

CZĘŚĆ II.

Przestrzenie rzutowe i przestrzenie Möbiusa¹

ROZDZIAŁ IX.

Punkty i proste w przestrzeniach rzutowych

80. Spółrzędne jednorodne i punkty niewłaściwe. W wielu rozważaniach geometrii analitycznej osiąga się większą ogólność i harmonię, jeżeli zwykłe spółrzędne kartezjańskie zastąpić przez tzw. spółrzędne jednorodne, ogólniej — spółrzędne rzutowe.

Punkty przestrzeni C_n są to układy n liczb

$$(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Przyporządkujmy układowi takiemu układ $n+1$ liczb

$$1, y_1, y_2, \dots, y_n$$

oraz wszystkie układy do niego proporcjonalne, a więc mające postać $\lambda, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot y_2, \dots, \lambda \cdot y_n$, gdzie λ oznacza jakąkolwiek liczbę różną od zera.

Liczby $\lambda, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot y_2, \dots, \lambda \cdot y_n$ nazywamy *spółrzędnymi jednorodnymi* (zwykłymi) punktu $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ przestrzeni C_n .

Spółrzędne te są więc określone jedynie z dokładnością do czynnika $\lambda \neq 0$ i tę ich własność mamy na myśli, nazywając je jednorodnymi. Punkt o spółrzędnych jednorodnych $x_0, x_1, \dots, x_n$ (gdzie $x_0 \neq 0$) oznaczać będziemy przez

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Jest on identyczny z punktem $\{\mu \cdot x_0, \mu \cdot x_1, \mu \cdot x_2, \dots, \mu \cdot x_n\}$ dla każdego $\mu \neq 0$, w szczególności więc z punktem

$$\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \varepsilon C_n.$$

¹ A. F. Möbius, matematyk niemiecki z XIX wieku.

Niech teraz L będzie dowolną prostą w przestrzeni C_n . Weźmy pod uwagę dowolny jej punkt $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i niech $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ będzie dowolnym wektorem mającym kierunek prostej L . W myśl Nr 14 prosta L jest wówczas identyczna ze zbiorem punktów $p(t)$ postaci

$$p(t) = a + t \cdot \alpha = (a_1 + t \cdot \alpha_1, a_2 + t \cdot \alpha_2, \dots, a_n + t \cdot \alpha_n) = \left\{ 1, a_1 + t \cdot \alpha_1, a_2 + t \cdot \alpha_2, \dots, a_n + t \cdot \alpha_n \right\}.$$

Dla $t \neq 0$ punkt $p(t)$ wyraża się również jak następuje:

$$p(t) = \left\{ \frac{1}{t}, \frac{a_1}{t} + \alpha_1, \frac{a_2}{t} + \alpha_2, \dots, \frac{a_n}{t} + \alpha_n \right\}.$$

Zauważmy, że gdy $|t|$ wzrasta nieograniczenie, punkt $p(t)$ oddala się nieograniczenie od a , zaś jego współrzędne dążą odpowiednio do liczb $0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Układ liczb $0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nie miał dotychczas geometrycznego odpowiednika. Biorąc jednak pod uwagę wspomniane oddalanie się nieograniczonego punktu $p(t)$ przy $|t|$ wzrastającym nieograniczenie, jest intuicyjnie zrozumiałe, jeżeli układ ten uważać będziemy za punkt w nieskończoności, czyli za tzw. punkt niewłaściwy prostej L .

Punkty niewłaściwe są to więc układy złożone z $n+1$ liczb postaci $\{0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ nie wszystkie znikają, przy czym identyfikujemy układy proporcjonalne wobec okoliczności, że prosta L nie ulegnie zmianie, jeśli wektor α zastąpimy przez jakikolwiek wektor równoległy, a więc przez wektor postaci $[\mu \cdot a_1, \mu \cdot a_2, \dots, \mu \cdot a_n]$, gdzie $\mu \neq 0$.

W rezultacie na każdej prostej L leży dokładnie jeden punkt niewłaściwy; pozostałe punkty nazywają się *właściwymi*.

Proste równoległe mają punkt niewłaściwy wspólny, zaś nierównoległe — punkty niewłaściwe różne.

Z tego względu *pojęcie punktu niewłaściwego prostej w przestrzeni C_n nie różni się w swej istocie od pojęcia kierunku tej prostej* (określonego w Nr 14). Prosta uzupełniona przez swój punkt niewłaściwy nazywa się *prostą rzutową*.

Różni się więc ona od prostej kartezjańskiej (lub euklidesowej) jednym punktem dodatkowym, który ją w pewnym sensie zamyka, upodabniając ją jakby do okręgu o «nieskończenie wielkim» promieniu.

ĆWICZENIE. Przez punkt a przestrzeni C_n przechodzą proste L i L' , których punktami niewłaściwymi są odpowiednio $\{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ i $\{0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$. Znaleźć punkty niewłaściwe dwusiecznych obu kątów wyznaczonych przez L i L' .

81. Przestrzeń rzutowa. Przestrzeń C_n , uzupełniona przez wszystkie punkty niewłaściwe prostych w niej leżących, nazywa się *n -wymiarową przestrzenią rzutową*; oznaczać ją będziemy przez P_n .

Użycie tutaj wyrazu «przestrzeń» stanie się uzasadnione dopiero wówczas, gdy w tak powiększonym zbiorze punktów wprowadzone zostaną pewne pojęcia geometryczne. Pozналиśmy już (w Nr 1) jeden ze sposobów nadawania treści geometrycznej abstrakcyjnemu zbiorowi dowolnych przedmiotów. Sposób ten polega na wprowadzeniu odległości, co doprowadza do pojęcia przestrzeni metrycznej. Nie jest to jednak jedyny sposób «geometryzacji» zbioru abstrakcyjnego. Inną drogą pójdziemy w przypadku przestrzeni rzutowych, których nie będziemy traktować jako metryczne, lecz poprzestaniemy na wprowadzeniu w nich pojęcia prostej i pochodnych od niego pojęć przestrzeni liniowych, czyli hiperpłaszczyzn (rzutowych). Później jeszcze pojęcia te uzupełnimy przez ważne pojęcie dwustosunku.

Zauważmy przede wszystkim, że $P_{-1} = C_{-1}$ i $P_0 = C_0$, gdyż ani C_{-1} , ani C_0 prostych nie zawierają. Przestrzeń P_{-1} jest więc zbiorem pustym, zaś przestrzeń P_0 składa się z jednego punktu postaci $\{x_0\}$, gdzie x_0 jest liczbą różną od zera, której wartość jest przy tym bez znaczenia.

Zakładając, że określone już zostały proste w przestrzeni P_n , nazywamy *prostymi* w przestrzeni P_{n+1} :

1) zbiory punktów, jakie otrzymuje się z prostych w C_n przez uzupełnienie ich punktami niewłaściwymi,

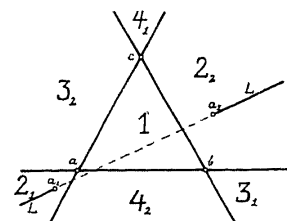
2) zbiory punktów postaci $\{0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$, gdzie zbiór układów liczb $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$, rozpatrywanych jako punkty przestrzeni P_n , tworzy w P_n prostą.

Z definicji tej wynika natychmiast, że przez każde dwa różne punkty przestrzeni P_n przechodzi dokładnie jedna prosta rzutowa.

Z podanej definicji prostych wynika, że punkty niewłaściwe *płaszczyzny rzutowej P_2* tworzą *prostą niewłaściwą*. Zauważmy, że każde dwie różne proste leżące na płaszczyźnie P_2 mają dokładnie jeden punkt wspólny; pod tym względem własności płaszczyzny rzutowej P_2 są prostsze od własności płaszczyzny kartezjańskiej C_2 , którą uważać możemy za identyczną z płaszczyzną euklidesową E_2 .

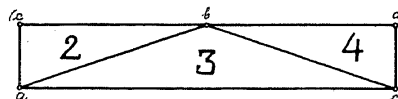
Uwaga. Jak już było wspomniane, punkty na prostej rzutowej są uporządkowane podobnie jak punkty na okręgu koła. Dwa punkty właściwe prostej rzutowej rozcinają ją jakby na dwa odcinki, z których jeden jest odcinkiem w sensie elementarnym, drugi składa się z dwóch promieni spojonych (w «nieskończoności») punktem niewłaściwym.

Nieco trudniej jest wyobrazić sobie sposób rozmieszczenia punktów na płaszczyźnie rzutowej. W tym celu weźmy w płaszczyźnie trójkąt $\Delta(abc)$ (rys. 57), którego wnętrze oznaczmy cyfrą 1 i przedłużmy jego boki, uzupełniając je punktami niewłaściwymi. Otrzymamy podział płaszczyzny rzutowej P_2 na cztery obszary (a nie na siedem, jakby się



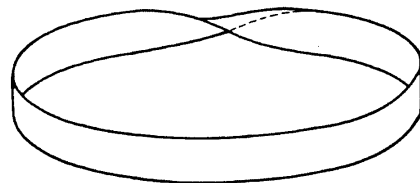
Rys. 57.

dowolny punkt a_1 , zaś w części 2_2 dowolny punkt a_2 , widzimy, że odcinek prostej rzutowej L łączącej te punkty, zawierający punkt niewłaściwy, leży całkowicie w obszarze 2. Każdy z obszarów 2, 3, 4, jest jakby trójkątem ograniczonym przez trzy odcinki, z których dwa zawierają punkty niewłaściwe. Każde dwa z tych trójkątów przylegają do siebie wzdłuż boku zawierającego punkt niewłaściwy. Schematycznie możemy układ



Rys. 58.

tych trzech trójkątów przedstawić jak na rysunku 58, pamiętając, że punkty a i c , występujące na rysunku dwukrotnie, winny być zidentyfikowane, podobnie jak wyznaczone przez nie odcinki. Identyfikację tę możemy zrealizować, wycinając z papieru figurę, przedstawioną na rysunku 58 i po odpowiednim zgięciu, sklejając boki, podlegające identyfikacji. Otrzymana figura nazywa się *wstęgą Möbiusa* (rys. 59).



Rys. 59.

Jest ona *jednostronna* w tym sensie, że poruszając się po niej można bez przechodzenia przez jej krawędź przedostać się z jednej strony papieru na drugą.

W ten sposób widzimy, że po usunięciu z płaszczyzny rzutowej P_2 wnętrza trójkąta 1 powstaje

figura, która z pewnego punktu widzenia (topologicznego) ma postać wstęgi Möbiusa. Płaszczyzna rzutowa jest więc w pewnym sensie jakby rezultatem uzupełnienia wstęgi Möbiusa przez trójkąt, którego brzegiem jest krawędź tej wstęgi. Można okazać, że w trójwymiarowej przestrzeni C_3 uzupełnienie takie zrealizować się nie daje.

Można jeszcze w inny sposób wyobrazić sobie, czym jest płaszczyzna rzutowa. Łatwo zauważyć, że punkty niewłaściwe prostych leżących

w pierwszej chwili zdawało), z których jednym jest wewnątrz trójkąta 1, drugi 2 rozpada się na rysunku na części oznaczone przez 2_1 i 2_2 , trzeci 3 — na części oznaczone przez 3_1 i 3_2 , wreszcie czwarty 4 — na części oznaczone przez 4_1 i 4_2 . Rozpadanie się np. obszaru 2 na dwie części 2_1 i 2_2 jest jednak jedynie pozorne, gdyż biorąc w części 2_1

w przestrzeni C_3 tworzą płaszczyznę rzutową niewłaściwą przestrzeni P_3 . Punkty te uważać możemy za kierunki prostych przechodzących przez punkt $0=(0, 0, 0)=\{1, 0, 0, 0\}$. Każdej takiej prostej L odpowiada dwa punkty powierzchni kuli (czyli sfery) S_2 o środku O i promieniu 1, w których prosta L przebija S_2 .

Parę punktów takich nazywamy *antypodyczną*.

Jasne jest, że każdemu punktowi sfery S_2 odpowiada dokładnie jeden punkt stanowiący z nim parę antypodyczną i że każdej parze antypodycznej odpowiada wzajemnie jednoznacznie kierunek prostej L , czyli punkt niewłaściwy przestrzeni P_3 . To pozwala nam uważać w pewnym sensie płaszczyznę rzutową za figurę, jaką otrzymuje się ze sfery S_2 przez identyfikację każdej pary punktów antypodycznych.

ĆWICZENIE. Wykonać z papieru model wstęgi Möbiusa i model ten rozciąć cięciem równoległym do jego krawędzi. Czy figura otrzymana będzie wstęgą Möbiusa? Rozciąć ją po raz drugi cięciem równoległym do krawędzi.

82. Geometria przestrzeni rzutowych. Kolineacje i przekształcenia rzutowe. Wszelkie własności rozpatrywane w geometrii przestrzeni kartezjańskich opierały się na pojęciu odległości. Geometria przestrzeni kartezjańskich jest to po prostu teoria niezmienników *izometrii*, tj. przekształceń wzajemnie jednoznacznych, zachowujących odległość. Dla przestrzeni rzutowych odległość nie jest określona, podstawę zaś do wprowadzenia w nich pojęć geometrycznych stanowi jedynie zdefiniowane w nich pojęcie prostej. Z tego względu jest rzeczą zrozumiałą, że podobną rolę, jaką grały izometrie w przestrzeniach kartezjańskich, grać będą w przestrzeniach rzutowych te przekształcenia wzajemnie jednoznaczne, przy których proste przechodzą zawsze na proste.

Przekształcenia te nazywają się *kolineacjami* (zob. rozdział VI, Nr 59).

Jasne jest, że przekształcenie odwrotne względem kolineacji jest również kolineacją, jak również, że superpozycja dwóch kolineacji jest kolineacją. W szczególności wynika stąd, że *kolineacje, przekształcające daną przestrzeń rzutową na siebie, tworzą grupę*.

Należy jednak wyraźnie zaznaczyć, że pojęcie kolineacji staje się bezużyteczne w przypadku, gdy wymiar przestrzeni rzutowej jest równy 1, ponieważ każde przekształcenie wzajemnie jednoznaczne przestrzeni P_1 na siebie podpada pod pojęcie kolineacji. Z tego względu, mówiąc o kolineacjach mamy na myśli zawsze przekształcenia przestrzeni P_n o wymiarze $n > 1$.

Dla każdej figury A leżącej w takiej przestrzeni P_n nazywać będziemy przekształcenie f figury A na figurę A' , leżącą w pewnej (na ogół innej)

przestrzeni P_m o wymiarze $m \geq n$, *rzutowym*, jeżeli istnieje kolineacja φ przekształcająca przestrzeń P_n na podzbiór przestrzeni P_m taka, że $\varphi(x) = f(x)$ dla każdego $x \in A$.

Założenie, że wymiar m jest nie mniejszy od n , nie jest przy tym istotnie krępujące, zawsze bowiem możemy przyjąć, że P_m jest podzbiorem przestrzeni rzutowej o dowolnie wysokim wymiarze $m+k$, dopisując k zer do współrzędnych każdego punktu $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \in P_m$, czyli identyfikując go z punktem postaci $\{0, 0, \dots, 0, x_0, x_1, \dots, x_m\}$ przestrzeni P_{m+k} . W szczególności tak określone przekształcenia rzutowe samej przestrzeni P_n (gdzie $n > 1$) pokrywają się z kolineacjami, zaś przekształcenia rzutowe prostej (rzutowej) są takimi jej przekształceniami (na prostą), które dają się rozszerzyć do kolineacji przestrzeni rzutowej, zawierającej tę prostą i mającej wymiar większy od jedności.

Jasne jest przy tym, że *przekształcenia rzutowe danej prostej na siebie tworzą grupę*.

W rozdziale X (Nr 92) wprowadzimy pewne pojęcie (pojęcie dwustokunka), które charakteryzuje przekształcenia rzutowe prostej w sposób wewnętrzny, tj. bez potrzeby rozpatrywania przekształceń przestrzeni o wymiarach wyższych.

Przez geometrię przestrzeni P_n , czyli przez *geometrię rzutową* rozumiemy będziemy teorię *niezmienników przekształceń rzutowych*, czyli naukę o tzw. *własnościach rzutowych*.

Podobnie jak w przestrzeniach metrycznych figury przystające traktujemy zawsze jako identyczne pod względem geometrycznym, tak w przestrzeniach rzutowych za identyczne z punktu widzenia geometrii rzutowej uważamy figury, z których jedna otrzymuje się z drugiej przez dokonanie pewnego przekształcenia rzutowego.

W szczególności podzbiór przestrzeni P_n będący obrazem rzutowym przestrzeni P_k nazywać będziemy *k-wymiarową hiperpłaszczyzną rzutową przestrzeni P_n* (podobnie *mutatis mutandis* określiliśmy w Nr 10 *k-wymiarową hiperpłaszczyznę przestrzeni C_n*).

Ponieważ przekształcenie φ , przyporządkowujące każdemu punktowi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ przestrzeni P_{n-1} punkt niewłaściwy $\{0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ przestrzeni P_n , jest — jak łatwo zauważyć — rzutowe, więc punkty niewłaściwe przestrzeni P_n tworzą $(n-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę rzutową, zwaną $(n-1)$ -wymiarową *hiperpłaszczyzną niewłaściwą* przestrzeni P_n .

ĆWICZENIE. Okazać, że jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami stałymi, to przekształcenie f przestrzeni P_n na siebie, określone przez wzór

$$f(\{x_0, x_1, \dots, x_n\}) = \{x_0, x_1 + a_1 \cdot x_0, \dots, x_n + a_n \cdot x_0\}$$

jest kolineacją. Czym jest przekształcenie f w zakresie punktów właściwych, a czym w zakresie punktów niewłaściwych?

83^r. Równanie prostej rzutowej w przestrzeni P_n . Udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Prosta rzutowa L łącząca w przestrzeni P_n dwa różne punkty $a = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ i $b = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ jest identyczna ze zbiorem E punktów postaci*

$$p(\lambda, \mu) = \{\lambda \cdot a_0 + \mu \cdot b_0, \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \dots, \lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n\},$$

gdzie λ i μ są to parametry liczbowe jednocześnie nie znikające, przy czym para liczb λ, μ jest przez punkt $p(\lambda, \mu)$ wyznaczona z dokładnością do proporcjonalności.

Dowód. Wobec $a \neq b$, układy liczb $a_0, a_1, \dots, a_n$ oraz $b_0, b_1, \dots, b_n$ nie są proporcjonalne, a więc jeżeli λ i μ jednocześnie nie znikają, to nie wszystkie liczby $\lambda \cdot a_i + \mu \cdot b_i$ dla $i=0, 1, \dots, n$ są równe zeru, czyli $p(\lambda, \mu) \in P_n$. Zauważmy dalej, że zbiór E nie ulegnie zmianie, jeżeli układy $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ i $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ zastąpimy przez proporcjonalne układy $\{\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, \dots, \alpha \cdot a_n\}$ i $\{\beta \cdot b_0, \beta \cdot b_1, \dots, \beta \cdot b_n\}$, gdzie α i β są różne od zera, ponieważ wystarczy jednocześnie zastąpić λ przez $\frac{\lambda}{\alpha}$ i μ przez $\frac{\mu}{\beta}$, by otrzymać ten sam punkt co poprzednio.

Dowód identyczności zbioru E z prostą L przeprowadzimy metodą indukcji względem wymiaru n przestrzeni. Dla n równego -1 lub 0 twierdzenie jest spełnione «w próżnię», gdyż ani w P_{-1} , ani w P_0 nie istnieje para punktów różnych. Założmy więc, że $n > 0$ i że w przestrzeniach rzutowych o wymiarze mniejszym od n twierdzenie jest prawdziwe. Rozpatrzmy kolejno trzy następujące przypadki:

1° Oba punkty a i b są właściwe. Założyć więc możemy, że $a_0 = b_0 = 1$. Jeśli $\lambda + \mu \neq 0$, to

$$\begin{aligned} p(\lambda, \mu) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot a_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot b_1, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot a_2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot b_2, \dots, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot a_n + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot b_n \right) = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot a + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \cdot b, \end{aligned}$$

co przy zmiennym λ i μ przebiega (na mocy twierdzenia z Nr 10) wszystkie punkty właściwe prostej L . Jeżeli natomiast $\lambda + \mu = 0$, to

$$\{\lambda \cdot a_0 + \mu \cdot b_0, \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \dots, \lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n\} = \{0, b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n\},$$

co jest punktem niewłaściwym prostej L .

2° Jeden z punktów a i b jest właściwy, drugi zaś niewłaściwy. Możemy więc założyć, że np. $a_0=1$ i $b_0=0$. Dla $\lambda \neq 0$ mamy wówczas

$$p(\lambda, \mu) = \left(a_1 + \frac{\mu}{\lambda} \cdot b_1, a_2 + \frac{\mu}{\lambda} \cdot b_2, \dots, a_n + \frac{\mu}{\lambda} \cdot b_n \right) = a + \frac{\mu}{\lambda} \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

co przy zmiennym λ i μ przebiega (na mocy Nr 14) wszystkie punkty właściwe prostej przechodzącej przez a i mającej kierunek wektora $[b_1, b_2, \dots, b_n]$, tj. posiadającej $\{0, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ za punkt niewłaściwy, a więc identycznej z L . Dla $\lambda=0$ mamy zaś punkt

$$p(0, \mu) = \{0, \mu \cdot b_1, \mu \cdot b_2, \dots, \mu \cdot b_n\} = b,$$

czyli punkt niewłaściwy prostej L .

3° Oba punkty a i b są niewłaściwe, czyli $a = \{0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $b = \{0, b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Zgodnie ze sposobem określenia przestrzeni P_n przypadek ten różni się od przypadku prostej łączącej w P_{n-1} punkty $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ jedynie dopisaniem do układu współrzędnych każdego punktu liczby zero na początku. Stąd łącznie z założeniem indukcyjnym prawdziwości twierdzenia w przestrzeni P_{n-1} wynika, że i w tym przypadku punkt $p(\lambda, \mu)$ przy zmiennych λ i μ przebiega wszystkie punkty prostej L .

Pozostaje okazać, że współczynniki λ i μ są przez punkt $p(\lambda, \mu)$ wyznaczone z dokładnością do proporcjonalności. Że zastąpienie pary liczb λ, μ przez parę proporcjonalną nie wpłynie na zmianę punktu, jest oczywiste. Jeżeli zaś $p(\lambda, \mu) = p(\lambda', \mu')$, co wyraża istnienie takiego $\alpha \neq 0$, że $\lambda \cdot a_i + \mu \cdot b_i = \alpha \cdot (\lambda' \cdot a_i + \mu' \cdot b_i)$, czyli że $(\lambda - \alpha \cdot \lambda') \cdot a_i = (\alpha \cdot \mu' - \mu) \cdot b_i$ dla $i=0, 1, \dots, n$, to wobec $a \neq b$ wynika stąd, że $\lambda - \alpha \cdot \lambda' = \mu - \alpha \cdot \mu' = 0$, czyli proporcjonalność układów λ, μ oraz λ', μ' .

Twierdzenie jest więc udowodnione.

Podobnie jak przez $C_{n,k}$ oznaczyliśmy podzbiór przestrzeni C_n utworzony przez punkty postaci $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, tak przez $P_{n,k}$ oznaczać będziemy podzbiór przestrzeni P_n , złożony z punktów postaci $\{x_0, x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0\}$. Dla $k \geq n$ jest więc $P_{n,k} = P_n$. Zauważmy, że (dla $k \leq n$), przyporządkowując każdemu punktowi $x = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in P_k$ punkt $x' = \{x_0, x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0\} \in P_k$, mamy przekształcenie hiperpłaszczyzny P_k na $P_{n,k}$, przy czym jeśli $a = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ i $b = \{b_0, b_1, \dots, b_k\}$ są dwoma różnymi punktami przestrzeni P_k , to punktom postaci $\{\lambda \cdot a_0 + \mu \cdot b_0, \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \dots, \lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k\}$ odpowiadają punkty postaci $\{\lambda \cdot a'_0 + \mu \cdot b'_0, \lambda \cdot a'_1 + \mu \cdot b'_1, \dots, \lambda \cdot a'_n + \mu \cdot b'_n\}$. W myśl udowodnionego twierdzenia znaczy to, że przekształcenie jest kolineacją, a więc (dla $k > 1$) prze-

kształceniem rzutowym. Wynika stąd, że $P_{n,k}$ jest k -wymiarową hiperpłaszczyzną (rzutową) w przestrzeni P_n . Jasne jest, że pozostaje to prawdziwe również dla $k \leq 1$. To pozwala nam wypowiedzieć następujący

Wniosek. Zbiór $P_{n,k}$, gdzie $k \leq n$, jest k -wymiarową hiperpłaszczyzną rzutową w przestrzeni P_n .

ĆWICZENIE. Znaleźć dla każdego punktu niewłaściwego x przestrzeni P_n punkt $\bar{x}$ przecięcia hiperpłaszczyzny $P_{n,n-1}$ z prostą łączącą punkt x z punktem $a = \{1, 0, 0, \dots, 0, 1\} \in P_n$. Okazać, że przekształcenie $f(x) = \bar{x}$ niewłaściwej hiperpłaszczyzny $(n-1)$ -wymiarowej przestrzeni P_n na $P_{n,n-1}$ jest kolineacją.

84°. Przekształcenia liniowe. Pojęcie kolineacji jako przekształceń wzajemnie jednoznacznych zachowujących proste (wprawdzie nie rzutowe, lecz euklidesowe) spotkaliśmy już w przestrzeniach kartezjańskich. Poznaliśmy tam (w Nr 57) tzw. przekształcenia afiniczne, o których następnie stwierdziliśmy (w Nr 59), że są one kolineacjami. W myśl twierdzenia z Nr 57, przekształcenia afiniczne przestrzeni C_n na siebie dają się arytmetycznie określić jako przekształcenia przyporządkowujące każdemu punktowi $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_n$ taki punkt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in C_n$, że $\bar{x}_j = a_{0,j} + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n$ dla $j=1, 2, \dots, n$, gdzie współczynniki $a_{i,j}$ są stałe, a wyznacznik $|a_{i,j}|$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) jest różny od zera. Zauważmy teraz, że to samo przekształcenie daje się również potraktować jako przekształcenie przestrzeni rzutowej P_n na siebie. Wystarczy mianowicie przyjąć:

$$(1) \quad \bar{x}_0 = x_0 \quad \text{ i } \quad \bar{x}_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n \quad \text{ dla } j=1, 2, \dots, n,$$

by otrzymać przekształcenie przestrzeni P_n na siebie, pokrywające się w punktach właściwych $\{1, x_1, x_2, \dots, x_n\} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ z danym przekształceniem afinicznym. Istotnie, wzory (1) przyporządkowują każdemu punktowi $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in P_n$ punkt $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \in P_n$, gdyż wobec nieznikania wyznacznika $|a_{i,j}|$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) nie znika też równy mu wyznacznik współczynników prawej strony wzorów (1), a stąd wynika, że wszystkie liczby $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ znikają jedynie w razie znikania wszystkich liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$, co dla $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in P_n$ nie zachodzi. Poza tym zastąpienie układu liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$ przez układ proporcjonalny powoduje zastąpienie układu liczb $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ przez układ proporcjonalny. Możemy więc mówić o *przekształceniach afinicznych*, w szczególności zaś o *izometriach przestrzeni P_n na siebie*. Przy tych przekształceniach punkty właściwe przechodzą na właściwe, a niewłaściwe na niewłaściwe.

Naturalnym uogólnieniem przekształceń afinicznych są *przekształcenia liniowe* przestrzeni P_n na siebie, określone arytmetycznie przez wzory:

$$(2) \quad \bar{x}_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n, \quad \text{gdzie } j=0, 1, \dots, n,$$

w których współczynniki $a_{i,j}$ są stałe, a wyznacznik $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) jest różny od zera.

Podobnie jak dla wzorów (1), stwierdzamy, że wzory (2) określają przekształcenie przestrzeni P_n na siebie. Obecnie jednak punkty niewłaściwe (scharakteryzowane przez zależność $x_0=0$) nie przechodzą na ogół na punkty właściwe. Zachodzi to jedynie w razie znikania wszystkich współczynników $a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{n,0}$. Ponieważ jednak przekształcenie liniowe określone przez wzory (2) nie ulegnie zmianie o ile wszystkie współczynniki $a_{i,j}$ pomnożymy przez stałą różną od zera, więc obierając

za tę stałą liczbę $\frac{1}{a_{0,0}}$ możemy w tym przypadku nadać przekształceniu liniowemu (2) postać (1).

W ten sposób okazaliśmy, że *przekształcenia afiniczne przestrzeni P_n dają się scharakteryzować jako przekształcenia liniowe, przy których wszystkie punkty niewłaściwe przechodzą na niewłaściwe*.

Zauważmy dalej, że superpozycja przekształcenia liniowego określonego przez wzory (2) oraz przekształcenia określonego przez wzory:

$$(3) \quad x'_k = \bar{a}_{0,k} \cdot \bar{x}_0 + \bar{a}_{1,k} \cdot \bar{x}_1 + \dots + \bar{a}_{n,k} \cdot \bar{x}_n, \quad \text{gdzie } k=0, 1, \dots, n,$$

jest przekształceniem, które każdemu układowi liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$ przyporządkowuje układ liczb $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$, gdzie

$$x'_k = \sum_{j=0}^n \bar{a}_{j,k} \cdot \left(\sum_{i=0}^n a_{i,j} \cdot x_i \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n a_{i,j} \cdot \bar{a}_{j,k} \right) \cdot x_i.$$

Współczynniki $a'_{i,k} = \sum_{j=0}^n a_{i,j} \cdot \bar{a}_{j,k}$ tworzą wyznacznik $|a'_{i,k}|$ ($i, k=0, 1, \dots, n$) równy iloczynowi wyznacznika $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) $\neq 0$ przez wyznacznik $|\bar{a}_{j,k}|$ ($j, k=0, 1, \dots, n$). Jeśli więc ten ostatni jest różny od zera, to różny od zera jest i wyznacznik $|a'_{i,k}|$ ($i, k=0, 1, \dots, n$), co oznacza, że *superpozycja dwóch przekształceń liniowych przestrzeni P_n na siebie jest przekształceniem liniowym*.

Wiadomo z teorii równań liniowych, że równania (2) możemy rozwiązać względem $x_0, x_1, \dots, x_n$, otrzymując wzory postaci (3), gdzie $x'_k = x_k$. W tym przypadku jest więc $a'_{i,k} = \delta_{i,k}$, skąd wynika, że wyznacznik $|\bar{a}_{j,k}|$ ($j, k=0, 1, \dots, n$) jest odwrotnością wyznacznika $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$), a więc jest różny od zera. Widzimy więc, że *odwroćcie przekształcenia liniowego przestrzeni P_n na siebie jest przekształceniem liniowym*.

Oba ostatnie wyniki można łącznie wypowiedzieć jak następuje: *przekształcenia liniowe przestrzeni P_n na siebie stanowią grupę*.

Niech teraz L będzie prostą w przestrzeni P_n , przechodzącą przez dwa różne punkty $a = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ i $b = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$. Z uwagi na twierdzenie z Nr 83 prosta L jest identyczna ze zbiorem punktów postaci $p(\lambda, \mu) = \{\lambda \cdot a_0 + \mu \cdot b_0, \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \dots, \lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n\}$, gdzie λ i μ jednocześnie nie znikają. Jasne jest, że przy przekształceniu liniowym określonym przez wzory (2) punkt $p(\lambda, \mu)$ przejdzie na punkt postaci $\{\lambda \cdot \bar{a}_0 + \mu \cdot \bar{b}_0, \lambda \cdot \bar{a}_1 + \mu \cdot \bar{b}_1, \dots, \lambda \cdot \bar{a}_n + \mu \cdot \bar{b}_n\}$, a więc na punkt przebiegający prostą L wyznaczoną przez punkty $\bar{a} = \{\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ i $\bar{b} = \{\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$.

W ten sposób okazaliśmy, że *przekształcenia liniowe są kolineacjami*, a więc dla $n > 1$ są rzutowe.

Zgodnie jednak z definicją płaszczyzny rzutowej P_2 zbiór jej punktów niewłaściwych uważamy za identyczny z prostą P_1 , identyfikując punkt $\{0, x_1, x_2\}$ z punktem $\{x_1, x_2\} \in P_1$. Jeżeli teraz f jest przekształceniem liniowym prostej P_1 , przyporządkowującym punktowi $\{x_1, x_2\}$ punkt $\{a_1 x_1 + a_2 x_2, b_1 x_1 + b_2 x_2\}$, gdzie $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, to przyporządkowując każdemu punktowi $\{x_0, x_1, x_2\} \in P_2$ punkt $\{x_0, a_1 x_1 + a_2 x_2, b_1 x_1 + b_2 x_2\}$, otrzymamy przekształcenie liniowe płaszczyzny P_2 na siebie, a więc kolineację, która w punktach prostej niewłaściwej (utożsamionej z P_1) nie różni się od f .

W ten sposób okazaliśmy, że przekształcenie f jest rzutowe.

Z uwagi na rozpatrzone poprzednio przypadek przekształceń liniowych przestrzeni o wymiarach większych od jedności, możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Każde przekształcenie liniowe przestrzeni P_n na siebie jest rzutowe.*

ĆWICZENIE. Znaleźć takie przekształcenie liniowe płaszczyzny rzutowej P_2 na siebie, by punkty $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$, $\{1, 1, 1\}$ przeszły odpowiednio na punkty $\{1, 1, 0\}$, $\{1, 0, 1\}$, $\{1, 2, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$.

