

ROZDZIAŁ XVII

OGÓLNA TEORIA DZIAŁAŃ

§ 1. Ogólna definicja działania. Przykłady. Niech Z oznacza jakikolwiek zbiór przedmiotów, np. pewien zbiór liczb, pewien zbiór wielomianów, pewien zbiór figur geometrycznych na płaszczyźnie.

Przedmioty, tworzące zbiór Z , nazywają się jego *elementami*.

Jeżeli każdej parze uporządkowanej a, b elementów zbioru Z (różnych lub jednakowych) został przyporządkowany pewien element c (należący do zbioru Z lub nie; różny od a i b lub nie), to przyporządkowanie takie nazywamy *działaniem* określonym w zbiorze Z .

Jeżeli jako znaku tego działania użyjemy $\circ$, to przyporządkowanie elementu c parze uporządkowanej a, b elementów zbioru Z zapisujemy w postaci:

$$a \circ b = c.$$

Gdyby w zbiorze Z było określone jeszcze inne działanie, to trzeba byłoby dla niego użyć innego znaku, np. $\odot$.

Dwa działania, $\circ$ i $\odot$, określone w zbiorze Z , uważamy za *równe* wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla każdej pary (różnych lub nie) elementów a, b zbioru Z mamy:

$$a \circ b = a \odot b.$$

Jeżeli dla każdej pary a, b elementów zbioru Z $a \circ b$ jest elementem zbioru Z , to mówimy, że działanie $\circ$ jest *wykonalne* w zbiorze Z .

PRZYKŁADY. 1. W zbiorze wszystkich liczb naturalnych jest określone i wykonalne dodawanie i mnożenie. W tymże zbiorze określone i wykonalne jest też potęgowanie.

Niech np. $a \circ b$ oznacza a^b . Będzie tu więc $2 \circ 3 = 2^3 = 8$ i $3 \circ 2 = 3^2 = 9$; widzimy, że $2 \circ 3 \neq 3 \circ 2$.

Wynik działania zależy więc wogóle od porządku elementów w parze a, b : dlatego też, mówiąc o parze a, b , użyliśmy przymiotnika „uporządkowana”.

Odejmowanie i dzielenie są wprawdzie działaniami określonymi w zbiorze liczb naturalnych, ale nie są w tym zbiorze wykonalne, gdyż np. $2-3$ i $2:3$ nie należą do zbioru liczb naturalnych.

2. Określmy w zbiorze złożonym z czterech liczb naturalnych 1, 2, 3, 4 działanie $\circ$, rozumiejąc przez $a \circ b$ resztę z dzielenia iloczynu liczb a i b przez 5. Jak łatwo dostrzec, działanie to jest wykonalne w rozważanym zbiorze. W szczególności będzie tu $3 \circ 3 = 4$, $2 \circ 3 = 1$ i $4 \circ 3 = 2$.

3. W zbiorze wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych określone i wykonalne są dodawanie i mnożenie wielomianów.

4. Niech Z oznacza zbiór wszystkich zbiorów, utworzonych z punktów płaszczyzny. W zbiorze Z wykonalne jest działanie $\circ$, gdzie $A \circ B$ oznacza sumę zbiorów A i B , t.j. zbiór utworzony ze wszystkich punktów, które należą do A , oraz ze wszystkich punktów, które należą do B . W zbiorze Z wykonalne jest też działanie $\odot$, gdzie $A \odot B$ oznacza zbiór $(A-B) \cup (B-A)$, t.j. zbiór utworzony ze wszystkich punktów zbioru A , nie należących do B , oraz ze wszystkich punktów zbioru B , nie należących do A .

§ 2. Tabliczka działania. Jeżeli elementy zbioru Z , w którym jest określone działanie $\circ$, dają się ustawić w ciąg (skończony lub nieskończony) $a, b, c, \dots$, to możemy zbudować *tabliczkę* działania (taką jest np. tabliczka mnożenia).

