



ROZDZIAŁ II.

Ciągi nieskończone i ich granice.

§ 9. Jeżeli każdej liczbie naturalnej (t.j. całkowitej dodatniej) n jest podporządkowana pewna liczba rzeczywista u_n , to mówimy, że mamy określony *ciąg nieskończony* u_n o wyrazach rzeczywistych¹⁾.

Przykłady.

1) Jeżeli położymy przy wszelkiem naturalnem n :

$$u_n = 2^n,$$

to otrzymamy ciąg nieskończony, którego pierwszymi wyrazami są

$$u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8, u_4 = 16, u_5 = 32, \dots$$

2) Położymy przy wszelkiem naturalnem n :

$$u_n = n^2 - n + 41;$$

otrzymamy ciąg nieskończony, którego pierwszymi wyrazami są liczby:

$$41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, \dots$$

(Ciąg ten jest godny uwagi z tego względu, że pierwsze 40 jego wyrazów są liczbami pierwszymi (Euler). Lecz już u_{41} jest liczbą złożoną, podzielną przez 41).

3) Jeżeli przy wszelkiem naturalnem n oznaczymy przez u_n sumę cyfr liczby n w układzie dziesiętnym, otrzymamy oznaczony w zupełności ciąg nieskończony. Będzie tu np. $u_{10} = 1$, $u_{123} = 15$.

4) Jeżeli przez u_n oznaczymy liczbę dzielników naturalnych liczby n (włączając 1 i n), to otrzymamy ciąg nieskończony, którego pierwszymi wyrazami będą:

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 2, u_6 = 4, u_7 = 2, u_8 = 4, u_9 = 3, \\ u_{10} = 4, \dots$$

5) Wzór

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

określa ciąg nieskończony, którego pierwszymi wyrazami są liczby:

$$u_1 = 2, u_2 = \frac{9}{4}, u_3 = \frac{64}{27}, u_4 = \frac{625}{256}, \dots$$

¹⁾ Dla odróżnienia ciągu nieskończonego u_n od n -go wyrazu u_n tegoż ciągu, niektórzy autorowie piszą (u_n) lub $\{u_n\}$, gdy chodzi o ciąg nieskończony, zaś po prostu u_n , gdy chodzi o n -ty wyraz tego ciągu.

6) Umowa: $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) wyznacza

ciąg nieskończony liczb wymiernych, którego pierwszymi wyrazami są:

$$u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{17}{12}, u_4 = \frac{577}{408}, \dots$$

7) Umowa: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) wyznacza ciąg nieskończony liczb naturalnych, którego pierwszymi wyrazami są liczby:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

8) Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą. Oznaczmy przy każdym danym naturalnym n przez v_n największą liczbę całkowitą, spełniającą nierówność $\frac{v_n}{10^n} \leq x$ i połączmy $u_n = \frac{v_n}{10^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Otrzymamy oznaczony w zupełności (dla każdej danej liczby rzeczywistej x) ciąg nieskończony u_n . Jest to ciąg t. zw. *przybliżeń dziesiętnych* liczby x . Mamy tu oczywiście, w myśl definicji liczb v_n , $\frac{v_n + 1}{10^n} > x$, zatem stale:

$$u_n \leq x < u_n + \frac{1}{10^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

W szczególności np., dla $x = \frac{1}{3}$, będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$u_1 = 0,3; u_2 = 0,33; u_3 = 0,333; u_4 = 0,3333; \dots$$

9) Podamy teraz pewien przykład ciągu nieskończonego liczb wymiernych, ważny teoretycznie.

Każdą liczbę naturalną n możemy oczywiście, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w formie

$$n = 2^{l-1} (2m-1), \quad (1)$$

gdzie l i m są liczby naturalne (Liczba $l-1$ będzie tu wykładnikiem największej potęgi dwójki, przez którą n jest podzielne, zaś liczba $2m-1$ będzie największym dzielnikiem nieparzystym liczby n).

Otóż wyznaczmy dla każdego naturalnego n liczby naturalne l i m , spełniające równanie (1) i połączmy:

$$u_n = \frac{l}{m}.$$

Godnem uwagi jest tu, że każda liczba wymierna dodatnia figuruje w naszym ciągu nieskończenie wiele razy. W samej rzeczy, każdą liczbę wymierną

¹⁾ Pozostawiamy czytelnikowi łatwy dowód, że dla każdej danej skończonej liczby rzeczywistej x istnieją przy każdym naturalnym n liczby całkowite v , spełniające nierówność $\frac{v}{10^n} \leq x$ oraz, że wśród nich jest jedna największa.

dodatnią w możemy na nieskończenie wiele sposobów przedstawić w postaci ułamka $w = l/m$ gdzie l i m są liczby naturalne: wyznaczając zaś liczbę n ze wzoru (1) będziemy mieli oczywiście $u_n = w$. (Węć np. dla $w = 3/5$ otrzymujemy $n = 36$).

Gdybyśmy chcieli otrzymać ciąg nieskończony v_n , w którym *każda* liczba wymierna figuruje nieskończenie wiele razy, wystarczyłoby położyć przy wszelkim naturalnym n :

$$v_{3n-2} = 0, v_{3n-1} = u_n, v_{3n} = -u_n.$$

Pierwszymi wyrazami tak określonego ciągu byłyby liczby:

$$0, 1, -1, 0, 2, -2, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 3, -3, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots \quad (2)$$

Chcąc wreszcie otrzymać ciąg nieskończony, w którym każda liczba wymierna figuruje raz i przytem raz tylko, należałoby z ciągu (2) pousuwać te wyrazy, które co do swej wartości równe są któremukolwiek z wyrazów poprzedzających: otrzymalibyśmy w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg nieskończony:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 4, \dots$$

Dowiedliśmy więc, że *zbiór wszystkich liczb wymiernych można ustawić w pewien ciąg nieskończony*. Ponieważ każdy wyraz ciągu nieskończonego ma swoje oznaczone miejsce w tym ciągu, a więc i swój numer (wskaźnik), więc możemy też powiedzieć, że zbiór wszystkich liczb wymiernych daje się ponumerować w ten sposób, iżby każda liczba wymierna nosiła swój oznaczony numer i żeby każdemu numerowi odpowiadała jedna i tylko jedna liczba wymierna. O zbiorach, których elementy dadzą się w ten sposób ponumerować, mówimy, że są *przeliczalne*. Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 5. *Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.*

Zbiory nieskończone, które nie są przeliczalnymi, nazywamy *nieprzeliczalnymi*. W jednym z późniejszych paragrafów udowodnimy, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny (§ 16).