85^z. Zastosowanie przekształceń liniowych. Wprowadzając pojęcie przekształcenia liniowego, doszliśmy do arytmetycznego określenia pewnej klasy przekształceń rzutowych. Arytmetyczny charakter tego pojęcia czyni je bardzo przydatnym w rozważaniach, w których potrzebne jest konstruowanie przekształceń rzutowych, spełniających pewne z góry dane warunki. Z tego punktu widzenia rola przekształceń liniowych przypomina nieco rolę tzw. izometrii elementarnych, określonych w Nr 9, którymi posługiwaliśmy się w geometrii przestrzeni C_n , zanim poznaliśmy analityczną postać ogólnych izometrii (w Nr 50). W rozdziale XI

(Nr 96 i 97) okażemy, że pojęcia przekształcenia liniowego i przekształcenia rzutowego pokrywają się. Na razie jednak rola przekształceń liniowych będzie jedynie pomocnicza. Jako pierwsze ich zastosowanie udowodnimy twierdzenie następujące, które uważać można do pewnego stopnia za odpowiednik twierdzenia (z Nr 9) o izometriach elementarnych:

Twierdzenie. *W przestrzeni P_n dany jest układ złożony z $k+1$ punktów $p_0, p_1, \dots, p_k$. Istnieje takie przekształcenie liniowe f przestrzeni P_n na siebie, że $f(p_i) \in P_{n,i}$ dla $i=0, 1, \dots, k$.*

*Dowód.*¹ Niech

$$p_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\} \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, k.$$

Weźmy pod uwagę układ $k+2$ punktów przestrzeni C_{n+1} :

$$q_0 = (0, 0, \dots, 0), \quad q_{i+1} = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, k.$$

W myśl twierdzenia z Nr 9 istnieje izometria f przekształcająca przestrzeń C_{n+1} na siebie w taki sposób, że

$$(4) \quad f(q_i) \in C_{n+1,i} \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, k.$$

W szczególności jest więc $f(q_0) = q_0$; izometria f jest zatem określona przez wzory postaci:

$$(5) \quad \bar{x}_i = \sum_{j=0}^n a_{i,j} x_j \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, n,$$

gdzie

$$|a_{i,j}| (i, j=0, 1, \dots, n) \neq 0.$$

Przekształcenie (5) można też interpretować jako przekształcenie liniowe przestrzeni P_n na siebie. Wobec (4) przy przekształceniu tym każdy z punktów p_i przechodzi na punkt należący do zbioru $P_{n,i}$, co właśnie było do okazania.

Z udowodnionego twierdzenia wynika w szczególności, że dla każdego układu $k+1$ punktów przestrzeni P_n , gdzie $k \leq n$, istnieje przekształcenie liniowe przestrzeni P_n na siebie, przy którym punkty te przechodzą na punkty leżące w k -wymiarowej hiperpłaszczyźnie (rzutowej) $P_{n,k}$. Przekształcenie odwrotne przekształca wówczas zbiór $P_{n,k}$ na pewną k -wymiarową hiperpłaszczyznę rzutową, leżącą w P_n i przechodzącą przez punkty dane. Pozwala to nam wypowiedzieć następujący

Wniosek. *Przez każdy układ $k+1$ punktów przestrzeni P_n (gdzie $k \leq n$) przechodzi co najmniej jedna k -wymiarowa hiperpłaszczyzna rzutowa leżąca w P_n .*

ĆWICZENIE. Określić przekształcenie liniowe przestrzeni P_n , przy którym zbiór punktów $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ spełniających równanie

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = 0$$

przechodzi na zbiór punktów spełniających równanie

$$B_0 x_0 + B_1 x_1 + \dots + B_n x_n = 0,$$

przy czym zakładamy, że nie wszystkie współczynniki $A_0, A_1, \dots, A_n$, jak również nie wszystkie współczynniki $B_0, B_1, \dots, B_n$ znikają. Wywnioskować stąd, że zbiór punktów spełniających pierwsze równanie jest $(n-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyzną rzutową przestrzeni P_n .

¹ Dowód ten zawdzięczam p. R. Sikorskiemu.

ROZDZIAŁ X.

Hiperplaszczyny w przestrzeniach rzutowych

86^z. Podzbiory liniowe przestrzeni rzutowych. Przenosząc definicję podaną w Nr 16 na przestrzenie rzutowe, nazywamy *zbiorem liniowym* w przestrzeni P_n każdy zbiór $A \subset P_n$ o tej własności, że każda prosta (rzutowa) łącząca dwa różne jego punkty całkowicie w nim leży.

Każda hiperplaszczyna rzutowa przestrzeni P_n jest oczywiście zbiorem liniowym. Jasne jest, że część wspólna dowolnie wielu zbiorów liniowych jest zawsze zbiorem liniowym. Wynika stąd, że dla każdego podzbioru E przestrzeni C_n istnieje dokładnie jeden najmniejszy nadzbiór liniowy, a mianowicie część wspólna wszystkich podzbiorów liniowych przestrzeni P_n , zawierających E . Nadzbiór ten oznaczamy będziemy przez $P(E)$. Jeśli E składa się ze skończonej liczby punktów $p_0, p_1, \dots, p_k$, to zamiast $P(E)$ pisać też będziemy $P(p_0, p_1, \dots, p_k)$.

Zbiór ten nazywamy będziemy *wyznaczonym* przez punkty $p_0, p_1, \dots, p_k$ lub też *złączem* punktów $p_0, p_1, \dots, p_k$ (por. rozdział II, Nr 16, str. 38).

Zauważmy od razu, że *kolineacja f przestrzeni P_n na siebie przekształca zbiory liniowe na liniowe*, w szczególności zaś jest

$$(1) \quad f[P(E)] = P[f(E)].$$

Istotnie, $f[P(E)]$ jest zbiorem liniowym zawierającym $f(E)$, a więc $P[f(E)] \subset f[P(E)]$. Kolineacja odwrotna f_{-1} przekształca zbiór liniowy $P[f(E)]$ na zbiór liniowy $f_{-1}[P[f(E)]]$, zawierający E , a więc $P(E) \subset f_{-1}[P[f(E)]]$, skąd $f[P(E)] \subset P[f(E)]$ i ostatecznie $f[P(E)] = P[f(E)]$.

Jako odpowiednik twierdzenia z Nr 16 o zbiorach liniowych w przestrzeniach kartezjańskich, udowodnimy dla przestrzeni rzutowych następujące

Twierdzenie. *Jeżeli $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$ dla $i=0, 1, \dots, k$ są punktami przestrzeni P_n , to zbiór $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$ jest identyczny ze zbiorem T tych punktów przestrzeni P_n , które dają się przedstawić w postaci*

$$(2) \quad \left\{ \sum_{i=0}^k t_i \cdot a_{i,0}, \sum_{i=0}^k t_i \cdot a_{i,1}, \dots, \sum_{i=0}^k t_i \cdot a_{i,n} \right\},$$

gdzie $t_0, t_1, \dots, t_k$ są współczynnikami liczbowymi.

Dowód. Każdy z punktów $a_0, a_1, \dots, a_k$ należy do zbioru T , gdyż punkt a_i otrzymamy w postaci (2), przyjmując $t_j = \delta_j^i$ dla $j=0, 1, \dots, k$. Zauważmy dalej, że zbiór T jest liniowy; bo jeżeli $b = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ i $c = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ są różnymi punktami zbioru T , czyli jeśli istnieją takie układy liczb $u_0, u_1, \dots, u_k$ i $v_0, v_1, \dots, v_k$, że $b_j = \sum_{i=0}^k u_i \cdot a_{i,j}$ i $c_j = \sum_{i=0}^k v_i \cdot a_{i,j}$ dla $j=0, 1, \dots, n$, to w myśl twierdzenia z Nr 83 dla każdego punktu $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ prostej L łączącej b i c istnieją takie liczby λ i μ , że $x_j = \lambda \cdot b_j + \mu \cdot c_j = \sum_{i=0}^k (\lambda \cdot u_i + \mu \cdot v_i) \cdot a_{i,j}$, co po podstawieniu $t_i = \lambda \cdot u_i + \mu \cdot v_i$ pozwala punkt p przedstawić w postaci (2). Wynika stąd, że $P(a_0, a_1, \dots, a_k) \subset T$.

Pozostaje do okazania, że każdy punkt $p \in P_n$ postaci (2) należy do $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$. Jest tak oczywiście dla tych punktów postaci (2), które mają jeden tylko ze współczynników $t_0, t_1, \dots, t_k$ różny od zera, gdyż punkty te są identyczne z punktami $a_0, a_1, \dots, a_k$. Załóżmy więc, że przynależność do $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$ została już okazana dla wszystkich punktów przedstawialnych w postaci (2) o współczynnikach t_i , wśród których liczba różnych od zera nie przekracza liczby naturalnej $l \leq k$ i niech p będzie punktem postaci (2) o współczynnikach $t_0, t_1, \dots, t_k$, wśród których znajduje się $l+1$ różnych od zera. Ze względu na symetrię założeń przyjąć możemy, że współczynnikami tymi są $t_0, t_1, \dots, t_l$,

czyli że $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, gdzie $x_j = \sum_{i=0}^l t_i \cdot a_{i,j} = t_0 \cdot a_{0,j} + \sum_{i=1}^l t_i \cdot a_{i,j}$. Je-

żeli wszystkie liczby $y_j = \sum_{i=1}^l t_i \cdot a_{i,j}$ znikają, to $x_j = t_0 \cdot a_{0,j}$, a wobec tego

$p = a_0 \in P(a_0, a_1, \dots, a_k)$. Jeżeli zaś nie wszystkie liczby y_j znikają, to układ $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ jest pewnym punktem q przestrzeni P_n , należącym ze względu na założenie indukcyjne do zbioru $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$. Jeżeli $q = a_0$, to również $p = q = a_0 \in P(a_0, a_1, \dots, a_k)$, jeżeli zaś $q \neq a_0$, to punkt $p = \{t_0 \cdot a_{0,0} + y_0, t_0 \cdot a_{0,1} + y_1, \dots, t_0 \cdot a_{0,n} + y_n\}$ leży na prostej łączącej punkty a_0 i q , a więc należy do $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

ĆWICZENIE. W przestrzeni rzutowej P_4 dane są punkty: $a_0 = \{1, 0, 2, 1, 3\}$, $a_1 = \{1, 2, -1, 0, 1\}$, $a_2 = \{0, 1, -1, 1, -1\}$, $a_3 = \{0, 2, 5, -1, 2\}$, $a_4 = \{1, 1, 1, 1, 1\}$, $a_5 = \{0, 6, 1, 1, 6\}$. Znaleźć punkt przecięcia zbiorów $P(a_0, a_1, a_2)$ i $P(a_3, a_4, a_5)$.

87^z. Liniowa zależność punktów w przestrzeni P_n . O punkcie p zbioru $P(E)$ mówimy, że jest *liniowo zależny od zbioru E* .

Układ punktów $a_0, a_1, \dots, a_k$ nazywa się *liniowo niezależny*, jeżeli żaden z tych punktów nie jest liniowo zależny od pozostałych.

Jasne jest, że na mocy tych określeń *liniowa zależność i liniowa niezależność punktów są niezmiennikami rzutowymi*, gdyż, jak stwierdziliśmy w Nr 86, kolineacja f przekształca każdy zbiór postaci $P(E)$ na zbiór $P[f(E)]$. Dla celów geometrii analitycznej ważne jest arytmetyczne scharakteryzowanie liniowo niezależnych układów punktów przestrzeni P_n przez następujące

Twierdzenie. Aby układ złożony z punktów $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$, gdzie $i=0, 1, \dots, k$, był liniowo niezależny, potrzeba i wystarcza, by macierz

$$(a_{i,j}) (i=0, 1, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$$

była rzędu $k+1$.

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że liniowa niezależność punktów $a_0, a_1, \dots, a_k$ jest równoważna temu, że z warunku

$$(3) \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i \cdot a_{i,j} = 0 \text{ dla } j=0, 1, \dots, n$$

wynika znikanie wszystkich współczynników $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Istotnie, jeżeli istnieją liczby $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, nie wszystkie znikające, dla których zachodzi (3), a mianowicie, jeśli np. $\lambda_0 \neq 0$, to wynika stąd, że

$$a_{0,j} = \sum_{i=1}^k \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right) \cdot a_{i,j} \text{ dla } j=0, 1, \dots, n. \text{ Wobec twierdzenia z Nr 86 wnosi}$$

simy stąd, że $a_0 \in P(a_1, a_2, \dots, a_k)$. A więc punkty $a_0, a_1, \dots, a_k$ są liniowo niezależne. Na odwrót, jeśli punkty te są liniowo zależne, na przykład $a_0 \in P(a_1, a_2, \dots, a_k)$, to w myśl tegoż twierdzenia z Nr 86 istnieją współczynniki $t_0, t_1, \dots, t_k$ takie, że $a_0 = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i \cdot a_{i,0}, \sum_{i=1}^k t_i \cdot a_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^k t_i \cdot a_{i,n} \right\}$, czyli że

$$\text{przy pewnym } t_0 \neq 0 \text{ jest } t_0 \cdot a_{0,j} = \sum_{i=1}^k t_i \cdot a_{i,j} \text{ dla } j=0, 1, \dots, n, \text{ co przy}$$

podstawieniu $\lambda_0 = t_0$ i $\lambda_i = -t_i$ dla $i=1, 2, \dots, k$ daje zależność postaci (3).

Zauważmy dalej, że znikanie z warunku (3) znikania wszystkich współczynników $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ daje się również interpretować jako liniowa niezależność układu wektorów $a_i = [a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}]$, gdzie $i=0, 1, \dots, k$, leżących w przestrzeni C_{n+1} . W Nr 20 udowodniliśmy jednak, że niezależność tych wektorów jest równoważna warunkowi, by rząd

macierzy $(a_{i,j}) (i=0, 1, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$ był równy $k+1$. Tym samym dowód twierdzenia jest zakończony.

Wniosek 1. Każdy podukład liniowo niezależnego układu punktów przestrzeni P_n jest liniowo niezależny.

Wniosek 2. Aby układ punktów $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\} \in P_n$, gdzie $i=0, 1, \dots, k$, zawierał podukład złożony z l punktów liniowo niezależnych, potrzeba i wystarcza, by rząd macierzy $(a_{i,j}) (i=0, 1, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$ był nie mniejszy od l .

Wniosek 3. Aby punkty właściwe $a_0, a_1, \dots, a_k$ przestrzeni P_n były liniowo niezależne w sensie przyjętym w przestrzeni P_n , potrzeba i wystarcza, by były liniowo niezależne w sensie przyjętym w przestrzeni C_n .

Istotnie, możemy przyjąć, że $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$, gdzie $a_{i,0}=1$, czyli $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$. Liniowa niezależność układu punktów $a_0, a_1, \dots, a_k$ w przestrzeni C_n jest (na mocy Nr 18) równoważna liniowej niezależności układu wektorów $\overrightarrow{[a_0 a_1]}, \overrightarrow{[a_0 a_2]}, \dots, \overrightarrow{[a_0 a_k]}$, czyli (na mocy Nr 20) warunkowi, by macierz

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}-a_{0,1} & a_{1,2}-a_{0,2} & \dots & a_{1,n}-a_{0,n} \\ a_{2,1}-a_{0,1} & a_{2,2}-a_{0,2} & \dots & a_{2,n}-a_{0,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1}-a_{0,1} & a_{k,2}-a_{0,2} & \dots & a_{k,n}-a_{0,n} \end{pmatrix}$$

miała rząd równy k . Rząd tej macierzy jest oczywiście o jedność niższy od rzędu macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ 0 & a_{1,1}-a_{0,1} & a_{1,2}-a_{0,2} & \dots & a_{1,n}-a_{0,n} \\ 0 & a_{2,1}-a_{0,1} & a_{2,2}-a_{0,2} & \dots & a_{2,n}-a_{0,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{k,1}-a_{0,1} & a_{k,2}-a_{0,2} & \dots & a_{k,n}-a_{0,n} \end{pmatrix}$$

Dodając do kolejnych wierszy tej macierzy wiersz pierwszy, możemy przejść, bez zmiany jej rzędu, do macierzy $(a_{i,j}) (i=0, 1, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$.

Otrzymany w ten sposób wniosek 3 czyni zbytecznym zaznaczanie, czy niezależność liniową układu punktów właściwych rozumiemy w sensie przyjętym w przestrzeni C_n , czy też w sensie przyjętym w przestrzeni P_n , skoro dla punktów właściwych pojęcia te okazały się równoważne.

Wniosek 4. W przestrzeni P_n istnieje układ złożony z $n+1$ punktów liniowo niezależnych, natomiast układ zawierający więcej niż $n+1$ punktów nigdy nie jest liniowo niezależny.

Istotnie, punkty $a_i = \{\delta_0^i, \delta_1^i, \dots, \delta_n^i\}$, gdzie $i=0, 1, \dots, n$, tworzą układ liniowo niezależny, gdyż wyznacznik $|\delta_j^i| (i, j=0, 1, \dots, n)$ jest równy jedności. Natomiast rząd macierzy spólrzędnych jakiegokolwiek układu punktów przestrzeni P_n nie może przekraczać $n+1$, ponieważ macierz ta ma tylko $n+1$ kolumn.

Biorąc pod uwagę, że liniowa niezależność jest niezmiennikiem rzutowym, otrzymujemy stąd

Wniosek 5. *Wymiar przestrzeni rzutowej jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych.*

Wniosek 6. *Jeżeli punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ przestrzeni P_n są liniowo niezależne, to $P(a_0, a_1, \dots, a_n) = P_n$.*

Istotnie, niech $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$ i niech $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ będzie dowolnym punktem przestrzeni P_n . Wobec wniosku 4 układ złożony z punktów $a_0, a_1, \dots, a_n, p$ jest już liniowo zależny, a zatem istnieją liczby $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, t$, nie wszystkie równe zeru i takie, że $\sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot a_{i,j} + t \cdot x_j = 0$ dla $j=0, 1, \dots, n$. Ponieważ $t=0$ znaczyłoby, że punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ są liniowo zależne wbrew założeniu, więc musi być $t \neq 0$, skąd wynika, że $x_j = \sum_{i=0}^n \left(-\frac{\lambda_i}{t}\right) \cdot a_{i,j}$ dla $j=0, 1, \dots, n$, co na mocy twierdzenia z Nr 86 znaczy, że $p \in P(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Wniosek 7. *Nie istnieje przekształcenie rzutowe przestrzeni P_n na jej część właściwą.*

Istotnie, jeśli przekształcenie rzutowe φ przekształca przestrzeń P_n na podzbiór E , to biorąc układ liniowo niezależny $a_0, a_1, \dots, a_n \in P_n$, otrzymamy po przekształceniu φ układ punktów $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)$ liniowo niezależny. W myśl wniosku 6 jest $P(\varphi(a_0), \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = P_n$. Ale zbiór E jest liniowy, więc $P(\varphi(a_0), \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \subset E$, skąd wynika, że $E = P_n$.

Wniosek 8. *Jeżeli punkty $a_0, a_1, \dots, a_k$ przestrzeni P_n są liniowo niezależne, to $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$ jest k -wymiarową hiperplaszczyną rzutową.*

Jest to przy tym jedyna k -wymiarowa hiperplaszczyna przestrzeni P_n , zawierająca te punkty.

Wobec wniosku 4 jest $k \leq n$, a więc — na mocy wniosku z Nr 85 — istnieje w P_n hiperplaszczyna k -wymiarowa H , przechodząca przez punkty $a_0, a_1, \dots, a_k$. Zatem $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$ jest podzbiorem liniowym hiperplaszczyny H , skąd z uwagi na wniosek 6 wynika równość

$$H = P(a_0, a_1, \dots, a_k).$$

Wniosek 9. *Układ punktów $a_0, a_1, \dots, a_k$ przestrzeni P_n jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy w P_n nie istnieje hiperplaszczyna rzutowa o wymiarze mniejszym od k , zawierająca wszystkie te punkty.*

Wniosek 10. *Jeżeli punkty $a_0, a_1, \dots, a_k$ są liniowo niezależne, zaś punkt a_{k+1} nie należy do $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$, to punkty $a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ są liniowo niezależne.*

Wniosek 11. *Każdy podzbiór liniowy przestrzeni P_n jest hiperplaszczyną.*

Jest on bowiem identyczny ze zbiorem $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$, gdzie punkty $a_0, a_1, \dots, a_k$ tworzą możliwie najliczniejszy układ liniowo niezależny, złożony z punktów tego zbioru.

Biorąc dalej pod uwagę, że (na mocy twierdzenia z Nr 85) każdy układ $k+1$ punktów przestrzeni P_n daje się, przy pomocy przekształcenia liniowego całej przestrzeni P_n na siebie, przekształcić na układ leżący w $P_{n,k}$, możemy wypowiedzieć następujący

Wniosek 12. *Dla każdej k -wymiarowej hiperplaszczyny rzutowej H przestrzeni P_n istnieje takie przekształcenie liniowe f przestrzeni P_n na siebie, że $f(H) = P_{n,k}$.*

Wniosek 13. *Każdy liniowo niezależny układ punktów przestrzeni P_n daje się uzupełnić do liniowo niezależnego układu złożonego z $n+1$ punktów.*

Istotnie, jeżeli dany układ składa się z punktów $a_0, a_1, \dots, a_k$, gdzie $k < n$, to $P(a_0, a_1, \dots, a_k)$ jest podzbiorem właściwym przestrzeni P_n . Biorąc dowolny punkt $a_{k+1} \in P_n - P(a_0, a_1, \dots, a_k)$, otrzymamy układ $a_0, a_1, \dots, a_k$ nie leżący w k -wymiarowej hiperplaszczynie, a więc (w myśl wniosku 9) liniowo niezależny.

ĆWICZENIA. 1. Układ złożony z punktów

$$a_0 = \{1, 0, 0, 2\}, \quad a_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad a_2 = \{0, 3, 2, 1\}$$

uzupełnić do układu liniowo niezależnego czterech punktów przestrzeni P_3 .

2. W płaszczynie rzutowej wyznaczonej w P_4 przez punkty

$$\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, -1, 2, -3, 0\}$$

znaleźć układ liniowo niezależny złożony z trzech punktów właściwych.

3. Okazać, że część wspólna k -wymiarowej i l -wymiarowej hiperplaszczyny przestrzeni P_n jest hiperplaszczyną o wymiarze nie mniejszym od $k+l-n$.

88^z. Hiperplaszczyny kartezjańskie a hiperplaszczyny rzutowe. Hiperplaszczyny k -wymiarowe przestrzeni P_n określiliśmy w Nr 82 jako podzbiory przestrzeni P_n będące obrazami rzutowymi, a więc (dla $k > 1$) obrazami, dającymi się otrzymać przez kolineacje przestrzeni P_k . Nasuwa się przypuszczenie, że hiperplaszczyny k -wymiarowe rzutowe

przestrzeni P_n , nie leżące całkowicie w zbiorze punktów niewłaściwych, dają się też określić jako hiperplaszczyny k -wymiarowe przestrzeni C_n , uzupełnione przez punkty niewłaściwe leżących w nich prostych. Okażemy, że tak jest istotnie. Zaczniemy od dowodu dwu lematów:

Lemat 1. Jeżeli układ $a_0, a_1, \dots, a_n$ punktów przestrzeni P_n jest liniowo niezależny, to biorąc punkt a'_i różny od a_0 na każdej z prostych łączących a_0 z a_i (gdzie $i=1, 2, \dots, k$), otrzymamy liniowo niezależny układ punktów $a_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_k$.

Dowód. Niech $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$ dla $i=0, 1, \dots, k$. Wobec twierdzenia z Nr 83 istnieją dla $i=1, 2, \dots, k$ takie liczby λ_i i μ_i , że

$$a'_i = \{\lambda_i \cdot a_{0,0} + \mu_i \cdot a_{i,0}, \lambda_i \cdot a_{0,1} + \mu_i \cdot a_{i,1}, \dots, \lambda_i \cdot a_{0,n} + \mu_i \cdot a_{i,n}\},$$

przy czym wobec $a'_i \neq a_0$ jest $\mu_i \neq 0$ dla $i=1, 2, \dots, k$. Macierz spółrzędnych punktów $a_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_k$ ma więc postać

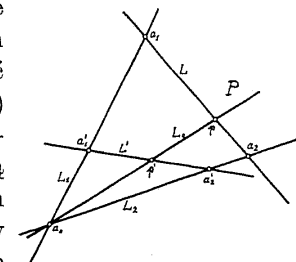
$$(4) \quad \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ \lambda_1 a_{0,0} + \mu_1 a_{1,0} & \lambda_1 a_{0,1} + \mu_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{0,2} + \mu_1 a_{1,2} & \dots & \lambda_1 a_{0,n} + \mu_1 a_{1,n} \\ \lambda_2 a_{0,0} + \mu_2 a_{2,0} & \lambda_2 a_{0,1} + \mu_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{0,2} + \mu_2 a_{2,2} & \dots & \lambda_2 a_{0,n} + \mu_2 a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k a_{0,0} + \mu_k a_{k,0} & \lambda_k a_{0,1} + \mu_k a_{k,1} & \lambda_k a_{0,2} + \mu_k a_{k,2} & \dots & \lambda_k a_{0,n} + \mu_k a_{k,n} \end{pmatrix}$$

czyli powstaje z macierzy $(a_{i,j})$ ($i=0, 1, \dots, k$; $j=0, 1, \dots, n$) spółrzędnych punktów $a_0, a_1, \dots, a_k$ przez pomnożenie kolejnych jej wierszy, poczynając od drugiego, przez liczby $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ i dodanie do nich pierwszego wiersza, pomnożonego kolejno przez liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Ponieważ—jak wiemy z teorii wyznaczników—operacja ta nie wpływa na rząd macierzy, więc rząd macierzy (4) jest równy rządowi macierzy $(a_{i,j})$ ($i=0, 1, \dots, k$; $j=0, 1, \dots, n$), czyli równy $k+1$. Wobec twierdzenia z Nr 87 punkty $a_0, a'_1, \dots, a'_k$ są zatem liniowo niezależne.

Lemat 2. Jeżeli $\bar{E}$ jest podzbiorem liniowym przestrzeni C_n , to uzupełniając go punktami niewłaściwymi leżących w nim prostych otrzymamy podzbiór liniowy przestrzeni P_n .

Dowód. Oznaczmy tak uzupełniony zbiór przez $\bar{E}$. Idzie o okazanie, że prosta rzutowa L , łącząca dwa różne punkty $a_1, a_2 \in \bar{E}$, leży w zbiorze $\bar{E}$. Jest to oczywiste w przypadku, gdy co najmniej jeden z punktów a_1, a_2 jest właściwy. Możemy więc ograniczyć się do rozpatrzenia przypadku, gdy oba punkty a_1 i a_2 są niewłaściwe. Weźmy pod uwagę dowolny punkt $a_0 \in \bar{E}$. Punkty a_0, a_1, a_2 są wówczas liniowo niezależne; zatem (ze względu na wniosek 8 z Nr 87) zbiór $P = P(a_0, a_1, a_2)$ jest dwuwymiarową hiperplaszczyną rzutową, a więc zbiorem, którego własności rzutowe są identyczne z własnościami rzutowymi płaszczyzny P_2 . W zbiorze P leżą

proste L_1 i L_2 łączące a_0 z a_1 i a_2 . Ponieważ punkty a_1 i a_2 są różne, więc proste L_1 i L_2 mają jedynie a_0 jako punkt wspólny. Jeśli więc na L_1 weźmiemy punkt a'_1 różny od a_0 i a_1 , zaś na L_2 punkt a'_2 różny od a_0 i a_2 , to punkty a'_1 i a'_2 będą właściwe i różne. Wyznaczają one pewną prostą L' , która leży w P (rys. 60) i nie przechodzi przez punkt a_0 , w przeciwnym bowiem razie musiałaby się ona pokrywać zarówno z L_1 , jak i L_2 , co wobec $L_1 \cdot L_2 = (a_0)$ jest niemożliwe. Niech teraz p będzie dowolnym punktem prostej L , a L_0 prostą łączącą a_0 i p . Punkt p jest jej punktem niewłaściwym. Proste L' i L_0 jako leżące w zbiorze P przecinają się w pewnym punkcie p' różnym od a_0 . Jeżeli $p=p'$, to p jest punktem niewłaściwym prostej L' , a więc należy do $\bar{E}$. Jeśli zaś $p \neq p'$, to p' jest punktem właściwym prostej L' , a więc $p' \in \bar{E}$. Prosta L_0 jest wyznaczona przez punkty a_0 i p' , a ponieważ punkt p jest jej punktem niewłaściwym, więc i w tym przypadku $p \in \bar{E}$. W ten sposób okazaliśmy, że każdy punkt p prostej L leży w zbiorze $\bar{E}$, co właśnie było do udowodnienia.



Rys. 60.

Twierdzenie. Jeżeli P jest k -wymiarową hiperplaszczyną leżącą w P_n i zawierającą przynajmniej jeden punkt właściwy, to jej punkty właściwe tworzą k -wymiarową hiperplaszczynę C w C_n , która uzupełniona przez punkty niewłaściwe prostych leżących w C daje zbiór $\bar{P}$.

Dowód. Niech a_0 będzie punktem właściwym hiperplaszczyny P . Wobec wniosku 13 z Nr 87 możemy do a_0 dołączyć punkty $a_1, a_2, \dots, a_k$ należące do P tak, by układ $a_0, a_1, \dots, a_k$ był liniowo niezależny. Niech L_i oznacza prostą łączącą a_0 z punktem a_i dla $i=1, 2, \dots, k$. Weźmy pod uwagę na prostej L_i punkt właściwy a'_i różny od a_0 . W myśl lematu 1 układ $a_0, a'_1, \dots, a'_k$ jest liniowo niezależny, a więc w myśl wniosku 8 z Nr 87 jest $P = P(a_0, a'_1, \dots, a'_k)$. Ale punkty $a_0, a'_1, \dots, a'_k$ są liniowo niezależne w C_n , więc wobec wniosku 6 z Nr 19 zbiór $\bar{E} = C(a_0, a'_1, \dots, a'_k)$ jest k -wymiarową hiperplaszczyną w C_n . W myśl lematu 2, uzupełniając $\bar{E}$ punktami niewłaściwymi prostych w nim leżących, otrzymamy zbiór $\bar{E}$ liniowy w P_n . Jest wówczas $P(a_0, a'_1, \dots, a'_k) \subset \bar{E} \subset P$, skąd wynika, że $\bar{E} = P$. A więc zbiór $\bar{E}$ jest identyczny ze zbiorem C punktów właściwych hiperplaszczyny P . Zbiór C jest zatem k -wymiarową hiperplaszczyną w C_n spełniającą tezę twierdzenia.

ĆWICZENIE. W C_4 dane są dwie 3-wymiarowe hiperplaszczyny przez równania:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{ i } \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0.$$

Znaleźć trzy liniowo niezależne punkty niewłaściwe prostych, należących do obu tych hiperpłaszczyzn.

89^z. Przekształcenia liniowe, określone w skończonym układzie punktów. W Nr 49 okazaliśmy, że przekształcenie izometryczne dowolnego zbioru $E \subset C_n$ na dowolny zbiór przystający $E' \subset C_n$ zawsze daje się rozszerzyć do izometrycznego przekształcenia całej przestrzeni C_n na siebie. W szczególności dowolnie dany układ U punktów $p_0, p_1, \dots, p_n$ przestrzeni C_n można było przez izometrię f całej przestrzeni C_n na siebie przekształcić w dowolny izometryczny z nim układ V punktów $q_0, q_1, \dots, q_n$, przy czym wobec lematu 2 z Nr 49 w przypadku, gdy punkty $p_0, p_1, \dots, p_n$ są liniowo niezależne, izometria f jest jednoznacznie wyznaczona przez swe wartości $q_i = f(p_i)$ w punktach p_i , gdzie $i=0, 1, \dots, n$. Zajmiemy się obecnie dowodem twierdzenia, które uważać można za pewien odpowiednik twierdzenia z Nr 49 udowodnionego dla przestrzeni C_n . Rolę izometrii przejmą w nim przekształcenia liniowe, a założenia co do układów U i V ulegną pewnej zmianie. Zaczniemy od dowodu lematu następującego:

Lemat. Niech $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ będzie takim układem $n+2$ punktów przestrzeni P_n , że skreślenie w nim któregośkolwiek z punktów pozostawia zawsze układ liniowo niezależny w P_n . Istnieje wówczas dokładnie jedno przekształcenie liniowe φ przestrzeni P_n na siebie, przy którym punkty $v_0^n, v_1^n, \dots, v_n^n, v_{n+1}^n$, gdzie $v_i^n = \{\delta_0^i, \delta_1^i, \dots, \delta_n^i\}$ dla $i=0, 1, \dots, n$ oraz $v_{n+1}^n = \{1, 1, \dots, 1\}$, przejdą odpowiednio na punkty $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$.

Dowód. Niech $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$ dla $i=0, 1, \dots, (n+1)$. Aby przekształcenie $\varphi(x) = \bar{x}$ określone przez wzór:

$$\bar{x}_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n$$

spełniało tęzę lematu, potrzeba i wystarcza, by różny od zera był wyznacznik $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) oraz by istniały różne od zera liczby $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, spełniające warunki:

$$(5) \quad a_{i,j} = \lambda_i \cdot a_{i,j} \quad \text{dla } i, j=0, 1, \dots, n$$

$$\text{i } \sum_{i=0}^n a_{i,j} = \lambda_{n+1} \cdot a_{n+1,j} \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n. \text{ Ponieważ układ } \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$$

możemy zastąpić zawsze przez układ proporcjonalny (gdyż układ współczynników $a_{i,j}$ jest wyznaczony jedynie z dokładnością do proporcjonalności), więc nie zmniejszając ogólności możemy od razu założyć, że liczba λ_{n+1} jest równa 1. Ostatnie zależności przyjmą wówczas postać:

$$(6) \quad \sum_{i=0}^n a_{i,j} = a_{n+1,j} \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n.$$

Układ równań (względem niewiadomych $a_{i,j}$ oraz λ_i) złożony z równań (5) i (6) jest oczywiście równoważny układowi złożonemu z równań (5) oraz równań:

$$(7) \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot a_{i,j} = a_{n+1,j} \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n.$$

Równania (7) wyznaczają jednoznacznie liczby $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, gdyż wyznacznik $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) jest różny od zera, wobec liniowej niezależności punktów $a_0, a_1, \dots, a_n$. Gdyby któraś ze znalezionych liczb $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, np. λ_0 , była równa zeru, to zależności (7) znaczyłyby, że punkty $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ są liniowo zależne, wbrew założeniu. A więc liczby $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ są wszystkie różne od zera. Z równań (6) znajdujemy w sposób jednoznaczny współczynniki $a_{i,j}$, przy czym zachodzi zależność $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) $= \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot |a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) $\neq 0$.

W ten sposób dowód lematu został zakończony.

