych x_n i y_n są zbieżne, to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (133)$$

Twierdzenie to wyrażamy krócej, mówiąc:

Granica iloczynu jest iloczyn granic.

Dowód. Załóżmy, że ciągi x_n i y_n są zbieżne, że więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad (134)$$

gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi (skończonymi). Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią, zaś w — liczbę wymierną dodatnią $< \varepsilon$.

W myśl tw. 40 istnieje liczba wymierna M taka, iż

$$|x_n| < M, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots; \quad (135)$$

oznaczymy, dalej, przez N liczbę wymierną, spełniającą nierówność

$$|y| < N. \quad (136)$$

Wobec (134) i w myśl tw. 36, dla liczby wymiernej

$$\eta = \frac{w}{M+N} \quad (137)$$

istnieje takie μ , iż

$$|x_n - x| < \eta, \quad |y_n - y| < \eta, \quad \text{dla } n > \mu. \quad (138)$$

Wobec rozdzielnosci i przemienności iloczynu, mamy, dalej, tożsamość:

$$x_n y_n - xy = x_n (y_n - y) + y (x_n - x),$$

która, wobec (135), (136), (138), oraz twierdzeń o module sumy i iloczynu, daje, w myśl tw. 48:

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| < M\eta + N\eta, \quad \text{dla } n > \mu, \quad \text{skąd, wobec (137) i z uwagi, że } w < \varepsilon:$$

$$|x_n y_n - xy| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

co, wobec tw. 36, dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy,$$

skąd, wobec (134), otrzymujemy wzór (133). c. b. d. o.

Dowiedzione twierdzenie daje się uogólnić, drogą łatwej indukcji, na dowolną skończoną liczbę ciągów.

§ 33. Dzielienie.

Niech a i b będą dwie dane liczby rzeczywiste, przytem $b \neq 0$. Powiadam, że istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista x , spełniająca równanie

$$bx = a. \quad (139)$$

Założmy, że dwie różne liczby rzeczywiste x' oraz x'' spełniają równanie (139) i że np.

$$x' < x'' \quad (140)$$

Wobec $b \neq 0$ mamy albo $b > 0$, albo też $b < 0$. Jeżeli $b > 0$, to, wobec (140) i w myśl tw. 47, byłoby

$$bx' < bx'',$$

jeżeli zaś $b < 0$, to, wobec (140) i w myśl tw. 47^a, byłoby

$$bx' > bx'',$$

więc w każdym razie $bx' \neq bx''$, gdy tymczasem z założenia, że liczby x' i x'' spełniają równanie (139), wynika, że $bx' = bx''$.

Dowiedliśmy więc, że istnieje co najwyżej jedna liczba rzeczywista x , spełniająca równanie (139).

Udowodnimy obecnie, że liczba taka istnieje.

Możemy oczywiście założyć, że $b > 0$, gdyż, w razie $b < 0$ wystarczyłoby pomnożyć obie strony równania (139) przez -1 (przez co przejdzie ono na równoważne mu równanie $-bx = -a$, w którym współczynnik przy x będzie już dodatni).

Niech r oznacza liczbę wymierną, taką, iż

$$0 < r < b \quad (141)$$

(liczba taka istnieje, wobec $b > 0$ i w myśl tw. 2) i niech a_n i b_n będą dwa ciągi liczb wymiernych, takie, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b. \quad (142)$$

W myśl tw. 14 i wobec (141) i (142) będzie

$$b_n > r, \quad \text{dla } n > \mu, \quad (143)$$

zaś wobec (142) i w myśl tw. 40 istnieją liczby wymierne M i N , takie, iż

$$|a_n| < M, \quad |b_n| < N, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (144)$$

Położmy

$$x_n = 0, \quad \text{dla } n \leq \mu, \quad \text{oraz } x_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{dla } n > \mu; \quad (145)$$

ciąg x_n będzie więc ciągiem nieskończonym liczb wymiernych. Powiadam, że ciąg x_n będzie zbieżny.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią, zaś w — liczbę

wymierną $< \varepsilon$. W myśl tw. 39 i wobec (142), dla liczby (wymiernej)

$$\eta = \frac{r^2 w}{M + N} \quad (146)$$

istnieje liczba ν taka, iż

$$|a_n - a_{n'}| < \eta \text{ oraz } |b_n - b_{n'}| < \eta, \text{ dla } n > \nu, n' > \nu. \quad (147)$$

Wobec (145) mamy dla $n > \mu$ i $n' > \mu$, dla liczb wymiernych x_n i $x_{n'}$, tożsamość

$$x_n - x_{n'} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n'}}{b_{n'}} = \frac{a_n b_{n'} - b_n a_{n'}}{b_n b_{n'}} = \frac{a_n (b_{n'} - b_n) + b_n (a_n - a_{n'})}{b_n b_{n'}}$$

skąd, w jednej chwili:

$$|x_n - x_{n'}| \leq \frac{|a_n| \cdot |b_n - b_{n'}| + |b_n| \cdot |a_n - a_{n'}|}{|b_n| \cdot |b_{n'}|}, \quad (148)$$

dla $n > \mu, n' > \mu$.

