

02338(12)

*Książka ta została wydrukowana w Szwecji
jako dar Rządu Szwedzkiego dla odbudowy
kultury polskiej*

KAROL BORSUK

GEOMETRIA ANALITYCZNA

W n WYMIARACH

WYKŁADY UNIWERSYTECKIE

Z ZASIĘKU MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

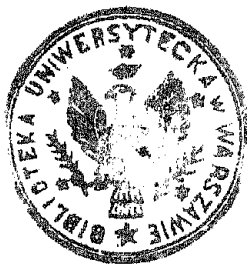


SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZA »CZYTELNIK«

1950

02333

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE
All rights reserved



K
44 51.
Dom. Ks

Printed in Sweden

LUND 1950

HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI

PRZEDMOWA

Jasne i pod względem logicznym poprawne wyłożenie początków geometrii analitycznej następuje pewne trudności, związane z ustaleniem odpowiedniości między geometrycznymi własnościami figur a arytmetycznymi własnościami spólrzędnych ich punktów. Trudności te występują między innymi wtedy, gdy arytmetycznie prostemu pojęciu wektora swobodnego i jego zwrotu nadany ma być sens geometryczny.

Niektórzy autorowie (np. L. Bieberbach w swej pięknej książce *Analytische Geometrie*, Berlin 1932) omijają te trudności, opierając geometrię analityczną na aksjomatycznie ujętej teorii wektorów. W większości jednak podręczników geometrii analitycznej nad trudnościami tymi przechodzi się do porządku, operując w szczególności niesprecyzowanym pod względem geometrycznym, intuicyjnym pojęciem zwrotu, popartym odpowiednim rysunkiem. Uzyskuje się tą drogą pewne skrócenie oraz pozorną przejrzystość, co usprawiedliwia może takie ujęcie tam, gdzie matematykę traktuje się jedynie jako narzędzie (np. w naukach technicznych). Wtedy jednak, gdy matematyka jest celem, ujęcie takie nie wydaje się wskazane, zwłaszcza w książkach, w których nie zakłada się u czytelnika specjalnego przygotowania, a więc nie można liczyć na to, że potrafi on sam luki wypełnić, a nawet zauważyć.

Zamiast pokonywania wspomnianych trudności przez odpowiednie uzupełnienie wiadomości z geometrii elementarnej, obrana została w tej książce droga uniezależnienia się od geometrii elementarnej przez definiowanie wszystkich potrzebnych pojęć geometrycznych na gruncie przestrzeni abstrakcyjnej, będącej zbiorem układów liczb z odpowiednio określoną w nim odległością. Przy takim ujęciu nawiązanie do geometrii elementarnej sprowadza się jedynie do okazania, że przestrzenie w niej rozpatrywane podpadają pod zakres rozwijanej tu teorii; to uczynione jest we wstępie, który poza tym nie jest dla zrozumienia całości książki niezbędny.

Jest rzeczą zrozumiałą, że stojąc na gruncie przestrzeni abstrakcyjnej, której elementami są układy liczb, byłoby mało naturalnym ograniczyć

się do układów złożonych z jednej, dwu lub trzech liczb, czyli do prostej, płaszczyzny i przestrzeni trójwymiarowej, zwłaszcza że rozpatrywanie od razu układów złożonych z n liczb, a więc przestrzeni n -wymiarowej, nie prowadzi do żadnych nowych trudności, lecz często nawet wykład upraszcza, pozwalając na łączne traktowanie wszystkich przypadków elementarnych. To jest jedną z przyczyn, dla których, mimo elementarnego charakteru książki, od razu rozważamy przestrzenie n -wymiarowe. Warto zaznaczyć, że tendencja do tak ogólnego ujmowania geometrii już w początkowym stadium jej nauczania ma precedensy np. we wspomnianej książce Bieberbacha a także w dwutomowym dziele Schreiera i Spenera *Analytische Geometrie*, Berlin 1931, tom I i 1935, tom II.

Uprawiając geometrię analityczną na gruncie przestrzeni abstrakcyjnej, której punktami są układy liczb, należy zwracać uwagę na jasne odróżnienie badanych własności geometrycznych od własności arytmetycznych tych układów. Toteż przywiązywałem dużą wagę do tego, by rozróżnienie to przeprowadzone było w sposób nie nastrożający wątpliwości, tak by Czytelnik zawsze mógł łatwo sobie zdać sprawę (zgodnie z tzw. »programem z Erlangen« F. Kleina), względem jakich przekształceń rozważane pojęcia są niezmiennicze.

Książka obejmuje teorię tworów pierwszego i drugiego stopnia, a więc (pogłębiony nieco) zakres geometrii analitycznej, wymagany zazwyczaj przy egzaminach magisterskich od studiujących matematykę. Poza ten zakres wykracza rozdział IV, który zawiera elementarne wiadomości o wielościanach n -wymiarowych (których znajomość zakładaną bywa zwykle przy wykładach topologii lub ogólnej teorii miary), oraz rozdział XIV, w którym mowa jest o tzw. przestrzeniach Möbiusa i o pokrewieństwach sferycznych.

Całość książki podzielona jest na trzy części, z których pierwsza (rozdziały I—VIII) obejmuje geometrię metryczną i afiniczną przestrzeni kartezjańskich, druga (rozdziały IX—XIV) poświęcona jest przestrzeniom rzutowym i przestrzeniom Möbiusa, w trzeciej wreszcie (rozdziały XV—XIX) rozpatrywane są przestrzenie zespolone (kartezjańskie i rzutowe), przy czym głównym celem jest otrzymanie pełnej klasyfikacji tworów drugiego stopnia.

Aby uniknąć niepotrzebnego powtarzania, będziemy zaopatrywać wskaźnikiem «z» te Nr., definicje, twierdzenia i wzory z części I i II, które nie ulegną zmianie, jeżeli *mutatis mutandis* od dziedziny liczb rzeczywistych przejdziemy do dziedziny liczb zespolonych. Z chwilą gdy (w części III) przejdziemy do badania przestrzeni zespolonych, ustępy zaopatrzone wskaźnikiem «z» zostaną włączone do teorii tych prze-

strzeni. W zakresie przestrzeni rzeczywistych można na wskaźnik «z» w ogóle nie zwracać uwagi.

Na końcu każdego Nr. umieszczone zostały ćwiczenia ułatwiające Czytelnikowi przyswojenie sobie podanych w danym Nr. pojęć i twierdzeń oraz nauczanie się operowania nimi.

Kończąc, serdecznie dziękuję tym wszystkim, którzy ułatwili mi napisanie i wydanie tej książki. W szczególności wiele zawdzięczam cennym uwagom i radom Bronisława Knastera, Edwarda Otto i Romana Sikorskiego. Wdzięczność moja należy się również Alinie Böhmównie za pomoc przy wykończeniu rękopisu oraz Wincentemu Borsukowi za wykonanie większości rysunków. Miło mi jest wreszcie wyrazić podziękowanie Komitetowi Redakcyjnemu «MONOGRAFII MATEMATYCZNYCH» za wydanie tej książki oraz *Svenska Kommittén för Internationell Hjälpverksamhet* za umożliwienie wykonania robót drukarskich. Wobec zniszczenia przez Niemców większości drukarni w Polsce, bez tej pomocy szwedzkiej druk książki musiałaby ulec znacznemu opóźnieniu.

Warszawa, 8 maja 1946 roku.

Karol Borsuk.