Twierdzenie. Jeżeli $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ i $b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ są takimi układami punktów przestrzeni P_n , że po skreśleniu któregośkolwiek punktu w którymkolwiek z nich pozostanie z układu tego układ liniowo niezależny, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe f przestrzeni P_n na siebie takie, że $f(a_i) = b_i$ dla $i=0, 1, \dots, n, n+1$.

Dowód. W myśl lematu istnieją przekształcenia liniowe φ i ψ przestrzeni P_n na siebie, jednoznacznie wyznaczone i takie, że $\varphi(v_i^n) = a_i$ oraz $\psi(v_i^n) = b_i$ dla $i=0, 1, \dots, (n+1)$, przy czym oznaczenie v_i^n zachowuje swój poprzedni sens. Oznaczając przez φ_{-1} przekształcenie odwrotne do φ i przyjmując $f(x) = \psi \cdot \varphi_{-1}(x)$ dla każdego $x \in P_n$, mamy przekształcenie liniowe f takie, że $f(a_i) = \psi \cdot \varphi_{-1}(a_i) = \psi(v_i^n) = b_i$ dla $i=0, 1, \dots, (n+1)$.

By stwierdzić, że przekształcenie f jest jedyne, przypuśćmy, że f^* jest jakimkolwiek przekształceniem liniowym przestrzeni P_n na siebie spełniającym warunek $f^*(a_i) = b_i$ dla $i=0, 1, \dots, (n+1)$. Wówczas $f^* \varphi(v_i^n) = f^*(a_i) = b_i$, skąd (wobec jednoznaczności przekształcenia ψ) $f^* \varphi(x) = \psi(x)$, a więc $f^*(x) = f^* \varphi \varphi_{-1}(x) = \psi \varphi_{-1}(x) = f(x)$ dla każdego $x \in P_n$. W ten sposób dowód twierdzenia jest zakończony.

ĆWICZENIA. 1. Skonstruować przekształcenie liniowe płaszczyzny P_2 na siebie, przy którym punkty

$$\{1, 0, 0\}, \quad \{0, 1, 1\}, \quad \{0, 0, 1\}, \quad \{1, 1, 3\}$$

przejdą odpowiednio na punkty

$$\{1, 1, 0\}, \quad \{1, 1, 1\}, \quad \{1, -1, -1\}, \quad \{1, 2, 3\}.$$

2. Skonstruować przekształcenie liniowe przestrzeni P_3 na siebie, przy którym punkt $\{1, 1, 1, 1\}$ przechodzi na siebie, płaszczyzny zaś o równaniach:

$$x_0=0, \quad x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=0$$

przejdą odpowiednio na (uzupełnione punktami niewłaściwymi) płaszczyzny, których równania w przestrzeni C_3 mają postać:

$$x_1+x_3=1, \quad x_3-x_2=1, \quad x_1-x_3=1, \quad 2x_1-x_2+x_3=1.$$

90^o. Równanie $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny w P_n . Przenosząc na przestrzenie rzutowe wyniki Nr 23 udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Hiperpłaszczyzny $(n-1)$ -wymiarowe rzutowe, leżące w przestrzeni P_n , są identyczne ze zbiorami punktów $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in P_n$, spełniających równanie postaci*

$$(8) \quad A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n = 0,$$

przy czym układ współczynników $A_0, A_1, \dots, A_n$ jest przez hiperpłaszczyznę wyznaczony z dokładnością do proporcjonalności.

Dowód. Jeżeli w równaniu (8) znikają wszystkie współczynniki A_i , prócz A_0 , to charakteryzuje ono $(n-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę niewłaściwą przestrzeni P_n . Jeśli zaś nie wszystkie A_i , gdzie $i > 0$, znikają, to w zakresie punktów właściwych (dla których przyjmą możemy $x_0=1$) równanie (8) przybiera postać:

$$A_0 + A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n = 0,$$

co — jak wiemy z Nr 23 — jest równaniem dowolnej $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny w C_n . Punkty niewłaściwe, czyli kierunki prostych leżących w tej hiperpłaszczyźnie, są to (na mocy Nr 24) kierunki prostopadłe do wektora $[A_1, A_2, \dots, A_n]$ czyli punkty $\{0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ takie, że $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n = 0$; to zaś — wobec $x_0=0$ — jest równoważne zależności (8). Ponieważ — w myśl twierdzenia z Nr 88 — hiperpłaszczyzny $(n-1)$ -wymiarowe przestrzeni P_n , różne od hiperpłaszczyzny niewłaściwej, są identyczne z $(n-1)$ -wymiarowymi hiperpłaszczyznami przestrzeni C_n uzupełnionymi przez punkty niewłaściwe zawartych w nich prostych, więc tym samym dowód twierdzenia jest zakończony.

Wniosek. *Jeżeli punkty $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$, gdzie $i=1, 2, \dots, n$, tworzą układ liniowo niezależny, to równanie $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny rzutowej przechodzącej przez te punkty ma postać:*

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, wobec liniowej niezależności punktów $a_1, a_2, \dots, a_n$ i twierdzenia z Nr 87 co najmniej jeden ze współczynników rozwinięcia tego wyznacznika według wyrazów jego pierwszego wiersza jest różny od zera, a więc równanie (9) nie jest tożsamością. Jest to zatem równanie pewnej $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny, które jest przy tym spełnione przez każdy z punktów $a_1, a_2, \dots, a_n$. W myśl wniosku 8 z Nr 87 hiperpłaszczyzna ta jest jedyna.

ĆWICZENIE. Znaleźć punkt przecięcia prostej, przechodzącej przez punkty $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ i $\{1, 0, 1, 0, 1\}$ przestrzeni P_4 , z 3-wymiarową hiperpłaszczyzną, wyznaczoną przez punkty:

$$\{1, 0, 0, 0, 0\}, \quad \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad \{0, 1, -2, 3, -4\}, \quad \{0, 3, 2, 1, 0\}.$$

91^o. Układy $(n-1)$ -wymiarowych hiperpłaszczyzn w przestrzeni P_n . Niech będą dane w przestrzeni P_n hiperpłaszczyzny $(n-1)$ -wymiarowe $H_0, H_1, \dots, H_k$ określone przez równania:

$$(10) \quad A_{i,0} \cdot x_0 + A_{i,1} \cdot x_1 + \dots + A_{i,n} \cdot x_n = 0, \quad \text{gdzie } i=1, 2, \dots, k.$$

Zauważmy, że istnieją w przestrzeni P_n punkty nie należące do żadnej z tych hiperpłaszczyzn. Jeżeli $k=1$ oraz $A_{1,i_0} \neq 0$, to punktem takim jest $\{\delta_{i_0}^{i_0}, \delta_{i_0}^{i_0}, \dots, \delta_{i_0}^{i_0}\}$. Załóżmy więc, że $k > 1$ oraz że istnieje punkt a , nie należący do żadnej z hiperpłaszczyzn $H_0, H_1, \dots, H_{k-1}$. Jeżeli $a \in P_n - H_k$, to jest to punkt o żądanej własności. Jeżeli zaś $a \in H_k$, to biorąc dowolny punkt $b \in P_n - H_k$, widzimy, że prosta L łącząca a i b nie leży w żadnej z hiperpłaszczyzn $H_0, H_1, \dots, H_k$, a więc każdą z nich przecina w co najwyżej jednym punkcie. Biorąc jakikolwiek punkt p prostej L , różny od każdego z punktów przecięcia L z hiperpłaszczyznami $H_0, H_1, \dots, H_k$, otrzymamy punkt o żądanej własności.

Zbiór punktów należących jednocześnie do wszystkich hiperpłaszczyzn $H_0, H_1, \dots, H_k$ jest liniowy, a więc na mocy wniosku 11 z Nr 87 jest on pewną hiperpłaszczyzną. Wymiar jej wyznacza następujące

Twierdzenie. *Wymiar hiperpłaszczyzny H , będącej częścią wspólną wszystkich hiperpłaszczyzn określonych przez równania (10), jest równy $n-l$, gdzie l oznacza rząd macierzy $(A_{i,j}) (i=1, 2, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$.*

Dowód. Wobec wniosku 2 z Nr 87, istnieje wśród punktów $p_i = \{A_{i,0}, A_{i,1}, \dots, A_{i,n}\}$, gdzie $i=1, 2, \dots, k$, układ l punktów liniowo niezależnych, np. układ złożony z punktów $p_1, p_2, \dots, p_l$, a wówczas wszystkie pozostałe punkty $p_{l+1}, p_{l+2}, \dots, p_k$ są już od układu tego liniowo zależne. Znaczący to, że dla każdego $i > l$ istnieją liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ takie, że

$$A_{i,j} = \sum_{v=1}^l \lambda_v \cdot A_{v,j}, \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n.$$

Wynika stąd, że każdy punkt $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, spełniający równania (10) dla $i=1, 2, \dots, l$, spełnia te równania również dla $i=l+1, l+2, \dots, k$, czyli że hiperplaszczyna H określona jest przez układ równań (10), gdzie $i=1, 2, \dots, l$.

Zmieniając ewentualnie porządek równań (10) i kolejność współrzędnych, możemy bez zmiany ogólności założyć, że różny jest od zera minor

$$A = |A_{i,j}| (i, j = n-l+1, n-l+2, \dots, n).$$

Przyjmując:

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{x}_i & \text{dla } i=0, 1, \dots, n-l, \\ \bar{x}_i = \sum_{j=0}^n A_{i-n+l,j} x_j & \text{dla } i \geq n-l+1, \end{cases}$$

zauważmy, że otrzymane w ten sposób przekształcenie przestrzeni P_n na siebie jest rzutowe, gdyż wyznacznik jego współczynników jest równy A , a więc różny od zera. Jasne jest jednak, że przy tym przekształceniu zbiór H punktów spełniających równania (10) przejdzie na zbiór punktów $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, których współrzędne $\bar{x}_i$ znikają dla $i \geq n-l+1$, czyli na hiperplaszczynę $P_{n,n-l}$. A więc zbiór H jest $(n-l)$ -wymiarową hiperplaszczyną, co było do okazania.

Uwaga. Teza twierdzenia pozostanie również prawdziwa, gdy niektóre z równań (10) są tożsamościami (tj. gdy wszystkie ich współczynniki znikają). Istotnie, dopisanie równań tej postaci nie wpływa ani na zbiór H , ani na rząd macierzy $(A_{i,j})$.

Z udowodnionego twierdzenia wynika następujący

Wniosek 1. Jeżeli $H_1, H_2, \dots, H_k$ są $(n-1)$ -wymiarowymi hiperplaszczynami przestrzeni P_n i jeżeli (10) jest równaniem hiperplaszczyny H_i dla $i=1, 2, \dots, k$, to rząd macierzy $(A_{i,j}) (i=1, 2, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$ jest niezmiennikiem rzutowym układu tych hiperplaszczyn.

W szczególności, jeśli rząd ten jest równy k , to $H_1, H_2, \dots, H_k$ nazywają się hiperplaszczynami liniowo niezależnymi.

A więc (dla $-1 \leq m < n$) część wspólna $n-m$ liniowo niezależnych hiperplaszczyn $(n-1)$ -wymiarowych jest m -wymiarową hiperplaszczyną. Ponieważ $P_{n,m}$ jest częścią wspólną $n-m$ hiperplaszczyn $(n-1)$ -wymiarowych o równaniach $x_i=0$, gdzie $m < i \leq n$, więc wobec wniosku 12 z Nr 87 otrzymujemy stąd dalej następujący

Wniosek 2. Aby podzbiór przestrzeni P_n był m -wymiarową hiperplaszczyną (gdzie $-1 \leq m < n$), potrzeba i wystarcza, by był on częścią wspólną liniowo niezależnego układu $n-m$ hiperplaszczyn $(n-1)$ -wymiarowych.

Wniosek 3. Jeżeli H jest częścią wspólną k hiperplaszczyn $(n-1)$ -wymiarowych o równaniach (10), to na to, by hiperplaszczyna $(n-1)$ -wymiarowa o równaniu $A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n = 0$ zawierała H , potrzeba i wystarcza, by istniały liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ takie, że $\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot A_{i,j} = A_j$ dla $j=0, 1, \dots, n$.

Inaczej mówiąc $(n-1)$ -wymiarowe hiperplaszczyny, przechodzące przez H , są identyczne z tymi, których równania są kombinacjami liniowymi równań (10), nie znikającymi tożsamościowo.

Dla dowodu oznaczmy przez $n-l$ wymiar hiperplaszczyny H i niech $a_0, a_1, \dots, a_{n-l}$ będzie układem $n-l+1$ punktów liniowo niezależnych, należących do H . Niech $a_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}$ dla $i=0, 1, \dots, (n-l)$. Ponieważ rząd macierzy $(a_{i,j}) (i=0, 1, \dots, l; j=0, 1, \dots, n)$ jest równy $n-l+1$, więc w myśl dowiedzonego twierdzenia punkty $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ spełniające równania

$$a_{i,0} \cdot y_0 + a_{i,1} \cdot y_1 + \dots + a_{i,n} \cdot y_n = 0 \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, (n-l)$$

tworzą hiperplaszczynę H' o wymiarze równym $n-(n-l+1)=l-1$. W hiperplaszczynie tej leży punkt $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, jak również wszystkie punkty $p_i = \{A_{i,0}, A_{i,1}, \dots, A_{i,n}\}$ dla $i=1, 2, \dots, k$. Ale rząd macierzy $(A_{i,j}) (i=1, 2, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$ jest w myśl twierdzenia równy l , a więc $H' = P(p_1, p_2, \dots, p_k)$, skąd — wobec twierdzenia z Nr 86 — otrzymujemy wniosek 3.

Wniosek 4. W przestrzeni P_n częścią wspólną hiperplaszczyny k -wymiarowej i l -wymiarowej jest zawsze hiperplaszczyna, której wymiar jest nie mniejszy od $k+l-n$.

Istotnie, w myśl wniosku 2 hiperplaszczyna k -wymiarowa jest częścią wspólną układu $n-k$ hiperplaszczyn $(n-1)$ -wymiarowych, zaś hiperplaszczyna l -wymiarowa jest częścią wspólną układu $n-l$ hiperplaszczyn $(n-1)$ -wymiarowych. Ich część wspólna jest więc przecięciem układu $2n-k-l$ hiperplaszczyn $(n-1)$ -wymiarowych, a więc, w myśl ostatniego twierdzenia, wymiar jej jest nie mniejszy niż

$$n-(2n-k-l)=k+l-n.$$

W przypadku, gdy część wspólna k -wymiarowej i l -wymiarowej hiperplaszczyny jest hiperplaszczyną, której wymiar jest większą z dwóch liczb -1 i $k+l-n$, mówimy, że hiperplaszczyny te znajdują się względem siebie w położeniu ogólnym (por. Nr 34, str.75).

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć w przestrzeni P_4 układ złożony z trzech 3-wymiarowych hiperpłaszczyzn, których częścią wspólną jest prosta wyznaczona przez punkty

$$\{1, 1, 1, 1, 1\} \text{ i } \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

2. W przestrzeni P_4 dane są trzy hiperpłaszczyzny o równaniach:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_0 - 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \quad x_0 + x_2 - x_4 = 0.$$

Okazać, że ich część wspólna L jest prostą i znaleźć równanie 3-wymiarowej hiperpłaszczyzny, która przechodzi przez proste L i $P_{4,1}$.

ROZDZIAŁ XI.

Stosunek anharmoniczny i przekształcenia rzutowe

92^z. Stosunek anharmoniczny czwórki punktów. Niezmiennikiem o podstawowym znaczeniu w całej geometrii rzutowej jest tzw. stosunek anharmoniczny czterech punktów położonych na prostej czyli dwustosunek tych punktów.

Niech L będzie prostą rzutową w przestrzeni P_n , wyznaczoną przez dwa różne punkty $a = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ i $b = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ i niech p i q będą dwoma innymi punktami prostej L , różnymi lub nie, lecz nie pokrywającymi się jednocześnie ani z a , ani z b . Wobec twierdzenia z Nr 83 istnieją liczby λ_p i μ_p oraz λ_q i μ_q takie, że:

$$(1) \quad \begin{aligned} p &= \{\lambda_p \cdot a_0 + \mu_p \cdot b_0, \lambda_p \cdot a_1 + \mu_p \cdot b_1, \dots, \lambda_p \cdot a_n + \mu_p \cdot b_n\}, \\ q &= \{\lambda_q \cdot a_0 + \mu_q \cdot b_0, \lambda_q \cdot a_1 + \mu_q \cdot b_1, \dots, \lambda_q \cdot a_n + \mu_q \cdot b_n\}, \end{aligned}$$

przy czym oba iloczyny $\lambda_p \cdot \mu_q$ oraz $\lambda_q \cdot \mu_p$ nie znikają jednocześnie.

Przez *stosunek anharmoniczny* lub *dwustosunek czwórki* (uporządkowanej) punktów a, b, p, q rozumiemy liczbę

$$(2) \quad (a, b; p, q) = \frac{\lambda_q \cdot \mu_p}{\lambda_p \cdot \mu_q},$$

przy tym w przypadku, gdy mianownik $\lambda_p \cdot \mu_q$ jest zerem (co zachodzi wtedy, gdy $p=b$ albo gdy $q=a$), za wartość tego dwustosunku przyjmujemy liczbę ∞ («nieskończoność»), którą uważać można, interpretując liczby jako punkty osi liczbowej C_1 , za punkt niewłaściwy tej osi.

Dwustosunek $(a, b; p, q)$ jest więc zerem jedynie wtedy, gdy $a=p$ (tj. gdy $\mu_p=0$) lub gdy $b=q$ (tj. gdy $\lambda_q=0$), jest zaś ∞ , gdy $a=q$ (tj. gdy $\lambda_p=0$) lub gdy $b=p$ (tj. gdy $\mu_q=0$), wreszcie jest jednością, gdy liczby λ_p, μ_p są proporcjonalne do λ_q, μ_q , czyli gdy $p=q$.

A więc, jeżeli dwustosunek $(a, b; p, q)$ ma wartość skończoną, różną od 0 i 1, to wszystkie punkty a, b, p, q są różne i na odwrót.

Zauważmy, że gdy zastąpimy spólrzędne $a_0, a_1, \dots, a_n$ i $b_0, b_1, \dots, b_n$ przez jakiegokolwiek liczby do nich proporcjonalne, stosunki $\lambda_p : \mu_p$

i $\lambda_q : \mu_q$ ulegają pomnożeniu przez jedną i tę samą liczbę, a więc wartość wyrażenia

$$\frac{\lambda_q \cdot \mu_p}{\lambda_p \cdot \mu_q}$$

pozostaje niezmienną.

Dwustosunek zależy więc jedynie od czwórki punktów a, b, p, q .

Jeżeli przestrzeń P_n poddamy przekształceniu liniowemu f , przyporządkowującemu każdemu punktowi $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in P_n$ punkt $f(x) = \bar{x} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \in P_n$ za pośrednictwem wzorów:

$$\bar{x}_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n, \text{ gdzie } j=0, 1, \dots, n,$$

to czwórka a, b, p, q przejdzie na czwórkę $\bar{a}, \bar{b}, \bar{p}, \bar{q}$, przy czym:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \{\lambda_p \cdot \bar{a}_0 + \mu_p \cdot \bar{b}_0, \lambda_p \cdot \bar{a}_1 + \mu_p \cdot \bar{b}_1, \dots, \lambda_p \cdot \bar{a}_n + \mu_p \cdot \bar{b}_n\} \\ \bar{q} &= \{\lambda_q \cdot \bar{a}_0 + \mu_q \cdot \bar{b}_0, \lambda_q \cdot \bar{a}_1 + \mu_q \cdot \bar{b}_1, \dots, \lambda_q \cdot \bar{a}_n + \mu_q \cdot \bar{b}_n\}, \end{aligned}$$

skąd wynika od razu, że

$$(a, b; p, q) = (\bar{a}, \bar{b}; \bar{p}, \bar{q}).$$

A więc *stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem przekształceń liniowych.*

Z chwilą, gdy okażemy, że przekształcenia liniowe są identyczne z rzutowymi (Nr 96 i 97), będzie tym samym dowiedzione, że stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem rzutowym.

ĆWICZENIE. Funkcją *homograficzną* zmiennej liczbowej x nazywa się funkcja $y=f(x)$ określona przez wzór:

$$f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}, \text{ gdzie } AD-BC \neq 0.$$

Okazać, że jeżeli x_1, x_2, x_3, x_4 są różnymi liczbami i jeżeli $Cx_i + D \neq 0$ dla $i=1, 2, 3, 4$, to:

$$(x_1, x_2; x_3, x_4) = (f(x_1), f(x_2); f(x_3), f(x_4)),$$

czyli że *wartość dwustosunku jest niezmiennikiem przekształcenia homograficznego.*

93. Elementarny sens dwustosunku. W przypadku, gdy wszystkie punkty a, b, p, q są właściwe, stosunek anharmoniczny ma prosty sens intuicyjny. Wówczas możemy przyjąć, że $a_0=b_0=1$, czyli że:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C_n, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in C_n \quad \text{i} \quad \lambda_p + \mu_p \neq 0 \neq \lambda_q + \mu_q.$$

Zatem:

$$p = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p} \cdot a + \frac{\mu_p}{\lambda_p + \mu_p} \cdot b, \quad q = \frac{\lambda_q}{\lambda_q + \mu_q} \cdot a + \frac{\mu_q}{\lambda_q + \mu_q} \cdot b.$$

Wynika stąd że:

$$\begin{aligned} p-a &= \frac{\mu_p}{\lambda_p + \mu_p} (b-a), & q-a &= \frac{\mu_q}{\lambda_q + \mu_q} (b-a), \\ p-b &= -\frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p} (b-a), & q-b &= -\frac{\lambda_q}{\lambda_q + \mu_q} (b-a), \end{aligned}$$

co przy użyciu terminologii wprowadzonej w Nr 14 daje się wypowiedzieć jak następuje:

Wektory $\overrightarrow{[ap]}, \overrightarrow{[aq]}, \overrightarrow{[bp]}, \overrightarrow{[bq]}$ mają względem wektora $\overrightarrow{[ab]}$ odpowiednio miary

$$m(\overrightarrow{ap}) = \frac{\mu_p}{\lambda_p + \mu_q}; \quad m(\overrightarrow{aq}) = \frac{\mu_q}{\lambda_q + \mu_q}; \quad m(\overrightarrow{bp}) = -\frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p}; \quad m(\overrightarrow{bq}) = -\frac{\lambda_q}{\lambda_q + \mu_q}.$$

Stąd wynika, że

$$(a, b; p, q) = \frac{m(\overrightarrow{ap}) \cdot m(\overrightarrow{bq})}{m(\overrightarrow{aq}) \cdot m(\overrightarrow{bp})}.$$

Biorąc dalej pod uwagę, że miara wektora w , leżącego na prostej L , względem wektora $a = \overrightarrow{[ab]}$ równa jest ilorazowi długości w przez $\varrho(a, b)$, zaopatrzonemu w znak $+$ lub $-$ zależnie od tego czy zwrot w jest zgodny ze zwrotem a , czy przeciwny, widzimy, że dwustosunek czwórki punktów właściwych daje się przedstawić wzorem

$$(a, b; p, q) = \pm \frac{\varrho(a, p) \cdot \varrho(b, q)}{\varrho(a, q) \cdot \varrho(b, p)},$$

przy czym znak „ $-$ ” bierzemy

wtedy, gdy wśród wektorów $\overrightarrow{ap}, \overrightarrow{bq}, \overrightarrow{aq}, \overrightarrow{bp}$ dokładnie jeden ma

zwrot przeciwny do pozostałych (rys. 61), zaś we wszystkich innych przypadkach (rys. 62) bierzemy znak „ $+$ ”



Rys. 61.



Rys. 62.

W przypadku, gdy $L=P_1$, mamy:

$$a = \{1, a_1\} = (a_1); \quad b = \{1, b_1\} = (b_1); \quad p = \{1, x_1\} = (x_1); \quad q = \{1, y_1\} = (y_1);$$

i miary $\vec{m}(ap)$, $\vec{m}(bq)$, $\vec{m}(aq)$, $\vec{m}(bp)$ są wówczas proporcjonalne do różnic:

$$a_1 - x_1, \quad b_1 - y_1, \quad a_1 - y_1, \quad b_1 - x_1$$

tak, że

$$(3) \quad ((a_1), (b_1); (x_1), (y_1)) = \frac{(a_1 - x_1) \cdot (b_1 - y_1)}{(a_1 - y_1) \cdot (b_1 - x_1)}.$$

Wracając do przypadku ogólnego, zauważmy, że przestawienie w czwórce a, b, p, q punktów a i b powoduje przestawienie liczb λ i μ , a więc dwustosunek przechodzi wówczas na swą odwrotność, czyli

$$(4) \quad (a, b; p, q) = \frac{1}{(b, a; p, q)}.$$

Podobnie przestawienie punktów p i q powoduje przestawienie liczb λ i μ , skąd

$$(5) \quad (a, b; p, q) = \frac{1}{(a, b; q, p)}.$$

W przypadku, gdy punkty $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ i $q = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ są różne, liczby x_i nie są proporcjonalne do liczb y_i , skąd $\lambda_p \cdot \mu_q - \lambda_q \cdot \mu_p \neq 0$. Przyjmując:

$$\bar{\lambda}_a = \mu_q, \quad \bar{\mu}_a = -\mu_p, \quad \bar{\lambda}_b = \lambda_q, \quad \bar{\mu}_b = -\lambda_p,$$

mamy dla $i=0, 1, \dots, n$:

$$\bar{\lambda}_a \cdot x_i + \bar{\mu}_a \cdot y_i = (\lambda_p \cdot \mu_q - \lambda_q \cdot \mu_p) \cdot a_i,$$

$$\bar{\lambda}_b \cdot x_i + \bar{\mu}_b \cdot y_i = -(\lambda_p \cdot \mu_q - \lambda_q \cdot \mu_p) = b_i,$$

a więc

$$a = \{\bar{\lambda}_a \cdot x_0 + \bar{\mu}_a \cdot y_0, \bar{\lambda}_a \cdot x_1 + \bar{\mu}_a \cdot y_1, \dots, \bar{\lambda}_a \cdot x_n + \bar{\mu}_a \cdot y_n\},$$

$$b = \{\bar{\lambda}_b \cdot x_0 + \bar{\mu}_b \cdot y_0, \bar{\lambda}_b \cdot x_1 + \bar{\mu}_b \cdot y_1, \dots, \bar{\lambda}_b \cdot x_n + \bar{\mu}_b \cdot y_n\}.$$

Ponieważ przy tym $\frac{\bar{\lambda}_b \cdot \bar{\mu}_a}{\bar{\lambda}_a \cdot \bar{\mu}_b} = \frac{\lambda_q \cdot \mu_p}{\lambda_p \cdot \mu_q}$, więc wynika stąd, że

$$(6) \quad (a, b; p, q) = (p, q; a, b).$$

Zauważmy, że przy trzech różnych punktach a, b, p , danych na prostej L istnieje dla każdej liczby δ dokładnie jeden punkt q położony na prostej L taki, że $(a, b; p, q) = \delta$.

Istotnie, zależność $\frac{\lambda_q \cdot \mu_p}{\lambda_p \cdot \mu_q} = \delta$ wyznacza stosunek $\frac{\lambda_q}{\mu_q} = \delta \cdot \frac{\lambda_p}{\mu_p}$, a tym samym określa jednoznacznie punkt

$$q = \{\lambda_q \cdot a_0 + \mu_q \cdot b_0, \lambda_q \cdot a_1 + \mu_q \cdot b_1, \dots, \lambda_q \cdot a_n + \mu_q \cdot b_n\}.$$

Jeżeli $\delta=0$, to $\lambda_q=0$, a więc $q=b$, jeżeli zaś $\delta=\infty$, to $\mu_q=0$, czyli $q=a$.

ĆWICZENIA. 1. Okazać, że jeżeli punkty a, b, p, q położone na jednej prostej są różne, to

$$(a, p; b, q) = 1 - (a, b; p, q).$$

Korzystając z tej zależności oraz ze wzorów (5) i (6), wyrazić za pomocą liczby $\delta = (a, b; p, q)$ wartość dwustosunku czwórki punktów a, b, p, q przy wszystkich permutacjach tych punktów.

2. Niech a i b będą różnymi punktami właściwymi prostej L . Okazać, że dla każdego punktu właściwego $p \in L$ stosunek pojedynczego podziału x punktów a i b przez punkt p (zdefiniowany w Nr 10) jest równy $(a, b; p, p_\infty)$, gdzie p_∞ oznacza punkt niewłaściwy prostej L .

3. W płaszczyźnie P_2 dane są 3 punkty: a_1, a_2, a_3 , właściwe i niespółliniowe. Oznaczmy przez L_1 prostą łączącą a_2 i a_3 , przez L_2 prostą łączącą a_1 i a_3 , zaś przez L_3 prostą łączącą a_1 i a_2 . Niech $p_i, q_i \in L$ dla $i=1, 2, 3$ i niech q_i będzie punktem niewłaściwym. Przy tych założeniach okazać, że:

1° Na to, by punkty p_1, p_2, p_3 były spółliniowe, potrzeba i wystarcza, żeby było

$$(a_1, a_2; p_3, q_3) \cdot (a_1, a_3; p_2, q_2) \cdot (a_2, a_3; p_1, q_1) = 1.$$

Jest to tzw. twierdzenie Menelausa.

2° Na to, by proste łączące a_i z p_i (gdzie $i=1, 2, 3$) przechodziły przez jeden punkt, potrzeba i wystarcza, by tenże iloczyn był równy -1 .

Jest to tzw. twierdzenie Cevy¹.

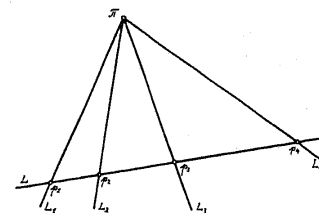
94^z. Stosunek anharmoniczny czwórki prostych. *Pękiem prostych* nazywa się zbiór wszystkich prostych rzutowych położonych w jednej płaszczyźnie i przechodzących przez jeden punkt, zwany *wierzchołkiem pęku*.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie Pappusa. Niech L_1, L_2, L_3, L_4 będą prostymi należącymi do jednego pęku Π , przy czym $L_1 \neq L_2$, i niech L_3 i L_4 nie pokrywają się jednocześnie z żadną z prostych L_1 i L_2 . Wówczas prosta L , nie należąca do pęku Π , lecz leżąca w jego płaszczyźnie, przecina proste L_1, L_2, L_3, L_4 w punktach p_1, p_2, p_3, p_4 , których dwustosunek $(p_1, p_2; p_3, p_4)$ nie zależy od położenia prostej L .

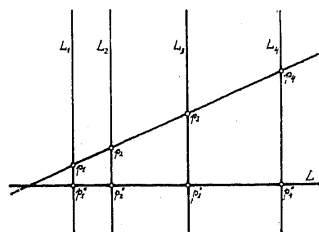
Dowód. Ponieważ pojęcie pęku prostych Π (rys. 63) jest oczywiście pojęciem rzutowym, zaś stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem przekształceń liniowych, więc możemy bez uszczerbku dla dowodu uprzednio poddać przestrzeń dowolnemu przekształceniu liniowemu.

Stosując twierdzenie z Nr 85 możemy założyć, że płaszczyzną pęku jest $P_{n,2}$



Rys. 63.

¹ G. Ceva matematyk włoski z początku XVIII wieku.



Rys. 64.

lub — co na jedno wychodzi — płaszczyzna P_2 , zaś wierzchołkiem pęku punkt $\{0, 0, 1\}$ (rys. 64). Proste L_i mają wówczas równania postaci

$$A_i \cdot x_0 + B_i \cdot x_1 = 0, \text{ gdzie } i=1, 2, 3, 4,$$

zaś prosta L ma równanie

$$A \cdot x_0 + B \cdot x_1 = x_2.$$

Weźmy teraz przekształcenie liniowe płaszczyzny P_2 , dane przez wzór:

$$f(\{x_0, x_1, x_2\}) = \{x_0, x_1, A \cdot x_0 + B \cdot x_1 + x_2\}.$$

Przekształca ono punkt $p_i^0 = \{B_i, -A_i, 0\}$ przecięcia prostej L_i z prostą $P_{2,1}$ na punkt $p_i = \{B_i, -A_i, A \cdot B_i - B \cdot A_i\}$ przecięcia prostej L_i z prostą L . Ponieważ dalej, w myśl założenia co do prostych L_i , jest $p_1^0 \neq p_2^0$, zaś p_3^0 i p_4^0 nie pokrywają się jednocześnie ani z p_1^0 , ani z p_2^0 , więc wobec niezmienniczości dwustosunku przy przekształceniach liniowych mamy:

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = (p_1^0, p_2^0; p_3^0, p_4^0).$$

Prawa strona ostatniej równości nie zależy od położenia prostej L . Tym samym dowód twierdzenia Pappusa został zakończony.

Twierdzenie to pozwala wprowadzić pojęcie stosunku anharmonicznego czterech prostych należących do jednego pęku za pomocą następującej definicji:

Definicja. Niech L_1, L_2, L_3, L_4 będą prostymi należącymi do jednego pęku Π , przy czym $L_1 \neq L_2$, i niech L_3 i L_4 nie pokrywają się jednocześnie ani z L_1 , ani z L_2 .

Wówczas *stosunkiem anharmonicznym* lub *dwustosunkiem czwórki* (uporządkowanej) prostych L_1, L_2, L_3, L_4 nazywamy liczbę $(L_1, L_2; L_3, L_4)$, równą stosunkowi anharmonicznemu czwórki punktów p_1, p_2, p_3, p_4 , w których dowolna prosta L nie należąca do pęku Π , lecz leżąca w jego płaszczyźnie, przecina proste L_1, L_2, L_3, L_4 .

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć dwustosunek czterech prostych, danych w płaszczyźnie P_2 przez równania:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + 2x_2 = 0, \quad 2x_1 + 5x_2 = 0.$$

2. W płaszczyźnie C_2 dane są dwie różne proste L_1, L_2 , przecinające się w punkcie c . Niech L_3 i L_4 będą dwusiecznymi kątów utworzonych przez proste L_1 i L_2 . Obliczyć wartość stosunku anharmonicznego $(L_1, L_2; L_3, L_4)$.