§ 10. Niech u_n oznacza dany ciąg nieskończony. Zaliczmy do klasy $\mathcal{A}$ każdą liczbę rzeczywistą, która jest mniejszą od nieskończenie wielu (różnych co do miejsca, lecz niekoniecznie co do wartości) wyrazów ciągu u_n ; wszystkie zaś pozostałe liczby rzeczywiste zaliczmy do klasy $\mathcal{B}$. Oczywiście jest, że każda liczba klasy $\mathcal{A}$ jest mniejszą od każdej liczby klasy $\mathcal{B}$. Określiliśmy więc pewien (właściwy lub niewłaściwy) przekrój liczb rzeczywistych $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, który, jak wiemy z § 8, wyznacza pewną (skończoną lub nieskończoną) liczbę rzeczywistą l (będącą niemniejszą od każdej liczby

klasy $\mathcal{A}$ i nie większą od każdej liczby klasy $\mathcal{B}$). Liczbę $\bar{l}$ nazywamy *granica górną* (limes superior) ciągu u_n i oznaczamy symbolem

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$$

lub, jeżeli niema wątpliwości, że wskaźnikiem zmiennym jest n , poprostu przez $\lim u_n$.

Podobnie, zaliczając do klasy $\mathcal{B}_1$ każdą liczbę rzeczywistą, która jest większą od nieskończenie wielu różnych co do miejsca wyrazów ciągu u_n , zaś do klasy $\mathcal{A}_1$ — wszystkie pozostałe liczby rzeczywiste, utworzymy oznaczony w zupełności przekrój (właściwy lub niewłaściwy) $[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1]$, który wyznacza pewną liczbę rzeczywistą l : liczbę tę nazywamy *granica dolną* (limes inferior) ciągu u_n i oznaczamy przez

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Każdy ciąg nieskończony u_n o wyrazach rzeczywistych posiada więc oznaczoną granicę dolną i oznaczoną granicę górną, które są liczbami skończonymi lub nieskończonymi.

Jeżeli dla danego ciągu u_n mamy.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

to wspólną wartość granicy dolnej i górnej oznaczamy przez

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

i nazywamy *granica* ciągu u_n , a o ciągu u_n mówimy, że *zbiega* do granicy $g = \lim u_n$. Żeby wyrazić, że ciąg nieskończony u_n zbiega do granicy g , pisze wielu nowszych autorów:

$$u_n \rightarrow g; \quad (1)$$

wzór (1) oznacza więc to samo co równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = g.$$

Ciąg, który posiada granicę skończoną, nazywamy *zbieżnym*.

Z definicji granicy wynika natychmiast, że *żaden ciąg nieskończony nie może posiadać dwóch różnych granic*. (Natomiast nie każdy ciąg nieskończony posiada granicę, gdyż granice dolna i górna ciągu niekoniecznie są równe).

§ 11. Jeżeli granicą ciągu nieskończonego u_n jest $+\infty$ lub $-\infty$, to przyjęto mówić, że wyrazy jego u_n *stają się wraz z n nieskończone* (dodatnio lub ujemnie), chociaż w rzeczywistości żaden z wyrazów

ważnego ciągu nie jest nieskończonym. W tym sensie wyraz „nieskończony” ma zupełnie inne znaczenie niż w wyrażeniu „zbiór nieskończony”: w tem ostatniem ma on znaczenie *aktualne*, tutaj zaś — *potencjalne*.

Np. zbiór wszystkich liczb naturalnych w samej rzeczy jest nieskończony, gdy tymczasem wyrazy ciągu $u_n = n$ tylko stają się, dla dostatecznie wielkich n , większe od każdej danej naprzód liczby (G. Cantor, a za nim A. Pringsheim nazywają nieskończoność aktualną *nieskończonością właściwą*, zaś potencjalną — *niewłaściwą*).

Jeżeli granicą ciągu nieskończonego u_n jest liczba 0, to mówimy, że wyrazy u_n tego ciągu stają się *nieskończenie małe*, gdy wskaźnik n wzrasta nieograniczenie. W znaczeniu powyższem liczby nieskończenie małe mają charakter *potencjalny* (podobnie jak nieskończoności potencjalne): nie posiadają one natomiast żadnego charakteru *aktualnego*, żadnej analogii z nieskończonością aktualną, będąc jedynie dogodnym sposobem wyrażania się.

Nieskończenie małe przyjęto też nazywać „nieskończonościami” dla odróżnienia od nieskończenie wielkich („nieskończoności”). Nie potrzebujemy tu chyba nadmieniac, że podobne określenia, jak: „Nieskończenie mała jest to wielkość, mniejsza od każdej danej wielkości” (które można spotkać jeszcze w przestarzałych podręcznikach), nie mają żadnego sensu.

§ 12. Twierdzenie 6. Niech u_n oznacza dany ciąg nieskończony, x — daną liczbę rzeczywistą skończoną lub nieskończoną. Na to żeby było

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = x, \quad (2)$$

potrzeba i wystarcza, żeby dla każdej liczby rzeczywistej $a < x$ nierówność

$$u_n > a \quad (3)$$

zachodziła dla nieskończenie wielu różnych wartości wskaźnika n , oraz żeby dla każdej liczby rzeczywistej $b > x$ nierówność

$$u_n > b \quad (4)$$

zachodziła co najwyżej dla skończonej liczby różnych wartości wskaźnika n .

Dowód. Udowodnimy, że warunek nasz jest konieczny. Założmy więc, że zachodzi wzór (2) i niech a oznacza liczbę rzeczywistą $< x$. Gdyby nierówność (3) zachodziła co najwyżej dla skończonej liczby różnych wartości n , to w przekroju $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, wyzna-

czającym liczbę (2), musielibyśmy (w myśl definicji górnej granicy, § 10), zaliczyć liczbę a do klasy $\mathcal{B}$, skąd mielibyśmy $a \geq x$, wbrew założeniu, że $a < x$. Nierówność (3) musi więc zachodzić dla nieskończenie wielu różnych wskaźników n .

Niech, dalej, b oznacza liczbę rzeczywistą $> x$. Gdyby nierówność (4) zachodziła dla nieskończenie wielu różnych n , to w przekroju $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, wyznaczającym liczbę (2), musielibyśmy (w myśl definicji górnej granicy) zaliczyć liczbę b do klasy $\mathcal{A}$, skąd mielibyśmy $b \leq x$ wbrew założeniu, że $b > x$. Nierówność (4) może więc zachodzić conajwyżej dla skończonej liczby różnych wartości wskaźnika n .

Udowodniliśmy więc, że warunek nasz jest konieczny. Okazuje obecnie, że jest wystarczający.