W tym celu wypisujemy elementy $a, b, c, \dots$ jako nagłówki odpowiednich wierszy oraz kolumn, a na skrzyżowaniu się wiersza o nagłówku a z kolumną o nagłówku b wypisujemy wynik działania, dokonanego na elementach a i b , t.j. element $c = a \circ b$ zbioru Z . Tablica taka wygląda więc jak następuje:

	a	b	c	d
a	$a \circ a$	$a \circ b$	$a \circ c$	$a \circ d$
b	$b \circ a$	$b \circ b$	$b \circ c$	$b \circ d$
c	$c \circ a$	$c \circ b$	$c \circ c$	$c \circ d$
d	$d \circ a$	$d \circ b$	$d \circ c$	$d \circ d$

Dla działania określonego w przykładzie 2 tego Rozdziału (§ 1) będzie to tablica:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Dla działania $a \circ b = a^b$ w zbiorze liczb naturalnych mieliśmy tablicę nieskończoną:

	1	2	3	4	5	...
1	1	1	1	1	1	...
2	2	4	8	16	32	...
3	3	9	27	81	243	...
4	4	16	64	256	1024	...
5	5	25	125	625	3125	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

§ 3. Działania przemienne i działania łączne. Jeżeli dla każdej pary a, b elementów zbioru Z , w którym określone jest działanie $\circ$, mamy

$$a \circ b = b \circ a,$$

to mówimy, że działanie $\circ$ jest *przemienne*.

Wynik działania przemiennego nie zależy więc od porządku elementów pary, na której dokonywamy działania.

Np. dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb naturalnych są działaniami przemiennymi (ob. przykład 1, § 1). Działania, określone w przykładach 2, 3 i 4 są przemienne.

Czy działanie jest przemienne, czy nie, łatwo rozpoznać z jego tabliczki. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 1. Na to, żeby działanie było przemienne, potrzeba i wystarcza, by jego tabliczka była symetryczna względem głównej przekątnej.

Jeżeli w zbiorze Z jest określone i wykonalne działanie $\circ$, to przez

$$(a \circ b) \circ c$$

należy rozumieć element $f = d \circ c$, gdzie $d = a \circ b$, zaś przez

$$a \circ (b \circ c)$$

należy rozumieć element $h = a \circ g$, gdzie $g = b \circ c$.

Np. jeżeli $a \circ b$ oznacza a^b , to $(3 \circ 3) \circ 3 = (3^3)^3 = 3^9$, zaś $3 \circ (3 \circ 3) = 3^9 = 3^{27}$, zatem $(3 \circ 3) \circ 3 \neq 3 \circ (3 \circ 3)$.

Rozstawienie nawiasów gra tu więc rolę istotną, nawet gdy $a = b = c$.

W szczególności może się zdarzyć, że dla każdych trzech (różnych lub nie) elementów a, b, c zbioru Z mamy:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Mówimy wówczas, że działanie $\circ$ jest w zbiorze Z *łączne*.

Np. w zbiorze liczb naturalnych dodawanie i mnożenie są łączne, natomiast potęgowanie (jak stwierdziliśmy przed chwilą) łączne nie jest. W zbiorze liczb całkowitych odejmowanie nie jest łączne, gdyż np. $(7 - 3) - 2 = 2$, zaś $7 - (3 - 2) = 6$.

Jeżeli działanie $\circ$ jest łączne, to zamiast $(a \circ b) \circ c$ piszemy po prostu $a \circ b \circ c$.

Jeżeli działanie $\circ$ jest łączne w zbiorze Z , to dla każdych czterech elementów a, b, c, d tego zbioru mamy:

$$\begin{aligned} a \circ [b \circ (c \circ d)] &= a \circ [(b \circ c) \circ d] = [a \circ (b \circ c)] \circ d = \\ &= [(a \circ b) \circ c] \circ d = (a \circ b) \circ (c \circ d) = [(a \circ b) \circ c] \circ d. \end{aligned}$$

Przy każdym roztawieniu nawiasów w wyrażeniu $a \circ b \circ c \circ d$ otrzymujemy więc ten sam wynik. To też oznaczamy go po prostu przez $a \circ b \circ c \circ d$.

Dowodzi się przez indukcję, że w razie łączności działania wynik jego dla dowolnej (skończonej) liczby elementów nie zależy od rozstawienia nawiasów.