Oznaczmy przez λ liczbę większą od μ i ν . Dla $n > \lambda$ i $n' > \lambda$ będą tembardziej liczby n i n' obie większe od μ i od ν i przeto, w myśl (148) oraz wobec (144), (147), (143) i (146) będzie

$$|x_n - x_{n'}| \leq \frac{M\eta + N\eta}{r^2} = w, \text{ dla } n > \lambda, n' > \lambda,$$

skąd, wobec $w < \varepsilon$:

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon, \text{ dla } n > \lambda, n' > \lambda,$$

co, w myśl tw. 39, dowodzi, że ciąg x_n jest zbieżny.

Położymy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (149)$$

— będzie to więc liczba rzeczywista skończona.

Wobec (145) mamy:

$$b_n x_n = a_n, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, wobec (142):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (150)$$

Z drugiej strony, wobec (142) i (149), w myśl tw. 50:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = bx. \quad (151)$$

Wzory (150) i (151) dają w jednej chwili:

$$bx = a.$$

Dowiedliśmy więc, że równanie (139) spełnia jedna i tylko jedna liczba rzeczywista x : liczbę tę oznaczamy przez $\frac{a}{b}$ (lub $a:b$) i nazywamy *ilorazem* liczby a przez liczbę b . Symbol

$$\frac{a}{b}$$

ma więc oznaczoną (skończoną) wartość przy wszelkiem rzeczywistem a i wszelkiem różnym od zera, rzeczywistem b . W myśl definicji symbolu $\frac{a}{b}$ i wobec przemienności iloczynu, mamy zawsze

$$b \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{b}{b}} \cdot b = a. \quad (152)$$

W szczególności, $\frac{1}{b}$ jest oznaczoną (skończoną) liczbą rzeczywistą przy wszelkiem różnym od zera, rzeczywistem b : nazywamy ją *odwrotnością* liczby b . Każda więc, różna od zera, liczba rzeczywista posiada oznaczoną odwrotność. W myśl (152) (dla $a=1$) mamy:

$$b \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{b}{b}} \cdot b = 1, \quad (153)$$

przy wszelkiem rzeczywistem $b \neq 0$. Wobec (153) oraz twierdzeń 44 i 46 wnosimy natychmiast, że liczby b oraz $\frac{1}{b}$ są zawsze tego samego znaku.

§ 34. Twierdzenie 51. (Odwracanie nierówności). Jeżeli

$$x > y > 0, \quad (154)$$

to

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y}. \quad (155)$$

Dowód. Załóżmy, że liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność (154), oraz, że mamy:

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}. \quad (156)$$

Liczby $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$ są, jak wiemy, odpowiednio tych samych znaków,

co liczby x i y , zatem, w myśl (154), obie dodatnie. Wobec (154) i (156) oraz w myśl tw. 47 i 48 mielibyśmy więc nierówność:

$$x \cdot \frac{1}{x} > y \cdot \frac{1}{y},$$

skąd, wobec (153):

$$1 > 1,$$

co niemożliwe. Założenie, że zachodzi nierówność (156), doprowadza zatem do sprzeczności. Mamy więc nierówność (155) *c. b. d. o.*

Twierdzenie 52. *Przy wszelkiem rzeczywistem a oraz wszelkiem rzeczywistem $b \neq 0$ mamy:*

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}. \quad (157)$$

Dowód. Położmy

$$a \cdot \frac{1}{b} = x; \quad (158)$$

wobec (158) oraz własności iloczynu, będzie, w myśl (153):

$$bx = b \cdot \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) = \left(b \cdot \frac{1}{b} \right) \cdot a = 1 \cdot a = a,$$

co dowodzi, że liczba x spełnia równanie

$$bx = a,$$

a że, jak wiemy, równanie to posiada jedyne rozwiązanie, którym jest $\frac{a}{b}$ więc mamy:

$$x = \frac{a}{b},$$

skąd, wobec (158), otrzymujemy wzór (157), *c. b. d. o.*

W ten sposób dzielenie przez liczbę rzeczywistą (różną od zera) możemy zawsze zastąpić mnożeniem przez jej odwrotność.