Założmy więc, że x jest liczbą rzeczywistą, skończoną lub nieskończoną, taką iż dla każdej liczby rzeczywistej $a < x$ nierówność (3) zachodzi dla nieskończenie wielu różnych n , zaś dla każdej liczby rzeczywistej $b > x$ nierówność (4) zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby różnych n . Powiadam, że warunki powyższe określają liczbę x w zupełności. Założmy dla dowodu, że liczba rzeczywista (skończona lub nieskończona) $y \neq x$ również posiada tę własność, że dla każdej liczby rzeczywistej $a < y$ nierówność (3) zachodzi dla nieskończenie wielu różnych n , zaś dla każdej liczby rzeczywistej $b > y$ nierówność (4) zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby różnych n . Skoro liczby x i y są różne, więc mamy np. $x < y$. Niech w oznacza liczbę wymierną, taką iż $x < w < y$. W myśl naszych założeń, wobec $w > x$, nierówność $u_n > w$ zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby różnych n , gdy tymczasem, wobec $w < y$, ta sama nierówność $u_n > w$ zachodzi dla nieskończenie wielu różnych n , skąd sprzeczność. Istnieje więc conajwyżej jedna liczba rzeczywista (skończona lub nieskończona) x , taka iż dla każdej liczby rzeczywistej $a < x$ nierówność (3) zachodzi dla nieskończenie wielu różnych n , zaś dla każdej liczby rzeczywistej $b > x$ nierówność (4) zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby różnych n . Lecz, jak okazaliśmy w pierwszej części naszego dowodu, liczba $\lim u_n$ spełnia powyższe warunki: każda liczba spełniająca te warunki jest więc równa $\lim u_n$. Dowodzi to, że warunki nasze są wystarczające na to iżby zachodziła równość (2).

Twierdzenie nasze udowodniliśmy więc w zupełności. Analogicznie udowodnilibyśmy:

Twierdzenie 7. Na to żeby było

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x,$$

potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby rzeczywistej $a > x$ nierówność

$$u_n < a$$

zachodziła conajwyżej dla skończonej liczby różnych wartości wskaźnika n , oraz żeby dla każdej liczby rzeczywistej $b < x$ nierówność

$$u_n < b$$

zachodziła dla nieskończenia wielu różnych n .

Założmy, że w danym ciągu u_n wszystkie wyrazy, z wyjątkiem conajwyżej skończonej ich liczby posiadają pewną własność W . Wówczas, o ile istnieją w ciągu u_n wyrazy, nieposiadające własności W , to liczba ich jest skończona i przeto istnieje wśród nich wyraz o największym wskaźniku: niech to będzie wskaźnik p . Każdy z wyrazów naszego ciągu o wskaźniku większym od p będzie więc posiadał własność W . Możemy więc powiedzieć, że w uważanym przypadku istnieje liczba całkowita p taka, iż wszystkie wyrazy u_n , gdzie $n > p$, posiadają własność W , co pozostaje oczywiście prawdziwym i w przypadku kiedy wszystkie wyrazy ciągu u_n posiadają własność W (wówczas możemy przyjąć $p = 0$). Ogólniej możemy powiedzieć:

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu u_n , z wyjątkiem conajwyżej skończonej ich liczby posiadają własność W , to istnieje taka liczba rzeczywista (skończona) μ iż wszystkie wyrazy u_n , gdzie $n > \mu$, posiadają własność W . Krócej będziemy to wyrażali, mówiąc że wszystkie dostatecznie dalekie wyrazy ciągu u_n posiadają własność W , albo że wyrazy ciągu u_n posiadają własność W dla $n > \mu$.

Jasne jest, że jeżeli wyrazy ciągu u_n posiadają własność W , dla $n > \mu_1$, zaś własność W_2 dla $n > \mu_2$, to możemy powiedzieć, że wyrazy ciągu u_n posiadają jednocześnie obie własności W_1 i W_2 dla $n > \mu$ (przyczem jako μ możemy przyjąć większą z liczb μ_1 i μ_2 , lub ich wspólną wartość, jeżeli są równe). Podobnie, jeżeli wyrazy ciągu u_n posiadają własność W dla $n > \mu_1$, zaś wyrazy ciągu v_n posiadają własność W dla $n > \mu_2$, to możemy powiedzieć, że dla $n > \mu$ wyrazy u_n i v_n posiadają jednocześnie własność W .

Twierdzenie 8. *Jeżeli mamy nierówność*

$$u_n \leq v_n \text{ dla } n > \mu, \quad (5)$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

(zatem, o ile istnieją granice $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, to mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

Dowód. Załóżmy, że dla ciągów u_n i v_n zachodzi nierówność (5). Gdyby było

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > \lim_{n \rightarrow \infty} v_n,$$

to, w myśl tw. 2, istniałaby liczba wymierna w taka iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > w > \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

W myśl tw. 6 (dla $a = w$) nierówność

$$u_n > w \quad (6)$$

zachodzi więc dla nieskończenie wielu różnych n . W myśl tegoż tw. 6 (zastosowanego do ciągu v_n , dla $b = w$) nierówność

$$v_n > w$$

zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby różnych n : mamy więc dla dostatecznie wielkich n stale

$$v_n \leq w. \quad (7)$$

Stąd łatwy wniosek, że dla nieskończenie wielu różnych n mamy jednocześnie nierówności (6) i (7), zatem też nierówność

$$u_n > v_n,$$

wbrew założeniu (5). Jest więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Podobnie gdyby było

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

to istniałaby liczba wymierna w taka iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > w > \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

W myśl tw. 7 (dla $a = w$), nierówność

$$u_n < w$$

zachodziłaby więc conajwyżej dla skończonej liczby różnych n : dla dostatecznie wielkich n mielibyśmy więc stale

$$u_n \geq w; \quad (8)$$

z drugiej strony, w myśl tegoż tw. 7 (zastosowanego do ciągu v_n , dla $b = w$), dla nieskończenie wielu różnych n zachodziłaby nierówność

$$v_n < w. \quad (9)$$

Dla nieskończenie wielu różnych n mielibyśmy więc jednocześnie nierówności (8) i (9), zatem też nierówność

$$u_n > v_n,$$

wbrew założeniu (5). Jest więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Twierdzenie 9. *Jeżeli mamy*

$$u_n = x, \text{ dla } n > \mu,$$

to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x,$$

zatem też $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.Dla dowodu wystarczy zauważyć, że przy założeniach tw. 9, liczba x spełnia warunki twierdzeń 6 i 7.