Skorowidz nazw

- Abel, 16.
 Abelowa grupa, 16.
 Absolutny twór, 312.
 Afiniczna geometria, 138; rzeczywista, 297; zespolona, 297.
 Afiniczne przekształcenie przestrzeni kartezjańskiej, 136; rzutowej, 209; zespolonej 297.
 Afiniczne własności, 138.
 Algebraiczny twór w przestrzeni kartezjańskiej, 150; rzutowej, 251; zespolonej, 315.
 Amplituda, 10.
 Analityczna metoda, 5; postać izometrii, 116; postać przekształcenia afinicznego, 136; postać przekształcenia rzutowego, 241;
 Anharmoniczny stosunek prostych, 234; punktów, 229.
 Apoloniusz, 6 i 357.
 Apoloniusza twierdzenie, 360.
 Archimedes, 172.
 Asymptota, 342.
 Asymptoty hiperboli, 160.
 Asymptotyczne hiperplaszczyny, 342; kierunki, 254 i 343.
 Barycentryczne współrzędne, 98.
 Bezładności prawo, 403.
 Bieberbach, 1.
 Biegun hiperplaszczyny względem tworów stopnia drugiego, 347; rzutu stereograficznego, 281.
 Biegunowe punktu względem tworów drugiego stopnia, 345; równanie stożkowych, 165; współrzędne, 10.
 Boki czworokąta, 269; sześciokąta, 272.
 Bolyai, 6.
 Bolzano, 249.
 Brianchon, 6.
 Brzeg komórki, 91; wielościanu, 96; zbioru, 83.
 Brzegowe punkty, 83.
 Całkowita niejednorodność, 108.
 Carnot, 35.
 Cassini, 169.
 Cauchy, 18.
 Cayley, 6.
 Ceva, 233.
 Charakterystyczny wielomian, 371.
 Chasles, 6.
 Ciąg punktów w przestrzeni kartezjańskiej, 119; rzutowej, 248.
 Ciągła funkcja, 120 i 139.
 Ciężkości środek, 98.
 Cosinusy kierunkowe, 36.
 Cykloidy, 172.
 Czworobok zupełny, 236.
 Czworokąt zupełny, 269.
 Czworociąmu objętość, 62.
 Czwórki harmoniczne, 235.
 Czwartka pierwsza, 3.
 Darboux, 6.
 Dążenie punktów do granicy, 119 i 248.
 Desargues, 6.
 Descartes, 5.
 Długość odcinka, 79; wektora, 29; wektora swobodnego, 30.
 Dodawanie punktów, 20; wektorów, 31; zbiorów, 15.
 Domknięty zbiór, 140.
 Dopelniająca półprzestrzeń, 81.
 Doskonała jednorodność, 111.
 Drugi wskaźnik afiniczny, 406; rzutowy, 404.
 Dwoistość, 265.
 Dwoistości zasada, 268.
 Dwoisty twór, 267; względem stożkowej, 275; względem różności drugiego stopnia, 349.
 Dwustosunek prostych, 234; punktów, 229.
 Dwuwymiarowa przestrzeń kartezjańska, 8; przestrzeń rzutowa, 203; sfera, 182.
 Elementarne izometrie, 24; obroty, 23.
 Element neutralny, 16.
 Elementy, 4.
 Elipsa, 157; szyjna, 191; zespolona, 330.
 Elipsoida obrotowa, 180; spłaszczona, 182; trójosiowa, 180; wydłużona, 180; zespolona, 332.
 Epicykloida, 173.
 Erlangen p. Program.
 Euklides, 4.
 Euklidesowe przestrzenie, 5.
 Euler, 130.
 Fermat, 5.
 Figura geometryczna, 4.
 Figury przystające, 4.
 Freudenthal, 101.
 Funkcja, 15; ciągła, 120; odwrotna, 15.
 Gałąź hiperboli, 162.
 Geometria, 5; afiniczna, 138; afiniczna rzeczywista i zespolona, 297; przestrzeni Möbiusa, 287; rzutowa, 206; rzutowa rzeczywista i zespolona, 306.
 Geometryczne figury, 4; scharakteryzowanie przesunięć, 28.
 Geometryczny charakter pojęć, 5.
 Główne hiperplaszczyny średnicowe, 365; kierunki, 364.
 Granica ciągu, 119 i 248.
 Grassmann, 6.
 Grupa, 16; główna (podobieństw), 131; przemiana (abelowa), 16; rzeczywistych podobieństw, 138; zespolonych podobieństw, 297.
 Grupa przekształceń afinicznych, 137; homeomorficznych, 140; izometrycznych, 22; rzutowych, 206; rzeczywistych afinicznych, 297; rzeczywistych izometrycznych, 296; rzeczywistych rzutowych, 306; zespolonych afinicznych, 297; zespolonych izometrycznych, 296; zespolonych rzutowych, 306.
 Harmoniczna czwórka punktów, 235.
 Harmoniczne dzielenie, 235.
 Harmonicznie sprzężone punkty, 235.
 Hermite, 373.
 Hesse, 64.
 Hiperbola, 159; równoramienna, 161; sprzężona, 162; zupełna, 256; zupełna zespolona, 330.
 Hiperboloida dwupowłokowa, 184; dwupowłokowa obrotowa, 184; dwupowłokowa zupełna, 258; jednopowłokowa, 187; jednopowłokowa obrotowa, 186; jednopowłokowa zupełna, 258; zupełna zespolona, 332.
 Hipocykloida, 173.
 Hiperplaszczyna, 25; asymptotyczna, 342; główna, 365; niewłaściwa, 206; normalna, 66; podstawowa, 246; równoległa, 71; rzutowa, 206; styczna, 338; symetrii, 67; średnicowa, 349; zespolona, 401; zespolona rzutowa, 309.
 Hiperplaszczyny ściśle równoległe, 71.
 Homeomorfizm, 142.
 Homograficzna funkcja, 230.
 Iloczyn kartezjański, 92; macierzy, 45; skalarny punktów, 20; skalarny wektorów, 34; mnogościowy, 15; wektorialny dwóch wektorów, 59; wektorialny $n-1$ wektorów, 105.
 Incydencja, 65.
 Inwersja, 289.
 Inwolucja, 68.
 Izometria, 4; elementarna, 24; rzeczywista, 296; zwierciadłana, 118; zwykła, 118.
 Izotropowe kierunki i proste, 311.
 Jednojednoznaczne przekształcenie, 15.
 Jednorodność współrzędne, 201; wielomiany, 251.
 Jednorodność przestrzeni doskonała i zwykła 111; równania tworów algebraicznego w \mathbb{P}_n , 317; rzutowa, 424.