W szczególności wzór (157) daje, dla $b = a$, wobec (153):

$$\frac{a}{a} = 1, \quad (159)$$

przy wszelkiem rzeczywistem $a \neq 0$; dla $b = 1$, wzór (157) daje:

$$\frac{a}{1} = a$$

— przy wszelkiem rzeczywistem a .

Niech a, b, c, d będą dane liczby rzeczywiste, przytem $b \neq 0$ i $d \neq 0$: liczby $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ będą więc oznaczone w zupełności; położmy

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = x. \quad (160)$$

Wobec przemienności i łączności iloczynu oraz w myśl (157) i (153), wzór (160) daje:

$$\begin{aligned} bdx &= bd \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) = bd \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) \cdot \left(c \cdot \frac{1}{d} \right) = \\ &= a \left(b \cdot \frac{1}{b} \right) c \left(d \cdot \frac{1}{d} \right) = ac. \end{aligned}$$

skąd

$$(bd)x = ac, \quad (161)$$

a że, wobec $bd \neq 0$ (co wynika z założeń $b \neq 0, d \neq 0$ i tw. 46) równanie (161) posiada jedyne rozwiązanie, którym jest $x = \frac{ac}{bd}$ więc, wobec (160) mamy:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \quad (162)$$

Wzór (162), wyprowadzony dla wszelkich rzeczywistych a, b, c, d , gdzie $b \neq 0$ i $d \neq 0$, przedstawia *prawidło mnożenia ułamków*.

W szczególności, dla $a = c = 1$ wzór (162) daje:

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd},$$

t. j. *odwrotność iloczynu jest iloczynem odwrotności*.

Niech teraz a, b, c i d będą dane liczby rzeczywiste, przytem b, c i d różne od zera. Położmy:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x. \quad (163)$$

W myśl definicji ilorazu, będzie, wobec (163):

$$\frac{c}{d} \cdot x = \frac{a}{b}.$$

Stąd, w myśl (162):

$$\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot x = \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ad}{bc}. \quad (164)$$

Lecz w myśl (157) i (153) (oraz wobec przemienności i łączności mnożenia):

$$\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot x = d \cdot \frac{1}{c} \cdot c \cdot \frac{1}{d} \cdot x = \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) \cdot \left(d \cdot \frac{1}{d}\right) x = x;$$

wobec (164) mamy więc $x = \frac{ad}{bc}$, skąd, wobec (163):

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \quad (165)$$

Wzór (165) przedstawia *prawidło dzielenia ułamków*.

Wobec (153) mamy, dla $b \neq 0$:

$$\operatorname{sgn} b \cdot \operatorname{sgn} \frac{1}{b} = 1,$$

skąd

$$\operatorname{sgn} \frac{1}{b} = \frac{1}{\operatorname{sgn} b}$$

i przeto, wobec (157):

$$\operatorname{sgn} \frac{a}{b} = \operatorname{sgn} \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} \frac{1}{b} = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\operatorname{sgn} b} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\operatorname{sgn} b},$$

czyli

$$\operatorname{sgn} \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\operatorname{sgn} b}, \quad \text{dla } b \neq 0. \quad (166)$$

Z uwagi, że $|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$, znajdujemy, wobec (166) i (162):

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{sgn} \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\operatorname{sgn} a}{\operatorname{sgn} b} = \frac{a \operatorname{sgn} a}{b \operatorname{sgn} b} = \frac{|a|}{|b|},$$

czyli

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

przy wszelkich rzeczywistych a i b , gdzie $b \neq 0$.

Udowodniliśmy więc, że *moduł ilorazu jest ilorazem modułów*.

§ 35. Załóżmy teraz, że x_n i y_n są dwa ciągi nieskończone zbieżne liczb rzeczywistych. Połóżmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad (167)$$

— będą to liczby rzeczywiste skończone.

Założmy dalej, że wszystkie wyrazy y_n jakoteż liczba $y = \lim y_n$ są różne od zera. Oznaczmy

$$u_n = \frac{x_n}{y_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (168)$$

Wobec założenia, że $y \neq 0$, liczba $\left|\frac{y}{2}\right|$ jest, jak łatwo widzieć, dodatnią. W myśl (167) i wobec tw. 36, mamy:

$$|y_n - y| < \left|\frac{y}{2}\right|, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd, z uwagi, że $y_n = y - (y - y_n)$, znajdujemy w myśl tw. o module różnicy:

$$|y_n| \geq |y| - |y - y_n| > |y| - \left|\frac{y}{2}\right| = \left|\frac{y}{2}\right|, \quad \text{dla } n > \mu,$$

czyli

$$|y_n| > \left|\frac{y}{2}\right|, \quad \text{dla } n > \mu. \quad (169)$$

Niech, dalej, ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl tw. 36 i wobec (167), dla liczby dodatniej

$$\eta = \frac{y^2 \varepsilon}{2(|x| + |y|)} \quad (170)$$

istnieje liczba ν , taka, iż

$$|x_n - x| < \eta, \quad \text{oraz } |y_n - y| < \eta, \quad \text{dla } n > \nu. \quad (171)$$