Jeżeli działanie $\circ$ jest przemienne i łączne, to:

$$\begin{aligned} a \circ c \circ b &= a \circ (c \circ b) = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c, \\ b \circ a \circ c &= (b \circ a) \circ c = (a \circ b) \circ c = a \circ b \circ c, \\ b \circ c \circ a &= (b \circ c) \circ a = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c, \\ c \circ a \circ b &= c \circ (a \circ b) = (a \circ b) \circ c = a \circ b \circ c, \\ c \circ b \circ a &= c \circ (b \circ a) = (b \circ a) \circ c = (a \circ b) \circ c = a \circ b \circ c. \end{aligned}$$

Zatem: jeżeli działanie $\circ$ jest przemienne i łączne, to przy trzech elementach wynik działania nie zależy od ich porządku.

Dowodzi się przez indukcję, że podobnie jest przy dowolnej (skończonej) liczbie elementów.

Przemienność i łączność są własnościami działania od siebie niezależnymi: istnieją działania przemienne, ale nie łączne, jakoteż działania łączne, ale nie przemienne. Np. w zbiorze Z wszystkich liczb wymiernych działanie $\circ$ określone wzorem:

$$a \circ b = \frac{a+b}{2}$$

(t. j. średnia arytmetyczna dwóch liczb) jest przemienne, ale nie łączne, gdyż np. $(1 \circ 2) \circ 3 = \frac{3}{2} \circ 3 = \frac{9}{4}$, zaś $1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ \frac{5}{2} = \frac{7}{4}$.

Natomiast w zbiorze Z wszystkich wielomianów jednej zmiennej x działanie $\circ$ określone wzorem:

$$a(x) \circ b(x) = a(b(x))$$

jest oczywiście łączne, ale nie jest przemienne, gdyż np. dla $a(x) = x+1$ i $b(x) = x^2$, mamy $a(x) \circ b(x) = x^2 + 1$, zaś $b(x) \circ a(x) = (x+1)^2$.

Przykład działania łącznego, ale nie przemienne, otrzymamy też, określając w zbiorze wszystkich liczb naturalnych $m \circ n$ jako liczbę, którą otrzymamy, wypisując najprzód kolejne cyfry liczby m , a po nich kolejne cyfry liczby n (np. $2 \circ 3 = 23$, $3 \circ 2 = 32$, $10 \circ 1 = 101$).

Można z łatwością udowodnić, że na to, aby działanie $\circ$, określone, wykonalne i przemienne w zbiorze Z , było w tym zbiorze łączne, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdego trzech elementów a, b, c zbioru Z zachodziła równość:

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b.$$

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że w zakresie liczb zespolonych działanie $a \circ b = a + b + ab$ jest przemienne i łączne. Podobnie działanie $a \circ b = a + b - ab$.

2. W zbiorze Z (dowolnie danym) określone jest działanie $\circ$, spełniające następujące dwa warunki dla wszelkich elementów a, b i c zbioru Z :

$$\text{I. } a \circ a = a, \quad \text{II. } (a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a.$$

Wyprowadzić stąd przemienność i łączność działania $\circ$ ¹⁾.

¹⁾ Por. Lee Byrne, Bulletin of the American Mathematical Society Tom 52 (1946), str. 269-272.

§ 4. Działania na zbiorach skończonych. Jeżeli zbiór Z składa się z jednego tylko elementu a , to można w nim określić jedno tylko wykonalne w nim działanie, mianowicie $a \circ a = a$.

Jeżeli zbiór Z składa się z dwu różnych elementów a i b , to można określić 16 różnych działań w nim wykonalnych, których tabliczkami są:

$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & a \\ \hline b & a & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & a \\ \hline b & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & a \\ \hline b & b & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & a \\ \hline b & b & b \\ \hline \end{array}$
1.	2.	3.	4.
$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & b \\ \hline b & a & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & b \\ \hline b & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & b \\ \hline b & b & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & a & b \\ \hline b & b & b \\ \hline \end{array}$
5.	6.	7.	8.
$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & b & a \\ \hline b & a & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & b & a \\ \hline b & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & b & a \\ \hline b & b & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & b & a \\ \hline b & b & b \\ \hline \end{array}$
9.	10.	11.	12.
$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & b & b \\ \hline b & a & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline & b & b \\ \hline b & a & b \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & b & b \\ \hline b & b & a \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline & a & b \\ \hline a & b & b \\ \hline b & b & b \\ \hline \end{array}$
13.	14.	15.	16.