Przez zestawienie twierdzeń 8 i 9 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 10. *Jeżeli mamy*

$$u_n \leq a, \text{ dla } n > \mu,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq a \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq a$$

(zatem też, o ile istnieje granica ciągu u_n , mamy $\lim u_n \leq a$). Jeżeli zaś mamy

$$u_n \geq b, \text{ dla } n > \mu,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq b \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq b$$

(zatem, o ile istnieje granica ciągu u_n , mamy też $\lim u_n \geq b$).

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 11. Dla każdego ciągu nieskończonego u_n mamy

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (10)$$

Dowód. Załóżmy, że dla danego ciągu u_n mamy:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n < \lim_{n \rightarrow \infty} u_n;$$

w myśl tw. 2, istnieje więc liczba wymierna w taka iż

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n < w < \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (11)$$

Kładąc, w twierdzeniu 6, $b = w$, dochodzimy, wobec (11), do wniosku, że nierówność

$$u_n > w$$

zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby różnych n , czyli że mamy

$$u_n \leq w \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, w myśl tw. 10 (dla $a = w$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq w,$$

wbrew (11). Dowiedliśmy więc, że musi zachodzić nierówność (10).

§ 13. Twierdzenie 12. Każdy ciąg nieskończony niemalejący posiada granicę (skończoną lub nieskończoną).

Dowód. Niech u_n oznacza dany ciąg nieskończony niemalejący, t. j. taki iż

$$u_{n+1} \geq u_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Założmy, że ciąg u_n nie posiada granicy. W myśl definicji granicy oraz w myśl tw. 11 jest więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

i przeto, w myśl tw. 2, istnieje liczba wymierna w taka iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < w < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n. \quad (13)$$

Wobec tw. 6 istnieje taki wskaźnik p , iż

$$u_p > w \quad (14)$$

(gdyż, wobec (13) oraz tw. 6, nierówność $u_n > w$ zachodzi dla nieskończenie wielu różnych n).

Wobec (14), będzie tembardziej (skoro nasz ciąg jest niemalejący):

$$u_n \geq w, \text{ dla } n > p,$$

skąd w myśl tw. 10:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq w,$$

wbrew (13). Ciąg u_n musi więc posiadać granicę, c. b. d. o.

Analogicznie udowodnilibyśmy:

Twierdzenie 13. Każdy ciąg nieskończony nierosnący posiada granicę.

Ciąg niemalejący lub nierosnący nazywamy *monotonicznym*. Oba więc dowiedzione twierdzenia możemy połączyć w jedno:

Każdy ciąg monotoniczny posiada granicę.

Okażemy obecnie, że granica ciągu rosnącego jest większa od każdego z wyrazów ciągu. W samej rzeczy, niech u_n oznacza ciąg rosnący, t. j. taki iż

$$u_{n+1} > u_n, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

W myśl tw. 12 ciąg u_n posiada granicę. Z założenia że ciąg jest rosnący, wynika natychmiast, że przy wszelkiem danem k mamy dla $n > k$ stale $u_n \geq u_{k+1}$, skąd, w myśl tw. 10:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq u_{k+1},$$

a ponieważ, wobec (15), mamy $u_{k+1} > u_k$, więc mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > u_k.$$

c. b. d. o.

Podobnie udowodnilibyśmy, że granica ciągu malejącego jest mniejsza od każdego z wyrazów ciągu.

§ 14. Twierdzenie 14. Na to żeby granicą ciągu liczb rzeczywistych u_n była liczba rzeczywista (skończona lub nieskończona) x , potrzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby rzeczywistej $a < x$ nierówność

$$u_n > a, \quad (16)$$

zaś dla każdej liczby rzeczywistej $b > x$ nierówność

$$u_n < b \quad (17)$$

była prawdziwą dla wszystkich dostatecznie dalekich wyrazów ciągu.

Dowód. Załóżmy, że mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x \quad (18)$$

oraz że a jest liczbą rzeczywistą $< x$. W myśl tw. 2 istnieje liczba wymierna a_1 , taka iż

$$a < a_1 < x. \quad (19)$$

Wobec (18) oraz definicji granicy, będziemy mieli tembardziej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$$

i przeto, w myśl tw. 7 oraz wobec $a_1 < x$, nierówność

$$u_n < a_1$$

będzie zachodziła conajwyżej dla skończonej liczby różnych n , skąd wynika, że będzie

$$u_n \geq a_1, \text{ dla } n > \mu,$$

co, wobec (19), daje nierówność

$$u_n > a, \text{ dla } n > \mu.$$

Podobnie udowodnilibyśmy, wychodząc z założenia (18) i opierając się na tw. 6, że dla każdej liczby rzeczywistej $b > x$ nierówność (17) jest prawdziwą dla wszystkich dostatecznie wielkich n .

Dowiedliśmy więc, że warunek nasz jest konieczny.

Założmy teraz, że warunek nasz jest spełniony. Dla każdej więc liczby rzeczywistej $a < x$ nierówność (16) zachodzi dla wszystkich dostatecznie dalekich wyrazów ciągu u_n : w każdym więc razie nierówność (16) zachodzi dla nieskończonego wielu różnych wskaźników n . Z drugiej strony, jeżeli b jest liczbą rzeczywistą $> x$, to w myśl naszego założenia, nierówność (17) musi być prawdziwą dla wszystkich wskaźników n z wyjątkiem conajwyżej skończonej ich liczby: wnosimy stąd, że nierówność przeciwna, t. j. nierówność

$$u_n \geq b$$

i, tembardziej, nierówność

$$u_n > b$$

zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby wskaźników n . Są więc spełnione warunki tw. 6, skąd wnosimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x. \quad (20)$$

Podobnie, opierając się na naszych założeniach i na tw. 7, udowodnilibyśmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x. \quad (21)$$

Wzory (20) i (21) dowodzą, wobec definicji granicy, że zachodzi wzór (18). Warunek nasz jest więc wystarczający.

Twierdzenie nasze udowodnilśmy zatem w zupełności. Jako natychmiastowy wniosek, otrzymujemy stąd:

Twierdzenie 15. *Istnienie i wartość granicy ciągu nieskończonego nie zależy od porządku jego wyrazów.*

Dla dowodu twierdzenia 15 wystarczy zauważyć, że, zmieniając porządek wyrazów danego ciągu nieskończonego u_n , nie zmienimy przez to faktu, że warunki twierdzenia 14 (w stosunku do danej liczby x) zachodzą lub nie zachodzą.