3. Niech L_1, L_2, L_3, L_4 będą różnymi prostymi płaszczyzny C_2 , przecinającymi się w punkcie c . Niech $\alpha_{i,j}$ będzie kątem, o który prostą L_i należy obrócić w płaszczyźnie (zorientowanej) C_2 , by przyjęła położenie L_j . Okazać, że

$$(L_1, L_2; L_3, L_4) = \frac{\sin \alpha_{1,2} \cdot \sin \alpha_{3,4}}{\sin \alpha_{2,3} \cdot \sin \alpha_{1,4}}.$$

95^z. Czwórki harmoniczne i czworobok zupełny. Czwórka punktów a, b, p, q , leżących na jednej prostej (i podobnie czwórka prostych należących do jednego pęku), nazywa się *harmoniczną*, jeżeli stosunek anharmoniczny tych punktów (i podobnie: tych prostych) jest równy -1 .

Mówimy wówczas także, że punkty a, b, p, q są *harmonicznie sprzężone* lub że para p, q *dzieli harmonicznie parę* a, b .

Podobnie mówimy o harmonicznie sprzężonej czwórce prostych lub o harmonicznym dzieleniu jednej pary prostych przez drugą.

Ponieważ -1 jest różne od $0, 1$ i ∞ , więc w myśl Nr 92 wszystkie punkty (i podobnie wszystkie proste) czwórki harmonicznej są różne.

Z własności (4), (5) i (6) dwustosunku, ustalonych w Nr 93, wynika, że wraz z czwórką a, b, c, d harmoniczne są również czwórki, jakie otrzymamy, przedstawiając wyrazy w którejkolwiek z par a, b lub p, q , lub przedstawiając obie te pary, a ponadto, że dla trzech różnych punktów a, b, p zawsze istnieje dokładnie jeden punkt q taki, iż czwórka a, b, p, q jest harmoniczna.

Taki punkt q nazywamy *harmonicznie sprzężonym z p względem pary a, b* .

W szczególności punktem *harmonicznie sprzężonym z punktem niewłaściwym p względem pary punktów właściwych a i b* jest środek q odcinka ab .

Istotnie, jeśli:

$$a = \{1, a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad b = \{1, b_1, b_2, \dots, b_n\}, \quad p = \{0, b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n\},$$

$$\text{oraz } q = \left\{1, \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right\}, \text{ to } (a, b; p, q) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot (-1)} = -1.$$

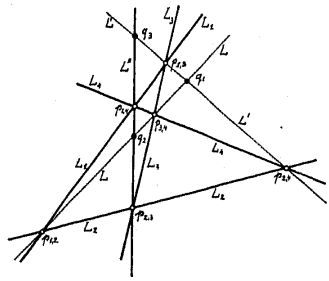
Innym przykładem czwórki harmonicznej jest czwórka punktów prostej C_1 postaci $(x), (-x), (1)$ i (x^2) , gdzie $0 \neq x \neq 1$. Istotnie, korzystając ze wzoru (3), znajdujemy

$$(7) \quad ((x), (-x); (1), (x^2)) = \frac{(x-1) \cdot (-x-x^2)}{(x-x^2) \cdot (-x-1)} = -1.$$

Wobec niezmienniczości dwustosunku względem przekształceń liniowych, czwórki harmoniczne przechodzą przy tych przekształceniach na

czwórki harmoniczne. Okażemy więcej, mianowicie że czwórki harmoniczne zachowują się niezmiennie względem dowolnych przekształceń rzutowych.

W tym celu wprowadzimy pojęcie tzw. *czworoboku zupełnego* (rys. 65), przez co rozumiemy figurę leżącą w płaszczyźnie rzutowej i utworzoną przez cztery proste, zwane *bokami* czworoboku, z których żadne trzy nie należą do jednego pęku.



Rys. 65.

Proste te przecinają się parami w sześciu punktach, zwanych *wierzchołkami* czworoboku.

Każdy z boków czworoboku przechodzi przez trzy jego wierzchołki.

Wierzchołki te wyznaczają poza tym trzy proste, zwane *przekątnymi* czworoboku.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie. Każde dwa wierzchołki czworoboku, leżące na jednej jego przekątnej, i dwa punkty przecięcia tej przekątnej przez pozostałe przekątne dzielą się harmonicznie.

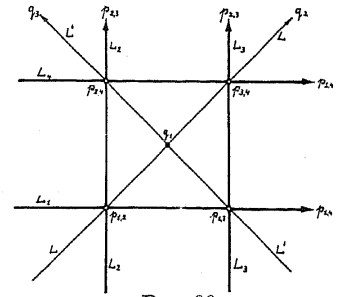
Dowód. Niech L_1, L_2, L_3, L_4 będą bokami czworoboku, a $p_{i,j}$ wierzchołkiem, który jest punktem przecięcia prostych L_i i L_j . Przekątnymi są: prosta L łącząca $p_{1,2}$ i $p_{3,4}$, prosta L' łącząca $p_{1,3}$ i $p_{2,4}$ oraz prosta L'' łącząca $p_{2,3}$ i $p_{1,4}$. Idzie o okazanie, że np. para punktów $p_{1,2}, p_{3,4}$ dzieli harmonicznie parę punktów q_1, q_2 , gdzie q_1 jest punktem przecięcia L i L' , a q_2 — punktem przecięcia L i L'' .

Ponieważ zarówno pojęcie czworoboku zupełnego, jak i pojęcia jego wierzchołków i przekątnych mają oczywiście charakter rzutowy, zaś wartość stosunku anharmonicznego jest niezmiennikiem przekształceń liniowych, możemy bez uszczerbku dla dowodu poddać uprzednio płaszczyznę P_2 dowolnemu przekształceniu liniowemu.

Stosując twierdzenie z Nr 89 możemy znaleźć przekształcenie liniowe, przy którym punkty $p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,4}, p_{3,4}$ (z których żadne trzy nie są współliniowe, gdyż żadne trzy spośród prostych L_1, L_2, L_3, L_4 nie należą do jednego pęku) przejdą odpowiednio na punkty $\{1, 0, 0\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 1\}$. Możemy więc od razu założyć, że

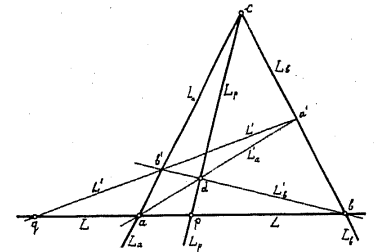
$$p_{1,2} = \{1, 0, 0\}, \quad p_{1,3} = \{1, 1, 0\}, \quad p_{2,4} = \{1, 0, 1\}, \quad p_{3,4} = \{1, 1, 1\}.$$

Punkty te są wierzchołkami kwadratu (rys. 66), punkt q_1 środkiem odcinka $p_{1,2} p_{3,4}$, zaś punkt q_2 — punktem niewłaściwym przekątnej L . Okazaliśmy jednak uprzednio, że taka czwórka $p_{1,2}, p_{3,4}, q_1, q_2$ jest harmoniczna. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.



Rys. 66.

Udowodnione twierdzenie pozwala przy użyciu samego tylko liniału znaleźć dla trzech danych (różnych) punktów a, b, p prostej L punkt q harmonicznie sprzężony z p względem pary a, b . W tym celu punkt c , dowolnie wybrany poza prostą L , łączymy prostymi L_a, L_b, L_p z punktami a, b, p (rys. 67). Bierzemy dalej na prostej L_p dowolny punkt d , różny od p i c , i łączymy go prostymi L'_a i L'_b z punktami a i b . Proste L'_a i L'_b przetną L_b i L_a odpowiednio w punktach a' i b' . Prosta L' łącząca a' i b' przetnie L w szukanym punkcie q , gdyż z konstrukcji wynika, że proste L_a, L_b, L'_a, L'_b tworzą czworobok zupełny, którego dwa wierzchołki a i b leżą na prostej L , będącej przekątną, zaś pozostałymi przekątnymi są proste L_p i L' , przecinające L odpowiednio w punktach p i q .



Rys. 67.

Niech teraz f będzie przekształceniem rzutowym prostej L CP_2 na jakąkolwiek prostą $\bar{L}$, leżącą w jakiegokolwiek przestrzeni rzutowej P_n (gdzie $n \geq 2$). W myśl definicji przekształcenia rzutowego, podanej w Nr 82, istnieje wówczas kolineacja φ , przekształcająca P_2 na podzbiór P_n tak, że $f(x) = \varphi(x)$ dla każdego $x \in L$. Przy przekształceniu φ płaszczyzna P_2 przejdzie na pewną płaszczyznę $\bar{P} \subset P_n$, przy czym wszystkie proste, użyte w podanej konstrukcji punktu q , harmonicznie sprzężonego z p względem pary punktów a i b , przejdą na proste leżące w płaszczyźnie $\bar{P}$. W szczególności więc proste $\varphi(L_a), \varphi(L_b), \varphi(L'_a), \varphi(L'_b)$ tworzyć będą w $\bar{P}$ czworobok zupełny, którego przekątną jest prosta $\varphi(L)$, przechodząca przez wierzchołki $f(a)$ i $f(b)$ i przecięta przez dwie pozostałe przekątne w punktach $f(p)$ i $f(q)$. Wynika stąd, że czwórka punktów $f(a), f(b), f(p), f(q)$ jest harmoniczna. Możemy zatem wypowiedzieć następujący

Wniosek. Czwórki harmoniczne są niezmiennikami przekształceń rzutowych.

ĆWICZENIA. 1. Na prostej L dane są dwie pary punktów a, b i c, d , przy czym $a \neq b$ i $c \neq d$. Zbadać, kiedy istnieje para punktów p, q , dzieląca harmonicznie zarówno parę a, b jak i parę c, d .

2. Na prostej L dane są trzy różne punkty właściwe a, b, c takie, że

$$\varrho(a, b) = \varrho(b, c) = \frac{1}{2} \cdot \varrho(a, c).$$

Opierając się na tym, że punkt niewłaściwy prostej L jest harmonicznie sprzężony z b względem pary a, c oraz na ostatnim twierdzeniu, podać z pomocą samego liniału konstrukcję prostej równoległej do L i przechodzącej przez dany punkt płaszczyzny.

96. Przekształcenia rzutowe prostej a przekształcenia liniowe. Podstawowe znaczenie czwórek harmonicznych dla geometrii rzutowej przestrzeni P_1 pochodzi stąd, że niezmienniczość ich jest dla przekształceń rzutowych charakterystyczna. Zachodzi mianowicie następujące

Twierdzenie (Darboux i von Staudta). Każde przekształcenie φ prostej rzutowej P_1 na jej podzbiór, przy którym każda czwórka harmoniczna przechodzi na czwórkę harmoniczną, jest liniowe.

Dowód. Ponieważ czwórki harmoniczne składają się z punktów różnych, więc przekształcenie φ musi być wzajemnie jednoznaczne. Niech

$$v_0 = \{1, 0\}, \quad v_1 = \{0, 1\}, \quad v_2 = \{1, 1\}.$$

Punkty $\varphi(v_0)$, $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ są wszystkie różne, a więc w myśl twierdzenia z Nr 89 istnieje takie przekształcenie liniowe ψ prostej P_1 na siebie, że $\psi\varphi(v_i) = v_i$ dla $i=0, 1, 2$. Funkcja $f(p) = \psi\varphi(p)$ przekształca wówczas prostą P_1 na jej podzbiór w taki sposób, że czwórki harmoniczne przechodzą na czwórki harmoniczne oraz że $f(v_i) = v_i$ dla $i=0, 1, 2$. Twierdzenie będzie więc udowodnione, gdy okażemy, że przekształcenie f o tych własnościach musi być tożsamością, tj. że spełnia warunek $f(p) = p$ dla każdego $p \in P_1$.

Ponieważ przekształcenie wzajemnie jednoznaczne f przekształca punkt niewłaściwy v_1 prostej P_1 na siebie, więc każdy punkt właściwy $\{1, x\} \in P_1$ przejdzie przy przekształceniu f na punkt właściwy $\{1, \bar{x}\}$. Pozostaje do okazania, że funkcja $g(x) = \bar{x}$ zmiennej rzeczywistej x jest tożsamością, czyli że $g(x) \equiv x$. Otóż wobec $f(v_0) = v_0$ i $f(v_2) = v_2$ mamy:

$$(8) \quad g(0) = 0 \text{ oraz } g(1) = 1.$$

Dla dowolnych liczb $x \neq y$ (skończonych) punkty

$$\{1, x\}, \quad \{1, y\}, \quad \left\{1, \frac{x+y}{2}\right\}, \quad v_1$$

tworzą czwórkę harmoniczną, skąd wynika, że czwórkę harmoniczną tworzą też punkty

$$\{1, g(x)\}, \quad \{1, g(y)\}, \quad \left\{1, g\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}, \quad v_1,$$

a więc że

$$(9) \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} [g(x) + g(y)]$$

dla wszelkiej pary liczb (skończonych) x, y (dla $x=y$ jest to tożsamość).

W szczególności dla $y=0$ wynika stąd i z zależności (8), że $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} g(x)$ przy wszelkim rzeczywistym x . A więc również $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} g(x+y)$, co łącznie z (9) daje

$$(10) \quad g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \text{dla wszelkich rzeczywistych } x \text{ i } y.$$

Podstawiając do (10) $y=-x$, wnioskujemy stąd i z zależności (8), że

$$(11) \quad g(-x) = -g(x) \quad \text{dla wszelkiego rzeczywistego } x.$$

Ponadto, drogą bezpośrednio widocznej indukcji wynika z (10), że dla każdego naturalnego n i rzeczywistego x zachodzi zależność $g(n \cdot x) = n \cdot g(x)$, skąd dalej $g\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} g(x)$, a więc dla dowolnych naturalnych

m i n oraz rzeczywistego x mamy $g\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = \frac{m}{n} \cdot g(x)$. Zależność ta łącz-

nie ze wzorem (11) prowadzi do wniosku, że przy wszelkim wymiernym w oraz rzeczywistym x mamy $g(w \cdot x) = w \cdot g(x)$, co w szczególności przy podstawieniu $x=1$ i uwzględnieniu (8) daje

$$(12) \quad g(w) = w \quad \text{dla każdego wymiernego } w.$$

Weźmy teraz pod uwagę dowolną liczbę x różną od 0 i 1 oraz punkty $(x), (-x), (1), (x^2)$. Na mocy wzoru (7) wyprowadzonego w Nr 95 tworzą one czwórkę harmoniczną, skąd wobec zależności (8) i (11) wnioskujemy, że $((g(x)), (-g(x)); (1), (g(x^2))) = -1$, skąd na mocy wzoru (3) z Nr 93:

$$[g(x) - 1] \cdot [-g(x) - g(x^2)] = -[g(x) - g(x^2)] \cdot [-g(x) - 1],$$

czyli $g(x^2) = [g(x)]^2$. Wynika stąd, że funkcja $g(x)$ przybiera dla argumentów dodatnich wartości dodatnie, a więc — wobec zależności (10) — jest rosnąca. Jeżeli teraz x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to dla każdej pary liczb wymiernych u i v takich, że $u < x < v$, jest wobec (12)

$$u = g(u) < g(x) < g(v) = v,$$

skąd wynika od razu, że $g(x) = x$, co było do okazania.

Z udowodnionego twierdzenia wynika następujący

Wniosek 1. *W zakresie przekształceń prostej P_1 na siebie przekształcenia liniowe są identyczne z rzutowymi.*

Istotnie, w końcu Nr 84 okazaliśmy, że przekształcenia liniowe prostej P_1 na siebie są rzutowe. Z drugiej strony, wiemy z wniosku z Nr 95, że każde przekształcenie rzutowe prostej P_1 na siebie przekształca czwórki harmoniczne na czwórki harmoniczne, a więc na mocy twierdzenia Darboux i von Staudta jest liniowe.

Wniosek 2. *Jeżeli f jest przekształceniem prostej P_1 na jej podzbiór, przy którym czwórki harmoniczne przechodzą zawsze na czwórki harmoniczne i istnieją trzy różne punkty p_1, p_2, p_3 takie, że $f(p_i) = p_i$ dla $i = 1, 2, 3$, to $f(p) = p$ dla każdego $p \in P_1$.*

Istotnie, wobec ostatniego twierdzenia i wniosku 1, przekształcenie f jest liniowe, a jak wiemy z twierdzenia z Nr 89 — przekształcenie liniowe przestrzeni P_1 na siebie jest jednoznacznie wyznaczone przez swe wartości w trzech różnych punktach.

Niech teraz f będzie przekształceniem rzutowym czwórki punktów p_1, p_2, p_3, p_4 , leżących na pewnej prostej rzutowej L . W myśl Nr 82 możemy założyć, że f jest kolineacją określoną w pewnej przestrzeni P_n , gdzie $n > 1$, przy czym $LC P_n$ i $f(P_n) = L' C P_m$, gdzie $m \geq n$. Na mocy twierdzenia z Nr 85, istnieje takie przekształcenie liniowe φ przestrzeni P_n na siebie, że $\varphi(L) = P_{n,1}$, jak również takie przekształcenie liniowe ψ przestrzeni P_m na siebie, że $\psi(L') = P_{m,1}$. Wobec Nr 92 mamy więc:

$$(13) \quad (p_1, p_2; p_3, p_4) = (\varphi(p_1), \varphi(p_2); \varphi(p_3), \varphi(p_4)),$$

$$(14) \quad (f(p_1), f(p_2); f(p_3), f(p_4)) = (\psi f(p_1), \psi f(p_2); \psi f(p_3), \psi f(p_4)).$$

Oznaczmy przez φ_{-1} przekształcenie odwrotne względem φ i przyjmijmy

$$g(x) = \psi f \varphi_{-1}(x) \quad \text{dla każdego } x \in P_n.$$

Przekształcenie g jest kolineacją przekształcającą przestrzeń P_n na podzbiór przestrzeni P_m , przy czym

$$g[f(p_i)] = \psi[f(p_i)] \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4.$$

Ponieważ punkty $\varphi(p_i)$ leżą na prostej $P_{n,1}$ zaś punkty $\psi[f(p_i)]$ na prostej $P_{m,1}$, więc $g(P_{n,1}) = P_{m,1}$. Wobec wniosku z Nr 95, przy przek-

kształceniu g czwórki harmoniczne przechodzą na czwórki harmoniczne, skąd z uwagi na ostatnie twierdzenie wnioskujemy, że przekształcenie prostej $P_{n,1}$ (której punkty, podobnie jak i punkty prostej $P_{m,1}$ mające postać $\{x_0, x_1, 0, \dots, 0\}$, możemy identyfikować z punktami $\{x_0, x_1\}$ prostej P_1) na prostą $P_{m,1}$ jest liniowe. Stąd wynika (z uwagi na Nr 92) zależność:

$$(\varphi(p_1), \varphi(p_2); \varphi(p_3), \varphi(p_4)) = (\psi f(p_1), \psi f(p_2); \psi f(p_3), \psi f(p_4)),$$

co łącznie z (13) i (14) daje zależność:

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = (f(p_1), f(p_2); f(p_3), f(p_4)),$$

którą możemy wypowiedzieć w postaci następującego wniosku:

Wniosek 3. *Stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem rzutowym.*

ĆWICZENIA. 1. Przekształcenie rzutowe f prostej P_1 na siebie nazywa się *inwolucją*, jeżeli $f[f(x)] = x$ dla każdego $x \in P_1$.

Wyznaczyć wszystkie involucje prostej P_1 , przekształcające dany punkt a na dany punkt a' . Czy istnieje wśród nich taka, która ponadto przekształca dowolnie dany punkt $b \neq a$ w dowolnie dany punkt $b' \neq a'$?

2. Okazać, że jeżeli f jest involucją (por. ćwiczenie poprzednie) przekształcającą prostą P_1 na siebie, przy czym istnieją dwa punkty a i b takie, że $f(a) = a$ i $f(b) = b$, to dla każdego $a \neq x \neq b$ jest $(a, b; x, f(x)) = -1$.

97. Przekształcenia rzutowe przestrzeni P_n a przekształcenia liniowe. Okazaliśmy w Nr 96, że klasa przekształceń rzutowych przestrzeni P_1 na siebie nie różni się od klasy przekształceń liniowych. Uogólnimy obecnie ten rezultat na przestrzenie rzutowe o dowolnym wymiarze, wyrażając analityczną postać przekształcenia rzutowego przy pomocy twierdzenia następującego:

Twierdzenie. *Klasa przekształceń rzutowych przestrzeni P_n na siebie jest identyczna z klasą przekształceń liniowych przestrzeni P_n na siebie.*

Dowód. Ponieważ w myśl twierdzenia z Nr 84 każde przekształcenie liniowe przestrzeni P_n na siebie jest rzutowe, więc pozostaje do okazania, że każde przekształcenie rzutowe φ przestrzeni P_n na siebie jest liniowe. Oznaczając podobnie jak w Nr 89 przez v_i^n dla $i = 0, 1, \dots, n$ punkt $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mający jedynie spóhrzrzną x_i różną od zera oraz przyjmując $v_{n+1}^n = \{1, 1, \dots, 1\}$, otrzymamy układ $n+2$ punktów, z których żadne $n+1$ nie są liniowo zależne. Ponieważ liniowa niezależność punktów jest niezmiennikiem rzutowym (ob. Nr 87), więc również w układzie punktów $\varphi(v_0^n), \varphi(v_1^n), \dots, \varphi(v_{n+1}^n)$ żadne $n+1$ nie są liniowo zależne. Wobec twierdzenia z Nr 89 wynika stąd, że istnieje takie przekształcenie liniowe ψ przestrzeni P_n na siebie, że $\psi \varphi(v_i^n) = v_i^n$ dla $i = 0, 1, \dots, (n+1)$.

Przekształcenie $f(x)=\varphi\varphi(x)$ jest więc kolineacją przekształcającą P_n na siebie i spełniającą warunki

$$(15) \quad f(v_i^n)=v_i^n \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, (n+1).$$

Pozostaje dowieść, że każde przekształcenie rzutowe f przestrzeni P_n ($n=1, 2, \dots$) na siebie, spełniające warunek (15), jest tożsamościowe, czyli że $f(x)=x$ dla każdego $x \in P_n$, przez to bowiem będzie okazane, że przekształcenie φ jest odwrotne względem przekształcenia liniowego φ , a więc również liniowe.

Z uwagi na wniosek 2 z Nr 96 jest tak w przypadku $n=1$. Wystarczy więc przeprowadzić dowód dla $n>1$ przy założeniu, że jest to prawdziwe dla przestrzeni rzutowych o wymiarze mniejszym od n . Wobec $P(v_0^n, v_1^n, \dots, v_{n-1}^n)=P_{n,n-1}$ oraz zależności (1) z Nr 86 funkcja f przekształca $P_{n,n-1}$ na siebie. Ponadto prosta L łącząca punkty v_n^n i v_{n+1}^n przechodzi na siebie. Prosta ta przecina $P_{n,n-1}$ w punkcie $\bar{v}_n^n=\{1, 1, \dots, 1, 0\}$, skąd wynika, że $f(\bar{v}_n^n)=\bar{v}_n^n$. Punkty przestrzeni $P_{n,n-1}$ różnią się od punktów przestrzeni P_{n-1} jedynie dopisaniem współrzędnej 0 na ostatnim miejscu, przy czym punkty $v_0^n, v_1^n, \dots, v_{n-1}^n, \bar{v}_n^n$ odpowiadają punktom $v_0^{n-1}, v_1^{n-1}, \dots, v_{n-1}^{n-1}$. Stąd i z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że

$$f(x)=x \quad \text{dla każdego } x \in P_{n,n-1}.$$

Ponieważ punkty $v_n^n, v_{n+1}^n, \bar{v}_n^n$ prostej L są różne i przechodzą przy przekształceniu rzutowym f na siebie, więc wobec wniosku 2 z Nr 96 otrzymujemy stąd zależność:

$$(16) \quad f(x)=x \quad \text{dla każdego } x \in L.$$

Dla każdego punktu właściwego $s=\{1, s_1, \dots, s_n\} \in P_n-L$ oznaczmy przez $L(s)$ prostą przechodzącą przez s i v_n^n , a więc będącą zbiorem punktów postaci

$$p(\lambda, \mu)=\{\lambda, \lambda \cdot s_1, \lambda \cdot s_2, \dots, \lambda \cdot s_{n-1}, \lambda \cdot s_n + \mu\},$$

gdzie λ i μ nie znikają jednocześnie. Oznaczmy dalej przez $H(s)$ hiperpłaszczyznę $(n-1)$ -wymiarową o równaniu

$$s_n \cdot x_0 - x_n = 0.$$

Dla punktu przecięcia $L(s)$ z $H(s)$ mamy $s_n \cdot \lambda - \lambda \cdot s_n - \mu = 0$, skąd $\mu=0$, a więc jedynym punktem wspólnym $L(s)$ i $H(s)$ jest punkt s .

Prosta $L(s)$ przechodzi przez punkt niewłaściwy $v_n^n \in L$ i przez punkt $\{1, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, 0\} \in P_{n,n-1}$. Ponieważ punkty te przekształcają się na siebie, więc

$$(17) \quad f(L(s))=L(s).$$

Hiperpłaszczyzna $H(s)$ przechodzi przez punkty niewłaściwe $v_1^n, v_2^n, \dots, v_{n-1}^n$ należące do $P_{n,n-1}$ oraz przez punkt $v(s)=\{1, 1, \dots, 1, s_n\} \in L$. Ponieważ punkt ten jest właściwy, więc punkty $v_1^n, v_2^n, \dots, v_{n-1}^n, v(s)$ są liniowo niezależne. Stąd na mocy wniosku 8 z Nr 87 otrzymujemy:

$$H(s)=P(v_1^n, v_2^n, \dots, v_{n-1}^n, v(s)).$$

Ale punkty $v_1^n, v_2^n, \dots, v_{n-1}^n$ jako należące do $P_{n,n-1}$, oraz punkt $v(s)$ jako należący do L , przechodzą przy przekształceniu f na siebie. Stąd i z uwagi na zależność (1) z Nr 86 otrzymujemy

$$(18) \quad f(H(s))=H(s).$$

Ponieważ jak okazaliśmy, jedynym punktem przecięcia prostej $L(s)$ i hiperpłaszczyzny $H(s)$ jest s , więc z (17) i (18) wynika, że $f(s)=s$.

W ten sposób dowiedliśmy, że każdy punkt właściwy s przestrzeni P_n przechodzi przy przekształceniu f na samego siebie (jeśli $s \in P_{n,n-1}+L$, to wynika to z (16)). Biorąc dalej pod uwagę, że f przekształca każdą prostą na siebie wzajemnie jednoznacznie, wnioskujemy stąd, że i każdy punkt niewłaściwy musi przy przekształceniu f przejść na samego siebie. Tym samym dowód twierdzenia został zakończony.

Wniosek. W zakresie przekształceń przestrzeni kartezjańskich o wymiarze większym od jedności na siebie klasa przekształceń afinicznych jest identyczna z klasą kolineacji.

Już w Nr 59 okazaliśmy, że każde przekształcenie afiniczne jest kolineacją. Z drugiej strony, niech f będzie kolineacją przekształcającą przestrzeń C_n na siebie. Przy przekształceniu f zbiory liniowe przechodzą zatem na zbiory liniowe, skąd wynika natychmiast, że układy punktów liniowo niezależne przechodzą na układy liniowo niezależne. Wynika stąd dalej, że proste równoległe, tj. przecinające się w punkcie niewłaściwym, przechodzą na równoległe, zaś nierównoległe — na nierównoległe. Jeżeli więc punktowi niewłaściwemu każdej prostej $L \subset C_n$ przyporządkujemy punkt niewłaściwy prostej $f(L) \subset C_n$, to otrzymamy kolineację przekształcającą całą przestrzeń P_n na siebie, a więc w myśl ostatniego twierdzenia, pewne przekształcenie liniowe, przy którym punkty niewłaściwe przechodzą na punkty niewłaściwe. W Nr 84 okazaliśmy, że przekształcenie takie jest afiniczne.

ĆWICZENIA. 1. W płaszczyźnie P_2 dane są dwa układy prostych:

$$L_1, L_2, L_3, L_4 \quad \text{ i } \quad L'_1, L'_2, L'_3, L'_4,$$

przy czym żadne trzy spośród prostych L_i ani żadne trzy spośród prostych L'_i nie należą do jednego pęku. Okazać, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe płaszczyzny P_2 na siebie, przy którym L_i przechodzi na L'_i dla $i=1, 2, 3, 4$.

2. W przestrzeni P_3 dane są cztery proste:

$$\begin{aligned} L_1 \text{ łącząca } \{1, 0, 0, 0\} & \text{ z } \{1, 1, 0, 0\}, \\ L_2 \text{ łącząca } \{1, 0, 1, 1\} & \text{ z } \{0, 0, 1, 0\}, \\ L_3 \text{ łącząca } \{1, 1, 1, 0\} & \text{ z } \{1, 1, 1, 1\}, \\ L_4 \text{ łącząca } \{0, 1, 1, 0\} & \text{ z } \{0, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Czy istnieje przekształcenie rzutowe przestrzeni P_3 na siebie, przy którym L_1 przechodzi na L_2 , L_2 na L_3 i L_3 na L_4 ?

98. Przekształcenia perspektywiczne. Orientowalność i nieorientowalność. Związek między pojęciem przekształcenia rzutowego a operacją rzutowania (znaną z geometrii elementarnej) wynika z rozważania następującego:

Niech H i H' będą dwiema $(n-1)$ -wymiarowymi hiperpłaszczyznami w przestrzeni P_n , zaś $c = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ niech będzie punktem, który nie leży na żadnej z nich.

Przyporządkowując każdemu punktowi $x \in H$ punkt x' będący rzutem punktu x ze środka c na H , czyli punktem przecięcia H' przez prostą łączącą punkty c i x , otrzymamy tzw. *przekształcenie perspektywiczne* hiperpłaszczyzny H na H' .

Jest ono oczywiście kolineacją. W przypadku, gdy $n-1 > 1$, czyli gdy $n > 2$, wynika stąd, że jest to przekształcenie rzutowe. Tak jest jednak również i w przypadku $n=2$, wówczas bowiem H i H' są prostymi, przy czym czwórkom harmonicznym, leżącym na H , odpowiadają przy omawianym przekształceniu czwórki harmoniczne, jak to wynika natychmiast z twierdzenia Pappusa (z Nr 94). A więc rzutowość przekształcenia perspektywicznego jest w tym przypadku wnioskiem z twierdzenia Darboux i von Staudta z Nr 96.

Zachodzi pytanie, czy podobnie jak dla przekształceń afinicznych również i w zakresie ogólnych przekształceń rzutowych można mówić o przekształceniach zachowujących lub zmieniających orientację przestrzeni. W Nr 84 okazaliśmy, że przekształcenie afiniczne daje się wyrazić przez wzory postaci:

$$\bar{x}_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n,$$

gdzie spełnione są warunki $a_{0,0}=1$ oraz $a_{i,0}=0$ dla $i=1, 2, \dots, n$. Wyznacznik $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) jest w tym przypadku równy wyznacznikowi $|a_{i,j}|$ ($i, j=1, 2, \dots, n$), który nazwaliśmy w Nr 57 wyznacznikiem przekształcenia afinicznego i którego znak określał, czy przekształcenie zachowuje orientację, czy ją zmienia. Nasuwa się przypuszczenie, że podobnie wśród ogólnych przekształceń rzutowych wyodrębnić można dwie klasy, zależnie od tego czy wartość wyznacznika $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) jest dodatnia, czy ujemna.

Okazuje się jednak, że wyodrębnienie tych klas możliwe jest *tylko wówczas, gdy wymiar n przestrzeni jest liczbą nieparzystą*. Istotnie, w tym przypadku znak wyznacznika $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) stanowi własność danego przekształcenia rzutowego, gdyż zastąpienie współczynników $a_{i,j}$ przez liczby proporcjonalne (co, jak wiemy z Nr 84, nie powoduje zmiany samego przekształcenia) nie wpływa na znak wyznacznika współczynników, wprowadzony czynnik wystąpi bowiem przy wyznaczniku w potęgę $n+1$, a więc w potęgę parzystą. Natomiast w przypadku, gdy wymiar n przestrzeni jest liczbą parzystą, znak wyznacznika $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) nie jest przez przekształcenie określony, gdyż pomnożenie wszystkich współczynników przez stałą ujemną nie zmieni wprowadzie przekształcenia, ale spowoduje zmianę znaku jego wyznacznika na przeciwny.

Tę różnicę we własnościach przestrzeni rzutowych o wymiarze parzystym i nieparzystym ujmujemy mówiąc, że *przestrzenie rzutowe o wymiarze nieparzystym są orientowalne, natomiast przestrzenie rzutowe o wymiarze parzystym nie są orientowalne*.

Tak np. prosta rzutowa P_1 jest orientowalna w przeciwieństwie do płaszczyzny P_2 . Nieorientowalność płaszczyzny P_2 jest w ścisłym związku z jej jednostronnością, stwierdzoną w Nr 81. Bardziej ogólne ujęcie tych pojęć należy do topologii.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że dla każdego przekształcenia rzutowego f płaszczyzny P_2 na siebie istnieje punkt $p \in P_2$ taki, że $f(p)=p$.

2. Dowieść, że dla każdego przekształcenia rzutowego f przestrzeni P_{2n} na siebie istnieje punkt p taki, że $f(p)=p$.

Natomiast dla każdego naturalnego n istnieje przekształcenie rzutowe f przestrzeni P_{2n-1} na siebie spełniające warunek $f(p) \neq p$ dla każdego $p \in P_{2n-1}$.

3. Czy każde przekształcenie rzutowe 3-wymiarowej hiperpłaszczyzny $P_{4,3}$ jest superpozycją dwóch przekształceń perspektywicznych?

99. Spółrzedne rzutowe. Podobnie jak w Nr 54 interpretowaliśmy izometrię również jako przejście do innego układu spółrzednych prostokątnych, zaś w Nr 60 przekształcenie afiniczne jako przejście do układu spółrzednych ukośnokątnych, tak i przekształcenie rzutowe możemy interpretować jako wprowadzenie nowych — ogólniejszych od poprzednich — spółrzednych, tzw. *spółrzednych rzutowych*. Niech mianowicie

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$$

będzie przekształceniem rzutowym przestrzeni P_n na siebie, określonym przez wzory

$$(19) \quad \bar{x}_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n.$$

Założenie, że przekształcenie f określone przez wzory (18) jest rzutowe, wyraża się przez nieznikanie wyznacznika $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$).