Jednostronna powierzchnia, 204.
Jednowymiarowa przestrzeń, 7.
Jednoznaczność równania hiperplaszczyny, 56; tworzącego drugiego stopnia, 325.
Kanoniczna postać drugiego rodzaju, 380; pierwszego rodzaju, 380.
Kartezjusz, 7.
Kartezjusza liść, 169.
Kartezjańska przestrzeń dwuwymiarowa, 8; jednowymiarowa, 7; n -wymiarowa, 17; trójwymiarowa, 13; zespolona, 294.
Kartezjański iloczyn, 92.
Kąt, 9; między wektorami, 35.
Kąty Eulera, 130.
Kierownica, 153.
Kierunek główny, 364; izotropowy (minimalny), 311; normalny, 339; osobliwy, 342; prostej, 34; wektora, 32; wyjątkowy, 344.
Kierunki asymptotyczne, 254 i 343; hiperboli, 256; paraboli, 256; tworzą algebraicznego w P_n , 254; tworzą algebraicznego w \mathbb{P}_n , 344.
Kierunki sprzężone, 350.
Kierunkowe cosinusy, 36.
Kierunkowy współczynnik, 66.
Klasyfikacja pojęć geometrycznych, 138.
Klasyfikacja tworów drugiego stopnia afiniczne, 411; na płaszczyźnie, 416; rzutowa, 407; w przestrzeni trójwymiarowej, 419 i 420; ze względu na podobieństwo, 400.
Klein, 2 i 139.
Knaster, 109.
Kolineacja w przestrzeni kartezjańskiej, 141; rzutowej, 243; zespolonej, 300 i 308.
Kolista kubika jednobieżna, 166.
Koliste przekroje elipsoidy, 182.
Kolumny macierzy, 45.
Kombinacja liniowa wektorów, 40.
Kompleks geometryczny, 94; symplijalny, 100.
Komórka, 85.
Konformiczne przekształcenie, 283.
Koniec wektora, 29.
Kontrawariantne wektory, 148.
Końce odcinka, 79.
Kowariantne wektory, 149.
Krawędź sympleksu, 99.
Krzywe algebraiczne i przestępne, 151.
Kształt, 111.
Kubika kolista jednobieżna, 166.
Kula, 83; otwarta, 79.
Kwadratowa macierz, 45.
Kwadrzyka, 197; zupełna, 261; zupełna zespolona, 332.
Laguerre, 6.
Leibniz, 6.
Lemniskata, 169.
Liczbowa oś, 7.
Liniowa zależność hiperplaszczyn, 226; prostych, 421; punktów w C_n , 39; punktów w P_n , 216; punktów w \mathbb{C}_n , 300; punktów w \mathbb{P}_n , 309; wektorów w C_n , 40; wektorów w \mathbb{C}_n , 300.
Liniowe przekształcenie, 210.
Liniowy zbiór w C_n , 38; w P_n , 214; w \mathbb{C}_n , 300; w \mathbb{P}_n , 308.
Liść Kartezjusza, 169.
Lobaczewski, 6.
Macierz, 45; Hermite'a, 373; kwadratowa, 45; małego wyróżnika, 344; odwrotna, 147; ortogonalna, 115; transponowana, 45; układu wektorów, 47; wielkiego wyróżnika, 335; zerowa, 47.
Maksymalny układ liniowo niezależnych wektorów, 42.
Mała oś elipsy, 157.
Mały wyróżnik, 344 i 370.
Menelaus, 233.
Metoda analityczna, 5.
Metryczna jednorodność, 108; przestrzeni, 5.
Miara równoległości, 102; sympleksu, 102; wektora, 33; wielości, 102.
Mimośród, 153; elipsy, 157; hiperboli, 161; paraboli, 153.
Minimalne kierunki i proste, 311.
Minory macierzy, 47.
Mnożenie macierzy, 46; punktu przez liczbę, 20; zbiorów, 15.

Mnożenie skalarne punktów, 20; wektorów, 34.
Mnożenie wektorialne, 59 i 105.
Möbius, 201.
Möbiusa przestrzeń, 284.
Möbiusa wstęga, 204.
Nadzbior, 14.
Neutralny element, 16.
Newton, 6.
Nieeuklidesowe geometrie, 314.
Nieorientowalność przestrzeni, 245.
Nierówność Cauchy-Schwarza, 18; trójkąta, 5 i 18.
Niewłaściwa hiperplaszczyna, 206 i 309.
Niewłaściwy punkt prostej rzeczywistej, 202; prostej zespolonej, 308; przestrzeni P_n , 202; przestrzeni \mathbb{P}_n , 306; tworzą algebraicznego w P_n , 254; tworzą algebraicznego w \mathbb{P}_n , 320.
Niezależne liniowo proste, 421.
Niezależne liniowo punkty w C_n , 40; w P_n , 216; w \mathbb{C}_n , 300; w \mathbb{P}_n , 309.
Niezależne liniowo wektory w C_n , 40; w \mathbb{C}_n , 300.
Niezmienniczość liniowej niezależności, 53; wielomianu charakterystycznego 374.
Niezmienniczy charakter pojęć, 5.
Niezmienniki afiniczne, 140; homeomorfizmów, 142; izometrii, 4; podobieństw, 134; pokrewieństw sferycznych, 287; przekształceń rzutowych, 206; rzeczywistych izometrii, 296; rzeczywistych podobieństw, 297; rzeczywistych przekształceń afinicznych, 297; rzeczywistych przekształceń rzutowych, 306; zespolonych izometrii, 296; zespolonych podobieństw, 297; zespolonych przekształceń afinicznych, 297; zespolonych przekształceń rzutowych, 306.
Normalna, 339.
Normalne hiperplaszczyny, 66.
Normalny kierunek, 339.
Objętość czworociścianu, 62.
Obrotowa elipsoida, 180; hiperboloida dwupowłokowa, 184; hiperboloida je-
 dnopowłokowa, 186; paraboloida, 191; powierzchnia, 174.
Obrotowy stożek, 176; walec, 176.
Obrotów niezmiennik, 378.
Obroty dokoła początku układu, 377; elementarne, 22; płaszczyzny, 23.
Obszary wyznaczone przez hiperplaszczynę, 81.
Odcięta, 8.
Odcinek, 78.
Odejmowanie punktów, 20; wektorów, 31; zbiorów, 15.
Odległość, 4; punktu od hiperplaszczyny, 64 i 68; punktu od prostej, 69.
Odpowiednie wielomiany, 395.
Odwrotna macierz, 147.
Odwrotne przekształcenie, 15.
Ognisko, 153.
Ogólne położenie hiperplaszczyny w C_n , 75; hiperplaszczyny w P_n , 227; prostej i hiperplaszczyny, 65.
Ograniczony zbiór, 85.
Operacja grupowa, 16.
Orientacja przestrzeni C_n , 51; układu wektorów, 50.
Orientowalność, 245.
Ortogonalna macierz, 115.
Ortogonalne wektory, 35.
Oś elipsy, 157; elipsoidy, 182; hiperboli, 161; hiperboloidy jednopowłokowej, 188 i 189.
Oś, 7; liczbowa, 7; obrotu, 174; obrotu elipsoidy obrotowej, 183; rzeczywista hiperboloidy dwupowłokowej, 185; symetrii, 68; symetrii paraboli, 154.
Ował Cassiniego, 169.
Pappus, 6.
Pappusa twierdzenie, 233.
Parabola, 153; zupełna, 256; zupełna zespolona, 330.
Paraboliczny wierzchołek, 390.
Paraboloida eliptyczna, 191; eliptyczna zupełna, 332; hiperboliczna, 194; hiperboliczna zupełna, 259; obrotowa, 191; zupełna zespolona, 332.