Wobec twierdzeń 6 i 7 moglibyśmy twierdzenie analogiczne do tw. 15 wypowiedzieć dla górnej i dla dolnej granicy ciągu nieskończonego, jak również moglibyśmy wypowiedzieć twierdzenie, że *nie zmienimy granicy (dolnej, górnej) ciągu nieskończonego, odrzucając w nim, dodając, lub zmieniając dowolną skończoną liczbę wyrazów.*

Twierdzenie 16. *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$ i jeżeli n_k ($k = 1, 2, 3, \dots$)*

oznacza ciąg nieskończony rosnący liczb naturalnych, to mamy też $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = x$.

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 14, zważywszy, że jeżeli nierówność $u_n > a$, względnie $u_n < b$ jest prawdziwą dla wszystkich wskaźników n z wyjątkiem conajwyżej skończonej ich liczby, to tembardziej nierówność $u_{n_k} > a$, względnie $u_{n_k} < b$ będzie prawdziwą dla wszystkich wskaźników k z wyjątkiem conajwyżej skończonej liczby.

Twierdzenie 16 możemy wysłowić jeszcze w ten sposób: *Jeżeli z ciągu nieskończonego, którego granicą jest liczba x , usuniemy dowolną skończoną lub nieskończoną liczbę wyrazów i jeżeli pozostały ciąg będzie nieskończonym, to liczba x będzie również jego granicą.*

Twierdzenia analogiczne do tw. 16 nie zachodzą dla górnej i dolnej granicy ciągu nieskończonego (Np. dla ciągu $u_n = (-1)^n$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n-1} = -1$).

Warunki tw. 14 są oczywiście spełnione, jeżeli $u_n = x$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Stąd

Twierdzenie 17. *Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego u_n są równe liczbie rzeczywistej x , to $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.*

Jako łatwy wniosek z tw. 14 udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 18. Jeżeli u_n i v_n są dwa ciągi nieskończone liczb rzeczywistych, takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = x,$$

gdzie x jest liczbą rzeczywistą skończoną lub nieskończoną, i jeżeli położymy:

$$w_{2n-1} = u_n, \quad w_{2n} = v_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

to będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = x. \quad (22)$$

Dowód. Z założeń naszych oraz z tw. 14 wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej $a < x$ każda z nierówności

$$u_n > a \text{ oraz } v_n > a$$

jest prawdziwą dla wszystkich n z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby różnych n . Wynika stąd natychmiast, wobec definicji ciągu w_n , że i nierówność

$$w_n > a$$

jest prawdziwą dla wszystkich n z wyjątkiem co najwyżej skończonej ich liczby. Podobnie wnosimy, że dla każdej liczby rzeczywistej $b > x$ nierówność

$$w_n < b$$

jest prawdziwą dla dostatecznie wielkich n . W myśl tw. 14 mamy więc wzór (22), c. b. d. o.

§ 15. Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą skończoną. W myśl tw. 3 istnieje liczba wymierna $< x$: ponieważ zaś dla każdej liczby wymiernej w istnieje liczba całkowita $< w$, więc dla każdej liczby rzeczywistej skończonej x istnieje liczba całkowita $< x$. Podobnie wnioskujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej skończonej x istnieje liczba całkowita $> x$.

Niech więc k' i k'' będą liczby całkowite, takie iż

$$k' < x < k''. \quad (23)$$

Niech k oznacza największą liczbę całkowitą w ciągu

$$k', \quad k' + 1, \quad k' + 2, \quad \dots, \quad k'',$$

dla której

$$k \leq x$$

(będzie oczywiście $k < k''$, gdyż $k'' > x$). Będzie więc już

$$k + 1 > x$$

i, tembardziej, dla każdej liczby całkowitej $l > k$ będzie $l > x$. Liczba k jest więc największą liczbą całkowitą, nie większą od x .

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej skończonej x istnieje największa liczba całkowita, nie większa od x : liczbę tę oznaczamy (według Legendre'a) przez Ex i czytamy *entier* x .

Niech, dalej, g oznacza dowolną liczbę całkowitą > 1 , zaś n — daną liczbę całkowitą ≥ 0 . Nierówność (23) możemy przepisać w postaci:

$$\frac{k'g^n}{g^n} < x < \frac{k''g^n}{g^n}$$

Oznaczmy przez k_n największą liczbę całkowitą w ciągu

$$k'g^n, \quad k'g^n + 1, \quad \dots, \quad k''g^n,$$

dla której zachodzi nierówność

$$\frac{k_n}{g^n} \leq x \quad (24)$$

(będzie oczywiście $k_n < k''g^n$). Będzie więc

$$\frac{k_n + 1}{g^n} > x \quad (25)$$

i, tembardziej, dla każdej liczby całkowitej $l > k_n$ będzie $\frac{l}{g^n} > x$: liczba k_n jest więc określona w zupełności jako największa liczba całkowita k , spełniająca (przy danych x , g i n) nierówność $\frac{k}{g^n} \leq x$. (Przytem będzie oczywiście $k_0 = Ex$).

Położmy:

$$u_n = \frac{k_n}{g^n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Powiadamy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x.$$

W samej rzeczy, niech a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą $< x$. W myśl tw. 2 istnieją liczby wymierne w i w' , takie, iż

$$a < w < w' < x. \quad (27)$$

Obierzmy liczbę naturalną p , tak wielką iżby było

$$g^p > \frac{1}{w' - w} \quad (28)$$

[jest to zawsze możliwe, gdyż g jest liczbą całkowitą > 1 , zaś $\frac{1}{w' - w}$ — liczbą wymierną dodatnią¹⁾].

Wobec (28) będzie tembardziej, dla każdej liczby naturalnej $n > p$:

$$g^n > \frac{1}{w' - w}$$

zatem:

$$w' - \frac{1}{g^n} > w \quad (29)$$

Wobec (26), (26) i (27) mamy:

$$u_n + \frac{1}{g^n} = \frac{k_n + 1}{g^n} > x > w',$$

skąd, wobec (29):

$$u_n > w' - \frac{1}{g^n} > w$$

i przeto, wobec (27), tembardziej:

$$u_n > a.$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą $< x$, to będzie

$$u_n > a \text{ dla } n > p.$$

Z drugiej strony, niech b oznacza liczbę rzeczywistą $> x$. Wobec (26) i (24) mamy stale

$$u_n \leq x$$

i tembardziej

$$u_n < b, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Warunki twierdzenia 14 są więc spełnione: mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x \quad (30)$$

c. b. d. o. Możemy więc wypowiedzieć następujące:

¹⁾ Drogą indukcji łatwo dowieść, że przy wszelkiem naturalnem n mamy $g^n > n$: nierówność ta jest bowiem (wobec założenia $g > 1$) prawdziwą dla $n = 1$; jeżeli zaś jest prawdziwą dla n , to mamy stąd $g^{n+1} > gn \geq 2n = n + n \geq n + 1$, co dowodzi, że nierówność nasza jest prawdziwą i dla $n + 1$. Jeżeli więc obierzmy $p > \frac{1}{w' - w}$, to będzie $g^p > \frac{1}{w' - w}$.