Wprowadźmy definicję następującą:

Definicja². Liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$ przyporządkowane każdemu punktowi $\bar{p}=\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ przez wzory (18), gdzie $|a_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, \dots, n$) $\neq 0$, nazywają się *spółrzędnymi rzutowymi punktu $\bar{p}$* .

Spółrzędne rzutowe wyrazić możemy przez zwykłe współrzędne jednorodne $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ punktu $\bar{p}$, rozwiązując równania (19) względem $x_0, x_1, \dots, x_n$. Otrzymamy wzory postaci:

$$x_i = \bar{a}_{i,0} \cdot \bar{x}_0 + \bar{a}_{i,1} \cdot \bar{x}_1 + \dots + \bar{a}_{i,n} \cdot \bar{x}_n, \text{ gdzie } i=0, 1, \dots, n.$$

Wynika z nich, że — podobnie jak współrzędne $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ — nowe współrzędne $x_0, x_1, \dots, x_n$ są określone jedynie z dokładnością do czynnika różnego od zera, czyli że są jednorodne.

Założmy w szczególności, że dla każdego i przynajmniej jeden ze współczynników $\bar{a}_{i,1}, \bar{a}_{i,2}, \dots, \bar{a}_{i,n}$ jest różny od zera. Równanie

$$\bar{a}_{i,0} + \bar{a}_{i,1} \cdot y_1 + \bar{a}_{i,2} \cdot y_2 + \dots + \bar{a}_{i,n} \cdot y_n = 0$$

określa wówczas w przestrzeni C_n pewną $(n-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę H_i , tzw. *hiperpłaszczyznę podstawową* nowego układu współrzędnych.

Jeśli punkt $\bar{p}=\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ jest właściwy, to możemy przyjąć $\bar{x}_0=1$, a więc

$$x_i = \bar{a}_{i,0} + \bar{a}_{i,1} \cdot \bar{x}_1 + \dots + \bar{a}_{i,n} \cdot \bar{x}_n \text{ dla } i=1, 2, \dots, n.$$

W myśl Nr 27 wyrażenie po prawej stronie możemy napisać w postaci $\lambda_i \cdot \varrho_i(\bar{p})$, gdzie $\varrho_i(\bar{p})$ oznacza zaopatrzoną odpowiednim znakiem (zależnym od tego, w której z półprzestrzeni wyznaczonych w C_n przez H_i leży punkt $\bar{p}$) odległość punktu $\bar{p}$ od hiperpłaszczyzny H_i , zaś współczynnik λ_i zależy na ogół od i , lecz nie zależy od położenia punktu $\bar{p}$.

Uwaga ta rzuca pewne światło na sens intuicyjny współrzędnych rzutowych.

W szczególności w przypadku płaszczyzny mamy trzy *proste podstawowe* H_0, H_1, H_2 nie przechodzące przez jeden punkt (gdyż wyznacznik $|\bar{a}_{i,j}|$ ($i, j=0, 1, 2$) jest różny od zera), a więc tworzące trójkąt. Spółrzędne rzutowe są więc w tym przypadku liczbami proporcjonalnymi (z pominięciem znaku) do odległości punktu p' od prostych tworzących ten trójkąt.

Z tego powodu współrzędne rzutowe nazywa się czasem w tym przypadku *spółrzędnymi trójkątnymi*.

Wracając do przypadku ogólnego widzimy, że wprowadzenie współrzędnych rzutowych jest jedynie inną interpretacją wzorów określających

przekształcenie rzutowe. Z tego powodu geometria rzutowa, będąca teorią niezmienników przekształceń rzutowych, może być również ujęta jako teoria tych własności figur, które wyrażają się jednakowo we wszystkich układach współrzędnych rzutowych. Wynika stąd, że w zakresie badań geometrii rzutowej ogólne współrzędne rzutowe są całkowicie równouprawnione z dotychczas używanymi współrzędnymi jednorodnymi, a często właściwy ich dobór znacznie upraszcza rachunki. Z tego właściwie już kilkakrotnie robiliśmy użytek (por. dowody twierdzeń w Nr 94 i 95), nie mówiąc wprawdzie o zmianie współrzędnych, lecz posługując się równoważnym mu pojęciem przekształcenia rzutowego przestrzeni, którego dokonywaliśmy na wstępie do dowodu.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć równanie prostej niewłaściwej płaszczyzny P_2 w układzie współrzędnych rzutowych, wiedząc, że w układzie tym punkt $\{1, 0, 0\}$ ma jako nowe współrzędne liczby 1, 1, 1, zaś prostymi podstawowymi są boki trójkąta o wierzchołkach $\{1, 1, 0\}$, $\{1, 0, 1\}$, $\{1, -1, -1\}$.

2. Znaleźć współrzędne rzutowe punktu $\{1, 1, 1, 1\}$ w układzie współrzędnych, którego płaszczyznami podstawowymi są cztery płaszczyzny zawierające cztery ściany sympleksu o wierzchołkach

$$\{1, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 1, 0\}, \{1, 0, 0, 1\}, \{1, -1, -1, -1\},$$

jeśli poza tym założymy, że punkt $\{1, 0, 0, 0\}$ ma w nowym układzie jako współrzędne liczby 1, 2, 3, 4,

ROZDZIAŁ XII.

Twory algebraiczne w przestrzeniach rzutowych

100. Granica ciągu punktów przestrzeni P_n . O ciągu punktów

$$p^r = \{x_0^r, x_1^r, \dots, x_n^r\} \in P_n, \text{ gdzie } r=1, 2, \dots$$

mówimy, że jest *zbieżny do punktu* $p^0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\} \in P_n$ lub że punkty p^r *dążą do* p^0 , jeżeli istnieje ciąg liczb $\lambda^r \neq 0$ taki, że dla każdego $i=0, 1, \dots, n$ ciąg liczb $\lambda^r \cdot x_i^r$ jest zbieżny do x_i^0 .

Punkt p^0 nazywa się wówczas *granicą ciągu* p^r . Piszemy to:

$$p^0 = \lim_{r \rightarrow \infty} p^r \text{ lub } p^r \rightarrow p^0.$$

Ciąg posiadający granicę nazywa się *zbieżny*.

Ciąg punktów $p^r \in P_n$ *ma co najwyżej jedną granicę*. Istotnie, gdyby prócz punktu p^0 granicą ciągu p^r był również punkt $q^0 = \{y_0^0, y_1^0, \dots, y_n^0\}$, to istniałby ciąg liczb $\mu^r \neq 0$ taki, że $\mu^r \cdot x_i^r \rightarrow y_i^0$ dla każdego $i=0, 1, \dots, n$. Wśród liczb y_i^0 co najmniej jedna, np. $y_{i_0}^0$, jest różna od zera. Wobec

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda^r \cdot x_{i_0}^r = x_{i_0}^0 \text{ i } \lim_{r \rightarrow \infty} \mu^r \cdot x_{i_0}^r = y_{i_0}^0 \neq 0$$

mamy $\frac{\lambda^r}{\mu^r} \rightarrow \frac{x_{i_0}^0}{y_{i_0}^0}$, skąd otrzymujemy

$$x_i^0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda^r \cdot x_i^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda^r}{\mu^r} \cdot \mu^r \cdot x_i^r = \frac{x_{i_0}^0}{y_{i_0}^0} \cdot y_i^0 \text{ dla każdego } i=0, 1, \dots, n,$$

co znaczy, że układy liczb $x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0$ i $y_0^0, y_1^0, \dots, y_n^0$ są proporcjonalne, czyli że $p^0 = q^0$.

Często użyteczny jest następujący warunek charakteryzujący granicę:

Aby ciąg punktów $p^r \in P_n$ *dążył do punktu* $p^0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\}$, *potrzeba i wystarcza, by punkty* p^r *dawały się przedstawić w postaci:*

$$p^r = \{x_0^r, x_1^r, \dots, x_n^r\}, \text{ gdzie } x_i^r \rightarrow x_i^0 \text{ dla } i=0, 1, \dots, n.$$

Jasne jest, że warunek jest dostateczny. Jest on też konieczny, jeżeli bowiem $p^r = \{\bar{x}_0^r, \bar{x}_1^r, \dots, \bar{x}_n^r\} \rightarrow p^0$, to istnieją liczby $\lambda^r \neq 0$ takie, że $\lambda^r \cdot \bar{x}_i^r \rightarrow x_i^0$. Oznaczając przez x_i^r liczbę $\lambda^r \cdot \bar{x}_i^r$, otrzymamy $p^r = \{x_0^r, x_1^r, \dots, x_n^r\}$, gdzie $x_i^r \rightarrow x_i^0$ dla $i=0, 1, \dots, n$.

Nie każdy ciąg jest zbieżny. Np. ciąg $p^r = \{1, (-1)^r, 0, \dots, 0\}$ nie ma granicy, a więc jest *rozbieżny*. Zauważmy jednak, że z *każdego ciągu punktów* p^r *przestrzeni* P_n *wyjąć można ciąg zbieżny*, czyli istnieje ciąg rosnący wskaźników $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j, \dots$ taki, że ciąg punktów $p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, \dots, p^{\nu_j}, \dots$ jest już zbieżny.

Istotnie, jeżeli $p^r = \{x_0^r, x_1^r, \dots, x_n^r\}$, to dzieląc wszystkie współrzędne punktu p^r przez tę z nich, której wartość bezwzględna jest największa, możemy doprowadzić punkt p^r do postaci, w której wszystkie współrzędne są co do wartości bezwzględnej nie większe od jedności, przy czym co najmniej jedna z nich jest równa jedności. Możemy więc od razu założyć, że współrzędne $x_0^r, x_1^r, \dots, x_n^r$ spełniają ten warunek dla $r=1, 2, \dots$. Co najmniej w jednym z ciągów $x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r, \dots$ występuje nieskończenie wiele jedynek. Nie zmniejszając więc ogólności, możemy założyć, że ciągiem takim jest ciąg x_0^r , czyli że istnieje ciąg rosnący wskaźników ν_j^0 taki, że $x_{\nu_j^0}^0 = 1$. Wówczas $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{\nu_j^0}^0 = x_0^0$, gdzie $x_0^0 = 1$.

Ciąg x_1^r jest ograniczony (gdyż wyrazy jego są co do wartości bezwzględnej nie większe od 1). A więc w myśl znanego twierdzenia Bolzano-Weierstrassa² możemy z ciągu ν_j^0 wyjąć ciąg rosnący ν_j^1 taki, że istnieje $\lim_{j \rightarrow \infty} x_1^{\nu_j^1} = x_1^0$. Następnie z ciągu ν_j^1 możemy wyjąć ciąg ν_j^2 taki, że istnieje $\lim_{j \rightarrow \infty} x_2^{\nu_j^2} = x_2^0$ itd. Jasne jest, że po n takich krokach dojdziemy do ciągu rosnącego wskaźników $\nu_j = \nu_j^{(n)}$ takiego, że istnieć będzie $\lim_{j \rightarrow \infty} x_i^{\nu_j} = x_i^0$ dla każdego $i=0, 1, \dots, n$. Ponieważ $x_0^0 = 1$, więc $\{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\}$ jest punktem przestrzeni P_n , będącym granicą ciągu wyjętego p^{ν_j} , którego istnienie właśnie mieliśmy udowodnić.

Tę możliwość wyjęcia ciągu zbieżnego z każdego ciągu punktów przestrzeni nazywamy *zwartością* tej przestrzeni. A więc *przestrzeń* P_n *jest zwarta*.

Zauważmy teraz, że jeżeli $p^r, p^0 \in C_n$, czyli jeżeli wyrazy ciągu zbieżnego p^r oraz jego granica p^0 są punktami właściwymi przestrzeni P_n , to wprowadzone w tym Nr pojęcie granicy pokrywa się z pojęciem granicy wprowadzonym w Nr 52. Istotnie, w tym przypadku możemy założyć, że $x_0^0 = x_0^0 = 1$. Jeżeli więc p jest granicą ciągu punktów w obecnie przyjętym sensie, to istnieje ciąg liczb $\lambda^r \neq 0$ taki, że $\lambda^r \cdot x_i^r \rightarrow x_i^0$ dla $i=0, 1, \dots, n$, skąd wynika w szczególności, przy podstawieniu $i=0$, zależność $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda^r = 1$. Stąd $\lim_{r \rightarrow \infty} x_i^r = x_i^0$, a więc punkty p^r dążą do p^0 również

¹ B. Bolzano, filozof i matematyk praski (1781—1848).

² K. Weierstrass, matematyk niemiecki (1815—1897).

w sensie przyjętym w przestrzeni C_n . Na odwrót, jeśli $p'' \rightarrow p^0$ w przestrzeni C_n , to $x_i'' \rightarrow x_i$ dla $i=1, 2, \dots, n$, a więc wystarczy przyjąć $\lambda_n = x_0 = x_0'' = 1$, by stwierdzić, że ciąg p'' dąży do p również w przestrzeni P_n .

Tak wprowadzone pojęcie granicy w przestrzeni P_n miało dotychczas charakter czysto arytmetyczny. Aby stwierdzić, że należy ono do geometrii rzutowej, musimy jeszcze okazać, że zachowuje się ono niezmiennie względem przekształceń rzutowych przestrzeni P_n , czyli że zachodzi następujące

Twierdzenie. *Jeżeli f jest przekształceniem rzutowym przestrzeni P_n na siebie, zaś p'' ciągiem punktów przestrzeni P_n zbieżnym do pewnego punktu $p^0 \in P_n$, to $\lim_{r \rightarrow \infty} f(p'') = f(p^0)$.*

Dowód. Niech $f(\{x_0, x_1, \dots, x_n\}) = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. W myśl twierdzenia z Nr 97 mamy wówczas

$$\bar{x}_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n.$$

Jeżeli teraz $p'' = \{x_0'', x_1'', \dots, x_n''\} \rightarrow \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\}$, to istnieją liczby λ'' różne od zera takie, że $\lambda'' \cdot x_i'' \rightarrow x_i$ dla $i=0, 1, \dots, n$. Wówczas

$$\lambda'' \cdot \bar{x}_j = a_{0,j} \cdot (\lambda'' \cdot x_0'') + a_{1,j} \cdot (\lambda'' \cdot x_1'') + \dots + a_{n,j} \cdot (\lambda'' \cdot x_n'') \rightarrow a_{0,j} \cdot x_0^0 + a_{1,j} \cdot x_1^0 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n^0 = \bar{x}_j^0,$$

co oznacza, że ciąg $f(p'') = \{\bar{x}_0'', \bar{x}_1'', \dots, \bar{x}_n''\}$ dąży do $f(p^0) = \{\bar{x}_0^0, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0\}$, o dowód czego właśnie chodziło.

Jeżeli teraz podobnie jak w Nr 58 przekształcenie f przestrzeni P_n nazwiemy *ciągłym*, gdy z $\lim_{r \rightarrow \infty} p'' = p^0$ zawsze wynika $\lim_{r \rightarrow \infty} f(p'') = f(p^0)$, zaś *homeomorficznym*, gdy ponadto f jest przekształceniem odwrotnym, przy czym przekształcenie odwrotne f_{-1} jest również ciągłe, to ostatnio udowodnione twierdzenie orzekać będzie, że każde przekształcenie rzutowe przestrzeni P_n jest ciągłe; ponieważ zaś przekształcenie odwrotne jest również rzutowe, a zatem również ciągłe, więc wynika stąd dalej, że *każde przekształcenie rzutowe przestrzeni P_n na siebie jest homeomorficzne*.

Widzimy więc, że grupa przekształceń rzutowych stanowi podgrupę grupy homeomorfizmów.

Teorię niezmienników grupy homeomorfizmów przekształcających P_n na siebie nazywamy *topologią przestrzeni P_n* .

A więc każdy niezmiennik topologiczny jest tym bardziej niezmiennikiem rzutowym.

W szczególności odnosi się to do pojęcia *zbioru zamkniętego*, który — podobnie jak w Nr 58 — definiujemy jako zbiór zawierający granicę każdego z leżących w nim ciągów zbieżnych.

ĆWICZENIA. 1. Okazać, że każda hiperpłaszczyzna w przestrzeni P_n jest zbiorem zamkniętym.

2. Dla następujących ciągów punktów płaszczyzny P_2 :

$$p'' = \{1, v, v^2\}, \quad q'' = \{1, v, (-1)^r \cdot v^2\}, \quad r'' = \{1, v^2, (-1)^r \cdot v^2\}$$

zbadać, czy istnieje granica, a jeżeli tak — to ją znaleźć.

101. Twory algebraiczne w przestrzeni P_n . Twory algebraiczne w przestrzeni kartezjańskiej C_n określone były w Nr 63 przez równania postaci $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, gdzie $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ było wielomianem. Ponieważ w przestrzeni P_n punkt $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ daje się również przedstawić w postaci $\{\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n\}$, gdzie λ jest dowolną liczbą różną od zera, widzimy, że równanie $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ określać będzie w przestrzeni P_n zbiór punktów jedynie wtedy, gdy wraz ze spełniającym je układem liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$ spełniać je będzie każdy układ postaci $\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n$, gdzie $\lambda \neq 0$. Aby ten warunek był zapewniony, ograniczać się będziemy w przestrzeni P_n do rozpatrywania równań algebraicznych postaci $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, których lewa strona jest wielomianem jednorodnym¹ i przyjmiemy definicję następującą:

Definicja. *Tworem algebraicznym stopnia $\leq k$ w przestrzeni P_n nazywa się zbiór złożony ze wszystkich punktów $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in P_n$ spełniających równanie*

$$(1) \quad \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

gdzie $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $\leq k$.

Twór algebraiczny stopnia $\leq k$, nie będący tworem algebraicznym stopnia $\leq k-1$, nazywa się *tworem algebraicznym k -tego stopnia*.

Za jedyne twory stopnia 0 uważamy zbiór pusty i całą przestrzeń P_n .

W myśl twierdzenia z Nr 90, twory stopnia pierwszego są identyczne z $(n-1)$ -wymiarowymi hiperpłaszczyznami.

Zauważmy, że *twory k -tego stopnia przestrzeni P_1 są identyczne z jej podzbiórami złożonymi z k punktów*.

Istotnie, jeśli $\varphi(x_0, x_1)$ jest wielomianem jednorodnym k -tego stopnia, to istnieje liczba l taka, że $0 \leq l \leq k$ i że $\varphi(x_0, x_1) = x_0^l \cdot \varphi^1(x_0, x_1)$, gdzie $\varphi^1(x_0, x_1)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $k-l$, niepodzielnym przez x_0 . Wówczas $\varphi^1(0, 1) \neq 0$. Wiadomo z algebry, że

¹ Ograniczenie to, jakkolwiek dość naturalne, nie jest jednak w dziedzinie rzeczywistej niezbędne, gdyż np. równanie niejednorodne $x_1^2 + x_2^2 = 0$ określa w przestrzeni P_2 hiperpłaszczyznę $(n-2)$ -wymiarową będącą przecięciem hiperpłaszczyzn o równaniach $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$. Dopiero po przejściu do dziedziny zespolonej (w części III) okaże się, że warunek jednorodności wielomianu jest niezbędny.

wielomian $\varphi^1(1, x_1)$ ma co najwyżej $k-l$ pierwiastków $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,k-l}$. Jeżeli $l=0$, to $\varphi=\varphi^1$ i punkty $\{1, a_{1,i}\}$, gdzie $i=1, 2, \dots, l$, są jedynymi punktami spełniającymi równanie $\varphi(x_0, x_1)=0$. Jeśli zaś $l>0$, to równanie $\varphi(x_0, x_1)=0$ spełniają jedynie punkty $\{0, 1\}$, $\{1, a_{1,1}\}, \dots, \{1, a_{1,k-l}\}$. W każdym więc razie twór stopnia $\leq k$ w przestrzeni P_1 zawiera co najwyżej k punktów.

Natomiast równanie

$$(a_{1,1} \cdot x_0 - a_{0,1} \cdot x_1) \cdot (a_{1,2} \cdot x_0 - a_{0,2} \cdot x_1) \dots (a_{1,k} \cdot x_0 - a_{0,k} \cdot x_k) = 0$$

jest jednorodne k -tego stopnia i określa w P_1 zbiór złożony z k punktów $p_i = \{a_{0,i}, a_{1,i}\}$ dowolnie danych.

Zauważmy dalej, że każdy twór algebraiczny w przestrzeni P_n jest zbiorem zamkniętym.

Istotnie, jeżeli punkty p^n spełniają równanie (1) i dążą do punktu $p^0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\} \in P_n$, to punkty te możemy przedstawić w postaci $p^n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n\}$, gdzie $x_i^n \rightarrow x_i^0$. Wówczas jest $\varphi(x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n) = 0$, skąd po przejściu do granicy (wobec ciągłości wielomianu φ) otrzymujemy równość $\varphi(x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$, świadczącą, że p^0 też należy do tworu.

W przypadku przestrzeni P_2 wyraz »twór« zastępujemy zwykle przez wyraz *krzywa*, zaś w przypadku przestrzeni P_3 — przez wyraz *powierzchnia*, a więc mówimy o krzywych i powierzchniach algebraicznych k -tego stopnia.

Twierdzenie. Stopień tworu algebraicznego w przestrzeni P_n jest niezmiennikiem rzutowym.

Dowód. Wystarczy okazać, że przy przekształceniu rzutowym f przestrzeni P_n na siebie każdy twór algebraiczny $A \subset P_n$ stopnia $\leq k$ przejdzie na twór algebraiczny $f(A)$ stopnia $\leq k$. Niech

$$f(\{x_0, x_1, \dots, x_n\}) = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}.$$

Przekształcenie odwrotne $f_{-1}(\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ jest też rzutowe, a więc — w myśl twierdzenia z Nr 97 — wyraża się przez wzory postaci

$$(2) \quad x_j = a_{0,j} \cdot x_0 + a_{1,j} \cdot x_1 + \dots + a_{n,j} \cdot x_n, \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n.$$

Zbiór A punktów $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ spełniających równanie (1) przejdzie przy przekształceniu f na zbiór $\bar{A}$ punktów $\bar{p} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ takich, że $f_{-1}(\bar{p}) \in A$, czyli $\varphi(f_{-1}(\bar{p})) = 0$. Inaczej mówiąc, równanie tworu $\bar{A}$ otrzymamy, podstawiając do równania (1) wzory (2). Otrzymane równanie jest jednorodne, a stopień jego jest $\leq k$, zatem $\bar{A}$ jest tworem algebraicznym stopnia $\leq k$, co było do okazania.

Stwierdzony w ten sposób charakter rzutowy pojęcia tworu algebraicznego k -tego stopnia nadaje sens pytaniu, czy dowolny zbiór E leżący w dowolnej hiperpłaszczyźnie rzutowej H przestrzeni P_n jest względem H tworem algebraicznym, a jeżeli tak, to jakiego jest on stopnia. Jasne jest przy tym, że jeżeli E jest tworem algebraicznym k -tego stopnia względem H i jeżeli przestrzeń P_n poddamy przekształceniu rzutowemu f , przy którym hiperpłaszczyzna H przejdzie na hiperpłaszczyznę $H' = f(H)$, to zbiór $E' = f(E)$ będzie względem H' również tworem algebraicznym k -tego stopnia. Ta uwaga pozwala nam wypowiedzieć następujący

Wniosek 1. Przecięcie tworu algebraicznego A stopnia k względem przestrzeni P_n hiperpłaszczyzną rzutową H jest tworem algebraicznym stopnia $\leq k$ względem H .

Istotnie, wobec wniosku 12 z Nr 87 możemy przyjąć, że $H = P_{n,1}$, a więc że zbiór $A.H$ jest scharakteryzowany przez równanie (1) i przez równania $x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = x_n = 0$, a więc tylko różni się formalnie (dopisaniem do współrzędnych każdego punktu $n-l$ zer na końcu) od zbioru punktów przestrzeni P_l , określonego przez równanie jednorodne stopnia $\leq k$ postaci $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_l, 0, 0, \dots, 0) = 0$.

Biorąc pod uwagę, że zbiory złożone z k punktów prostej rzutowej są względem niej tworami k -tego stopnia, otrzymujemy stąd następujący

Wniosek 2. Jeżeli twór $A \subset P_n$ jest stopnia $\leq k$ i istnieje prosta rzutowa L , przecinająca A dokładnie w k punktach, to A jest stopnia k .

ĆWICZENIE. Okazać, że krzywa, określona w płaszczyźnie P_2 przez równanie $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$, jest trzeciego stopnia.

102. Punkty niewłaściwe tworów algebraicznych. Niech teraz H będzie $(n-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyzną w przestrzeni C_n , określoną przez równanie:

$$A_0 + A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n = 0.$$

W Nr 88 okazaliśmy, że dołączając do H punkty niewłaściwe wszystkich prostych leżących w H , otrzymamy $(n-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę rzutową $\bar{H}$ w przestrzeni P_n , której równanie będzie miało postać:

$$A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 + \dots + A_n \cdot x_n = 0.$$

Punkty niewłaściwe, dołączone do H , są oczywiście granicami ciągów punktów, należących do H . I na odwrót, jeśli punkty $p^n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n\}$, należące do H , tworzą ciąg zbieżny do punktu $p^0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\} \in P_n$, to punkt ten, wobec zamkniętości $\bar{H}$, należy do $\bar{H}$. A więc punkty nie-

właściwe hiperplaszczyny $\bar{H}$ są identyczne z tymi niewłaściwymi punktami przestrzeni P_n , które są granicami ciągów należących do H .

Niech teraz A będzie tworem algebraicznym w przestrzeni C_n określonym przez równanie

$$(3) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

gdzie φ jest wielomianem k -tego stopnia. Uogólniając podane wyżej scharakteryzowanie punktów niewłaściwych hiperplaszczyny H , nazwijmy punktami niewłaściwymi tworu algebraicznego A punkty niewłaściwe przestrzeni P_n , będące granicami ciągów punktów należących do A . Punkt niewłaściwy tworu A nazywamy czasami *kierunkiem asymptotycznym* tworu A . Zachodzi następujące

Twierdzenie. *Dołączając do tworu algebraicznego A , określonego w przestrzeni C_n przez równanie (3) k -tego stopnia, wszystkie punkty niewłaściwe tego tworu, otrzymamy w przestrzeni P_n zbiór zamknięty $\bar{A}$, którego punkty spełniają równanie*

$$(4) \quad \psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

gdzie $\psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ jest wielomianem jednorodnym k -tego stopnia, będącym licznikiem funkcji wymiernej

$$\varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \frac{\psi(x_0, x_1, \dots, x_n)}{x_0^k}.$$

Zbiór punktów właściwych spełniających równanie (4) pokrywa się z A .

Dowód. Jeżeli $x_0 \neq 0$, to równanie jest równoważne równaniu $\varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$, które jest równoważne przynależności punktu $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ do zbioru A . Tym samym ostatnia część twierdzenia jest udowodniona.

Niech teraz A^* będzie zbiorem wszystkich punktów przestrzeni P_n , spełniających równanie (4). Zbiór A^* jest tworem algebraicznym stopnia $\leq k$ w przestrzeni P_n , a więc zbiorem zamkniętym. Wynika stąd w szczególności, że należą do niego punkty niewłaściwe tworu A , czyli $\bar{A} \subset A^*$. Aby zakończyć dowód twierdzenia, pozostaje okazać, że zbiór $\bar{A}$ jest zamknięty. W tym celu weźmy ciąg punktów $p^v = \{x_0^v, x_1^v, \dots, x_n^v\} \in \bar{A}$, zbieżny do punktu $p^0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0\}$. Możemy więc założyć, że $x_i^v \rightarrow x_i^0$, dla $i=0, 1, \dots, n$. Wobec zamkniętości zbioru A^* jest $p^0 \in A^*$. Jeśli p_0 jest punktem właściwym, to $p^0 \in A$, a więc tym bardziej $p^0 \in \bar{A}$. Możemy więc założyć, że p^0 jest punktem niewłaściwym. Ponieważ $p^v \in \bar{A}$, więc dla każdego v istnieje w A taki ciąg punktów

$p_j^v = \{x_{0,j}^v, x_{1,j}^v, \dots, x_{n,j}^v\}$, gdzie $j=1, 2, \dots$, że $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{i,j}^v = x_i^v$. Istnieje więc dla każdego $v=1, 2, \dots$ taki wskaźnik j_v , że $|x_{i,j_v}^v - x_i^v| < \frac{1}{v}$ dla $i=0, 1, \dots, n$. Wobec $x_i^v \rightarrow x_i^0$ jest wówczas $\lim_{v \rightarrow \infty} x_{i,j_v}^v = x_i^0$, a więc punkty $p_{j_v}^v$, należące do A , tworzą ciąg zbieżny do punktu niewłaściwego p^0 . Oznacza to, że p^0 jest punktem niewłaściwym tworu A , czyli że $p^0 \in \bar{A}$. Tym samym zamkniętość zbioru $\bar{A}$ jest dowiedziona.

Uwaga. Nasuwa się pytanie, czy zbiór $\bar{A}$ jest identyczny z tworem algebraicznym A^* , określonym przez równanie (4). Że tak może nie być, dowodzi następujący przykład. Przyjmując $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, mamy jako twór A , określony w płaszczyźnie C_2 przez równanie $\varphi(x_1, x_2) = 0$, zbiór złożony z jednego tylko punktu $(0, 0)$. Wynika stąd, że i zbiór $\bar{A}$ składa się tylko z punktu $(0, 0)$. Natomiast wielomian $\psi(x_0, x_1, x_2)$ ma teraz postać $x_0^3 \cdot x_1^2 + x_2^4$, skąd wynika, że zbiór A^* , określony przez równanie (4), składa się z dwóch punktów: $\{1, 0, 0\}$ i $\{0, 1, 0\}$. Tego rodzaju anomalie sprawiają, że algebraiczne scharakteryzowanie zbioru $\bar{A}$, otrzymanego z tworu algebraicznego A w przestrzeni C_n przez dołączenie jego punktów niewłaściwych, następuje pewne trudności. Trudności te znikną z chwilą, gdy odpowiednio rozszerzymy pojęcie przestrzeni, wprowadzając punkty o spórzędnych zespolonych.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć punkty niewłaściwe krzywej algebraicznej (trzeciego stopnia), określonej w płaszczyźnie C_2 przez równanie $x_1^3 + x_2^3 = 1$. Naszkicować tę krzywą.

2. Znaleźć punkty niewłaściwe tworu, określonego w przestrzeni C_4 przez równanie $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4 = 0$.

3. Znaleźć punkty niewłaściwe kubiki kolistej jednobieżnej określonej w Nr 69, str. 169.

103. Stożkowe zupełne. Stosując ogólne rozważania Nr 102 do określonej w Nr 65 paraboli A o równaniu $2x_1 - \frac{x_2^2}{d} = 0$, stwierdzamy, że jej punkty niewłaściwe spełniają równania

$$2x_0 \cdot x_1 - \frac{x_2^2}{d} = 0 \quad \text{ i } \quad x_0 = 0,$$

skąd $x_2 = 0$. A więc jedynie punkt $\{0, 1, 0\}$ może być punktem niewłaściwym paraboli A . Że punkt ten jest istotnie punktem niewłaściwym tej paraboli, wynika z uwagi, że punkty: $p^v = \left\{1, \frac{v^2}{2d}, v\right\} = \left\{\frac{2d}{v^2}, 1, \frac{2d}{v}\right\}$ leżą

na niej i tworzą ciąg zbieżny do $\{0, 1, 0\}$. Parabola posiada więc dokładnie jeden punkt niewłaściwy, czyli jeden kierunek asymptotyczny.

Parabolę uzupełnioną jej punktem niewłaściwym nazywać będziemy parabolą zupełną.

W rozpatrywanym przypadku równanie jej ma postać

$$(5) \quad 2x_0 \cdot x_1 - \frac{x_2^2}{d} = 0.$$

Jest to więc krzywa stopnia drugiego.

Elipsa o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$, określona w Nr 66, jest krzywą ograniczoną, a więc punktów niewłaściwych nie posiada.

W myśl twierdzenia z Nr 102 jest ona identyczną ze zbiorem punktów właściwych płaszczyzny P_2 , spełniających równanie

$$(6) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_0^2 = 0.$$

Ponieważ równania tego nie spełnia żaden punkt niewłaściwy, więc (6) jest równaniem elipsy w płaszczyźnie P_2 .

Punkty niewłaściwe określonej w Nr 67 hiperboli o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$ spełniają układ równań: $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_0^2 = 0$ i $x_0 = 0$. Istnieją dokładnie dwa punkty spełniające te równania: $\{0, a_1, a_2\}$ i $\{0, -a_1, a_2\}$. Każdy z nich jest punktem niewłaściwym hiperboli, gdyż

punkty $p' = \{1, a_1 \cdot \sqrt{1+n^2}, n \cdot a_2\} = \left\{\frac{1}{n}, a_1 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}, a_2\right\}$ oraz punkty

$q' = \{1, -a_1 \cdot \sqrt{1+n^2}, n \cdot a_2\} = \left\{\frac{1}{n}, -a_1 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}, a_2\right\}$ leżą na hiperboli,

przy czym $p' \rightarrow \{0, a_1, a_2\}$ i $q' \rightarrow \{0, -a_1, a_2\}$.

A więc hiperbola ma dokładnie dwa punkty niewłaściwe, czyli dwa kierunki asymptotyczne.

Warto zauważyć, że są one identyczne z punktami niewłaściwymi prostych $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}$ i $\frac{x_1}{a_1} = -\frac{x_2}{a_2}$, które w Nr 67 nazwaliśmy asymptotami hiperboli.

Hiperbolę uzupełnioną jej punktami niewłaściwymi nazywać będziemy hiperbolą zupełną.

W rozpatrywanym przypadku równanie jej ma postać

$$(7) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_0^2 = 0.$$

Jest to więc krzywa stopnia drugiego.

W płaszczyźnie C_2 parabole, elipsy i hiperbole obejmowaliśmy wspólną nazwą stożkowych. W Nr 65, 66 i 67 badaliśmy ich własności metryczne. Okazaliśmy poza tym, że wszystkie parabole są podobne, wszystkie elipsy są obrazami afinicznymi okręgu koła, a wszystkie hiperbole są obrazami afinicznymi hiperboli równoramiennej.