W myśl (168) i z uwagi, że $y_n \neq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) oraz $y \neq 0$, mamy:

$$u_n - \frac{x}{y} = \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} = \frac{x_n y - y_n x}{y_n y} = \frac{(x_n - x)y + (y - y_n)x}{y_n y}$$

skąd, w myśl twierdzeń o module sumy, iloczynu i ilorazu:

$$\left|u_n - \frac{x}{y}\right| \leq \frac{|x_n - x| \cdot |y| + |y - y_n| \cdot |x|}{|y_n| \cdot |y|}. \quad (172)$$

Niech λ oznacza liczbę większą od μ i od ν . Wzór (172) daje, dla $n > \lambda$, wobec (169) i (171) oraz w myśl (170):

$$\left|u_n - \frac{x}{y}\right| < \frac{\eta \cdot |y| + \eta \cdot |x|}{\left|\frac{y}{2}\right| \cdot |y|} = \varepsilon,$$

czyli

$$\left|u_n - \frac{x}{y}\right| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > \lambda,$$

co, w myśl tw. 36, dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{x}{y},$$

czyli, w myśl (168) i (167):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 53. Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych x_n i y_n są zbieżne, przytem $y_n \neq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, to mamy wzór:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

Twierdzenie to wyrażamy krócej, mówiąc, że granicą ilorazu jest iloraz granic.

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 53^a. Jeżeli $x_n > 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Dowód. Niech A oznacza dowolną daną liczbę dodatnią: będzie więc, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, w myśl tw. 14, $x_n \leq \frac{1}{A}$, dla $n \geq \mu$, skąd, w myśl tw. 51: $\frac{1}{x_n} \geq A$, dla $n \geq \mu$, co dowodzi, w myśl tw. 14, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$, c. b. d. o. Podobnie udowodnilibyśmy

Twierdzenie 54. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że dla każdego ciągu nieskończonego liczb rzeczywistych u_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

2) Udowodnić, że dla każdego dwóch ciągów liczb rzeczywistych u_n i v_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

3) Udowodnić, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych u_n i każdej liczby rzeczywistej $c > 0$ mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cu_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (cu_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

4) Okazać, że nie dla każdego dwóch ciągów u_n i v_n zachodzi nierówność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

[Np. dla $u_n = (-1)^n$, $v_n = -1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), będzie $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = +1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = (+1)(-1) = -1$].

5) Okazać, że przy wszelkich rzeczywistych a i b :

$$\frac{|a - b| + a + b}{2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq b \\ b & \text{dla } a \leq b. \end{cases}$$

6) Dowieść, że jeżeli ciąg x_n zmierza do zera, zaś ciąg t_n pozostaje ograniczonym (niekoniecznie będąc zbieżnym), to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n t_n = 0.$$

(Z twierdzenia tego robimy często użytek przy obliczaniu granic).

ROZDZIAŁ IV.

Potęgowanie liczb rzeczywistych.

§ 36. Iloczyn n czynników, z których każdy jest równy liczbie rzeczywistej x , nazywamy n -tą potęgą liczby x i oznaczamy przez x^n . Przez x^1 rozumiemy samą liczbę x . W ten sposób symbol x^n jest określony dla wszelkiej liczby rzeczywistej x i wszelkiej liczby naturalnej n .

Liczbę x nazywamy podstawą, zaś liczbę n — wykładnikiem potęgi x^n .

Z tw. 48 wynika, że jeżeli

$$x > y \geq 0,$$

to przy wszelkiem naturalnem n mamy:

$$x^n > y^n.$$

Twierdzenie 55. Przy wszelkiem rzeczywistem $d \geq -1$ oraz wszelkiem naturalnem n mamy:

$$(1 + d)^n \geq 1 + nd. \quad (1)$$

Dowód. Nierówność (1) jest, przy danem rzeczywistem $d \geq -1$, oczywiście prawdziwa dla $n = 1$. Załóżmy, że jest ona prawdziwa przy pewnym naturalnem n . Wobec $d \geq -1$ mamy $1 + d \geq 0$, zatem wobec (1) i w myśl tw. 47:

$$(1 + d)^{n+1} \geq (1 + nd)(1 + d). \quad (2)$$