Z tych 16 działań przemiennymi są tylko 1-e, 2-e, 7-e, 8-e, 9-e, 10-e, 15-e i 16-e, a łącznymi tylko 1-e, 2-e, 4-e, 6-e, 7-e, 8-e, 10-e i 16-e. Przemienne i łączne jednocześnie są tu więc tylko działania 1-e, 2-e, 7-e, 8-e, 10-e i 16-e.

Działanie 9-e jest przemienne, ale nie jest łączne, działanie 4-e jest łączne, ale nie przemienne.

Dla zbioru, złożonego z n elementów można określić — jak łatwo obliczyć — n^n różnych działań wykonalnych w tym zbiorze, z których $\frac{n^2+n}{2}$ jest przemiennych.

Więc np. w zbiorze złożonym z 3 elementów istnieje $3^3 = 19683$ różnych działań, z których 729 jest przemennych.

Działanie określone w zbiorze Z i wykonalne w tym zbiorze jest — na mocy definicji — tym samym, co funkcja dwóch zmiennych, określona dla wartości zmiennych należących do zbioru Z i *przybierająca wartości również należące do Z* .

Zamiast $a \circ b$ możnaby więc pisać $f(a, b)$. Przemienność działania wyraża się wówczas warunkiem:

$$f(b, a) = f(a, b)$$

dla wszelkich a i b , należących do zbioru Z . Łączność działania wyraża się mniej przejrzystym warunkiem:

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$$

dla wszelkich a , b i c , należących do Z .

§ 5. Rozdzielność działania względem innego działania. Jeżeli w danym zbiorze Z są określone i wykonalne dwa działania $\odot$ i $\odot$, to mówimy, że *działanie $\odot$ jest prawostronnie rozdzielne względem działania $\odot$* , jeżeli

$$(a \odot b) \odot c = (a \odot c) \odot (b \odot c)$$

dla wszelkich a , b i c , należących do zbioru Z .

Tak samo *działanie $\odot$ nazwiemy lewostronnie rozdzielnym względem działania $\odot$* , jeżeli

$$c \odot (a \odot b) = (c \odot a) \odot (c \odot b)$$

dla wszelkich a , b i c należących do Z .

Jeżeli działanie $\odot$ jest przemienne i prawostronnie (lewostronnie) rozdzielne względem działania $\odot$, to jest ono też względem niego lewostronnie (prawostronnie) rozdzielne.

Mówimy wówczas poprostu, że działanie $\odot$ jest *rozdzielne* względem działania $\odot$.

Np. w zbiorze wszystkich liczb wymiernych mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, gdyż jest ono przemienne i mamy zawsze:

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c),$$

natomiast dodawanie nie jest rozdzielne względem mnożenia ani prawostronnie, ani lewostronnie, gdyż np.:

$$(2 \times 3) + 4 = 10, \quad \text{zaś} \quad (2 + 4) \times (3 + 4) = 42.$$

Potęgowanie liczb dodatnich jest prawostronnie rozdzielne względem mnożenia i dzielenia, gdyż:

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c \quad \text{i} \quad (a : b)^c = a^c : b^c,$$

natomiast nie jest lewostronnie rozdzielne względem żadnego z tych działań, gdyż np.:

$$2^{2 \cdot 3} \neq 2^2 \cdot 2^3 \quad \text{i} \quad 2^{3 \cdot 2} \neq 2^8 : 2^2.$$

Odejmowanie liczb nie jest rozdzielne ani prawostronnie, ani lewostronnie względem dodawania, gdyż np.:

$$(3 + 1) - 2 \neq (3 - 2) + (1 - 2) \quad \text{i} \quad 2 - (3 + 1) \neq (2 - 3) + (2 - 1).$$

Również dodawanie liczb nie jest rozdzielne względem odejmowania, gdyż np. $(3 - 1) + 2 \neq (3 + 2) - (1 + 2)$.

Natomiast odejmowanie zbiorów jest rozdzielne prawostronnie, lecz nie lewostronnie, względem dodawania zbiorów, zaś dodawanie zbiorów nie jest rozdzielne względem ich odejmowania.

Dodawanie, a tak samo odejmowanie i mnożenie liczb, nie jest rozdzielne względem samego siebie ani lewostronnie, ani prawostronnie.