- Parametryczne równania* elipsy, 157; hiperboli, 162; prostej, 26.
Pascal, 6.
Pascala twierdzenie, 272.
Perspektywiczne przekształcenie, 244.
Pęk prostych, 233.
Pierwiastki charakterystyczne, 372; pseudocharakterystyczne, 378.
Pierwsza ćwiartka, 9.
Pierwszy wskaźnik afiniczny, 345; rzutowy, 335.
Pitagoras, 8.
Pitagorasa wzór, 8; 13; 18.
Plücker, 6.
Plückera spólrzędne, 265.
Plaszczyzna, 25; euklidesowa, 5; kartezjańska, 8; Möbiusa, 285; rzutowa, 203; zorientowana, 9.
Początek wektora, 29.
Podgrupa, 16.
Podkompleks, 96.
Podmacierz, 47.
Podobieństwo, 131; rzeczywiste i zespolone, 297; zachowujące i zmieniające orientację, 132.
Podobieństwo geometria, 138.
Podobne przestrzenie, 131.
Podpodział, 100.
Podstawa cykloidy, 171; równoległościannu, 90; sympleksu, 99; walca, 176.
Podstawowe hiperplaszczyny, 246; proste, 246; wektory, 143.
Podzbiór, 14.
Pojedynczego podziału stosunek, 27.
Pokrewieństwo, 136; sferyczne, 287.
Pole trójkąta, 62.
Polożenie, 111; ogólne hiperplaszczyn w C_n , 75; ogólne hiperplaszczyn w P_n , 227; ogólne prostej i hiperplaszczyny, 65.
Poncelet, 6.
Postać Hessego równania, 64.
Postać kanoniczna drugiego rodzaju, 380; pierwszego rodzaju, 380.
Powierzchnia algebraiczna i przestępna, 151 i 252; jednostronna, 204; obrotowa, 174; torusa, 197.
Półhiperplaszczyna, 82.
Półprosta dodatnia i ujemna, 7.
Półprzestrzeń, 81.
Prawo bezwładności, 403.
Program z Erlangen, 139.
Promień sfery, 278; wodzący, 10.
Proporcjonalność, 19.
Prosta euklidesowa, 5; izotropowa, 311; kartezjańska, 7; minimalna, 311; Möbiusa, 285; Pascala, 272; prostopadła do hiperplaszczyny, 57; równoległa do hiperplaszczyny, 65; rzutowa, 202; średnicowa, 350; zespolona, 299; zespolona rzutowa, 307; zorientowana, 7.
Proste liniowo zależne, 421; podstawowe, 246; równoległe, 34.
Prostej kierunek, 34; równanie parametryczne, 26; równanie wektorialne, 33; rzutowej równanie, 207.
Prostopadłe kierunki, 36; proste, 57; wektory, 35; wektory zespolone, 303.
Przecięcia stożka, 178; zbiorów, 15.
Przeciwnie elementy, 16; wektory, 31, zwroty, 32.
Przeciwnie zorientowane układy wektorów, 50.
Przeciwległe boki sześciokąta, 272; wierzchołki sześcioboku, 275.
Przeciwniennicze wektory, 148.
Przedmiot geometrii, 4.
Przedział liczbowy, 78.
Przekątne czworoboku, 236.
Przekątne punkty czworokąta, 269.
Przekształcenia afiniczne przestrzeni kartezjańskiej, 136; przestrzeni Möbiusa 285; przestrzeni rzutowej, 209; rzeczywiste i zespolone, 297; tożsamościowe, 15; zachowujące i zmieniające orientację, 137.
Przekształcenia izometryczne, 4; przestrzeni kartezjańskiej, 116; przestrzeni Möbiusa, 285; rzeczywiste i zespolone, 296; zwykle i zwierciadlane, 118.
Przekształcenia liniowe, 210.
Przekształcenia perspektywiczne, 244.
Przekształcenia rzutowe, 206; rzeczywiste i zespolone, 306.
Przekształcenie jednojednoznaczne, 15; konformiczne, 283; odwrotne, 15; przez promienie odwrotne, 289; tożsamościowe, 15.
Przemiana grupa, 16.
Przeziernie euklidesowa, 5.
Przestrzeń kartezjańska jednowymiarowa, 7; dwuwymiarowa, 8; trójwymiarowa, 13; n -wymiarowa, 17; zespolona, 294.
Przestrzeń metryczna, 5.
Przestrzeń Möbiusa, 284.
Przestrzeń rzutowa, 202; zespolona, 294; zwarta, 249.
Przesunięcie, 22.
Pseudocharakterystyczne wielomiany, 378; pierwiastki, 378.
Punkt brzegowy, 83; brzegowy i wewnętrzny względem hiperplaszczyny, 84; niewłaściwy, 202; niewłaściwy tworzą algebraicznego w P_n , 254; niewłaściwy tworzą algebraicznego w \mathbb{P}_n , 320; osobliwy, 335; przekątnowy, 269; rzeczywisty, 294; w nieskończoności, 284; wewnętrzny, 83; właściwy, 202; zwyczajny, 335.
Punktu równanie, 264.
Punkty harmonicznie sprzężone, 235; liniowo zależne, 39; sprzężone, 294; symetryczne, 67.
Pusty zbiór, 14.
Reprezentant wektora swobodnego, 30.
Rozkładalny twór, 320.
Rozłączne zbiory, 15.
Rozmaitość, 335.
Równanie asymptot hiperboli, 161; biegunowe stożkowych, 165; elipsy, 156 i 256; elipsoidy, 180 i 257; hiperboli, 160; hiperboli zupełnej, 256; hiperboloidy dwupowłokowej, 184; hiperboloidy dwupowłokowej zupełnej, 258; hiperboloidy jednopowłokowej, 187; hiperboloidy jednopowłokowej zupełnej, 259; hiperplaszczyny, 54 i 224; hiperplaszczyny biegunowej, 346; hiperplaszczyny stycznej, 338; kubiki kolistej jednobieżnej, 167; lemniskaty, 170; normalnej, 339; owalu Cassiniego, 169; paraboli, 153; paraboli zupełnej, 256; paraboloidy eliptycznej, 191; paraboloidy eliptycznej zupełnej, 259; paraboloidy hiperbolicznej, 195; paraboloidy hiperbolicznej zupełnej, 259; parametryczne cykloidy, 172; parametryczne elipsy, 157; parametryczne elipsoidy, 181; parametryczne hiperboli, 163; parametryczne prostej, 26; powierzchni obrotowej, 174; powierzchni torusa, 198; prostej rzutowej, 207; punktu, 266; sekularne, 372; stożka, 177; strofoidy, 163; tworzących hiperboloidy jednopowłokowej, 263; tworzących paraboloidy hiperbolicznej, 264; wektorialne prostej, 33; wielkowe, 372; wierzchołkowe, 165; w postaci kanonicznej drugiego rodzaju, 380; w postaci kanonicznej pierwszego rodzaju, 380; zbioru, 150.
Równe wektory, 29.
Równoległe proste, 34; wektory, 32.
Równoległość ścisła hiperplaszczyny, 71; prostej i hiperplaszczyny, 65; wektora do hiperplaszczyny, 57.
Równoległościann, 87.
Równoramienna hiperbola, 161.
Różnica punktów, 20; wektorów, 31; zbiorów, 15.
Ruch sztywny, 121.
Rząd macierzy, 47.
Rzeczywista oś hiperboli, 161; hiperboloidy dwupowłokowej, 185; mała i wielka hiperboloidy jednopowłokowej, 189.
Rzeczywiste izometrie, 296; podobieństwa, 297; przekształcenia afiniczne, 297; przekształcenia rzutowe, 306; punkty, 294; tworzące, 427.
Rzędna, 8.
Rzeczywisty twór algebraiczny, 315 i 318; układ spólrzędnych, 296.
Rzut punktu na hiperplaszczynę 64 i 67; stereograficzny, 282.
Rzutowa geometria, 206; geometria rzeczywista, 306; geometria zespolona 306; jednorodność, 424; klasyfikacja tworów stopnia drugiego, 407; plasz-

czyzna, 203; prosta, 202; przestrzeń n -wymiarowa, 202; przestrzeń zespolona, 294.

Rzutowe przekształcenia, 206; przekształcenie prostej, 206; spólrzędne, 245; spólrzędne zespolone, 310.

Rzutowy wskaźnik drugi, 404; pierwszy, 335.

Salmon, 6.

Scharakteryzowanie przesunięć, 28.

Schreier, 2.

Schwarz, 18.

Sekularne równanie, 372.

Sfera dwuwymiarowa, 180; k -wymiarowa, 277; w przestrzeni \mathbb{P}_n , 323; zdegenerowana w C_n , 277; zdegenerowana w \mathbb{C}_n , 323, zespolona, 323.

Sferyczne pokrewieństwo, 287.

Sierpiński, 11.

Sikorski, 212.

Skalarny iloczyn punktów, 20; wektorów, 34.

Składanie izometrii, 23.

Skrócona cykloida, 172.

Sperner, 2.

Spirala Archimedeasa, 172.

Spłaszczona elipsoida obrotowa, 180.

Spółczynnik kierunkowy, 66; podobieństwa, 131.

Spólrzędne, 5; barycentryczne, 98; biegunowe, 10; jednorodne, 201; kartezjańskie na prostej, 7; kartezjańskie na płaszczyźnie, 8; kartezjańskie w przestrzeni, 12; Plückera, 265; prostokątne na płaszczyźnie, 8; prostokątne w przestrzeni, 12; prostokątne, zmiana, 124; rzutowe, 245; rzutowe zespolone, 310; sferyczne, 13; trójkątowe, 246; ukośnokątne, 143; ukośnokątne zespolone, 297; walcowe, 14; wektora, 30; wektora swobodnego, 31.

Sprzężone harmonicznie punkty, 235; hiperbole, 162; kierunki, 350; punkty, 294; średnice, 357.