Ponieważ ilość punktów niewłaściwych tworzy jest oczywiście jego własnością afiniczną, więc z punktu widzenia geometrii afinicznej istnieją dokładnie trzy różne stożkowe: parabola, elipsa i hiperbola.

Inaczej jest jednak z punktu widzenia geometrii rzutowej. Zauważmy mianowicie, że przechodząc od spólrzędnych jednorodnych x_0, x_1, x_2 , do spólrzędnych rzutowych $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$, gdzie $x_0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$, $x_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_0$, $x_2 = \bar{x}_2$, otrzymamy z równania paraboli zupełnej $x_0 \cdot x_1 - x_2^2 = 0$ równanie hiperboli zupełnej $\bar{x}_1^2 - \bar{x}_0^2 - \bar{x}_2^2 = 0$, które z kolei, przy przejściu od spólrzędnych $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ do spólrzędnych rzutowych $x'_0 = \bar{x}_1$, $x'_1 = \bar{x}_2$, $x'_2 = \bar{x}_0$ przejdzie w równanie elipsy $x'^2_0 - x'^2_2 - x'^2_1 = 0$. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. Z punktu widzenia geometrii rzutowej nie ma różnicy między elipsami, parabolami zupełnymi oraz hiperbolami zupełnymi.

Wszystkie krzywe, będące rzutowymi obrazami okręgu, nazywać będziemy stożkowymi zupełnymi.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć przekształcenie rzutowe płaszczyzny P_2 , przy którym parabola o równaniu $2x_0 \cdot x_1 - 3x_2^2 = 0$ przejdzie na okrąg o równaniu $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$. Na jaką prostą przy tym przekształceniu przejdzie prosta niewłaściwa?

2. Czy istnieje takie przekształcenie rzutowe płaszczyzny P_2 na siebie, przy którym dwie dane stożkowe przechodzą na: 1° elipsy, 2° parabole, 3° hiperbole?

104. Kwadryki zupełne. Przechodząc do badania punktów niewłaściwych powierzchni drugiego stopnia, zauważmy, że elipsoida trójosiowa

o podanym w Nr 74 równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0$, jako powierzchnia ograniczona, nie ma punktów niewłaściwych. W myśl rozważań z Nr 102 jest ona identyczna ze zbiorem punktów właściwych przestrzeni P_3 , spełniających równanie

$$(8) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - x_0^2 = 0.$$

Ponieważ równania tego nie spełnia żaden punkt niewłaściwy, więc (8) jest równaniem elipsoidy w przestrzeni P_3 .

Punkty niewłaściwe określonej w Nr 75 hiperboloidy dwupowłokowej o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0$ spełniają układ równań

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - x_0^2 = 0, \quad x_0 = 0.$$

Zbiór punktów spełniających te równania tworzy w płaszczyźnie niewłaściwej (której punkty postaci $\{0, x_1, x_2, x_3\}$ identyfikować możemy z punktami $\{x_1, x_2, x_3\} \in P_2$) stożkową zupełną o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$.

Że każdy punkt $p^0 = \{0, x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$ tej stożkowej (zupełnej) jest punktem niewłaściwym hiperboloidy, wynika z uwagi, że dla każdego naturalnego ν punkt właściwy $p^\nu = \left\{ \frac{1}{\nu} \sqrt{2\nu+1}, x_1^0, \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot x_1^0, x_2^0, x_3^0 \right\}$ leży na hiperboloidzie, przy czym $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p^\nu = p^0$.

A więc hiperboloida dwupowłokowa ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą pewną stożkową zupełną.

Hiperboloidę dwupowłokową uzupełnioną jej punktami niewłaściwymi nazywać będziemy hiperboloidą dwupowłokową zupełną.

W rozpatrywanym przypadku równanie jej ma postać

$$(9) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - x_0^2 = 0.$$

Jest to więc powierzchnia stopnia drugiego.

Punkty niewłaściwe określonej w Nr 76 hiperboloidy jednopowłokowej, o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$, spełniają układ równań:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + x_0^2 = 0, \quad x_0 = 0.$$

Podobnie jak w przypadku hiperboloidy dwupowłokowej, równania te określają w płaszczyźnie niewłaściwej pewną stożkową zupełną.

Każdy punkt $p^0 = \{0, x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$ spełniający te równania jest granicą ciągu punktów $p^\nu = \left\{ \frac{1}{\nu} \sqrt{2\nu-1}, x_1^0, \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \cdot x_1^0, x_2^0, x_3^0 \right\}$ leżących na tej hiperboloidzie.

A więc hiperboloida jednopowłokowa ma nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą pewną stożkową zupełną.

Hiperboloidę jednopowłokową, uzupełnioną jej punktami niewłaściwymi, nazywać będziemy hiperboloidą jednopowłokową zupełną.

W rozpatrywanym przypadku równanie jej ma postać:

$$(10) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + x_0^2 = 0.$$

Punkty niewłaściwe określonej w Nr 77 paraboloidy eliptycznej o równaniu $\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 2x_1 = 0$ spełniają układ równań $\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 2x_0 \cdot x_1 = 0$, $x^0 = 0$.

Jedynym punktem spełniającym te równania jest punkt $\{0, 1, 0, 0\}$. Jest on punktem niewłaściwym paraboloidy eliptycznej, gdyż jest granicą ciągu punktów właściwych $p^\nu = \left\{ 1, \nu^2, \nu \cdot a_2, \nu \cdot a_3 \right\} = \left\{ \frac{1}{\nu^2}, 1, \frac{a_2}{\nu}, \frac{a_3}{\nu} \right\}$, leżących na tej paraboloidzie.

A więc paraboloida eliptyczna ma dokładnie jeden punkt niewłaściwy.

Uzupełniając ją tym punktem, otrzymujemy powierzchnię, zwaną paraboloidą eliptyczną zupełną.

W rozpatrywanym przypadku równanie jej ma postać

$$(11) \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 2x_0 \cdot x_1 = 0.$$

Punkty niewłaściwe określonej w Nr 78 paraboloidy hiperbolicznej o równaniu $2x_1 - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$ spełniają równania:

$$2x_0 \cdot x_1 - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0, \quad x_0 = 0.$$

Zbiór punktów spełniających te równania tworzy w płaszczyźnie niewłaściwej układ dwóch prostych o równaniach $\frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}$ i $\frac{x_2}{a_2} = -\frac{x_3}{a_3}$. Każdy punkt $p^0 = \{0, x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$, leżący na tych prostych, jest granicą ciągu punktów właściwych $p^\nu = \left\{ 1, \frac{2\nu \cdot x_2^0 + 1}{2a_2^2}, \nu \cdot x_2^0 + 1, \nu \cdot x_3^0 \right\}$ leżących na paraboloidzie hiperbolicznej.

A więc paraboloida hiperboliczna posiada nieskończenie wiele punktów niewłaściwych, które w płaszczyźnie niewłaściwej tworzą dwie proste rzutowe.

Paraboloidę hiperboliczną, uzupełnioną jej punktami niewłaściwymi, nazywać będziemy paraboloidą hiperboliczną zupełną.

W rozpatrywanym przypadku jej równanie ma postać:

$$(12) \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - 2x_0 \cdot x_1 = 0.$$

W przestrzeni C_3 elipsoidy, hiperboloidy jedno- i dwupowłokowe oraz paraboloidy eliptyczne i hiperboliczne obejmujemy wspólną nazwą *kwadryk*.

W Nr 74–78 badaliśmy metryczne własności kwadryk. Okazaliśmy tam poza tym, że wszystkie elipsoidy pod względem afinicznym nie różnią się między sobą i że podobnie ma się rzecz dla hiperboloid jedno- i dwupowłokowych oraz paraboloid eliptycznych i hiperbolicznych.

Natomiast powierzchnie należące do różnych z tych klas zawsze różnią się pod względem afinicznym. Istotnie, przy przekształceniu afinicznym przestrzeni P_3 jej płaszczyzna niewłaściwa zostaje odwzorowana sama na siebie. A więc zbiór punktów niewłaściwych powierzchni przechodzi przy tym na zbiór punktów niewłaściwych. Wynika stąd, że elipsoidy, dla których zbiór ten jest pusty, hiperboloidy, dla których jest on stożkową, paraboloidy eliptyczne, dla których jest on jednopunktowy i paraboloidy hiperboliczne, dla których jest on parą prostych, są pod względem afinicznym różne. Wreszcie, by stwierdzić różnicę afiniczną między hiperboloidą jedno- oraz dwupowłokową, wystarczy zauważyć, że (jak okazaliśmy w Nr 76 i 75) pierwsza z nich ma tworzące prostoliniowe w przeciwieństwie do drugiej. W ten sposób widzimy, że z punktu widzenia geometrii afinicznej istnieje dokładnie pięć różnych kwadryk.

Inaczej przedstawia się sprawa z punktu widzenia geometrii rzutowej. Zachodzi tutaj następujące

Twierdzenie. *Z punktu widzenia geometrii rzutowej, wśród kwadryk uzupełnionych ich punktami niewłaściwymi istnieją dokładnie dwa różne typy: do pierwszego z nich należą elipsoidy, hiperboloidy dwupowłokowe zupełne oraz paraboloidy eliptyczne zupełne, do drugiego — hiperboloidy jednopowłokowe zupełne i paraboloidy hiperboliczne zupełne.*

Dowód. Przekształcenie rzutowe określone przez wzory:

$$(13) \quad x_0 = \bar{x}_1, \quad x_1 = \bar{x}_0, \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad x_3 = \bar{x}_3$$

przekształca elipsoidę o równaniu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$ na hiperboloidę dwupowłokową o równaniu $\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \bar{x}_0^2 = 0$. Natomiast przekształcenie rzutowe, określone przez wzory:

$$x_0 = \bar{x}_0 + \bar{x}_1, \quad x_1 = \bar{x}_0 - \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad x_3 = \bar{x}_3,$$

przekształca paraboloidę eliptyczną o równaniu $x_2^2 + x_3^2 - x_0 \cdot x_1 = 0$ na elipsoidę o równaniu $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - \bar{x}_0^2 = 0$, zaś paraboloidę hiperboliczną o równaniu $x_2^2 - x_3^2 - x_0 \cdot x_1 = 0$ na hiperboloidę jednopowłokową o równaniu $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \bar{x}_0^2 = 0$.

W ten sposób stwierdzona została rzutowa identyczność elipsoid, hiperboloid dwupowłokowych zupełnych i paraboloid eliptycznych zupełnych z jednej strony, zaś hiperboloid jednopowłokowych zupełnych i paraboloid hiperbolicznych zupełnych z drugiej strony. Upřednio zaś już wskazana różnica między np. hiperboloidą jedno- a dwupowłokową, polegająca na istnieniu tworzących prostoliniowych dla pierwszej z tych powierzchni a braku ich dla drugiej, ma oczywiście charakter rzutowy. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Wniosek. *Przez każdy punkt paraboloidy hiperbolicznej przechodzą dwie proste całkowicie na tej paraboloidzie leżące.*

Powierzchnie będące obrazami rzutowymi kwadryk uzupełnionych ich punktami niewłaściwymi nazywać będziemy *kwadrykami zupełnymi*.

Są to więc powierzchnie algebraiczne drugiego stopnia.

Rozpadają się one na dwa różne pod względem rzutowym typy: *kwadryki zawierające tworzące prostoliniowe i kwadryki nie zawierające takich tworzących.*

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć przekształcenie rzutowe przestrzeni P_3 , przy którym hiperboloida dwupowłokowa zupełna o równaniu $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_0^2 = 0$ przejdzie na sferę S o równaniu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$. Zbadać, jakie punkty uzupełnienia hiperboloidy przejdą przy tym na punkty leżące wewnątrz kuli, której brzegiem jest S .

2. Okazać, że uzupełnienie $P_3 - II$ kwadryki II zupełnej rozpada się, i to w jeden sposób, na dwa zbiory E_1 , E_2 niepuste i rozłączne takie, że $E_1 + II$ i $E_2 + II$ są zbiorami zamkniętymi. Dowieść, że w przypadku, gdy kwadryka jest hiperboloidą jednopowłokową zupełną lub paraboloidą hiperboliczną zupełną, zbiory E_1 i E_2 nie różnią się pod względem rzutowym. Czy tak jest również w przypadku pozostałych kwadryk?

105. Tworzące prostoliniowe kwadryk. W Nr 76 okazaliśmy, że przez każdy punkt właściwy hiperboloidy jednopowłokowej przechodzą co najmniej dwie różne tworzące. Jest tak również i dla punktów niewłaściwych, gdyż przekształcenie rzutowe, określone przez wzory (13), przekształca hiperboloidę o równaniu $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_0^2 = 0$ na hiperboloidę o równaniu $\bar{x}_0^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 + \bar{x}_1^2 = 0$, przy czym każdy punkt niewłaściwy przechodzi na punkt właściwy, gdyż jeżeli $x_0 = 0$, to $\bar{x}_0 = x_1 \neq 0$. Stąd i z uwagi na rzutową identyczność hiperboloidy jednopowłokowej zupełnej i paraboloidy hiperbolicznej zupełnej wnioskujemy, że przez każdy punkt paraboloidy hiperbolicznej, danej np. przez równanie

$$(14) \quad x_2^2 - x_3^2 - x_0 \cdot x_1 = 0,$$

przechodzą co najmniej dwie różne tworzące. Każda z tworzących właściwych ma swój punkt niewłaściwy na jednej z dwóch prostych, określonych w płaszczyźnie niewłaściwej przez równania

$$(15) \quad x_2 = x_3 \text{ lub } x_2 = -x_3.$$

A więc każda tworząca prostoliniowa, przechodząca przez punkt właściwy, jest równoległa co najmniej do jednej z płaszczyzn określonych w C_3 przez równania (15). Zauważmy od razu, że prosta równoległa jednocześnie do obu tych płaszczyzn ma jako punkt niewłaściwy punkt $\{0, 1, 0, 0\}$, a więc jej punkty właściwe są postaci $\{1, \lambda, c_2, c_3\}$. Ma ona z paraboloidą (14) jedynie punkt $\{1, c_2^2 - c_3^2, c_2, c_3\}$ wspólny, nie jest więc tworzącą. Wynika stąd, że każda tworząca prostoliniowa właściwa musi być równoległa do jednej i tylko jednej z płaszczyzn (15).

Gdyby teraz przez jakiś punkt właściwy paraboloidy (14) przechodziły dwie tworzące równoległe do jednej z płaszczyzn (15), to w płaszczyźnie, w której one leżą, leżałaby ponadto jedna z tworzących niewłaściwych. Płaszczyzna ta zawierałaby zatem trzy różne tworzące paraboloidy, a więc — w myśl wniosku 1 z Nr 101 — płaszczyzna ta byłaby zawarta w paraboloidzie, wbrew temu, że leżące w niej proste o kierunku $\{0, 1, 0, 0\}$ nie są tworzącymi. A więc przypuszczenie, że przez punkt właściwy paraboloidy przechodzi więcej niż dwie tworzące, doprowadza do sprzeczności.

Przez punkt niewłaściwy $\{0, 1, 0, 0\}$ przechodzą jedynie obie tworzące niewłaściwe, zaś każdy inny punkt niewłaściwy paraboloidy (14) jest postaci $\{0, 1, x_2^0, x_3^0\}$, gdzie $x_2^0 - x_3^0 = 0$. Przekształcenie rzutowe (13) przekształca paraboloidę o równaniu (14) na samą siebie, przy czym punkt $\{0, 1, x_2^0, x_3^0\}$ przechodzi na punkt właściwy $\{1, 0, \bar{x}_2^0, \bar{x}_3^0\}$. Wynika stąd, że przez punkt ten przechodzą jedynie dwie tworzące prostoliniowe. Wobec rzutowej identyczności paraboloidy hiperbolicznej z hiperboloidą jednopowłokową otrzymane wyniki możemy wypowiedzieć w postaci twierdzenia następującego:

Twierdzenie. *Przez każdy punkt hiperboloidy jednopowłokowej zupełnej, jak również przez każdy punkt paraboloidy hiperbolicznej zupełnej przechodzą dokładnie dwie tworzące prostoliniowe.*

Twierdzenie to znacznie uogólnimy w rozdziale XIX. Obecnie zaś zajmmy się znalezieniem równań tych tworzących. W tym celu równanie (10) hiperboloidy jednopowłokowej napiszemy w postaci

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{a_1} \cdot \frac{x_1 - x_2}{a_1} - \frac{x_3 + x_0}{a_3} \cdot \frac{x_3 - x_0}{a_3}\right).$$

Wynika stąd, że dla każdego punktu $p = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, leżącego na tej powierzchni istnieją nie znikające jednocześnie liczby λ i μ takie, że

$$(16) \quad \lambda \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}\right) = \mu \cdot \left(\frac{x_3 + x_0}{a_3} + x_0\right) \text{ i } \lambda \cdot \left(\frac{x_3 - x_0}{a_3} - x_0\right) = \mu \cdot \left(\frac{x_1 - x_2}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right),$$

jak również nie znikające jednocześnie liczby λ' i μ' takie, że

$$(17) \quad \lambda' \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}\right) = \mu' \cdot \left(\frac{x_3 - x_0}{a_3} - x_0\right) \text{ i } \lambda' \cdot \left(\frac{x_3 + x_0}{a_3} + x_0\right) = \mu' \cdot \left(\frac{x_1 - x_2}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right).$$

Na odwrót, jeśli zachodzą związki (16) lub (17), to punkt $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ leży na powierzchni. Ale równania (16) przedstawiają dwie płaszczyzny przechodzące przez punkt p powierzchni. Ponieważ punkty im wspólne leżą wszystkie na powierzchni, a ta nie zawiera płaszczyzny, więc wyznaczają one pewną prostą $L(\lambda, \mu)$, która jest tworzącą. Ale liczby λ i μ , spełniające równania (16), są przez punkt p wyznaczone z dokładnością do proporcjonalności (gdyż nie wszystkie wyrażenia w nawiasach jednocześnie znikają); zatem przez każdy punkt powierzchni przechodzi dokładnie jedna tworząca $L(\lambda, \mu)$.

Wynika stąd, że pokrywające powierzchnię proste $L(\lambda, \mu)$ tworzą rodzinę, w której żadne dwie różne tworzące nie przecinają się, czyli każde dwie różne tworzące tej rodziny są skośne.

Podobnie stwierdzamy, że równania (17) określają rodzinę tworzących $L'(\lambda', \mu')$ pokrywającą powierzchnię, przy czym dwie różne proste tej rodziny także są zawsze skośne.

Zauważmy dalej, że każda prosta $L(\lambda, \mu)$ przecina każdą prostą $L'(\lambda', \mu')$. Istotnie, równania (16) i (17) możemy łącznie potraktować jako układ czterech równań jednorodnych względem $x_0, \frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \frac{x_3}{a_3}$. Aby okazać,

że ma on rozwiązanie niezerowe, wystarczy stwierdzić, że jego wyznacznik jest zerem. Wyznacznik ten ma postać:

$$\begin{vmatrix} -\mu & \lambda & \lambda - \mu & 0 \\ -\lambda - \mu & \mu & \lambda & 0 \\ \mu' & \lambda' & \lambda' - \mu' & 0 \\ \lambda' - \mu' & \mu' & \lambda' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\mu & 2\lambda & \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \\ 0 & 2\lambda' & \lambda' - \mu' & 0 \\ 2\lambda' & 0 & \mu' & \lambda' \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \\ 0 & \lambda' & 0 & -\mu' \\ \lambda' & 0 & \mu' & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \mu \cdot \lambda' \cdot \begin{vmatrix} \mu & \lambda \\ \mu' & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \lambda' \cdot \mu \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda' & -\mu' \end{vmatrix} = 0.$$

Wynika stąd, że każda prosta rodziny $L(\lambda, \mu)$ jest różna od każdej prostej rodziny $L'(\lambda', \mu')$, gdyż proste należące do pierwszej rodziny są

względem siebie skośne, zaś proste należące do różnych rodzin przecinają się. Ponieważ przez każdy punkt powierzchni przechodzą dokładnie dwie proste, więc proste $L(\lambda, \mu)$ i $L'(\lambda', \mu')$ obejmują wszystkie tworzące, leżące na hiperboloidzie jednowłokowej zupełnej.

Zauważmy dalej, że przekształcenie rzutowe:

$$x_1 = \bar{x}_1; \quad x_2 = \bar{x}_2; \quad \frac{x_3}{a_3} + x_0 = 2\bar{x}_0; \quad \frac{x_3}{a_3} - x_0 = \bar{x}_3$$

przekształca hiperboloidę jednowłokową o równaniu (10) na paraboloidę hiperboliczną, której równanie (po zmianie znakowania, polegającej na opuszczeniu kresek) możemy napisać w postaci:

$$(18) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_0 \cdot x_3.$$

Przy tym przekształceniu tworząca $L(\lambda, \mu)$, określona przez równania (16), przejdzie na prostą, określoną przez równania:

$$(19) \quad \lambda \cdot \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} \right) = 2 \cdot \mu \cdot x_0 \quad \text{ i } \quad \mu \cdot \left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} \right) = \lambda \cdot x_3,$$

zaś tworząca $L'(\lambda', \mu')$, określona przez równania (17), przejdzie na tworzącą, określoną przez równania:

$$(20) \quad \mu' \cdot \left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} \right) = 2 \cdot \lambda' \cdot x_0 \quad \text{ i } \quad \lambda' \cdot \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} \right) = \mu' \cdot x_3.$$

Wynika stąd że równania (19) i (20) określają wszystkie tworzące paraboloidy hiperbolicznej zupełnej o równaniu (18), przy czym przez każdy punkt powierzchni przechodzi jedna tworząca rodziny (19) i jedna tworząca rodziny (20). Dwie tworzące należące do jednej rodziny są zawsze skośne, dwie zaś należące do rodzin różnych przecinają się w jednym punkcie.

Zauważmy wreszcie, że proste rodziny (19) są równoległe do płaszczyzny o równaniu $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0$, a proste rodziny (20) — do płaszczyzny o równaniu $\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0$.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć punkty niewłaściwe obu tworzących hiperboloidy jednowłokowej $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_3^2}{9} = 0$ przechodzących przez punkt $\{1, 1, 2, 3\}$.

2. Czy istnieją na paraboloidzie hiperbolicznej o równaniu $x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_0x_3 = 0$ punkty, przez które przechodzą dwie tworzące prostopadłe do siebie?

ROZDZIAŁ XIII

Zasada dwoistości

106^r. Spółrzędne Plückera. Dwoistość w geometrii rzutowej. Przestrzeń P_n została określona w Nr 81 jako zbiór, którego elementami są układy $n+1$ liczb $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, nie wszystkich znikających, przy czym układy proporcjonalne uważa się za identyczne. W geometrii przestrzeni P_n układy te nazywamy punktami, a związki analityczne między nimi interpretujemy w sposób geometryczny. Okazuje się jednak, że taka interpretacja geometryczna nie jest jedyną możliwą. Równoległe do niej można podać drugą interpretację geometryczną, uzyskując w ten sposób dla każdego twierdzenia analitycznego o układach $n+1$ liczb (z identyfikacją układów proporcjonalnych) podwójne sformułowanie geometryczne w postaci dwóch twierdzeń, o których mówimy, że są do siebie *dwoiste*.

Poprzestaniemy tutaj na dość pobieżnym zapoznaniu się z tą tzw. *zasadą dwoistości* geometrii rzutowej.

Dokładniejsze jej omówienie znaleźć można w książkach poświęconych specjalnie geometrii rzutowej.

Liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$, nie znikające jednocześnie, których układem jest punkt p przestrzeni P_n , nazwalimy spółrzednymi jednorodnymi (ob. Nr 80 str. 201). Punkt p o spółrzednych jednorodnych $x_0, x_1, \dots, x_n$ oznaczać będziemy obecnie przez $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$, uważając przy tym układy proporcjonalne tych spółrzednych za punkty identyczne. Wobec twierdzenia z Nr 90, każda $(n-1)$ -wymiarowa hiperpłaszczyzna H w P_n jest identyczna ze zbiorem punktów $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$, spełniających równanie postaci $u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + \dots + u_n \cdot x_n = 0$, którego współczynniki $u_0, u_1, \dots, u_n$ nie wszystkie znikają, przy czym układ tych współczynników jest przez hiperpłaszczyznę H wyznaczony z dokładnością do proporcjonalności.

Otóż liczby $u_0, u_1, \dots, u_n$ nazywać będziemy *spółrzednymi Plückera* hiperpłaszczyzny H i hiperpłaszczyznę tę oznaczać będziemy przez $H(u_0, u_1, \dots, u_n)$.

W ten sposób każdy układ $n+1$ liczb nie znikających jednocześnie można interpretować bądź jako punkt przestrzeni P_n — gdy liczby te uważamy za spółrzedne w dotychczasowym sensie — czyli za *spółrzedne punktowe*, bądź jako $(n-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę, leżącą w P_n — gdy liczby te uważamy za spółrzedne Plückera.

Punkt $p(u_0, u_1, \dots, u_n)$ i hiperpłaszczyznę $H(u_0, u_1, \dots, u_n)$ uważamy za *twory dwoiste* przestrzeni P_n .

Zależność

$$(1) \quad u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + \dots + u_n \cdot x_n = 0$$

oznacza w odniesieniu do punktu $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$, że punkt ten *leży* w hiperpłaszczyźnie $H(u_0, u_1, \dots, u_n)$, w odniesieniu zaś do tej hiperpłaszczyzny, że *ona przechodzi przez* punkt $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Relacją dwoistą względem «*leżenia w*» jest «*przechodzenie przez*» i na odwrót.

Jeżeli ustalimy $u_0, u_1, \dots, u_n$, to równanie (1) charakteryzuje ogół punktów $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$, leżących w hiperpłaszczyźnie $H(u_0, u_1, \dots, u_n)$; jest to więc w spółrzednych punktowych równanie $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyzny.

Jeżeli zaś ustalimy $x_0, x_1, \dots, x_n$, to to samo równanie (1) charakteryzuje hiperpłaszczyzny przechodzące przez punkt $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$; jest to więc w spółrzednych Plückera równanie zbioru hiperpłaszczyzn $(n-1)$ -wymiarowych, przechodzących przez punkt $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Ponieważ przez zbiór tych hiperpłaszczyzn punkt ten jest jednoznacznie wyznaczony (jako jedyny wspólny im wszystkim), więc można powiedzieć, że równanie (1) jest w spółrzednych Plückera *równaniem punktu* $p = p(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Wynika stąd, że np warunek, by $n+1$ punktów $p(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$, gdzie $i=0, 1, \dots, n$, leżały w jednej $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyźnie, wyrażający się analitycznie — jak wiadomo z Nr 87 — przez znikanie wyznacznika $|a_{i,j}| (i, j=0, 1, \dots, n)$, będzie przy interpretowaniu układów liczb $a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}$ jako hiperpłaszczyzn $H(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ oznaczać, że $n+1$ hiperpłaszczyzn $(n-1)$ -wymiarowych przechodzi przez jeden punkt. Oba te fakty geometryczne są bowiem różnymi interpretacjami jednego i tego samego faktu analitycznego, a mianowicie istnienia układu liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$, nie wszystkich znikających, spełniającego układ równań $a_{i,0} \cdot x_0 + a_{i,1} \cdot x_1 + \dots + a_{i,n} \cdot x_n = 0$ dla $i=0, 1, \dots, n$.

Idąc dalej tą drogą, zastanówmy się, jaki jest odpowiednik dwoisty k -wymiarowej hiperpłaszczyzny, leżącej w przestrzeni P_n . Taką hiperpłaszczyznę H możemy określić jako złącz (ob. Nr 86, str. 214) $k+1$

punktów liniowo niezależnych $p(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$, gdzie $i=0, 1, \dots, k$, czyli jako zbiór punktów postaci $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$, gdzie

$$(2) \quad x_j = t_0 \cdot a_{0,j} + t_1 \cdot a_{1,j} + \dots + t_k \cdot a_{k,j} \text{ dla } j=0, 1, \dots, n,$$

przy czym nie wszystkie spółczynniki $t_0, t_1, \dots, t_k$ znikają. Liniowa niezależność punktów $p(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ jest równoważna (z uwagi na twierdzenie z Nr 87) analitycznemu warunkowi, orzekającemu, że rząd macierzy $(a_{i,j}) (i=0, 1, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$ jest równy $k+1$.

Przechodząc do interpretacji dwoistej, mamy układ $k+1$ hiperpłaszczyzn $(n-1)$ -wymiarowych $H(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$. Ponieważ rząd macierzy $(a_{i,j}) (i=0, 1, \dots, k; j=0, 1, \dots, n)$ jest równy $k+1 \leq n+1$, więc na mocy twierdzenia z Nr 91, część wspólna tych hiperpłaszczyzn jest pewną $(n-k-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyzną H' . Punktom $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ danym przez równania (2) odpowiadają hiperpłaszczyzny $H(x_0, x_1, \dots, x_n)$, które na mocy wniosku 3 z Nr 91 są identyczne z tymi $(n-1)$ -wymiarowymi hiperpłaszczyznami, jakie zawierają H' .

A więc odpowiednikiem dwoistym zbioru punktów k -wymiarowej hiperpłaszczyzny H jest zbiór $(n-1)$ -wymiarowych hiperpłaszczyzn przechodzących przez pewną $(n-k-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę H' .

Zbiór ten uważać można za wyrażenie hiperpłaszczyzny H' z pomocą hiperpłaszczyzn $(n-1)$ -wymiarowych.

W tym sensie dwoistym odpowiednikiem k -wymiarowej hiperpłaszczyzny H , będącej złączem $k+1$ liniowo niezależnych punktów, jest pewna $(n-k-1)$ -wymiarowa hiperpłaszczyzna H' , będąca przecięciem $k+1$ liniowo niezależnych $(n-1)$ -wymiarowych hiperpłaszczyzn.

By uniknąć nieporozumień, zauważmy, że odpowiednikiem całej przestrzeni P_n jest w tymże sensie ogół wszystkich $(n-1)$ -wymiarowych hiperpłaszczyzn; ponieważ ich część wspólna jest zbiorem pustym, więc za dwoisty odpowiednik całej przestrzeni P_n uważać musimy zbiór pusty i na odwrót.

Każde twierdzenie geometrii rzutowej o przestrzeni P_n jest zatem jedną z dwóch geometrycznych interpretacji analitycznego twierdzenia o układach $n+1$ liczb.

Twierdzenie dwoiste do niego otrzymamy, przestawiając wyrazy „punkt” i „ $(n-1)$ -wymiarowa hiperpłaszczyzna” oraz zastępując orzeczenie, że punkt leży na hiperpłaszczyźnie, przez orzeczenie, że hiperpłaszczyzna przechodzi przez punkt i na odwrót. Jeżeli w twierdzeniu prócz punktów i $(n-1)$ -wymiarowych hiperpłaszczyzn występują jeszcze inne pojęcia geometryczne, należy przedtem znaleźć dwoiste odpowiedniki tych pojęć i

przy przejściu do twierdzenia dwoistego zastąpić te pojęcia przez ich dwoiste odpowiedniki.

W szczególności więc przy przejściu do twierdzenia dwoistego, hiperpłaszczyzny k -wymiarowe zastąpione zostaną przez hiperpłaszczyzny $(n-k-1)$ -wymiarowe (ściślej — przez zbiory hiperpłaszczyzn $(n-1)$ -wymiarowych, przecinających się wzdłuż pewnej hiperpłaszczyzny $(n-k-1)$ -wymiarowej).

Zasadą dwoistości nazywamy twierdzenie o geometrii rzutowej orzekające, że prawdziwość jakiegokolwiek twierdzenia należącego do geometrii przestrzeni P_n pociąga za sobą prawdziwość twierdzenia dwoistego.

Przy podanym tutaj analitycznym ujęciu geometrii rzutowej zasada dwoistości wynika z tego, że oba twierdzenia dwoiste są równoważne jednemu i temu samemu twierdzeniu analitycznemu o układach złożonych z $n+1$ liczb.

ĆWICZENIA. 1. Napisać we współrzędnych Plückera równanie tworzącego z czterech liniowo niezależnych punktów przestrzeni P_3 .

2. Czym jest figura dwoista (w przestrzeni P_3) względem figury złożonej z trzech wierzchołków i trzech boków (całych prostych) trójkąta położonego w P_3 ?

107^z. Czworokąt zupełny. W celu zilustrowania ogólnych rozważań Nr 106, zajmiemy się znalezieniem twierdzenia dwoistego względem twierdzenia z Nr 95 o czworoboku zupełnym. Ponieważ w twierdzeniu tym jest mowa o harmonicznych czwórkach punktów, więc przede wszystkim należy znaleźć dwoisty odpowiednik tego pojęcia.

Okażemy w tym celu, że określony w Nr 94 dwustosunek czterech prostych pęku wyraża się w współrzędnych Plückera tym samym wzorem, co dwustosunek czterech punktów prostej w współrzędnych punktowych tych punktów.

Istotnie, jeśli L_1, L_2, L_3, L_4 są prostymi pęku leżącymi w P_2 , przy czym $L_1 \neq L_2$, zaś L_3 i L_4 nie pokrywają się jednocześnie ani z L_1 , ani z L_2 , oraz jeśli $L_1 = H(u_0, u_1, u_2)$ i $L_2 = H(v_0, v_1, v_2)$, to w myśl wniosku 3 z Nr 91 istnieją pary liczb $\{\lambda, \mu\}$ i $\{\lambda', \mu'\}$ takie, że:

$$L_3 = H(\lambda \cdot u_0 + \mu \cdot v_0, \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1, \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2),$$

$$L_4 = H(\lambda' \cdot u_0 + \mu' \cdot v_0, \lambda' \cdot u_1 + \mu' \cdot v_1, \lambda' \cdot u_2 + \mu' \cdot v_2).$$

By obliczyć dwustosunek $(L_1, L_2; L_3, L_4)$, należy przeciąć proste L_1, L_2, L_3, L_4 przy pomocy prostej nie należącej do pęku i obliczyć dwustosunek otrzymanej czwórki punktów. Co najmniej jedna z prostych

$x_0=0, x_1=0, x_2=0$ nie należy do pęku. Ze względu na symetryczną rolę współrzędnych możemy przyjąć, że jest nią prosta $x_0=0$. Oznaczając przez p_i punkt jej przecięcia z prostą L_i , mamy:

$$p_1 = \{0, u_2, -u_1\}; \quad p_2 = \{0, v_2, -v_1\}; \quad p_3 = \{0, \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2, -\lambda \cdot u_1 - \mu \cdot v_1\}; \\ p_4 = \{0, \lambda' \cdot u_2 + \mu' \cdot v_2, -\lambda' \cdot u_1 - \mu' \cdot v_1\},$$

skąd natychmiast

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\lambda' \cdot \mu}{\lambda \cdot \mu'},$$

co jest równe dwustosunkowi punktów:

$$p(u_0, u_1, u_2), \quad p(v_0, v_1, v_2), \quad p(\lambda \cdot u_0 + \mu \cdot v_0, \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1, \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2), \\ p'(\lambda' \cdot u_0 + \mu' \cdot v_0, \lambda' \cdot u_1 + \mu' \cdot v_1, \lambda' \cdot u_2 + \mu' \cdot v_2).$$

Wynika stąd w szczególności, że *dwoistym odpowiednikiem czwórki harmonicznej prostych jest czwórka harmoniczna punktów* i na odwrót.