Natomiast dodawanie, a tak samo mnożenie zbiorów, jest rozdzielne względem samego siebie (lewostronnie i prawostronnie), a odejmowanie zbiorów jest rozdzielne względem samego siebie prawostronnie, ale nie lewostronnie; mamy bowiem dla wszelkich zbiorów A , B , C wzór:

$$(A - B) - C = (A - C) - (B - C),$$

ale zbiory $C - (A - B)$ i $(C - A) - (C - B)$ mogą być różne.

Jak wiadomo z teorii t.zw. liczb pozaskończonych, mnożenie liczb porządkowych jest lewostronnie rozdzielne względem dodawania, ale nie jest prawostronnie rozdzielne względem dodawania, gdyż np.:

$$(1 + 1)\omega \neq 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega^1).$$

Gdybyśmy dla oznaczania działań używali znakowania funkcyjnego a więc przyjęli $a \circ b = f(a, b)$ i $a \odot b = g(a, b)$, to prawostronna rozdzielność działania g względem działania f wyraziłaby się wzorem:

$$g(f(a, b), c) = f(g(a, c), g(b, c)),$$

zaś lewostronna — wzorem:

$$g(c, f(a, b)) = f(g(c, a), g(c, b)).$$

¹⁾ Ob. np. mój *Zarys teorii mnogości*, Wyd. 3, Warszawa 1928, str. 166.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że jeżeli w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych przyjmieć $a \odot b = \max(a, b)$, zaś $a \oslash b = \min(a, b)$, to każde z dwu działań $\odot$ i $\oslash$ jest rozdzielne względem drugiego.

2. Dowieść, że jeżeli w zbiorze wszystkich liczb naturalnych $a \odot b$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb a i b , zaś $a \oslash b$ najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b , to każde z dwu działań $\odot$ i $\oslash$ jest rozdzielne względem drugiego.

Wsk.: Dowód można oprzeć na ćwiczeniu 1, rozkładając liczby a, b i c na czynniki pierwsze.

3. Dla wielomianów (lub ogólniej, dla funkcji) jednej zmiennej prócz dodawania $f+g$ i mnożenia $f \cdot g$, można określić też działanie $\odot$, gdzie $f \odot g$ oznacza wielomian (funkcję) $h(x) = f(g(x))$.

Dowieść, że działanie $\odot$ jest prawostronnie, lecz nie lewostronnie, rozdzielne względem dodawania, jakoteż względem mnożenia.

4. Niech Z oznacza zbiór wszystkich par uporządkowanych (f_1, f_2) , gdzie f_1 i f_2 są wielomianami (lub funkcjami) dwu zmiennych x i y . W zbiorze Z określimy działania $+$ i $\cdot$ przez wzory:

$$(f_1, f_2) + (g_1, g_2) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2),$$

$$(f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_2 g_2),$$

zaś $(f_1, f_2) \odot (g_1, g_2)$ niech oznacza parę (h_1, h_2) , gdzie:

$$h_1(x, y) = f_1(g_1(x, y), g_2(x, y)), \quad h_2(x, y) = f_2(g_1(x, y), g_2(x, y)).$$

Dowieść, że działania $+$ i $\cdot$ są przemienne i łączne, że działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem działania $+$ oraz że działanie $\odot$ jest łączne i prawostronnie (lecz nie lewostronnie) rozdzielne względem każdego z działań $+$ i $\cdot$ ¹⁾.

5. W zbiorze o dwu elementach dać przykład dwu działań, z których drugie nie jest przemienne, ale jest rozdzielne względem pierwszego zarówno lewostronnie jak i prawostronnie.

Odp.: Działania 4 i 3 ze str. 285.

§ 6. Działania odwrotne. Przykłady. Niech w zbiorze Z określone będzie działanie $\odot$. Jeżeli dla każdej pary uporządkowanej a, b (różnych lub równych) elementów zbioru Z istnieje dokładnie jeden taki element x zbioru Z , iż

$$b \odot x = a,$$

to mówimy, że w zbiorze Z jest jednoznacznie wykonalne *prawostronne działanie odwrotne* względem działania $\odot$.