Staudt, v., 6.

Stereograficzny rzut, 282.

Stopień tworzenia algebraicznego, 150 i 151.

Stosunek anharmoniczny, 229; pojedynczego podziału, 27.

Stożek, 337; eliptyczny, 177; obrotowy, 176.

Stożkowa, 164; zupełna, 257; zupełna zespolona, 340.

Strojoida prosta, 168.

Sturm, 375.

Styczna hiperpłaszczyzna, 338; do stożkowej, 274; do tworzenia stopnia drugiego, 333.

Suma punktów, 20; wektorów, 31; zbiorów, 15.

Superpozycja, 16.

Swobodny wektor, 30.

Sylvester, 6.

Symetria względem hiperpłaszczyzny, 67; w przestrzeni zespolonej, 304.

Symetryczne punkty, 67.

Sympleks, 96.

Symplijalny rozkład, 100.

Sześciobok opisany na stożkowej, 275.

Sześciokąt wpisany w stożkową, 272.

Szyjne ruchy, 121.

Szyjna elipsa, 189.

Ściana równoległościanu, 90; sympleksu, 98.

Średnica tworzenia stopnia drugiego, 356.

Średnice sprzężone, 357.

Średnicowa hiperpłaszczyzna, 349; główna, 365.

Średnicowy układ, 358.

Środek ciężkości, 98; elipsy, 156; elipsoidy, 181; hiperboli, 160; hiperboloidy dwupowłokowej, 185; hiperboloidy jednopowłokowej, 188; pary punktów, 27; sfery, 278; symetrii zbioru, 68; tworzenia stopnia drugiego, 352.

Teoria miary, 101.

Topologia, 139; przestrzeni P_n , 250; przestrzeni \mathbb{C}_n , 297; przestrzeni \mathbb{P}_n , 307.

Torus, 197.

Tożsamościowe przekształcenie, 15.

Transponowana macierz, 45.

Triangulacja, 100.

Trójkąt zupełny, 269.

Trójkąta nierówność, 18; pole, 62.

Trójkątowe spólrzędne, 246.

Twierdzenie Apoloniusza, 360; Brianchona, 276; Cevy, 323; Darboux i von Staudta, 238; Desargues'a 270; dwoiste, 267; Menelausa, 233; o redukcji, 380; Pappusa, 233; Pascala, 272.

Tworzące prostoliniowe hiperboloidy jednopowłokowej, 190; kwadryk zupełnych, 262; paraboloidy hiperbolicznej, 261; rzeczywiste, 427; stożka, 177; tworzenia stopnia drugiego, 420; walca, 176.

Twór absolutny, 312; algebraiczny, 150; algebraiczny rzeczywisty, 313 i 318; dwoisty, 267; dwoisty względem rozmaitości, 349; dwoisty względem stożkowej, 275; przestępny, 151, pierwszego stopnia w przestrzeni kartezjańskiej, 55; pierwszego stopnia w przestrzeni rzutowej, 251; rozkładalny, 320; stopnia k -tego w przestrzeni kartezjańskiej, 150; stopnia k -tego w przestrzeni rzutowej, 251; stopnia k -tego w przestrzeni zespolonej, 315.

Układ Apoloniusza, 357; Apoloniusza główny, 366; hiperpłaszczyzn w P_n , 225; liniowo niezależny punktów, 39; liniowo niezależny wektorów, 40; maksymalny wektorów liniowo niezależnych, 42; pierwiastków charakterystycznych, 372; pierwiastków pseudocharakterystycznych, 378 i 393; średnicowy, 358; uporządkowany 18; zupełny niezmienników, 394.

Układ spólrzędnych biegunowy, 10; dodatnio i ujemnie zorientowany, 126; kartezjański, 8 i 11; prostokątny, 12; rzeczywisty, 296; ukośnokątny, 143 i 297.

Układy proporcjonalne, 19.

Ukośnokątne spólrzędne, 143; wektora, 144.

Uporządkowany układ, 18.

Urojona hiperbola, 161; hiperboloidy jednopowłokowej, 189.

Uzupełniająca hiperpłaszczyzna, 67.

Uzupełnienie, 15 i 114; układu wektorów, 44.

Walce, 176.

Weierstrass, 249.

Wektor, 29; przeciwny, 30; swobodny, 30.

Wektorialna postać równania prostej, 33.

Wektorialny iloczyn, 59.

Wektory kontrawariantne (przeciwzmiennicze), 148; kowariantne (współzmiennicze), 149; liniowo zależne, 40; podstawowe, 143; prostopadłe (ortogonalne), 35; równoległe, 32.

Wersor, 30.

Wewnętrzne punkty, 83; odcinka, 79.

Wiekowe równanie, 372.

Wielka oś elipsy, 157.

Wielki wyróżnik, 335 i 367.

Wielomian charakterystyczny, 371; jednorodny, 251; pseudocharakterystyczny, 378.

Wielomiany odpowiednie, 395.

Wielościannik, 90.

Wiersze macierzy, 45.

Wierzchołek paraboli, 154; paraboloidy eliptycznej, 192; paraboloidy hiperbolicznej, 194; pęku, 233; stożka, 177.

Wierzchołki czworoboku, 236; czworokąta, 269; elipsy, 157; elipsoidy, 182; hiperboli, 161; hiperboloidy dwupowłokowej, 185; paraboliczne, 390; równoległościanu, 88; sympleksu, 96.

Wierzchołkowe równanie, 165.

Własności afiniczne, 367; metryczne, 367; rzutowe, 367.

Właściwa ściana sympleksu, 99.

Właściwy podzbiór, 15; punkt, 202.

Wnętrze hiperboli, 164; paraboli, 155; zbioru, 83.

Wodzący promień, 10.

Wskaźnik afiniczny drugi, 406; pierwszy, 345.

Wskaźnik rzutowy drugi, 404; pierwszy, 335.

Współzmiennicze wektory, 149.