Chcąc otrzymać twierdzenie dwoiste do twierdzenia o czworoboku zupełnym, należy ponadto znaleźć dwoisty odpowiednik samego pojęcia czworoboku zupełnego, określonego w Nr 95.

Jest nim pojęcie *czworokąta zupełnego*, będącego figurą leżącą w płaszczyźnie P_2 i utworzoną przez cztery punkty, zwane jego *wierzchołkami*, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.

Łącząc parami wierzchołki, otrzymamy sześć prostych, zwanych *bokami* czworokąta (rys. 68).

Przez każdy wierzchołek przechodzą trzy boki.

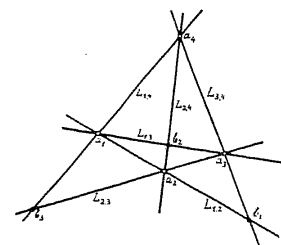
Boki te ponadto przecinają się w trzech punktach zwanych *punktami przekątnymi* czworokąta.

Stosując teraz zasadę dwoistości do twierdzenia z Nr 95 otrzymamy następujące

Twierdzenie. *Dwa boki czworokąta zupełnego, przecinające się w jednym z punktów przekątnowych p , oraz dwie proste łączące p z dwoma pozostałymi punktami przekątnowymi, tworzą czwórkę harmoniczną.*

ĆWICZENIA. 1. Dowieść twierdzenia o czworokącie zupełnym bez powoływania się na twierdzenie o czworoboku zupełnym.

2. Czym jest figura dwoista względem figury leżącej w przestrzeni P_n , złożonej z układu $n+1$ punktów liniowo niezależnych i wszystkich hiperpłaszczyzn wyznaczonych przez jego podukłady właściwe.



Rys. 68.

108^z. Twierdzenie Desargues'a. *Trójkątem pełnym* nazywa się figura złożona z trzech punktów nie leżących na jednej prostej czyli nie-spółliniowych (*wierzchołków*) i trzech prostych wyznaczonych przez pary tych punktów (*boków*).

Jasne jest, że figurą dwoistą w P_2 względem trójkąta pełnego jest trójkąt zupełny. Udowodnimy następujące

Twierdzenie (Desargues'a). *W płaszczyźnie P_2 dane są dwa trójkąty zupełne, mające odpowiednio jako wierzchołki punkty a_1, a_2, a_3 i a'_1, a'_2, a'_3 , zaś jako boki proste L_1, L_2, L_3 i L'_1, L'_2, L'_3 , przy czym oznaczenia są tak dobrane, że prosta L_i nie przechodzi nigdy przez wierzchołek a_i , zaś prosta L'_i przez wierzchołek a'_i dla $i=1, 2, 3$. Wówczas równoważne są sobie dwa następujące warunki:*

1° *Istnieje punkt c spółliniowy z każdą parą punktów a_i, a'_i dla $i=1, 2, 3$.*

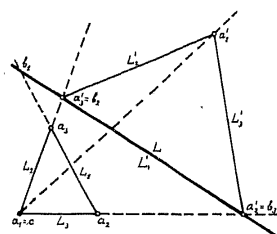
2° *Istnieje prosta L należąca wraz z każdą z par prostych L_i, L'_i , gdzie $i=1, 2, 3$, do jednego pęku.*

Dowód. Zauważmy, że twierdzenie orzekające, iż z 2° wynika 1°, jest dwoiste względem twierdzenia orzekającego, że z 1° wynika 2°. W myśl więc zasady dwoistości, równoważność między 1° i 2°, czyli twierdzenie Desargues'a, będzie udowodniona już z chwilą, gdy okażemy, że z 1° wynika 2°. W tym celu rozpatrzmy kolejno trzy przypadki:

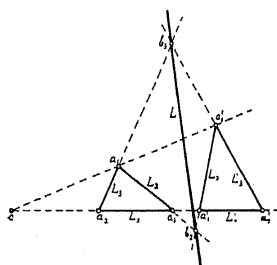
Przypadek pierwszy. Punkt c jest jednym z wierzchołków trójkątów, np. $c=a_1$ (rys. 69). Jasne jest wówczas, że prosta $L=L'_1$ spełnia warunek 2°.

Przypadek drugi. Punkt c jest różny od wszystkich wierzchołków, lecz leży na jednym z boków, np. $c \in L_1$ (rys. 70). Jasne jest, że warunek 2° spełniony jest wówczas przez prostą L przechodzącą przez punkt b_2 przecięcia prostych L_2 i L'_2 oraz punkt b_3 przecięcia prostych L_3 i L'_3 . Nie przesadzamy przy tym, czy punkty b_2 i b_3 są wyznaczone jednoznacznie i czy są różne.

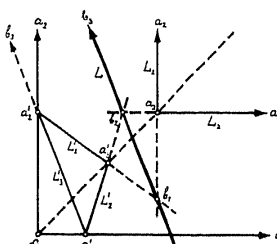
Przypadek trzeci. Położenie trójkątów nie podpada pod żaden z poprzednich dwóch



Rys. 69.



Rys. 70.



Rys. 71.

przypadków, ale istnieje punkt c spełniający 1° (rys. 71). Wówczas dla $i=1, 2, 3$ proste L_i oraz L'_i są różne (gdyż w przeciwnym razie zachodziłby przypadek drugi), zaś punkty c, a_1, a_2, a_3 są liniowo niezależne. Stosując twierdzenie z Nr 89 możemy poddać płaszczyznę P_2 odpowiedniemu przekształceniu rzutowemu i sprowadzić ten przypadek do przypadku, gdy:

$$c=\{1, 0, 0\}, \quad a_1=\{0, 1, 0\}, \quad a_2=\{0, 0, 1\}, \quad a_3=\{1, 1, 1\}.$$

Wobec warunku 1° istnieją wówczas liczby α, β, γ takie, że

$$a'_1=\{\alpha, 1, 0\}, \quad a'_2=\{\beta, 0, 1\}, \quad a'_3=\{\gamma, 1, 1\}.$$

Wówczas prosta L_1 ma równanie $x_0=x_1$, prosta zaś L'_1 — równanie $x_0+(\beta-\gamma)\cdot x_1-\beta\cdot x_2=0$. Proste te są przy tym różne, a więc jedynym ich punktem przecięcia jest punkt $b_1=\{\beta, \beta, \beta-\gamma+1\}$. Prosta L_2 ma równanie $x_0=x_2$, prosta zaś L'_2 — równanie $x_0-\alpha\cdot x_1+(\alpha-\gamma)\cdot x_2=0$. Ponieważ $L_2 \neq L'_2$, więc jedynym ich punktem przecięcia jest punkt $b_2=\{-\alpha, \gamma-\alpha-1, -\alpha\}$. Wreszcie prosta L_3 ma równanie $x_0=0$, zaś prosta L'_3 równanie $x_0-\alpha\cdot x_1-\beta\cdot x_2=0$. Wobec $L_3 \neq L'_3$ ich jedynym punktem przecięcia jest punkt $b_3=\{0, \beta, -\alpha\}$.

Aby zakończyć dowód twierdzenia, wystarczy okazać, że punkty b_1, b_2, b_3 są spółliniowe. Jest to jednak równoważne zanikaniu ich wyznacznika:

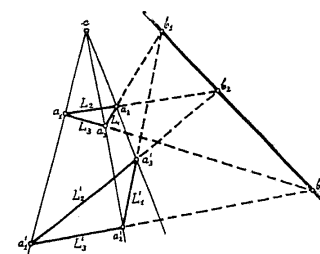
$$\begin{vmatrix} \beta & \beta & \beta-\gamma+1 \\ -\alpha & \gamma-\alpha-1 & -\alpha \\ 0 & \beta & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & 0 & -\gamma+1 \\ -\alpha & \gamma-1 & 0 \\ 0 & \beta & -\alpha \end{vmatrix} =$$

$$=-\alpha\cdot\beta\cdot(\gamma-1)-\alpha\cdot\beta\cdot(1-\gamma)=0.$$

W ten sposób dowód twierdzenia Desargues'a został zakończony.

Dodajmy, że teza twierdzenia Desargues'a pozostaje prawdziwa również wtedy, gdy trójkąty leżą w dowolnej przestrzeni P_n . Aby to udowodnić zauważmy, że zarówno warunek 1° jak i warunek 2° pociąga za sobą oczywiście, że oba trójkąty leżą w pewnej hiperpłaszczyźnie 3-wymiarowej. Możemy więc nie uszczuplając ogólności założyć, że oba trójkąty leżą w przestrzeni P_3 , nie leżąc jednak w jednej płaszczyźnie.

Jeżeli teraz spełniony jest warunek 1°, to proste L_i, L'_i leżą (wraz z punktem c) w jednej płaszczyźnie, a więc przecinają się w pewnym punkcie b_i (rys. 72). Wszystkie trzy punkty b_1, b_2, b_3



Rys. 72.

leżą na prostej L przecięcia się płaszczyzn obu trójkątów. A więc z 1° wynika 2° .

Jeżeli natomiast spełniony jest warunek 2° , to płaszczyzny trójkątów muszą przecinać się wzdłuż prostej L . Proste L_i oraz L'_i leżą wówczas w pewnej płaszczyźnie Π_i . Płaszczyzny Π_1, Π_2, Π_3 są parami różne, gdyby bowiem np. $\Pi_1 = \Pi_2$, to płaszczyzna ta zawierałaby oba trójkąty, wbrew założeniu. Niech c oznacza punkt wspólny płaszczyzn Π_1, Π_2, Π_3 . Wówczas prosta przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2 przechodzi przez punkty c, a_3 i a'_3 , prosta przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_3 przez c, a_2 i a'_2 , zaś prosta przecięcia płaszczyzn Π_2 i Π_3 przez c, a_1 i a'_1 . Warunek 1° jest zatem spełniony. Tak więc z 2° wynika 1° .

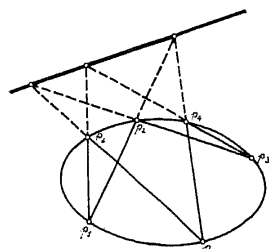
ĆWICZENIE. Niech $a_1, a_2, \dots, a_k$ oraz $a'_1, a'_2, \dots, a'_k$ będą dwoma liniowo niezależnymi układami punktów przestrzeni P_n . Czy prawdą jest, że jeśli istnieje punkt c spółliniowy z każdą z par a_i, a'_i , to istnieje prosta L , na której przecinają się proste $L_{i,j}$ oraz $L'_{i,j}$ ($i \neq j$), gdzie $L_{i,j}$ jest prostą łączącą punkty a_i, a_j , zaś $L'_{i,j}$ prostą łączącą a'_i, a'_j .

109^a. Twierdzenie Pascala. Na stożkowej zupełnej T danych jest 6 różnych punktów $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. Nazwijmy te punkty *wierzchołkami sześciokąta wpisanego w stożkową T* , a sześć prostych, z których każda łączy dwa kolejne wierzchołki (przy czym wierzchołek p_1 uważamy za następujący po p_6) nazwijmy *bokami tego sześciokąta*.

Bok łączący wierzchołek p_i z wierzchołkiem następnym (a więc z p_{i+1} , jeżeli $i < 6$, zaś z p_1 , jeżeli $i = 6$) oznaczamy przez L_i . Ponieważ żadne trzy punkty stożkowej zupełnej nie są spółliniowe, więc wszystkie proste L_i są różne.

Dwa boki L_i oraz L_j nazywają się *przeciwległymi*, jeżeli wskaźniki i i j różnią się o 3.

Mamy więc trzy pary boków przeciwległych: (L_1, L_4) , (L_2, L_5) oraz (L_3, L_6) . Udowodnimy następujące



Rys. 73.

Twierdzenie (Pascala). Trzy punkty przecięcia par boków przeciwległych sześciokąta wpisanego w stożkową leżą na jednej prostej (tzw. prostej Pascala).

Dowód. Stosując twierdzenie z Nr 89, możemy, przez dokonanie odpowiedniego przekształcenia rzutowego, sprowadzić przypadek ogólny (rys. 73) do przypadku, gdy: $p_1 = \{1, 0, 0\}$, $p_2 = \{0, 1, 0\}$, $p_3 = \{0, 0, 1\}$, $p_4 = \{1, 1, 1\}$.

Pozostałe punkty oznaczmy przez $p_5 = \{a_0, a_1, a_2\}$ i $p_6 = \{b_0, b_1, b_2\}$. Równanie stożkowej przechodzącej przez nie daje się napisać w postaci:

$$A_{0,0}x_0^2 + A_{1,1}x_1^2 + A_{2,2}x_2^2 + 2A_{0,1}x_0 \cdot x_1 + 2A_{0,2}x_0 \cdot x_2 + 2A_{1,2}x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Ze spełnienia go przez punkty p_1, p_2, p_3 wynika natychmiast, że $A_{0,0} = A_{1,1} = A_{2,2} = 0$, a więc równanie ma postać

$$A_{0,1}x_0 \cdot x_1 + A_{0,2}x_0 \cdot x_2 + A_{1,2}x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Spełnienie go przez punkty p_4, p_5, p_6 daje układ trzech równań liniowych jednorodnych względem liczb $A_{0,1}, A_{0,2}, A_{1,2}$, a ponieważ liczby te nie wszystkie znikają, więc wyznacznik tego układu jest równy zeru, czyli

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 \cdot a_1 & a_0 \cdot a_2 & a_1 \cdot a_2 \\ b_0 \cdot b_1 & b_0 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= a_2 b_0 b_1 \cdot (a_1 - a_0) + a_1 b_0 b_2 \cdot (a_0 - a_2) + a_0 b_1 b_2 (a_2 - a_1) = 0.$$

Boki L_1 i L_4 mają odpowiednio równania

$$x_2 = 0 \quad \text{i} \quad (a_2 - a_1) \cdot x_0 + (a_0 - a_2) \cdot x_1 + (a_1 - a_0) \cdot x_2 = 0,$$

a więc ich punktem przecięcia jest punkt $q_1 = \{a_2 - a_0, a_2 - a_1, 0\}$.

Boki L_2 i L_5 mają równania

$$x_0 = 0 \quad \text{i} \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot x_0 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) \cdot x_1 + (a_0 b_1 - a_1 b_0) \cdot x_2 = 0,$$

a więc jako punkt przecięcia mają $q_2 = \{0, a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_1, a_2 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_2\}$.

Wreszcie boki L_3 i L_6 mają równania

$$x_0 - x_1 = 0 \quad \text{i} \quad b_2 x_1 - b_1 x_2 = 0,$$

a więc przecinają się w punkcie $q_3 = \{b_1, b_1, b_2\}$. Pozostaje okazać, że punkty q_1, q_2, q_3 są spółliniowe, czyli że znika wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_0 & a_2 - a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \cdot (a_2 - a_0) \cdot b_0 \cdot b_2 - a_0 \cdot (a_2 - a_0) \cdot b_1 \cdot b_2 - a_2 (a_2 - a_0) \cdot b_0 \cdot b_1 +$$

$$+ a_0 \cdot (a_2 - a_0) \cdot b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot (a_2 - a_1) \cdot b_0 \cdot b_1 - a_0 \cdot (a_2 - a_1) \cdot b_1 \cdot b_2 =$$

$$= a_1 \cdot (a_2 - a_0) \cdot b_0 \cdot b_2 + a_2 \cdot (a_0 - a_1) \cdot b_0 \cdot b_1 + a_0 \cdot (a_1 - a_2) \cdot b_1 \cdot b_2.$$

To ostatnie wyrażenie znika jednak ze względu na (3). W ten sposób twierdzenie Pascala zostało dowiedzione.

ĆWICZENIE. W płaszczyźnie P_2 danych jest 5 punktów: p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 . Okazać, że istnieje co najwyżej jedna stożkowa przechodząca przez wszystkie te punkty. Jeśli stożkowa taka istnieje, to podać konstrukcję, pozwalającą przy pomocy liniału znaleźć punkty jej przecięcia z dowolnie daną prostą przechodzącą przez którykolwiek z punktów p_i .

110^z. Styczne do stożkowej i twierdzenie Brianchona. W geometrii elementarnej prostą mającą dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem i leżącą w jego płaszczyźnie nazywamy styczną. Przenosząc tę definicję na dowolne stożkowe, nazywamy *styczną do stożkowej* TCP_2 każdą prostą płaszczyzny P_2 , mającą z T dokładnie jeden punkt wspólny.

Jasne jest, że pojęcie to ma charakter rzutowy, a więc przy przekształceniu okręgu na stożkową T zbiór stycznych do okręgu przejdzie na zbiór stycznych do stożkowej T .

Niech teraz S będzie okręgiem w płaszczyźnie C_2 mającym środek 0 i promień 1. Równanie jego w płaszczyźnie P_2 ma postać:

$$(4) \quad x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0.$$

Styczne są identyczne z prostymi przechodzącymi w odległości 1 od środka 0, a więc (z uwagi na Nr 27) z prostymi, których równania w C_2 mają postać $u_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0$, gdzie $\frac{u_0}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \pm 1$, czyli postać $u_1^2 + u_2^2 - u_0^2 = 0$. Wynika stąd, że w płaszczyźnie P_2 styczne do okręgu S są identyczne z prostymi

$$(5) \quad u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0,$$

których współczynniki u_0, u_1, u_2 spełniają warunek

$$(6) \quad u_1^2 + u_2^2 - u_0^2 = 0.$$

Widzimy więc, że styczne do okręgu S o równaniu (4) są scharakteryzowane spełnieniem równania (6) przez ich współrzędne Plückera. Poddając płaszczyznę P_2 przekształceniu rzutowemu $f(\{x_0, x_1, x_2\}) = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}$, gdzie zależność między współrzędnymi x_i i $\bar{x}_i$ określona jest przez wzory:

$$(7) \quad x_i = a_{i,0} \cdot \bar{x}_0 + a_{i,1} \cdot \bar{x}_1 + a_{i,2} \cdot \bar{x}_2 \quad \text{dla } i=0, 1, 2,$$

możemy okrąg S przekształcić na dowolnie daną stożkową T . Równanie stycznych do T otrzymamy podstawiając (7) do (5), przy zachowaniu warunku (6). Otrzymamy:

$$u_0 \cdot \sum_{j=0}^2 a_{0,j} \cdot \bar{x}_j + u_1 \cdot \sum_{j=0}^2 a_{1,j} \cdot \bar{x}_j + u_2 \cdot \sum_{j=0}^2 a_{2,j} \cdot \bar{x}_j = 0,$$

czyli postaci $\bar{u}_0 \cdot \bar{x}_0 + \bar{u}_1 \cdot \bar{x}_1 + \bar{u}_2 \cdot \bar{x}_2 = 0$, gdzie

$$(8) \quad \bar{u}_j = a_{0,j} \cdot u_0 + a_{1,j} \cdot u_1 + a_{2,j} \cdot u_2 \quad \text{dla } j = 0, 1, 2.$$

Rozwiązując równania (8) względem u_0, u_1, u_2 , znajdujemy:

$$(9) \quad u_i = \sum_{j=0}^2 a_{i,j} \cdot \bar{u}_j;$$

a więc warunek (6), charakteryzujący styczne, przybierze postać:

$$(10) \quad \left(\sum_{j=0}^2 a_{0,j} \cdot \bar{u}_j \right)^2 + \left(\sum_{j=0}^2 a_{1,j} \cdot \bar{u}_j \right)^2 - \left(\sum_{j=0}^2 a_{2,j} \cdot \bar{u}_j \right)^2 = 0.$$

Ponieważ równanie (3) jest względem współrzędnych u_0, u_1, u_2 równaniem okręgu, więc równanie (10) jest równaniem pewnej stożkowej otrzymanej z tego okręgu przez przekształcenie rzutowe, określone wzorami (9). Ponieważ jednak przekształcenie to jest zupełnie dowolne (gdyż dowolne było przekształcenie rzutowe f), więc wnosimy stąd, że na to, by zbiór prostych był rodziną stycznych do pewnej stożkowej T , potrzeba i wystarcza, by ich współrzędne Plückera spełniały równanie pewnej (na ogół innej) stożkowej T^* .

Inaczej mówiąc, *tworem dwoistym do danej stożkowej T jest zbiór stycznych do pewnej stożkowej T^** . Równanie w współrzędnych Plückera, charakteryzujące zbiór stycznych stożkowej T , nazywa się *równaniem tangencjalnym* tej stożkowej.

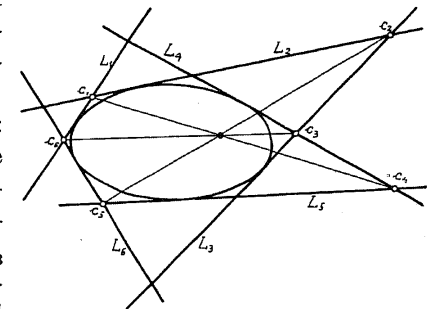
Jeśli teraz zastosujemy zasadę dwoistości do twierdzenia Pascala z Nr 109, to wierzchołkom $p_1, p_2, \dots, p_6$ sześciokąta wpisanego w stożkową T odpowiadać będą styczne $L_1, L_2, \dots, L_6$ do stożkowej T^* , będące bokami tzw. *sześcioboku opisanego na T^** .

Żadne trzy spośród tych boków nie przechodzą przez jeden punkt, gdyż żadne trzy punkty spośród wierzchołków nie były współliniowe. Bokom sześciokąta odpowiadają punkty c_i przecięcia par kolejnych boków sześcioboku L_i i L_{i+1} , przy czym L_7 uważamy za identyczne z L_1 .

Punkty $c_1, c_2, \dots, c_6$ nazywamy *wierzchołkami sześcioboku opisanego*.

Parze boków przeciwnych sześciokąta odpowiada para *przeciwnych wierzchołków* sześcioboku (rys. 74).

Mamy więc trzy takie pary: $(c_1, c_4), (c_2, c_5), (c_3, c_6)$. Trzy proste L_1, L_2, L_3 , łączące pary wierzchołków przeciwnych, odpowiadają trzem punktom q_1, q_2, q_3 przecięcia par boków przeciwnych sześciokąta. W myśl twierdzenia Pascala punkty $q_1,$



Rys. 74.

q_2, q_3 leżą na jednej prostej, a więc dwoiste do nich proste L_1, L_2, L_3 przechodzą przez jeden punkt. W ten sposób zastosowanie zasady dwoistości do twierdzenia Pascala doprowadziło nas do twierdzenia następującego:

Twierdzenie (Brianchona). *Trzy proste łączące pary przeciwległych wierzchołków sześcioboku opisanego na krzywej drugiego stopnia przecinają się w jednym punkcie.*

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć równanie w współrzędnych Plückera zbioru stycznych do elipsy o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_0^2 = 0$.

2. Okazać, że jeżeli kwadryka zupełna nie zawiera tworzących prostoliniowych, to przez każdy jej punkt przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna, która ma z tą kwadryką tylko ten punkt wspólny (*płaszczyzna styczna*).

Znaleźć równanie w współrzędnych Plückera zbioru płaszczyzn stycznych do powierzchni $x_1^2 - 4x_2^2 - 9x_3^2 - x_0^2 = 0$.

3. Okazać, że teza twierdzenia Pascala pozostanie prawdziwa również wtedy, gdy wśród punktów leżących na stożkowej $p_1, p_2, \dots, p_6$ dwa kolejne, np. p_6 i p_1 , pokrywają się, a rolę boku łączącego wierzchołki p_6 i p_1 przejmie styczna do stożkowej w punkcie p_1 .

4. Okazać, że jeśli stożkowa przechodzi przez trzy wierzchołki trójkąta, to styczne do niej w tych wierzchołkach przecinają się z bokami przeciwległymi trójkąta w trzech punktach spółliniowych.

ROZDZIAŁ XIV.

Przestrzeń Möbiusa

111. Sfery w przestrzeniach kartezjańskich. Przez *sferę k -wymiarową* rozumiemy figurę izometryczną ze zbiorem punktów przestrzeni C_{k+1} , określonym przez równanie

$$(1) \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2} = r,$$

gdzie r jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Dla $r < 0$ zbiór ten jest pusty, zaś dla $r = 0$ redukuje się do jednego tylko punktu bez względu na wymiar k .

W tych przypadkach mówimy o sferach *zdegenerowanych*.

Jeżeli $r \geq 0$, równanie (1) jest równoważne równaniu

$$(2) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2.$$

Jeżeli $r > 0$, to prosta przechodząca przez początek układu przecina sferę o równaniu (2) w dwóch punktach, skąd na mocy wniosku 2 z Nr 63 wynika, że sfery niezdegenerowane k -wymiarowe, leżące w C_{k+1} , są tworami drugiego stopnia.

Zauważmy, że sfery k -wymiarowe w C_{k+1} są identyczne ze zbiorami punktów, których odległość od stałego punktu $a = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$, zwanego *środkiem*, jest stała.

Istotnie, wobec doskonałej jednorodności przestrzeni kartezjańskich (Nr 49), izometrię sfery S leżącej w C_{k+1} ze zbiorem określonym przez równanie (1) można rozszerzyć do izometrii przekształcającej całą przestrzeń C_{k+1} na siebie. Jeżeli $a = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ jest punktem, który przejdzie przy tym na 0, to sfera S jest identyczna ze zbiorem punktów leżących w odległości r od a , czyli ze zbiorem określonym przez równanie

$$(3) \quad \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_{k+1} - a_{k+1})^2} = r.$$

Z drugiej strony, zbiór punktów przestrzeni C_{k+1} , leżących w odległości r od punktu a , jest określony przez równanie (3). Przesunięcie $f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_{k+1} - a_{k+1})$ przekształca ten zbiór

na sferę określoną przez równanie (1). W szczególności więc k -wymiarowe sfery niezdegenerowane, leżące w C_{k+1} , są identyczne ze zbiorami określonymi przez równanie

$$(4) \quad (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_{k+1} - a_{k+1})^2 = r^2.$$

Niech S będzie sferą k -wymiarową w przestrzeni C_n , a więc zbiorem przystającym do leżącej w $C_{n,k+1}$ sfery S_0 określonej przez równanie (1).

Okazemy, że jeżeli $r \geq 0$, to punkt 0 jest jedynym środkiem symetrii dla S_0 . Jasne jest, że 0 jest środkiem symetrii, jeżeli zaś punkt $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ jest też środkiem symetrii dla S_0 , to dla każdego punktu $p \in S_0$ punkt $q = 2c - p$, symetryczny do p względem c , musiałby też należeć do S_0 . Stąd wynika od razu, że $c_i = 0$ dla $i > k+1$, czyli $c \in C_{n,k+1}$. Niech teraz L będzie prostą leżącą w $C_{n,k+1}$, przechodzącą przez 0 i c . Prosta L przecina S_0 w dwóch punktach symetrycznych względem 0, a więc będących postaci p i $-p$ (i pokrywających się, jeżeli $r = 0$). Ponieważ c jest środkiem symetrii, więc $c = \frac{p + (-p)}{2} = 0$, co było do okazania.

Wobec doskonałej jednorodności przestrzeni C_n (Nr 49), istnieje izometria f przekształcająca C_n na siebie i taka, że $f(S_0) = S$. Wynika stąd, że również S ma dokładnie jeden środek symetrii.

A więc każda sfera k -wymiarowa S niepusta ma dokładnie jeden środek symetrii.

Nazywać go będziemy krótko *środkiem sfery S* .

Odległość środka od punktów sfery S nazywa się *promieniem sfery*.

Dla sfer pustych ani środek, ani promień (ujemny) nie są jednoznacznie wyznaczone.

Zauważmy, że każda k -wymiarowa sfera niezdegenerowana zawiera układ złożony z $k+1$ punktów liniowo niezależnych. Istotnie, liniowo niezależne punkty $p_i = r \cdot (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_{k+1}^i)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, (k+1)$, spełniają równanie (2). Wynika stąd, że k -wymiarowa sfera niezdegenerowana S wyznacza zawierającą ją $(k+1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę $C(S)$ oraz że wymiar sfery niezdegenerowanej jest jej niezmiennikiem metrycznym.

Zauważmy poza tym, że figura podobna do sfery jest zawsze sferą tego samego wymiaru. Na odwrót, dwie sfery niezdegenerowane tego samego wymiaru są zawsze podobne, przy czym współczynnikiem podobieństwa jest iloraz ich promieni.

Twierdzenie. Część wspólna sfery $(n-1)$ -wymiarowej SCC_n z hiperpłaszczyzną k -wymiarową HCC_n lub ze sferą k -wymiarową S' leżącą w C_n , lecz nie zawartą w S , jest sferą $(k-1)$ -wymiarową.

Dowód. Możemy ograniczyć się do rozpatrzenia przypadku, gdy sfera S nie jest zdegenerowana. Nie zmniejszając ogólności rozważań, przyjąć możemy poza tym, że $H = C_{n,k}$ i że sfera S jest określona przez równanie:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2.$$

Wynika stąd, że $H \cdot S$ pokrywa się ze zbiorem punktów leżących w $C_{n,k}$ i spełniających równanie:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_k - a_k)^2 = r^2 - a_{k+1}^2 - \dots - a_n^2,$$

a więc jest sferą $(k-1)$ -wymiarową.

Niech teraz S' będzie sferą k -wymiarową leżącą w C_n i nie zawartą w S . Możemy znowu założyć, że sfera S' nie jest zdegenerowana, w przeciwnym bowiem razie twierdzenie staje się oczywiste. Wobec tego zbiór $H' = C(S')$ jest hiperpłaszczyzną $(k+1)$ -wymiarową, przecinającą S wzdłuż pewnej różnej od S' sfery k -wymiarowej S'' . Dowód więc twierdzenia będzie zakończony z chwilą, gdy okażemy, że dwie różne k -wymiarowe sfery S' i S'' , leżące w przestrzeni kartezjańskiej $(k+1)$ -wymiarowej C_{k+1} , przecinają się zawsze wzdłuż pewnej sfery $(k-1)$ -wymiarowej. Możemy przyjąć, że sfery S' i S'' określone są przez równania

$$\sum_{i=1}^{k+1} (x_i - a_i')^2 = r'^2 \quad \text{ i } \quad \sum_{i=1}^{k+1} (x_i - a_i'')^2 = r''^2.$$

Dla punktów ich części wspólnej spełnione jest wówczas równanie stopnia co najwyżej pierwszego:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{k+1} (a_i'' - a_i') \cdot x_i + \sum_{i=1}^{k+1} (a_i'^2 - a_i''^2) - r'^2 + r''^2 = 0,$$

nie będące tożsamością, gdyż sfery S' i S'' są różne. Równanie to jest więc albo sprzeczne — a wówczas część wspólna sfer S' i S'' jest pusta czyli jest sferą $(k-1)$ -wymiarową o promieniu ujemnym — albo jest ono równaniem pewnej k -wymiarowej hiperpłaszczyzny przecinającej S' i S'' wzdłuż pewnej $(k-1)$ -wymiarowej sfery, będącej ich częścią wspólną. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Wniosek. Przecięcie sfery k -wymiarowej SCC_n ze sferą l -wymiarową $S'CC_n$ lub z hiperpłaszczyzną l -wymiarową HCC_n jest sferą o wymiarze $m \geq k+l-n$.

Istotnie, hiperpłaszczyzny $H = C(S)$ i $H' = C(S')$ mają na mocy twierdzenia z Nr 32 jako część wspólną albo pewną hiperpłaszczyznę H^* o wymiarze $l^* \geq k+1+l+1-n = k+l+2-n$, albo zbiór pusty. W myśl ostatniego twierdzenia zbiory $H^* \cdot S$ i $H^* \cdot S'$ są (l^*-1) -wymiarowymi

sferami, położonymi w l^* -wymiarowej przestrzeni H^* , a więc ich przecięcie jest sferą o wymiarze $m \geq l^* - 2 \geq k + l - n$, przy czym $m > l^* - 2$, gdy sfery $H^* \cdot S$ i $H^* \cdot S'$ się pokrywają. Ale część wspólna sfer $H^* \cdot S$ i $H^* \cdot S'$ jest identyczna z częścią wspólną sfer S i S' , a więc spełnia ona tezę wniosku.

Podobnie $S \cdot \bar{H} = S \cdot (H \cdot \bar{H})$, a ponieważ $H \cdot \bar{H}$ jest (w myśl twierdzenia z Nr 32) hiperpłaszczyzną o wymiarze $\bar{l} \geq k + l + 1 - n$ (lub zbiorem pustym), więc w myśl ostatniego twierdzenia zbiór $S \cdot \bar{H}$ jest sferą o wymiarze $m = \bar{l} - 1 \geq k + l - n$.

ĆWICZENIA. 1. Opierając się na ostatnim twierdzeniu okazać, że jeśli płaszczyzna Π ma z kwadryką Q , nie zawierającą tworzących prostoliniowych, co najmniej dwa punkty wspólne, to $\Pi \cdot Q$ jest stożkową. Wywnioskować stąd, jakie krzywe można otrzymać przecinając płaszczyznę: 1° elipsoidą, 2° paraboloidą eliptyczną, 3° hiperboloidą dwupowłokową.