Twierdzenie 19. Każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu nieskończonego liczb wymiernych¹⁾.

Położmy

$$c_n = k_n, \text{ oraz } c_n = k_n - gk_{n-1}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Liczb c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) będą oczywiście wszystkie całkowite. Powiadam, że stale

$$0 \leq c_n \leq g - 1, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

W samej rzeczy, wobec (24) i (25) możemy napisać dla $n \geq 1$

$$\frac{k_n}{g^n} \leq x < \frac{k_{n-1} + 1}{g^{n-1}},$$

co, w myśl tw. 1, daje:

$$\frac{k_n}{g^n} < \frac{k_{n-1} + 1}{g^{n-1}},$$

skąd, wobec (31), w jednej chwili:

$$c_n < g,$$

czyli, wobec całkowitości obu stron:

$$c_n \leq g - 1. \quad (33)$$

Z drugiej strony, ponieważ k_n jest największą liczbą całkowitą dla której zachodzi nierówność (24) i z uwagi, że mamy (dla $n \geq 1$) również

$$\frac{k_{n-1}}{g^{n-1}} \leq x,$$

czyli

$$\frac{k_{n-1}g}{g^n} \leq x,$$

wnosimy, że musi być

$$k_{n-1}g \leq k_n,$$

czyli, wobec (31):

$$c_n \geq 0.$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem naturalnem n zachodzą nierówności (33) i (34), co dowodzi prawdziwości (32). Liczby c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są więc cyframi w układzie o zasadzie g .

¹⁾ Twierdzenie to pozostaje prawdziwem i dla liczb $+\infty$ oraz $-\infty$, gdyż w myśl tw. 14 sprawdzamy z łatwością, że $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$.

Wzór (26) możemy wobec (31) przepisać w postaci:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{k_n}{g^n} = k_0 + \left(\frac{k_1}{g} - k_0\right) + \left(\frac{k_2}{g^2} - \frac{k_1}{g}\right) + \dots + \left(\frac{k_n}{g^n} - \frac{k_{n-1}}{g^{n-1}}\right) = \\ &= k_0 + \frac{k_1 - gk_0}{g} + \frac{k_2 - gk_1}{g^2} + \dots + \frac{k_n - gk_{n-1}}{g^n} = \\ &= c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_n}{g^n}, \end{aligned}$$

lub, w postaci ułamka przy zasadzie g :

$$u_n = (c_0, c_1 c_2 \dots c_n)_g \quad (35)$$

Wzory (30) oraz (35) dają więc wzór:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_0, c_1 c_2 \dots c_n)_g \quad (36)$$

który będziemy pisali w postaci:

$$x = (c_0, c_1 c_2 c_3 \dots)_g \quad (37)$$

i symbol, stojący po prawej stronie, nazywaliśmy *ułamkiem nieskończonym przy zasadzie g* . [Wzór (37) jest więc, ex definitione, równoważny wzorowi $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_n}{g^n}\right)$]. W razie $g = 10$ będziemy pisali poprostu $x = c_0, c_1 c_2 c_3 \dots$.

Dowiedliśmy więc, że każda liczba rzeczywista daje się przedstawić w postaci ułamka nieskończonego przy każdej całkowitej, większej od jedności zasadzie g .

Wzór (37) nazywamy *rozwinięciem liczby x na ułamek nieskończony przy zasadzie g* . Liczbę wymierną $(c_0, c_1 c_2 \dots c_n)_g$ nazywamy *n tym reduktom* uważanego rozwinięcia. W myśl, (24), (25), (26) i (35) mamy:

$$(c_0, c_1 c_2 \dots c_n)_g \leq x < (c_0, c_1 c_2 \dots c_n)_g + \frac{1}{g^n}, \text{ dla } n = 1, 2, 3 \dots \quad (38)$$

Powiadam, że w uzyskanem przez nas rozwinięciu (37) mamy nieskończenie wiele cyfr c_n różnych od $g - 1$.

Załóżmy, dla dowodu, że w rozwinięciu (37) mamy co najwyżej skończoną liczbę cyfr c_n różnych od $g - 1$, mianowicie, że dla $n > p$ stale $c_n = g - 1$. W myśl (26), (24) i (25) (dla $n = p + m$) mamy:

$$u_{p+m} \leq x < u_{p+m} + \frac{1}{g^{p+m}}, \text{ dla } m = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

Lecz, wobec założenia, że $c_n = g - 1$ dla $n > p$, mamy, przy naturalnem m :

$$\begin{aligned} u_{p+m} &= c_0 + \frac{c_1}{g} + \dots + \frac{c_p}{g^p} + \frac{c_{p+1}}{g^{p+1}} + \dots + \frac{c_{p+m}}{g^{p+m}} = \\ &= u_p + \frac{g-1}{g^{p+1}} + \dots + \frac{g-1}{g^{p+m}}, \end{aligned}$$

skąd po łatwej redukcji:

$$u_{p+m} = u_p + \frac{1}{g^p} - \frac{1}{g^{p+m}}, \text{ dla } m = 1, 2, 3, \dots$$

Nierówność (39) możemy więc przepisać w postaci:

$$u_p + \frac{1}{g^p} - \frac{1}{g^{p+m}} \leq x < u_p + \frac{1}{g^p}, \text{ dla } m = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

Położmy

$$u_p + \frac{1}{g^p} = w \quad (41)$$

— będzie to liczba wymierna niezależna od m , przytem w myśl (40), będzie $x < w$: w myśl tw. 2 istnieje więc liczba wymierna w' taka iż $x < w' < w$.

Nierówności (40) dają więc, wobec (41):

$$w - \frac{1}{g^{p+m}} < w' \text{ dla } m = 1, 2, 3, \dots$$

Stąd, w jednej chwili:

$$\frac{1}{g^{p+m}} > w - w', \text{ dla } m = 1, 2, 3, \dots$$

czyli, przy wszelkiem naturalnem m :

$$g^m < \frac{1}{(w - w') g^p},$$

co jest oczywiście niemożliwe (gdyż, jak wiemy, stale $g^m \geq m$).

Dowiedliśmy więc, że w rozwinięciu (37) nieskończenie wiele cyfr jest różnych od $g - 1$.

Ułamek nieskończony przy zasadzie g , w którym nieskończenie wiele cyfr jest różnych od $g - 1$, nazywamy *rozwinięciem normalnem* przy zasadzie g . Udowodniliśmy więc, że każda liczba rzeczywista daje się rozwinąć na ułamek normalny przy każdej danej całkowitej większej od jedności zasadzie.