- Wstęga Möbiusa*, 204.
Wyjątkowy kierunek, 344.
Wymiar komórki, 86; układu wektorów, 47; wielościanu, 91.
Wydłużona cykloida, 172; elipsoida obrotowa, 180.
Wynik ruchu sztywnego, 121.
Wypukły zbiór, 79.
Wyróżnik mały, 344 i 372; układu punktów, 53; wielki, 335 i 367.
Wysokość równoległościannu, 90; sympleksu, 99.
Wyznaczanie stożkowej, 329; tworzenia stopnia drugiego, 327.
Wzór Laguerre'a, 314; Pitagorasa, 8, 13 i 18.
Zachowanie orientacji, 118.
Zależne liniowo hiperpłaszczyzny, 226; proste, 421; punkty, 39 i 216; wektory, 40 i 300.
Zasada dwoistości, 268.
Zbieżny ciąg, 119 i 248.
Zbiór domknięty, 140; liniowy, 38; ograniczony, 85; pusty, 14; wypukły, 79.
Zdegenerowana sfera, 277 i 323.
Zespolona geometria afiniczna, 297; geometria rzutowa, 306; prosta, 299; przestrzeń, 294.
Zespolone podobieństwo, 297; spójrzne rzutowe, 310.
Zespolone przekształcenie afiniczne, 297; rzutowe, 306.
Zgodnie zorientowane układy wektorów, 50.
Złącz w C_n , 38; w P_n , 214.
Zmetryzowanie, 5.
Zmiana orientacji, 137.
Zmiana spójrznych na płaszczyźnie, 127; w przestrzeni trójwymiarowej, 128; w przestrzeni n -wymiarowej, 124.
Znaki pierwiastków charakterystycznych, 376.
Zorientowana płaszczyzna, 9; prosta, 7; przestrzeń C_n , 51.
Zupełna hiperbola, 256; hiperboloidu dwupowłokowa, 258; hiperboloida jednopowłokowa, 258; kwadryka, 261; parabola, 256; paraboloida eliptyczna, 259; paraboloida hiperboliczna, 259; stożkowa, 257.
Zupełny czworobok, 236; czworokąt, 269; układ niezmienników metrycznych, 393.
Zwartość przestrzeni, 249.
Zwierciadlana izometria, 118.
Zwrot wektora, 32.
Zwyczajna cykloida, 172.
Zwyczajne punkty, 335.
Zwykła izometria, 118.
Skorowidz znaków
 $[a]$ wektor swobodny w przestrzeni kartezjańskiej, którego reprezentantem jest wektor o początku w punkcie 0 i końcu w punkcie a tej przestrzeni. Str. 31.
 \overline{ab} odcinek o końcach a i b . Str. 78.
 \vec{ab} wektor o początku a i końcu b . Str. 29.
 $\vec{[ab]}$ wektor swobodny, którego reprezentantem jest wektor \vec{ab} . Str. 30.
 $|a_{i,j}|$ ($i, j=1, 2, \dots, k$) wyznacznik k -tego stopnia mający w i -tym wierszu i j -tej kolumnie wyraz $a_{i,j}$. Str. 37.
 $(a_{i,j})$ ($i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, l$) macierz o k wierszach i l kolumnach, w której i -tym wierszu i j -tej kolumnie znajduje się wyraz $a_{i,j}$. Str. 45.
 $(a_{i,j})$ ($i, j=1, 2, \dots, k$) macierz kwadratowa o k wierszach i k kolumnach, w której i -tym wierszu i j -tej kolumnie znajduje się wyraz $a_{i,j}$. Str. 45.
 $(a, b; p, q)$ stosunek anharmoniczny czyli dwustosunek czwórki punktów a, b, p, q . Str. 229.
 $a+b, a-b, a \cdot b$ odpowiednio suma, różnica i iloczyn skalarny wektorów swobodnych a i b przestrzeni kartezjańskiej. Str. 31 i 34.
 $a \times b$ iloczyn wektorialny wektorów swobodnych a i b 3-wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej. Str. 59.
 $a \parallel H$ równoległość wektora a do hiperpłaszczyzny H . Str. 57.
 $a \perp H$ prostopadłość wektora a do hiperpłaszczyzny H . Str. 57.
 (a) punkt przestrzeni kartezjańskiej, którego spójrzne są odpowiednio równe spójrznyom wektora swobodnego a . Str. 31.
 $|a|$ długość wektora a . Str. 29.
 $A+B$ suma zbiorów A i B . Str. 15.
 $A-B$ różnica zbiorów A i B . Str. 15.
 $A \cdot B$ iloczyn (czyli część wspólna) zbiorów A i B . Str. 15.
 $A \times B$ iloczyn kartezjański zbiorów A i B . Str. 92.
 $b(r, \theta)$ punkt płaszczyzny o spójrznych biegunowych r i θ . Str. 10.
 $B(A)$ brzeg zbioru A . Str. 83.

C_n przestrzeń kartezjańska n -wymiarowa. Str. 17.
 $C_{n,k}$ hiperpłaszczyzna k -wymiarowa przestrzeni C_n będąca zbiorem wszystkich punktów postaci (x_1, x_2, \dots, x_n) , gdzie $x_i=0$ dla $i>k$. Str. 25.
 $C(p_0, p_1, \dots, p_k)$ złącz punktów p_0, p_1, \dots, p_k w przestrzeni C_n . Str. 38.
 $C(E)$ najmniejszy podzbiór liniowy przestrzeni C_n zawierający zbiór $E \subset C_n$. Str. 38.
 C znak zawierania się. Str. 14.
 \mathbb{C}_n przestrzeń kartezjańska n -wymiarowa zespolona. Str. 294
 $\mathbb{C}_{n,k}$ hiperpłaszczyzna k -wymiarowa zespolona przestrzeni \mathbb{C}_n , będąca zbiorem wszystkich punktów postaci (x_1, x_2, \dots, x_n) , gdzie $x_i=0$ dla $i>k$. Str. 301.
 δ_i^j liczba równa 1 dla $i=j$, zaś 0 dla $i \neq j$. Str. 36.
 $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_k)$ najmniejszy podzbiór wypukły przestrzeni C_n , zawierający punkty $a_0, a_1, \dots, a_k \in C_n$; w przypadku liniowej niezależności tych punktów jest to sympleks o wierzchołkach a_0, a_1, \dots, a_n . Str. 79 i 97.
 $|\Delta(p, q, r)|$ pole trójkąta o wierzchołkach p, q, r . Str. 62.
 E_1, E_2, E_3 prosta, płaszczyzna i przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Str. 5.
 $E(p_0, L_0, e)$ stożkowa o ognisku p_0 , kierownicy L_0 i mimośrodku e . Str. 153.
 ε znak przynależności. Str. 14.
 f_{-1} przekształcenie odwrotne względem przekształcenia f . Str. 15.
 $H(u_0, u_1, \dots, u_n)$ hiperpłaszczyzna $(n-1)$ -wymiarowa o współrzędnych Plückera u_0, u_1, \dots, u_n w przestrzeni P_n . Str. 265.
 I_n zbiór wszystkich kierunków izotropowych (minimalnych), czyli tzw. *twór absolutny* przestrzeni \mathbb{F}_n . Str. 312.
 $k(\mathfrak{A})$ pierwszy wskaźnik afiniczny tworzącego \mathfrak{A} drugiego stopnia. Str. 375 i 406.
 $K(\mathfrak{A})$ pierwszy wskaźnik rzutowy tworzącego \mathfrak{A} drugiego stopnia. Str. 335.
 $l(\mathfrak{A})$ drugi wskaźnik afiniczny tworzącego \mathfrak{A} drugiego stopnia. Str. 406.
 $L(\mathfrak{A})$ drugi wskaźnik rzutowy tworzącego \mathfrak{A} drugiego stopnia. Str. 404.
 $\lim_{r \rightarrow \infty} p^r$ granica ciągu punktów p^r . Str. 119 i 248.
 $(L_1, L_2; L_3, L_4)$ stosunek anharmoniczny czyli dwustosunek czwórki prostych L_1, L_2, L_3, L_4 należących do jednego pęku. Str. 234.
 M_n przestrzeń Möbiusa n -wymiarowa. Str. 284.
 $m(f)$ macierz małego wyróżnika równania kwadratowego $f=0$. Str. 344.
 $\bar{m}(f)$ mały wyróżnik równania kwadratowego $f=0$. Str. 344.
 $\mathfrak{M}(f)$ macierz wielkiego wyróżnika równania kwadratowego $f=0$. Str. 335.