¹⁾ Por. K. Menger, *Algebra of Analysis*, Notre Dame 1944, oraz *Journal of Symbolic Logic*, Tom 11 (1946), str. 30.

Jeżeli zaś dla każdej pary a, b (różnych lub równych) elementów zbioru Z istnieje dokładnie jeden taki element y zbioru Z , iż

$$y \odot b = a,$$

to mówimy, że w zbiorze Z jest jednoznacznie wykonalne *lewostronne działanie odwrotne* względem działania $\odot$.

Łatwo udowodnić twierdzenia następujące:

Twierdzenie 2. Jeżeli działanie $\odot$ jest przemienne, to albo oba jego działania odwrotne są jednoznacznie wykonalne i równe, albo też żadne z nich nie jest jednoznacznie wykonalne.

Twierdzenie 3. Na to, żeby w zbiorze Z było jednoznacznie wykonalne prawostronne (lewostronne) działanie odwrotne względem działania $\odot$, potrzeba i wystarcza, by każdy wiersz (każda kolumna) tabliczki działania $\odot$ zawierał (zawierała) każdy element zbioru Z i to dokładnie jeden raz.

Tak np. z działań wykonalnych w zbiorze złożonym z dwu elementów, prawostronne działanie odwrotne posiadają tylko działania (kolejno, według tabliczek podanych na str. 285): 6-e, 7-e, 10-e, 11-e, zaś lewostronne — tylko działania 4-e, 7-e, 10-e i 13-e. Oba działania odwrotne posiadają więc tylko działania 7-e i 10-e; ponieważ są one oba przemienne, więc dla każdego z nich oba działania odwrotne są równe.

O ile dla danego działania $\odot$ istnieje działanie odwrotne prawostronne (lewostronne), można tabliczkę tego działania odwrotnego otrzymać z łatwością z tabliczki działania $\odot$.

Tak np. gdy chodzi o prawostronne działanie odwrotne względem działania $\odot$, to dla otrzymania jego tabliczki należy na skrzyżowaniu wiersza o nagłówku a i kolumny o nagłówku b wpisać nagłówek tej kolumny, na której skrzyżowaniu z wierszem o nagłówku b znajduje się w tabliczce działania $\odot$ element a .

Np. dla działania (przemennego), określonego w przykładzie 2 § 1 (str. 281) tabliczką działania odwrotnego będzie:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	1	4	2
3	2	4	1	3
4	4	3	2	1

Działanie to nie jest przemienne. Widzimy więc, że działanie odwrotne względem działania przemennego może nie być przemienne.

Dla działania $\circ$ w zbiorze złożonym z dwu elementów o tabliczce 7, str. 285 (które otrzymamy też, przyjmując $a=1$, $b=-1$, a za $\circ$ zwykle mnożenie liczb) każde z obu działań odwrotnych pokrywa się oczywiście z działaniem $\circ$. Podobnie jest dla działania o tabliczce 10, które też otrzymamy, biorąc $a=-1$, $b=1$ i za $\circ$ zwykle mnożenie liczb.

Dla działania $\circ$ w zbiorze o trzech elementach a, b, c o tabliczce:

	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

tabliczkami działań odwrotnych, prawostronnego i lewostronnego, będą odpowiednio:

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

Prawostronne działanie odwrotne jest tu więc przemienne, zaś lewostronne nie. Działaniem odwrotnym względem pierwszego będzie oczywiście pierwotne działanie $\circ$, zaś drugie ma dwa różne działania odwrotne (prawostronne i lewostronne) o tabliczkach odpowiednio:

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

§ 7. Działania odwrotne względem działań odwrotnych. Przykłady. Niech $\circ$ oznacza działanie określone w danym zbiorze Z i wykonalne w tym zbiorze. Jeżeli w zbiorze Z wykonalne jest jednoznacznie działanie odwrotne prawostronne (lewostronne) względem działania $\circ$, to będziemy je oznaczali przez $\circ_p$ (przez $\circ_l$).