Okazemy obecnie, że każda liczba rzeczywista daje tylko jedno rozwinięcie na ułamek normalny przy każdej danej, całkowitej, większej od jedności zasadzie g . Niech więc

$$x = (c_0, c_1, c_2, \dots)_g \quad (42)$$

oznacza rozwinięcie liczby rzeczywistej x na ułamek normalny przy zasadzie g . Znaczący to, że mamy

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)_g \quad (43)$$

przyczem c_0 jest liczbą całkowitą, zaś c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są cyfry przy zasadzie g , wśród których jest nieskończenie wiele różnych od $g - 1$. Udowodnimy, że zachodzą nierówności (38).

Ponieważ wśród cyfr c_n jest nieskończenie wiele różnych od $g - 1$, więc przy danym naturalnym n istnieją wskaźniki $p > n$, dla których $c_p \neq g - 1$, czyli $c_p \leq g - 2$: niech p_0 oznacza najmniejszy z nich. Będzie więc

$$p_0 > n, \text{ oraz } c_{p_0} \leq g - 2.$$

Dla $p > p_0$ będzie

$$\begin{aligned} u_p &= (c_0, c_1, c_2, \dots, c_p)_g = \\ &= (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{c_{n+1}}{g^{n+1}} + \dots + \frac{c_{p_0-1}}{g^{p_0-1}} + \frac{c_{p_0}}{g^{p_0}} + \frac{c_{p_0+1}}{g^{p_0+1}} + \dots + \frac{c_p}{g^p} \leq \\ &\leq (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{g-1}{g^{n+1}} + \dots + \frac{g-1}{g^{p_0-1}} + \frac{g-2}{g^{p_0}} + \frac{g-1}{g^{p_0+1}} + \dots + \frac{g-1}{g^p} = \\ &= (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{1}{g^n} - \frac{1}{g^{p_0}} - \frac{1}{g^p} < (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{1}{g^n} - \frac{1}{g^{p_0}}, \end{aligned}$$

czyli

$$u_p < (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{1}{g^n} - \frac{1}{g^{p_0}} \text{ dla } p > p_0.$$

skąd, z uwagi, że, wobec (43), $\lim_{p \rightarrow \infty} u_p = x$, oraz w myśl tw. 10, znajdujemy

$$x \leq (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{1}{g^n} - \frac{1}{g^{p_0}}$$

i przeto

$$x < (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{1}{g^n} \quad (44)$$

Z drugiej strony, dla $p > n$ mamy oczywiście

$$u_p \geq (c_0, c_1, \dots, c_n)_g$$

(gdyż cyfry $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_p$ są nieujemne). skąd, w myśl tw. 10:

$$x \geq (c_0, c_1, \dots, c_n)_g \quad (45)$$

Nierówności (44) i (45) dają nierówność (38), *c. b. d. o.*

Dla $n = 1$ nierówność (38) daje:

$$c_0 + \frac{c_1}{g} \leq x < c_0 + \frac{c_1 + 1}{g},$$

skąd, wobec $0 < c_1 \leq g - 1$:

$$c_0 \leq x < c_0 + 1,$$

co dowodzi, że

$$c_0 = \text{Ex}.$$

Załóżmy teraz, że liczba x daje dwa różne rozwinięcia normalne przy zasadzie g :

$$x = (\text{Ex}, c_1, c_2, \dots)_g, \text{ oraz } x = (\text{Ex}, c'_1, c'_2, \dots)_g \quad (46)$$

i załóżmy, że pierwszą cyfrą, w której się te rozwinięcia różnią, jest k -ta, że więc

$$c'_n = c_n \text{ dla } n = 1, 2, \dots, k-1, \text{ zaś } c'_k \neq c_k. \quad (47)$$

Położymy, przez skrócenie (dla $n = 1, 2, 3, \dots$):

$$(\text{Ex}, c_1, c_2, \dots, c_n)_g = u_n, \quad (\text{Ex}, c'_1, c'_2, \dots, c'_n)_g = u'_n;$$

jest więc, w myśl (47):

$$u_k = u_{k-1} + \frac{c_k}{g^k}, \quad u'_k = u_{k-1} + \frac{c'_k}{g^k}. \quad (48)$$

W myśl (38) będzie:

$$u_k \leq x < u_k + \frac{1}{g^k}, \text{ oraz } u'_k \leq x < u'_k + \frac{1}{g^k},$$

skąd w jednej chwili:

$$u_k < u'_k + \frac{1}{g^k} \text{ oraz } u'_k < u_k + \frac{1}{g^k},$$

co daje:

$$-1 < g^k (u_k - u'_k) < 1,$$

czyli wobec (48):

$$-1 < c_k - c'_k < 1,$$

co, wobec całkowitości liczby $c_k - c'_k$ doprowadza do wniosku, że musi być $c_k - c'_k = 0$, czyli $c_k = c'_k$, wbrew (47).

Dowiedliśmy więc, że żadna liczba rzeczywista nie może dawać dwóch różnych rozwinięć na ułamek normalny przy danej zasadzie g . Możemy więc wypowiedzieć:

Twierdzenie 20. Każda liczba rzeczywista x daje jedno i tylko jedno rozwinięcie normalne na ułamek nieskończony, przy każdej danej, całkowitej, większej od jedności zasadzie g :

$$x = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)_g.$$

Mamy przytem $c_0 = \text{Er}$, zaś dla $n = 1, 2, 3, \dots$ zachodzą nierówności

$$(c_0, c_1, \dots, c_n)_g \leq x < (c_0, c_1, \dots, c_n)_g + \frac{1}{g^n}.$$

Z drugiej strony, każdy ułamek nieskończony przy zasadzie g (normalny lub nie) przedstawia pewną liczbę rzeczywistą (skończoną). Niech bowiem c_0 oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, zaś c_n — jakąkolwiek ciąg nieskończony cyfr przy zasadzie g , t. j. ciąg liczb całkowitych c_n , gdzie

$$0 \leq c_n \leq g - 1 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

Ciąg nieskończony

$$u_n = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)_g \quad (50)$$

będzie niemalejący (gdyż oczywiście $u_n - u_{n-1} = \frac{c_n}{g^n} \geq 0$), zatem, w myśl tw. 12, będzie posiadał granicę. Położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x. \quad (51)$$