$\mathfrak{M}(f)$ wielki wyróżnik równania kwadratowego $f=0$. Str. 335.
 0 punkt lub wektor swobodny przestrzeni kartezjańskiej, którego wszystkie współrzędne są równe zeru. Str. 20 i 30.
 $p+q, p-q, p \cdot q$ suma, różnica i iloczyn skalarny punktów p i q przestrzeni kartezjańskiej n -wymiarowej. Str. 20.
 $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ punkt przestrzeni rzutowej o współrzędnych jednorodnych x_0, x_1, \dots, x_n . Str. 265.
 $p^r \rightarrow p^0$ zbieżność ciągu punktów $\{p^r\}$ do punktu p^0 . Str. 119 i 248.
 P_n przestrzeń rzutowa n -wymiarowa. Str. 202.
 $P_{n,k}$ hiperpłaszczyzna k -wymiarowa rzutowa przestrzeni P_n złożona z wszystkich punktów postaci $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, gdzie $x_i=0$ dla $i>k$. Str. 208.
 $P(p_0, p_1, \dots, p_k)$ złącz punktów p_0, p_1, \dots, p_k w przestrzeni P_n . Str. 214.
 $P(E)$ najmniejszy podzbiór liniowy przestrzeni P_n , zawierający zbiór $E \subset P_n$. Str. 214.
 \mathbb{F}_n przestrzeń rzutowa n -wymiarowa zespolona. Str. 294.
 $\mathbb{F}_{n,k}$ hiperpłaszczyzna k -wymiarowa zespolona rzutowa przestrzeni \mathbb{F}_n , złożona ze wszystkich punktów postaci $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, gdzie $x_i=0$ dla $i>k$. Str. 309.
 $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ równoległocian rozpięty na wektorach a_0, a_i , gdzie $i=1, 2, \dots, n$. Str. 88.
 $\varrho(p, q)$ odległość punktów p i q . Str. 4.
 $\varrho(p, H)$ odległość punktu p od hiperpłaszczyzny H . Str. 64.
 $t \cdot a$ iloczyn wektora a przez liczbę t . Str. 33.
 $t \cdot p$ iloczyn punktu p przez liczbę t . Str. 20.
 $t_{\mathfrak{A}}(p)$ liczba liniowo niezależnych tworzących rzeczywistych prostoliniowych tworzących drugiego stopnia \mathfrak{A} , przechodzących przez punkt p . Str. 428.
 $\tau_{\mathfrak{A}}(p)$ liczba liniowo niezależnych tworzących prostoliniowych zespolonych tworzących drugiego stopnia \mathfrak{A} , przechodzących przez punkt p . Str. 422.
 u_1, u_2, \dots, u_n współrzędne współzmiennicze (kowariantne). Str. 149.
 u^1, u^2, \dots, u^n współrzędne przeciwzmiennicze (kontrawariantne). Str. 148.
 v_i punkt przestrzeni C_n , którego i -ta współrzędna jest równa 1, a pozostałe zero. Str. 114.
 v_i^r punkt przestrzeni P_n , mający jedynie i -tą współrzędną (jednorodną) różną od zera. Str. 222.
 $V(\lambda)$ wielomian charakterystyczny. Str. 371.
 v_i wersor i -tej osi współrzędnych przestrzeni C_n , czyli wektor postaci $[\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n]$. Str. 36.

$w(a_0, a_1, \dots, a_n)$ wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ 1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

gdzie $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ są punktami przestrzeni C_n . Str. 52.

$W(A)$ wnętrze zbioru A . Str. 83.

$W(\lambda)$ wielomian pseudocharakterystyczny. Str. 378.

$X(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ iloczyn wektorialny wektorów a_1, a_2, \dots, a_{n-1} w przestrzeni C_n . Str. 105.

$\omega(a_0, a_1, \dots, a_k)$ wyróżnik układu punktów a_0, a_1, \dots, a_k przestrzeni C_n . Str. 53.

Spis rzeczy

Przedmowa	1
-----------	---

Wstęp

1. Przedmiot i metoda geometrii analitycznej	4
2. Przestrzeń kartezjańska jednowymiarowa	7
3. Przestrzeń kartezjańska dwuwymiarowa	8
4. Przestrzeń kartezjańska trójwymiarowa	11
5. Zbiory, funkcje, grupy	14

Część I. Przestrzenie kartezjańskie

Rozdział I. Punkty i wektory w przestrzeniach kartezjańskich

6. Punkty przestrzeni C_n	17
7. Działania na punktach w przestrzeni C_n	19
8. Działania na punktach a odległość	21
9. Izometrie elementarne	22
10. Proste i hiperpłaszczyzny w przestrzeniach kartezjańskich	25
11. Geometryczna charakteryzacja przesunięć	27
12. Wektory	29
13. Dodawanie i odejmowanie wektorów	31
14. Wektory równoległe i mnożenie wektora przez liczbę	32
15. Iloczyn skalarny wektorów	34

Rozdział II. Zbiory liniowe w przestrzeniach kartezjańskich

16. Zbiory liniowe	38
17. Liniowa zależność punktów	39
18. Liniowa zależność wektorów	40
19. Maksymalne układy liniowo niezależne	42
20. Algebraiczne wyznaczenie maksymalnej ilości wektorów liniowo niezależnych	45
21. Orientacja układu n wektorów liniowo niezależnych przestrzeni C_n	49
22. Wyróżnik układu punktów	51
23. Równanie $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny w przestrzeni C_n	54

Rozdział III. Wzajemne położenie hiperpłaszczyzn w przestrzeniach kartezjańskich

24. Wektory równoległe i prostopadłe do hiperpłaszczyzny	57
25. Iloczyn wektorialny	59

26. Pole trójkąta i objętość czworościanu	62
27. Odległość punktu od $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny	63
28. Wzajemne położenie prostej i $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny w C_n	65
29. Hiperpłaszczyzny normalne i symetria względem hiperpłaszczyzny	66
30. Odległość punktu od k -wymiarowej hiperpłaszczyzny	68
31. Hiperpłaszczyzny równoległe	71
32. Przecięcie dwóch hiperpłaszczyzn	72
33. Wyznaczenie k -wymiarowej hiperpłaszczyzny przez układ równań liniowych	74
34. Ogólne położenie dwóch hiperpłaszczyzn	75

Rozdział IV. Wielościany i ich elementarne własności

35. Odcinek. Zbiory wypukłe	78
36. Półprzestrzenie	80
37. Wnętrze i brzeg	83
38. Przecięcie hiperpłaszczyzny z półprzestrzenią	84
39. Komórka	85
40. Równoległościany	87
41. Wielościany	90
42. Iloczyny kartezjańskie	92
43. Kompleksy geometryczne	94
44. Sympleksy	96
45. Kompleksy sympleksyjne	100
46. Miara sympleksu i miara wielościanu	101
47. Iloczyn wektorialny układu $n-1$ wektorów przestrzeni C_n	105

Rozdział V. Przekształcenia izometryczne przestrzeni kartezjańskich

48. Jednorodność i doskonała jednorodność przestrzeni metrycznej	108
49. Doskonała jednorodność przestrzeni kartezjańskich	111
50. Analityczna postać izometrii	114
51. Izometrie zwykłe i izometrie zwierciadlane	118
52. Pojęcie granicy	119
53. Ruchy sztywne	120
54. Zmiana układu współrzędnych prostokątnych	124
55. Zmiana układu współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie i w przestrzeni	127

Rozdział VI. Przekształcenia afiniczne przestrzeni kartezjańskich

56. Podobieństwa	131
57. Przekształcenia afiniczne	134
58. Klasyfikacja pojęć i twierdzeń geometrii	138
59. Niezmienniki afiniczne	140
60. Współrzędne ukośnokątne	142
61. Współrzędne ukośnokątne w płaszczyźnie	145
62. Wektory kowariantne i kontrawariantne	146

Rozdział VII. Przykłady krzywych płaskich

63. Twory algebraiczne i przestępne w przestrzeniach kartezjańskich	150
64. Krzywe mające ogniska i kierownice	153
65. Parabola	153
66. Elipsa	155
67. Hiperbola	159
68. Równanie biegunowe stożkowych	164
69. Przykład krzywej stopnia trzeciego	166
70. Przykład krzywej stopnia czwartego	169
71. Przykład krzywej przestępnej	171

Rozdział VIII. Przykłady powierzchni

72. Powierzchnie obrotowe	174
73. Walce i stożki	176
74. Elipsoida	180
75. Hiperboloida dwupowłokowa	184
76. Hiperboloida jednopowłokowa	186
77. Paraboloida eliptyczna	191
78. Paraboloida hiperboliczna	193
79. Powierzchnia torusa	197

Część II. Przestrzenie rzutowe i przestrzenie Möbiusa

Rozdział IX. Punkty i proste w przestrzeniach rzutowych

80. Współrzędne jednorodne i punkty niewłaściwe	201
81. Przestrzenie rzutowe	202
82. Geometria przestrzeni rzutowych. Kolineacje i przekształcenia rzutowe	205
83. Równanie prostej rzutowej w przestrzeni P_n	207
84. Przekształcenia liniowe	209
85. Zastosowanie przekształceń liniowych	211