Jeżeli w zbiorze Z wykonalne jest jednoznacznie działanie $\circ_p$ to dla każdego elementu a, b, c zbioru Z wzór:

$$(1) \quad b \circ_p a = c$$

jest oczywiście równoważny wzorowi:

$$(2) \quad c \circ_p b = a.$$

Weźmy teraz pod uwagę dla danych elementów a i b zbioru Z równanie:

$$(3) \quad x \circ_p b = a.$$

Jest ono więc równoważne równaniu:

$$(4) \quad x - b \circ a.$$

Równanie (3) posiada więc w zbiorze Z jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie wyznaczone przez wzór (4). Znaczący to, że działanie $\circ_p$ posiada w zbiorze Z jednoznacznie wykonalne działanie odwrotne lewostronne, które oznaczmy przez $\circ_{pl}$.

Wzór $a \circ_{pl} b = c$ jest więc równoważny wzorowi (2) i przeto też wzorowi (1). Mamy zatem

Twierdzenie 4. Jeżeli dla działania $\circ$, określonego i wykonalnego w zbiorze Z , jest wykonalne jednoznacznie działanie odwrotne prawostronne $\circ_p$, to posiada ono jednoznacznie wykonalne w zbiorze Z swoje działanie odwrotne lewostronne $\circ_{pl}$, przy czym dla każdego dwu elementów a i b zbioru Z mamy:

$$a \circ_{pl} b = b \circ_p a.$$

W szczególności jeżeli działanie $\circ$ jest nadto przemienne, to działanie $\circ_{pl}$ pokrywa się z działaniem $\circ$.

Działanie $\circ_p$, nawet gdy jest jednoznacznie wykonalne, niekoniecznie posiada jednoznacznie wykonalne swoje działanie odwrotne prawostronne, które oznaczamy przez $\circ_{pp}$.

Np. dla działania $\circ$ w zbiorze dwu elementów o tabliczce 6, str. 285, działanie $\circ_p$ jest jednoznacznie wykonalne i ma tabliczkę 4, z której widać, że działanie $\circ_{pp}$ nie jest wykonalne w zbiorze Z (gdyż nie ma w nim takiego x , dla którego byłoby $a \circ_p x = b$).

Niech teraz w zbiorze Z , w którym określone i wykonalne jest działanie $\circ$, wykonalnym jednoznacznie będzie jego działanie odwrotne lewostronne $\circ_l$. Wówczas dla każdego elementu a, b, c , zbioru Z wzór:

$$(5) \quad a \circ_l b = c$$

jest równoważny wzorowi:

$$(6) \quad c \circ_l b = a;$$

zatem równanie:

$$(7) \quad x \circ_l b = a$$

jest równoważne równaniu:

$$(8) \quad x = a \circ b.$$

Dla każdych dwu elementów a i b zbioru Z równanie (7) posiada więc w zbiorze Z jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie wyznaczone przez wzór (8). Znaczący to, że działanie $\circ_l$ posiada w zbiorze Z jednoznacznie wykonalne działanie odwrotne lewostronne, które oznaczmy przez $\circ_{ll}$. Wzór $a \circ_{ll} b = c$ jest więc równoważny wzorowi (6) i przeto też wzorowi (5). Mamy zatem dla wszelkich elementów a i b zbioru Z :

$$a \circ_{ll} b = a \circ b,$$

t.j. działanie $\circ_{ll}$ jest równe działaniu $\circ$. Zachodzi więc

Twierdzenie 5. Jeżeli dla działania $\circ$, określonego i wykonalnego w zbiorze Z , jest jednoznacznie wykonalne działanie odwrotne lewostronne $\circ_l$, to działanie $\circ$ jest dla niego działaniem odwrotnym lewostronnym.

Działanie $\circ_l$, nawet gdy jest jednoznacznie wykonalne, niekoniecznie posiada jednoznacznie wykonalne swoje działanie odwrotne prawostronne, które oznaczmy przez $\circ_{lp}$. Np. dla działania $\circ$ w zbiorze Z dwu elementów o tabliczce 4, str. 285, działanie $\circ_l$ jest jednoznacznie wykonalne i ma tę samą tabliczkę (działanie $\circ_l$ pokrywa się tu więc z działaniem $\circ$), natomiast działanie $\circ_{lp}$, ani działanie $\circ_p$, nie są wykonalne w zbiorze Z (gdyż nie ma w nim takiego x , dla którego byłoby $a \circ_l x = b$).