2. Okazać, że przez $n+1$ punktów liniowo niezależnych przestrzeni C_n przechodzi dokładnie jedna sfera $(n-1)$ -wymiarowa. Znaleźć jej równanie.

112. Hiperpłaszczyzna jako graniczny przypadek sfery. Rozważania Nr 111 okazały, że w pewnych sytuacjach istnieje wyraźne podobieństwo między własnościami sfer i hiperpłaszczyzn. Na istotę tego podobieństwa rzuca pewne światło uwaga następująca:

Niech S będzie sferą $(n-1)$ -wymiarową, przechodzącą przez punkt $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i mającą środek w punkcie $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Równanie jej ma postać:

$$(p-c)^2 = (a-c)^2.$$

Zachowując punkt a bez zmiany, zaczniemy przesuwać środek sfery wzdłuż prostej łączącej a i c , czyli zastąpimy w równaniu ostatnim punkt c przez punkt $c_t = a + t \cdot (c-a)$. Otrzymamy sferę S_t o równaniu

$$[p-a-t \cdot (c-a)]^2 = t^2 \cdot (c-a)^2,$$

które daje się też napisać w postaci $(p-a)^2 - 2t \cdot (p-a) \cdot (c-a) = 0$, czyli (dla $t \neq 0$) w postaci $\frac{(p-a)^2}{2t} - (p-a) \cdot (c-a) = 0$. Zauważmy, że przy $|t|$ wzrastającym nieograniczenie, tj. przy nieograniczonym oddalaniu się środka c_t czyli nieograniczonym wzroście promienia sfery, lewa strona ostatniego równania dążyć będzie do wyrażenia $(a-c) \cdot (p-a)$. To uzasadnia uważanie hiperpłaszczyzny $(n-1)$ -wymiarowej o równaniu

$$(a-c) \cdot (p-a) = 0$$

za sferą o nieskończenie wielkim promieniu (za której środek można by

uważać punkt niewłaściwy, leżący na prostej łączącej punkty a i c , czyli mającej kierunek prostopadły do tej hiperpłaszczyzny).

Z tego powodu wyrazu *sfera* będziemy w dalszym ciągu tego rozdziału używać w znaczeniu szerszym niż dotychczas, obejmując tą nazwą prócz sfer w dotychczasowym sensie również hiperpłaszczyzny, o których mówić będziemy, że są *sferami o promieniu nieskończonym*.

Tak więc prostą uważać będziemy za jednowymiarową sferą o promieniu nieskończonym, płaszczyznę — za dwuwymiarową sferą o promieniu nieskończonym itd. Ten sposób mówienia pozwoli twierdzenie i wniosek z Nr 111 oraz twierdzenie z Nr 32 objąć wspólnym sformułowaniem następującym:

Twierdzenie. Część wspólna dwóch leżących w przestrzeni C_n sfer: k -wymiarowej S i l -wymiarowej S' (o promieniach skończonych lub nie) jest sferą o wymiarze $m \geq k + l - n$.

Jeżeli S nie jest podzbiorem S' oraz $l = n-1$, to $S \cdot S'$ jest sferą $(k-1)$ -wymiarową.

ĆWICZENIE. Okazać, że przez każdy układ złożony z $n+1$ punktów przestrzeni C_n przechodzi co najmniej jedna sfera $(n-1)$ -wymiarowa. Kiedy sfer takich jest więcej niż jedna?

113. Rzut stereograficzny. W przestrzeni C_{n+1} weźmy pod uwagę n -wymiarową sferę S_n o środku $c = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{r}{2}\right)$ i promieniu $\frac{r}{2}$. Równanie jej ma postać

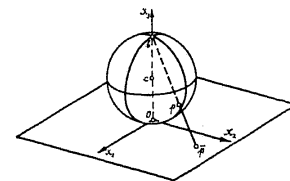
$$(5) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1} \cdot (x_{n+1} - r) = 0.$$

Początek układu współrzędnych jest jedynym punktem wspólnym sfery S_n z n -wymiarową hiperpłaszczyzną $C_{n+1,n}$. Punkty $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ tej hiperpłaszczyzny identyfikować będziemy z punktami $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ przestrzeni C_n .

Punkt $b = (0, 0, \dots, 0, r) \in S_n$ nazywamy *biegunem*.

Jasne jest, że dla każdego punktu $p = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S_n$ — (b) jest $0 \leq x_{n+1} < r$. Przyporządkujemy każdemu takiemu punktowi p (rys. 75) punkt $\bar{p} = \sigma(p)$, w którym prosta łącząca b i p przecina $C_{n+1,n}$ (czyli C_n).

Prosta ta składa się z punktów postaci $b + t \cdot (p-b)$, a punkt $\bar{p}$ otrzymamy wówczas, gdy $r + t \cdot (x_{n+1} - r) = 0$, czyli gdy $t = \frac{r}{r - x_{n+1}}$. Stąd



Rys. 75.

$$(6) \quad \sigma(p) = b + \frac{r}{r - x_{n+1}} \cdot (p - b) = \frac{p \cdot r - b \cdot x_{n+1}}{r - x_{n+1}}.$$

Funkcja σ , która każdemu $p = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S_n - (b)$ przyporządkowuje punkt $\sigma(p) = \bar{p} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in C_n$, nazywa się *rzutem stereograficznym* sfery S_n na C_n .

Rzut stereograficzny jest więc analitycznie określony przez wzór:

$$(7) \quad \sigma(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \text{ gdzie } \bar{x}_i = \frac{r \cdot x_i}{r - x_{n+1}}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Na odwrót, każdy punkt $\bar{p} \in C_n$ przyporządkowany jest przez σ dokładnie jednemu punktowi $p \in S_n - (b)$. Istotnie, wzory (5) i (7) dają:

$$\left(\frac{r - x_{n+1}}{r}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + x_{n+1} \cdot (x_{n+1} - r) = 0,$$

co w zakresie liczb x_{n+1} mniejszych od r daje na x_{n+1} jedną tylko wartość:

$$x_{n+1} = \frac{r \cdot \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2}{r^2 + \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2} = \frac{r \cdot \bar{p}^2}{r^2 + \bar{p}^2}.$$

Z zależności (6) znajdujemy poza tym $p = \frac{1}{r} [b \cdot x_{n+1} + \bar{p} \cdot (r - x_{n+1})]$,

co po podstawieniu otrzymanej wartości na x_{n+1} daje:

$$(8) \quad p = \sigma_{-1}(\bar{p}) = \frac{b \cdot \bar{p}^2 + \bar{p} \cdot r^2}{r^2 + \bar{p}^2},$$

gdzie σ_{-1} oznacza przekształcenie odwrotne względem rzutu stereograficznego σ .

ĆWICZENIE. W przestrzeni C_{n+1} dana jest sfera n -wymiarowa S o środku c i promieniu r , punkt $b \in S$ oraz n -wymiarowa hiperplaszczyna H o równaniu

$$A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_{n+1} \cdot x_{n+1} = 0.$$

Przekształcenie f przyporządkowuje każdemu punktowi $p \in S - (b)$ punkt $f(p)$, w którym prosta łącząca b i p przecina H . Znaleźć analityczną postać przekształcenia f i przekształcenia odwrotnego f_{-1} .

114. Konformiczność rzutu stereograficznego. Niech $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ będzie dowolnym punktem stałym przestrzeni C_n (gdzie $n > 0$), zaś $\bar{p}$ i $\bar{q}$ dwoma różnymi punktami tej przestrzeni. Biorąc $\lambda = \varrho(\bar{p}, \bar{q})$, możemy

$\bar{q}$ przedstawić w postaci $\bar{q} = \bar{p} + \lambda \cdot \alpha$, gdzie α jest wersorem wektora $\overrightarrow{\bar{p}\bar{q}}$. Mamy więc

$$(9) \quad \alpha^2 = 1; \quad b^2 = r^2; \quad (\alpha) \cdot b = \bar{p} \cdot b = 0.$$

Okazemy, że gdy oba punkty $\bar{p}$ i $\bar{q}$ zbliżają się do punktu $\bar{a}$, a więc gdy ich odległość λ dąży do zera, to stosunek do λ odległości punktów p i q takich, że $\sigma(p) = \bar{p}$ i $\sigma(q) = \bar{q}$, ma granicę różną od zera i zależną jedynie od $\bar{a}$ (a więc niezależną od sposobu, w jaki $\bar{p}$ i $\bar{q}$ dążą do $\bar{a}$).

Własność rzutu stereograficznego σ , polegająca na istnieniu takiej granicy dla każdego punktu $\bar{a} \in C_n$, wyrażamy mówiąc, że *rzut stereograficzny jest przekształceniem konformicznym zbioru $S_n - (b)$ na hiperplaszczynę C_n* .

Wobec wzoru (8) mamy:

$$p = \frac{b \cdot \bar{p}^2 + \bar{p} \cdot r^2}{r^2 + \bar{p}^2}, \quad q = \frac{b \cdot (\bar{p} + \lambda \cdot (\alpha))^2 + (\bar{p} + \lambda(\alpha)) r^2}{r^2 + (\bar{p} + \lambda(\alpha))^2}.$$

Stąd drogą prostego rachunku, znajdujemy:

$$p - q = \frac{\lambda \cdot r^2}{(r^2 + \bar{p}^2) \cdot (r^2 + \bar{p}^2 + \lambda^2 + 2\lambda \cdot (\alpha) \cdot \bar{p})} \cdot [(\lambda^2(\alpha) \cdot \bar{p} + \lambda) \cdot (\bar{p} - b) - (r^2 + \bar{p}^2) \cdot (\alpha)],$$

skąd po podniesieniu do kwadratu i uwzględnieniu zależności (9) otrzymujemy:

$$\varrho(p, q)^2 = \frac{\lambda^2 \cdot r^4}{(r^2 + \bar{p}^2)^2 \cdot (r^2 + \bar{p}^2 + \lambda^2 + 2\lambda \cdot (\alpha) \cdot \bar{p})^2} \cdot (r^2 + \bar{p}^2) \cdot (r^2 + \bar{p}^2 + \lambda^2 + 2 \cdot \lambda(\alpha) \cdot \bar{p}),$$

czyli

$$\left(\frac{\varrho(p, q)}{\lambda}\right)^2 = \frac{r^4}{(r^2 + \bar{p}^2) \cdot (r^2 + \bar{p}^2 + \lambda^2 + 2\lambda \cdot (\alpha) \cdot \bar{p})},$$

co dla $\bar{p}$ i $\bar{q}$ dążących do $\bar{a}$, a więc dla λ dążącego do zera, dąży do $\frac{r^4}{(r^2 + \bar{p}^2)^2}$. Wynika stąd, że iloraz $\frac{\varrho(p, q)}{\lambda}$ dla $\bar{p}$ i $\bar{q}$ dążących do $\bar{a}$ dąży do $\frac{r^2}{r^2 + \bar{p}^2}$, co było do okazania.

Udowodniona własność pociąga za sobą, że przy rzucie stereograficznym odległości punktów wprawdzie ulegają zmianom, jeżeli jednak ograniczymy się do dostatecznie małego otoczenia dowolnie obranego punktu, to odległości wszystkich punktów leżących w tym otoczeniu zmieniają się w przybliżeniu w tym samym stosunku. Tej okoliczności zawdzięcza rzut stereograficzny swe zastosowanie w kartografii, gdzie chodzi

o przedstawienie obszaru leżącego na powierzchni ziemi (będącej w przybliżeniu sferą S_2) za pomocą rysunku płaskiego. Bliższe badanie przekształceń konformicznych należy do geometrii różniczkowej i teorii funkcji analitycznych.

ĆWICZENIE. Okazać, że przekształcenie afiniczne przestrzeni C_n na siebie jest konformiczne wtedy i tylko wtedy, gdy jest podobieństwem.

115. Przestrzenie Möbiusa. Ze wzoru (7) wynika, że odległość $\varrho(\bar{p}, 0)$ punktu $\bar{p}$ od początku układu współrzędnych wyraża się wzorem:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2} = \frac{r}{r-x_{n+1}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{r}{r-x_{n+1}} \sqrt{x_{n+1} \cdot (r-x_{n+1})} = \frac{r \cdot \sqrt{x_{n+1}}}{\sqrt{r-x_{n+1}}},$$

a stąd wynika, że ze zbliżaniem się punktu p do bieguna b punkt $\bar{p}$ oddala się nieograniczenie od początku układu.

Z tego względu jest rzeczą intuicyjnie uzasadnioną, a dla rozbudowy pojęć geometrycznych celową, uzupełnić przestrzeń kartezjańską C_n o wymiarze $n > 0$ przez dodatkowy punkt p_∞ , zwany *punktem w nieskończoności*, który uważać będziemy za obraz bieguna b .

Uzupełnienie takie różni się (dla $n > 1$) od tego, z którym mieliśmy do czynienia przy przejściu od przestrzeni kartezjańskich C_n do rzutowych P_n . Dołączony punkt jest teraz tylko jeden i zamyka on niejako przestrzeń kartezjańską, upodabniając ją w pewnym sensie do sfery n -wymiarowej S_n , której tak uzupełniona przestrzeń jest obrazem wzajemnie jednoznaczny. Otrzymałą w ten sposób przestrzeń nazywamy *n -wymiarową przestrzenią Möbiusa*; oznaczać ją będziemy przez M_n . Odnosi się to do wymiaru $n \geq 1$. W przypadkach $n = -1$ i $n = 0$ przyjmujemy $M_{-1} = C_{-1}$ i $M_0 = C_0$.

Za proste w przestrzeni M_n i ogólniej, za hiperpłaszczyzny k -wymiarowe w tej przestrzeni można by uważać proste i hiperpłaszczyzny kartezjańskie, uzupełnione (jeżeli wymiar ich jest dodatni) przez punkt w nieskończoności.

Bardziej jednak celowe jest wprowadzenie zamiast pojęcia hiperpłaszczyzn ogólniejszego pojęcia sfer k -wymiarowych, przy czym — zgodnie z Nr 112 — za *sferę w przestrzeni Möbiusa* uważamy sferę przestrzeni kartezjańskiej o promieniu skończonym oraz sferę o promieniu nieskończonym, uzupełnioną punktem w nieskończoności.

Zbiór złożony z samego punktu p_∞ uważamy (podobnie jak każdy inny zbiór jednopunktowy) za *sferę zdegenerowaną*.

Możemy też uważać, że przestrzeń M_n powstaje z przestrzeni P_n przez zidentyfikowanie wszystkich punktów niewłaściwych.

Wynika stąd, że *prosta Möbiusa* M_1 nie różni się od prostej rzutowej P_1 , natomiast *płaszczyzna Möbiusa* M_2 (identyczna z punktu widzenia topologii ze sferą S_2) jest różna od płaszczyzny rzutowej P_2 .

Wynika stąd dalej, że każde przekształcenie f przestrzeni P_n na siebie, przy którym punkty niewłaściwe przechodzą na punkty niewłaściwe, uważane być może za przekształcenie przestrzeni M_n na siebie.

W szczególności pozwala to nam mówić o *przekształceniach afinicznych*, a więc i o *przekształceniach izometrycznych* przestrzeni M_n na siebie.

ĆWICZENIE. Zauważyć, że w płaszczyźnie Möbiusa M_2 hiperbola uzupełniona punktem p_∞ przybiera postać przypominającą (z punktu widzenia topologii) lemniskatę (z Nr 70). Jakie otrzymamy w przestrzeni Möbiusa M_3 postacie powierzchni, jeżeli uzupełnimy kwadryki punktem p_∞ ?

116. Obrazy sfer przy rzucie stereograficznym. Przestrzeń Möbiusa otrzymaliśmy, rozszerzając przyporządkowanie punktów sfery S_n i przestrzeni C_n , określone przez rzut stereograficzny, na biegun b sfery S_n . Otrzymałemu w ten sposób zbiorowi punktów M_n nadaliśmy pewną treść geometryczną przez to, że zdefiniowaliśmy w nim klasę podzbiorów zwanych sferami. Okażemy obecnie, że sfery te są identyczne z tymi podzbiórmi przestrzeni M_n , które są obrazami stereograficznymi sfer leżących w S_n . Dzięki temu geometria przestrzeni Möbiusa M_n , oparta na pojęciu sfer, sprowadza się w pewnym sensie do geometrii sfery S_n .

Twierdzenie. *Przy rzucie stereograficznym ogół k -wymiarowych sfer leżących w S_n przechodzi na ogół k -wymiarowych sfer leżących w M_n .*

Dowód. Jeżeli S jest sferą k -wymiarową niezdegenerowaną, leżącą na S_n , gdzie $0 < k < n$, to $S = C(S) \cdot S_n$, gdzie $C(S)$ jest $(k+1)$ -wymiarową hiperpłaszczyzną wyznaczoną przez S . Wówczas $C(S)$ jest (w myśl wniosku z Nr 32) iloczynem $n-k$, ale nie mniej, hiperpłaszczyzn n -wymiarowych leżących w C_{n+1} . Każda z nich przecina S wzdłuż pewnej $(n-1)$ -wymiarowej sfery. Wynika stąd, że każda niezdegenerowana sfera k -wymiarowa leżąca w S_n jest częścią wspólną $n-k$, ale nie mniej, sfer $(n-1)$ -wymiarowych leżących w S_n .

Podobnie, jeśli S jest sferą k -wymiarową niezdegenerowaną, leżącą w M_n , to bądź S jest hiperpłaszczyzną k -wymiarową (uzupełnioną punktem p_∞), a wówczas jest — w myśl wniosku z Nr 32 — iloczynem $n-k$, ale nie mniej, $(n-1)$ -wymiarowych sfer (hiperpłaszczyzn) przestrzeni M_n , albo jest k -wymiarową sferą w C_n . Wówczas jednak S jest częścią wspólną hiperpłaszczyzn $(k+1)$ -wymiarowej $C(S)$, będącej iloczynem $n-k-1$, ale nie mniej, hiperpłaszczyzn $(n-1)$ -wymiarowych oraz

pewnej $(n-1)$ -wymiarowej sfery w C_n . Widzimy więc, że k -wymiarowe sfery niezdegenerowane przestrzeni M_n (gdzie $0 < k < n$) są iloczynami $n-k$, ale nie mniej, sfer $(n-1)$ -wymiarowych.

Z powyższego wynika, że dowód twierdzenia będzie zakończony, gdy okażemy, że ogół sfer $(n-1)$ -wymiarowych niezdegenerowanych, leżących na sferze S_n , przechodzi na ogół sfer $(n-1)$ -wymiarowych niezdegenerowanych, leżących w przestrzeni M_n . Każda sfera $(n-1)$ -wymiarowa S , leżąca na sferze S_n danej przez równanie (5), jest przecięciem S_n z pewną hiperpłaszczyzną n -wymiarową w C_{n+1} , a więc określić się daje przez układ dwóch równań, mianowicie równania (5) i równania postaci:

$$(10) \quad A_0 + A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_{n+1} \cdot x_{n+1} = 0.$$

Rzut stereograficzny $\sigma(p)$ punktu $p = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, spełniającego oba równania (5) i (10), dany jest dla $p \neq b$ przez wzór (7), zaś dla $p = b$ jest $\sigma(p) = p_\infty$. By okazać, że punkty $\sigma(p)$ przy p przebiegającym S tworzą sferę $(n-1)$ -wymiarową w przestrzeni M_n , zauważmy, że wobec (8) zależności (5) i (10) są dla $p \neq b$ równoważne warunkowi:

$$A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cdot \frac{r^2}{r^2 + \bar{p}^2} \cdot \bar{x}_i + A_{n+1} \cdot \frac{r \cdot \bar{p}^2}{r^2 + \bar{p}^2} = 0,$$

który można też napisać w postaci:

$$(11) \quad (A_0 + A_{n+1} \cdot r) \cdot \bar{p}^2 + r^2 \cdot \sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{x}_i + A_0 \cdot r^2 = 0.$$

Jeżeli $A_0 + A_{n+1} \cdot r = 0$, czyli jeżeli hiperpłaszczyzna (10) przechodzi przez biegun, równanie (11) przybiera postać:

$$A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{x}_i = 0,$$

a więc jest równaniem dowolnej hiperpłaszczyzny $(n-1)$ -wymiarowej w przestrzeni C_n . Uzupełniając ją punktem p_∞ (na który przechodzi biegun b), widzimy, że w tym przypadku rzutem stereograficznym sfery $(n-1)$ -wymiarowej S jest sfera $(n-1)$ -wymiarowa przestrzeni M_n , przechodząca przez punkt p_∞ .

Jeżeli zaś $A_0 + A_{n+1} \cdot r \neq 0$, to równaniu (11) możemy nadać postać:

$$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_i \cdot r^2}{A_0 + A_{n+1} \cdot r} \cdot \bar{x}_i = \frac{-A_0 \cdot r^2}{A_0 + A_{n+1} \cdot r},$$

lub też postać

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n \left(\bar{x}_i + \frac{A_i \cdot r^2}{2 \cdot (A_0 + A_{n+1} \cdot r)} \right)^2 = \frac{r^2}{4 \cdot (A_0 + A_{n+1} \cdot r)^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n A_i^2 \cdot r^2 - 4 \cdot A_0 (A_0 + A_{n+1} \cdot r) \right],$$

co jest równaniem pewnej sfery $(n-1)$ -wymiarowej w przestrzeni C_n . Przy tym każda sfera $(n-1)$ -wymiarowa w przestrzeni C_n daje się w taki sposób otrzymać, albowiem dla dowolnie danego punktu

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C_n$ i dowolnego $\varrho > 0$, biorąc $A_i = -\frac{a_i}{r^2}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$

oraz wyznaczając A_0 i A_{n+1} z układu równań

$$A_0 + A_{n+1} \cdot r = \frac{1}{2}, \quad r^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{r^2} - 2 \cdot A_0 \right) = \varrho^2,$$

osiągamy to, że równanie (12) określa w przestrzeni C_n sferę $(n-1)$ -wymiarową o środku a oraz promieniu ϱ . W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

ĆWICZENIE. Sfera w C_3 o równaniu $x_1^2 + x_2^2 + x_3 \cdot (x_3 - 1) = 0$ jest rzutowana stereograficznie z bieguna $b = (0, 0, 1)$ na płaszczyznę $C_{3,2}$. Czym jest rzut krzywej przecięcia tej sfery z walcem o równaniu $x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{4} = 0$?

117. Pokrewieństwa sferyczne. Przekształcenie wzajemnie jednoznaczne f przestrzeni Möbiusa na siebie nazywa się *pokrewieństwem sferycznym*, jeżeli zbiór $f(A)$ jest sferą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nią zbiór A .

Jasne jest, że pokrewieństwa sferyczne stanowią grupę. Spełniają one względem przestrzeni Möbiusa podobną rolę, jak kolineacje względem przestrzeni rzutowych. Podobnie jak pojęcie prostej było zasadniczym elementem przestrzeni rzutowej, tak pojęcie sfery stanowi zasadniczy element przestrzeni Möbiusa.

Geometria przestrzeni P_n (dla $n \geq 1$) jest to teoria niezmienników kolineacji. Podobnie *geometria przestrzeni M_n jest to teoria niezmienników pokrewieństw sferycznych*.

Twierdzenie. *Wśród przekształceń afinicznych jedynie podobieństwa są pokrewieństwami sferycznymi.*

Dowód. Ponieważ figura podobna do sfery jest również sferą, więc każde podobieństwo jest pokrewieństwem sferycznym. Pozostaje okazać, że przekształcenia afiniczne, przy których sfery przechodzą zawsze na sfery, są podobieństwami. Biorąc pod uwagę, że każde przekształcenie

afiniczne jest superpozycją pewnego przesunięcia i pewnego przekształcenia afinicznego, zachowującego początek układu bez zmiany, wystarczy okazać, że przekształcenie afiniczne $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, przekształcające sferę o równaniu

$$(13) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

na sferę, a jej środek 0 na siebie, jest pokrewieństwem sferycznym.

Otóż przekształcenie odwrotne: $f_{-1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest wówczas również afiniczne oraz $f_{-1}(0) = 0$. A więc f_{-1} określone jest przez wzory postaci

$$(14) \quad x_i = a_{i,1} \bar{x}_1 + a_{i,2} \bar{x}_2 + \dots + a_{i,n} \bar{x}_n, \quad \text{gdzie } i=1, 2, \dots, n.$$

Przy przekształceniu f sfera o równaniu (13) przejdzie na zbiór punktów o równaniu:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot \bar{x}_j \right)^2 = 1,$$

które możemy też napisać w postaci:

$$\sum_{j,k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot a_{i,k} \right] \cdot \bar{x}_j \cdot \bar{x}_k = 1.$$

Aby zbiór ten był sferą, potrzeba, by każda płaszczyzna przecinała go wzdłuż pewnego okręgu (który może być zdegenerowany). W szczególności przecięcie płaszczyzną $\Pi_{\alpha,\beta}$, zawierającą osie $\bar{x}_\alpha$ i $\bar{x}_\beta$ (gdzie $\alpha \neq \beta$), jest w tej płaszczyźnie określone przez równanie:

$$\bar{x}_\alpha^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_{i,\alpha}^2 + 2 \cdot \bar{x}_\alpha \cdot \bar{x}_\beta \cdot \sum_{i=1}^n a_{i,\alpha} \cdot a_{i,\beta} + \bar{x}_\beta^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_{i,\beta}^2 = 1.$$

Jasne jest, że początek układu jest środkiem symetrii krzywej określonej przez to równanie. Jeśli więc jest ona okręgiem, to wszystkie jej punkty mają od początku układu jednakową odległość ρ . Biorąc kolejno punkty położone na prostych określonych w płaszczyźnie $\Pi_{\alpha,\beta}$ przez równania $\bar{x}_\alpha = 0$, $\bar{x}_\beta = 0$ i $\bar{x}_\alpha = \bar{x}_\beta$, otrzymujemy:

$$\rho^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_{i,\beta}^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_{i,\alpha}^2} = \frac{2}{\sum_{i=1}^n a_{i,\alpha}^2 + \sum_{i=1}^n a_{i,\beta}^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_{i,\alpha} \cdot a_{i,\beta}},$$

skąd

$$\sum_{i=1}^n a_{i,\alpha}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,\beta}^2 \neq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^n a_{i,\alpha} \cdot a_{i,\beta} = 0,$$

co jednak, jak okazaliśmy w Nr 56, znaczy, że przekształcenie f_{-1} , a więc i f , jest podobieństwem.

ĆWICZENIE. W przestrzeni C_n dane są dwa liniowo niezależne układy punktów: $p_0, p_1, \dots, p_n$ i $q_0, q_1, \dots, q_n$, oraz istnieje stała λ taka, że $\varrho(p_i, p_j) = \lambda \cdot \varrho(q_i, q_j)$ dla $i, j=0, 1, \dots, n$. Znaleźć pokrewieństwo sferyczne f takie, by $f(p_i) = q_i$ dla $i=0, 1, \dots, n$.

118. Inwersja. Przykładem pokrewieństwa sferycznego, nie będącego przekształceniem afinicznym, jest tzw. *inwersja* czyli *przekształcenie przez promienie odwrotne*.

Zachowując oznaczenia z Nr 113 załóżmy, że

$$(15) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n, r - x_{n+1})$$

dla każdego $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_{n+1}$.

Przekształcenie φ jest izometrią przestrzeni C_{n+1} na siebie, przyporządkowującą każdemu punktowi p punkt symetryczny do niego względem n -wymiarowej hiperpłaszczyzny o równaniu $x_{n+1} = \frac{r}{2}$. Przy przekształceniu tym sfera S_n przejdzie na siebie w taki sposób, że $\varphi(b) = 0$ i $\varphi(0) = b$.

Niech dalej

$$(16) \quad \psi(\bar{p}) = \sigma \varphi \sigma_{-1}(\bar{p}) \quad \text{dla każdego } \bar{p} \in M_n.$$

Tak określone przekształcenie wzajemnie jednoznaczne ψ przestrzeni M_n na siebie nazywa się *inwersją*.

Jest ono pokrewieństwem sferycznym, ponieważ każda sfera S leżąca w M_n przechodzi w myśl twierdzenia z Nr 116 przy przekształceniu σ_{-1} na sferę $\sigma_{-1}(S)$ leżącą w S_n , którą izometria φ przekształca na sferę $\varphi \sigma_{-1}(S)$. Rzut stereograficzny σ przekształca tę ostatnią na sferę $\psi(S)$, leżącą w M_n .

Wzory (15), (6) i (8) pozwalają znaleźć postać analityczną inwersji ψ . Otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}(\bar{p}) &= \frac{b \cdot \bar{p}^2 + \bar{p} \cdot r^2}{r^2 + \bar{p}^2}, \\ \varphi \sigma_{-1}(\bar{p}) &= b \cdot \left(1 - \frac{\bar{p}^2}{r^2 + \bar{p}^2} \right) + \frac{r^2}{r^2 + \bar{p}^2} \cdot \bar{p} = \frac{(b + \bar{p}) \cdot r^2}{r^2 + \bar{p}^2}, \\ (17) \quad \psi(\bar{p}) &= \sigma \varphi \sigma_{-1}(\bar{p}) = b + \frac{r}{r^2 + \bar{p}^2} \cdot \left[\frac{(b + \bar{p}) \cdot r^2}{r^2 + \bar{p}^2} - b \right] = \frac{\bar{p} \cdot r^2}{r^2 + \bar{p}^2} \end{aligned}$$

dla punktu $\bar{p} \in C_n - (0)$. Natomiast punkt 0 przechodzi przy przekształceniu σ_{-1} na siebie, zaś przy przekształceniu φ na punkt b , a więc $\psi(0) =$

$\sigma(b)=p_\infty$, czego zresztą można było się spodziewać, gdyż prawa strona wzoru (17) przy $\bar{p}$ dążącym do zera wzrasta nieograniczenie. Natomiast punkt p_∞ przechodzi przy przekształceniu σ_{-1} na b , skąd $\psi(p_\infty)=\sigma\varphi(b)=\sigma(0)=0$. Wynika stąd w szczególności, że inwersja nie jest przekształceniem afinicznym.

Ze wzoru (17) wynika, że punkt $\psi(\bar{p})$ (dla $\bar{p}$ różnego od 0 i p_∞) leży na promieniu wychodzącym z 0 i przechodzącym przez punkt $\bar{p}$, przy czym $\varrho(0, \bar{p}) \cdot \varrho(0, \psi(\bar{p})) = r^2$, czyli $\varrho(0, \varphi(\bar{p})) = \frac{r^2}{\varrho(0, \bar{p})}$.

To jest powodem, dla którego inwersja nazywa się też *przekształceniem przez promienie odwrotne*.

Przy inwersji tej punkty sfery o środku 0 i promieniu r przechodzą na siebie.

Dlatego mówimy, że jest to *inwersja względem sfery o środku 0 i promieniu r* .

Zauważmy wreszcie, że ze wzorów (15) i (16) wynika, iż $\psi\psi(\bar{p})=\bar{p}$, czyli że *inwersja ψ jest swoim własnym odwróceniem*.

To mamy na myśli mówiąc, że *inwersja jest involucją*.

Wynika stąd, że inwersja wraz z przekształceniem tożsamościowym tworzą grupę.

ĆWICZENIA. 1. Na jaką krzywą hiperbola o równaniu $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ przechodzi przy inwersji płaszczyzny M_2 względem okręgu o środku 0 i promieniu 1?

2. Znaleźć równania i naszkicować krzywe, które otrzymamy z parabol o równaniach $x_1 - x_2^2 = 0$ oraz $1 + x_1 - x_2^2 = 0$, poddając płaszczyznę M_2 inwersji względem okręgu o środku 0 i promieniu 1.

3. Okazać, że przy inwersji względem sfery o środku 0 i promieniu r sfera o promieniu r' przechodzi na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy środek jej leży w odległości $\sqrt{r^2 + r'^2}$ od punktu 0.

119. Wytwarzanie pokrewności sferycznych za pomocą inwersji i podobieństw. Okażemy obecnie, że inwersje wraz z podobieństwami pozwalają otrzymać dowolne pokrewieństwo sferyczne przekształcające przestrzeń Möbiusa na siebie.

Zachodzi mianowicie następujące

Twierdzenie. Każde pokrewieństwo sferyczne, przekształcające przestrzeń Möbiusa M_n (gdzie $n > 1$) na siebie, daje się otrzymać przez superponowanie z góry danej inwersji i pewnych podobieństw.

Dowód. Niech f będzie pokrewieństwem sferycznym, przekształcającym przestrzeń M_n (gdzie $n > 1$) na siebie.

Załóżmy najpierw, że $f(p_\infty) = p_\infty$. Wówczas każda prosta L leżąca w przestrzeni C_n staje się po uzupełnieniu przez punkt p_∞ sferą jedno-

wymiarową w przestrzeni M_n . Sfera ta przy przekształceniu f przejdzie na sferę jednowymiarową leżącą w M_n i przechodzącą przez p_∞ . A więc $f(L)$ jest prostą w przestrzeni C_n . Wynika stąd, że przekształcenie f , rozpatrywane jedynie w przestrzeni C_n , jest kolineacją, a więc (w myśl wniosku z Nr 97) przekształceniem afinicznym. Stąd i z uwagi na twierdzenie z Nr 117 wynika, że f jest podobieństwem.

Załóżmy teraz, że $f(p_\infty) = a \neq p_\infty$. Oznaczmy przez $g(p)$ przesunięcie przestrzeni C_n , przy którym a przechodzi w 0. Przekształcenie to (jak każde podobieństwo w przestrzeni C_n) uważać możemy za przekształcenie przestrzeni M_n na siebie, przyjmując $g(p_\infty) = p_\infty$. Przekształcenie $h(p) = \psi g f(p)$ (gdzie ψ jest inwersją określoną w Nr 118) jest pokrewieństwem sferycznym, przy którym punkt p_∞ przechodzi sam na siebie. Zatem $h(p)$ jest podobieństwem. A więc przekształcenie f daje się przedstawić w postaci $f(p) = g_{-1} \psi h(p)$, gdzie g_{-1} oznacza podobieństwo odwrotne względem g . W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

ĆWICZENIE. W płaszczyźnie C_2 dane są dwa okręgi o promieniach r_1 i r_2 i o odległości środków równej d . Kiedy istnieje pokrewieństwo sferyczne, przekształcające płaszczyznę M_2 na siebie, przy którym okręgi te przechodzą odpowiednio na proste $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ (uzupełnione punktem p_∞)?