Rozdział X. Hiperpłaszczyzny w przestrzeniach rzutowych

86. Podzbiory liniowe przestrzeni rzutowych	214
87. Liniowa zależność punktów w przestrzeni P_n	216
88. Hiperpłaszczyzny kartezjańskie a hiperpłaszczyzny rzutowe	219
89. Przekształcenia liniowe określone w skończonym układzie punktów	222
90. Równanie $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny w P_n	224
91. Układy $(n-1)$ -wymiarowych hiperpłaszczyzn w przestrzeni P_n	225

Rozdział XI. Stosunek anharmoniczny i przekształcenia rzutowe

92. Stosunek anharmoniczny czwórki punktów	229
93. Elementarny sens dwustosunku	230
94. Stosunek anharmoniczny czwórki prostych	233
95. Czwórki harmoniczne i czworobok zupełny	235
96. Przekształcenia rzutowe prostej a przekształcenia liniowe	238
97. Przekształcenia rzutowe przestrzeni P_n a przekształcenia liniowe	241

98. Przekształcenia perspektywiczne. Orientowalność i nieorientowalność	244
99. Spółrzędne rzutowe	245

Rozdział XII. Twory algebraiczne w przestrzeniach rzutowych

100. Granica ciągu punktów przestrzeni P_n	248
101. Twory algebraiczne w przestrzeni P_n	251
102. Punkty niewłaściwe tworów algebraicznych	253
103. Stożkowe zupełne	255
104. Kwadryki zupełne	257
105. Tworzące prostoliniowe kwadryk	261

Rozdział XIII. Zasada dwoistości

106. Spółrzędne Plückera. Dwoistość w geometrii rzutowej	265
107. Czworokąt zupełny	268
108. Twierdzenie Desarguesa	270
109. Twierdzenie Pascala	272
110. Styczne do stożkowej i twierdzenie Brianchona	274

Rozdział XIV. Przestrzenie Möbiusa

111. Sfery w przestrzeniach kartezjańskich	277
112. Hiperpłaszczyzna jako graniczny przypadek sfery	280
113. Rzut stereograficzny	281
114. Konformiczność rzutu stereograficznego	282
115. Przestrzenie Möbiusa	284
116. Obrazy sfer przy rzucie stereograficznym	285
117. Pokrewieństwa sferyczne	287
118. Inwersja	289
119. Wytwarzanie pokrewieństw sferycznych przy pomocy inwersji i podobieństw	290

Część III. Przestrzenie zespolone

Rozdział XV. Ogólne własności przestrzeni zespolonych

120. Punkty przestrzeni zespolonych	293
121. Geometria przestrzeni \mathbb{C}_n	295
122. Pojęcia afiniczne w przestrzeni \mathbb{C}_n	299
123. Pojęcia metryczne w przestrzeni \mathbb{C}_n	302
124. Geometria przestrzeni \mathbb{P}_n	305
125. Proste i hiperpłaszczyzny w przestrzeni \mathbb{P}_n	307
126. Kierunki izotropowe	310

Rozdział XVI. Równania tworów algebraicznych w przestrzeniach zespolonych

127. Twory algebraiczne w przestrzeni \mathbb{C}_n	315
128. Twory algebraiczne w przestrzeni \mathbb{P}_n	315
129. Przecięcie tworu algebraicznego w \mathbb{P}_n hiperpłaszczyzną	319
130. Hiperpłaszczyzny $(n-1)$ -wymiarowe zawarte w tworze algebraicznym przestrzeni \mathbb{P}_n	319

131. Punkty niewłaściwe tworów algebraicznych	320
132. Jednoznaczność równania tworu stopnia drugiego	324
133. Wyznaczenie tworu stopnia drugiego przez skończony układ punktów	327

Rozdział XVII. Elementarne własności tworów stopnia drugiego

134. Styczne do tworu stopnia drugiego	333
135. Hiperpłaszczyzny styczne	338
136. Hiperpłaszczyzny asymptotyczne, kierunki osobliwe i kierunki wyjątkowe	342
137. Bieguny i biegunowe	345
138. Hiperpłaszczyzny średnicowe	349
139. Środki	352
140. Symetria względem środka	354
141. Średnice	356
142. Średnice sprzężone i układy Apoloniusza	357
143. Twierdzenie Apoloniusza	359
144. Kierunki główne	364

Rozdział XVIII. Podstawy klasyfikacji tworów stopnia drugiego

145. Wielki wyróżnik	367
146. Mały wyróżnik	370
147. Wielomian charakterystyczny	371
148. Niezmienniczość wielomianu charakterystycznego	373
149. Znaki pierwiastków charakterystycznych w przypadkach $n=2$ i $n=3$	376
150. Wielomian pseudocharakterystyczny	377
151. Postać kanoniczna równania drugiego stopnia (twierdzenie o redukcji)	379
152. Sprowadzenie równania kwadratowego do postaci kanonicznej (dowód twierdzenia o redukcji)	382
153. Wnioski z twierdzenia o redukcji	386
154. Wierzchołki paraboliczne	390

Rozdział XIX. Klasyfikacja tworów drugiego stopnia

155. Zupełny układ niezmienników metrycznych dla tworów rzeczywistych drugiego stopnia, mających środki właściwe	394
156. Zupełny układ niezmienników metrycznych dla tworów rzeczywistych drugiego stopnia, nie mających środków właściwych	397
157. Klasyfikacja tworów rzeczywistych drugiego stopnia według podobieństwa	400
158. Wskaźniki rzutowe i wskaźniki afiniczne	403
159. Klasyfikacja rzutowa tworów drugiego stopnia	407
160. Klasyfikacja afiniczna tworów drugiego stopnia	411
161. Klasyfikacja afiniczna krzywych drugiego stopnia	416
162. Klasyfikacja afiniczna powierzchni drugiego stopnia	418
163. Tworzące prostoliniowe	421
164. Jednorodność rzutowa tworów drugiego stopnia	424
165. Tworzące prostoliniowe rzeczywiste	427
Skorowidz nazw	430
Skorowidz znaków	439

Errata

Strona	wiersz	wydrukowano	powinno być
15	15 d	a	x
23	13 g	F'	f
27	3 d	schrakteryzowaniem	scharakteryzowaniem
29	3 g	$\frac{a}{\gamma}$	$\frac{a}{\gamma}$
44	11 d	$\overrightarrow{[p_0 p]}$	$\overrightarrow{[p_0 p]}$
67	5 d	$\overline{p} \in C_n$	$p \in C_n$
71	15 d	$\varepsilon C_{n,k}$	$= C_{n,k}$
76	7 d	$\dots + a_k' \cdot (a_k^i)$	$\dots + a_k^i \cdot (a_k^i)$
76	2 d	$\dots - a_k'' \cdot (a_k^{i'})$	$\dots - a_k^{i'} \cdot (a_k^{i'})$
77	10 g	$\dots, \bar{a}_k'' - k$	$\dots, \bar{a}_k^{i'} - k$
79	3 g	pozostałe jego	pozostałe jego punkty
80	10 d	$a b$	$\frac{a}{b}$
81	3 g	$a b$	$\frac{a}{b}$
85	11 g	$A \geq 0$	$A_0 \geq 0$
87	9 g	$H \cdot \prod_{i=1}^l D_i$	$H_0 \cdot \prod_{i=1}^l D_i$
91	7 d	$H_j \cdot \prod_{i=1}^n D_i$	$H_j \cdot \prod_{i=1}^k D_i$
104	5 d	a_i	a_{i_1}
118	10 g	$n \leq 2$	$n < 2$
118	11 g	$n > 2$	$n \geq 2$
126	3 g	\bar{y}	\bar{y}_k
152	3 g	stopnia k	stopnia $\leq k$
159	8 g	$8 \cdot (e_1^2 + e_2^2) \cdot a_1^2 - 16a_1^4 - (e_1^2 - e_2^2) = 0$	$8 \cdot (e_1^2 + e_2^2) \cdot a_1^2 - 16a_1^4 - (e_1^2 - e_2^2)^2 = 0$