Niech k oznacza daną liczbę naturalną. Mamy przy wszelkiem naturalnem $n > k$, wobec (50) i (49):

$$\begin{aligned} u_k \leq u_n &\leq u_k + \frac{g-1}{g^{k+1}} + \frac{g-1}{g^{k+2}} + \dots + \frac{g-1}{g^n} = \\ &= u_k + \frac{1}{g^k} - \frac{1}{g^n} < u_k + \frac{1}{g^k} \end{aligned}$$

czyli

$$u_k \leq u_n < u_k + \frac{1}{g^k}, \text{ dla } n > k,$$

skąd, wobec (51) i w myśl tw. 10:

$$u_k \leq x \leq u_k + \frac{1}{g^k},$$

co dowodzi, że x jest liczbą rzeczywistą skończoną. Wobec (50) i (51) możemy więc napisać rozwinięcie:

$$x = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)_g.$$

Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 21. Każdy ułamek nieskończony przy zasadzie całkowitej $g > 1$ przedstawia pewną liczbę rzeczywistą (skończoną) x , przytem, jeżeli u_n oznacza k -ty redukt uważanego ułamka, to

$$u_k \leq x \leq u_k + \frac{1}{g^k}, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

§ 16. Opierając się na twierdzeniach paragrafu poprzedzającego, okażemy obecnie, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny (jak to zapowiedzieliśmy w końcu § 9). Udowodnimy mianowicie

Twierdzenie 22. Mając jakikolwiek dany ciąg nieskończony liczb rzeczywistych u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), możemy zawsze określić liczbę rzeczywistą, nie będącą żadnym z wyrazów ciągu u_n .

W samej rzeczy niech

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

będzie dany ciąg liczb rzeczywistych.

Niech

$$u_n = c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, c_3^{(n)}, \dots \quad (52)$$

oznacza rozwinięcie normalne liczby u_n na ułamek dziesiętny ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Położmy teraz przy wszelkiem naturalnem n :

$$\text{zaś } \begin{cases} c_n = 0, & \text{jeżeli } c_n^{(n)} > 0, \\ c_n = 1, & \text{jeżeli } c_n^{(n)} = 0. \end{cases} \quad (53)$$

Ciąg nieskończony c_n będzie przez powyższe warunki określonym w zupełności, przyczem, wobec (53), wnosimy natychmiast, że liczby c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) będą cyframi w układzie dziesiętnym. W myśl tw. 21 ułamek nieskończony dziesiętny

$$0, c_1, c_2, c_3, \dots \quad (54)$$

będzie przedstawiał pewną liczbę rzeczywistą skończoną: oznaczmy ją przez x .

Rozwinięcie (54) jest oczywiście normalne, gdyż, wobec (53), mamy stale:

$$c_n \neq 9 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Powiadam, że liczba x nie jest z żadnym z wyrazów ciągu u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Istotnie, gdyby było przy pewnem $n = p$:

$$x = u_p,$$

to, z uwagi, że wobec (52), u_p daje rozwinięcie normalne

$$c_0^{(p)}, c_1^{(p)}, c_2^{(p)}, c_3^{(p)}, \dots \quad (55)$$

mielibyśmy dla liczby x dwa rozwinięcia normalne, (54 i (55), które się różnią w p -tej cyfrze, gdyż, w myśl (53), mamy w każdym razie

$$c_p \neq c_p^{(p)}.$$

Liczba x dawałaby więc dwa różne rozwinięcia na ułamek normalny przy tej samej zasadzie, wbrew tw. 20. Dowiedliśmy więc, że liczba x nie jest żadnym z wyrazów ciągu u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), c. b. d. o.

Z udowodnionego twierdzenia wynika natychmiast, że nie istnieje taki ciąg nieskończony, któryby zawierał każdą liczbę rzeczywistą. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie daje się więc ustawić w żaden ciąg nieskończony, a więc nie jest przeliczalny (gdy tymczasem, w myśl tw. 5, zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny). Zatem:

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

§ 17. Twierdzenie 23. *Na to, żeby ciąg nieskończony u_n był zbieżny, potrzeba i wystarcza iżby dla każdej liczby wymiernej dodatniej ε istniały liczby wymierne a i b takie, iż*

$$0 < b - a < \varepsilon$$

oraz iż przy pewnym naturalnym p :

$$a < u_n < b, \text{ dla } n > p.$$

Dowód. Załóżmy, że ciąg u_n jest zbieżny (§ 10), że więc mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą skończoną. W myśl tw. 3, dla danej liczby wymiernej ε istnieją liczby wymierne a i b takie iż

$$a < x < b \text{ oraz } b - a < \varepsilon;$$

w myśl tw. 14 wnosimy stąd, że każda z nierówności

$$u_n > a \text{ oraz } u_n < b$$

będzie prawdziwą dla wszystkich dostatecznie dalekich wyrazów ciągu u_n . Dowiedliśmy więc, że warunek nasz jest konieczny.

Założmy teraz, że warunek nasz jest spełniony.

Gdyby ciąg u_n nie posiadał granicy, to w myśl tw. 11 (oraz definicji granicy) byłoby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

i, w myśl tw. 2, istniałyby liczby wymierne w i w' takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < w < w' < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n. \quad (56)$$

Położmy

$$w' - w = \varepsilon \quad (57)$$

— będzie to liczba wymierna dodatnia; w myśl naszych założeń istnieją więc liczby wymierne a i b , takie, iż

$$0 < b - a < \varepsilon, \quad (58)$$

oraz iż

$$a < u_n < b, \text{ dla } n > p. \quad (59)$$

Wobec (59) oraz w myśl tw. 10 znajdujemy:

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \text{ oraz } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \leq b,$$

zatem, wobec (56):

$$a < w < w' < b,$$

co daje, w jednej chwili:

$$b - a > w' - w,$$

zatem w myśl (57):

$$b - a > \varepsilon,$$

wbrew (58).

Dowiedliśmy więc, że ciąg u_n posiada granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. W myśl naszego warunku istnieją w każdym razie liczby wymierne a i b takie, iż dla wszystkich dostatecznie dalekich wyrazów ciągu u_n zachodzi nierówność

$$a < u_n < b$$

co daje, w myśl tw. 10:

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq b,$$

co dowodzi, że granica $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ jest liczbą skończoną, czyli że ciąg u_n jest zbieżny. Warunki nasze są więc wystarczające dla zbieżności ciągu u_n .

Twierdzenie nasze udowodniliśmy zatem w zupełności.

ROZDZIAŁ III.

Działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych.

§ 18. Niech x i y będą dwie dane liczby rzeczywiste, u_n i v_n — dwa ciągi nieskończone liczb wymiernych takie, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = y \quad (1)$$

(ciągi takie istnieją zawsze, w myśl tw. 19). Powiadam, że ciąg nieskończony

$$w_n = u_n + v_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

jest zbieżny.