Niech wreszcie dla działania $\circ$, określonego i wykonalnego w zbiorze Z , wykonalne będą jednoznacznie oba działania odwrotne $\circ_p$ i $\circ_l$. Wzory:

$$(9) \quad c \circ a = b,$$

$$(10) \quad b \circ_p c = a,$$

$$(11) \quad b \circ_l a = c$$

są więc równoważne. Równanie:

$$(12) \quad b \circ_p x = a$$

jest zatem równoważne równaniu:

$$(13) \quad x = b \circ_l a.$$

Dla każdych dwu elementów a i b zbioru Z równanie (12) posiada więc jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie wyznaczone przez wzór (13). Dowodzi to, że jednoznacznie wykonalne jest w zbiorze Z działanie $\circ_{pp}$, przy czym mamy dla wszelkich a i b w zbiorze Z

$$a \circ_{pp} b = b \circ_l a.$$

Podobnie wnosimy, że wzory:

$$(14) \quad a \circ c = b,$$

$$(15) \quad b \circ_p a = c,$$

$$(16) \quad b \circ_l c = a$$

są równoważne. Zatem równanie:

$$(17) \quad b \circ_l x = a$$

jest równoważne równaniu:

$$(18) \quad x = b \circ_p a.$$

Wynika stąd, że jednoznacznie wykonalne jest w zbiorze Z działanie $\circ_{lp}$, przy czym mamy dla wszelkich a i b w zbiorze Z :

$$a \circ_{lp} b = b \circ_p a.$$

Ostatecznie więc mamy

Twierdzenie 6. Z istnienia $\circ_p$ wynika istnienie $\circ_{pl}$, zaś z istnienia $\circ_l$ istnienie $\circ_{lp}$, wreszcie z istnienia obu działań $\circ_p$ i $\circ_l$ wynika istnienie wszystkich czterech działań $\circ_{pp}$, $\circ_{pl}$, $\circ_{lp}$ i $\circ_{ll}$.

Jeżeli w zbiorze Z jest wykonalne jednoznacznie działanie $\circ_p$, to wzory:

$$a \circ b = c \quad \text{ i } \quad c \circ_p a = b$$

są równoważne. Wnosimy stąd, że jeżeli wykonalne jest jednoznacznie działanie $\circ_{pp}$, to wzory te są równoważne wzorowi $b \circ_{pp} c = a$, co dowodzi, że dla elementów a i b zbioru Z istnieje jeden i tylko jeden taki element x zbioru Z , że $b \circ_{pp} x = a$, mianowicie element $x = a \circ b$. Wynika stąd, że wtedy jest jednoznacznie wykonalne w zbiorze Z działanie $\circ_{ppp}$ i że pokrywa się ono z działaniem $\circ$. Zatem mamy

Twierdzenie 7. Jeżeli dla działania $\circ$, określonego i wykonalnego w zbiorze Z , jednoznacznie wykonalnym jest działanie $\circ_{pp}$, to w zbiorze Z jest też jednoznacznie wykonalne działanie $\circ_{ppp}$, przy czym jest ono równe działaniu $\circ$.

Oznaczmy jeszcze ogólnie dla danego działania $\odot$ (określonego i wykonalnego w zbiorze Z) przez $\odot^*$ działanie, określone wzorem:

$$a \odot^* b = b \odot a$$

dla wszelkich elementów a i b zbioru Z . Będzie więc w razie istnienia działania $\odot_p$:

$$(\odot^*)_l = \odot_p \quad \text{i} \quad \odot_{pl} = \odot^*,$$

zaś w razie istnienia obu działań $\odot_p$ i $\odot_l$:

$$\odot_{pp} = (\odot_l)^* \quad \text{i} \quad \odot_{lp} = (\odot_p)^*.$$

Nadto, jeżeli istnieje działanie $\odot_l$, to:

$$\odot_{ll} = \odot.$$

PRZYKŁADY. 1. Niech Z oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych dodatnich, zaś działanie $\odot$ niech będzie zwykłym mnożeniem liczb. Działanie to jest wykonalne w zbiorze Z . Ponieważ jest ono przemienne, więc oba działania odwrotne (prawostronne i lewostronne, które są jednoznacznie wykonalne w zbiorze Z) są równe. Mamy tu:

$$a \odot b = ab, \quad a \odot_p b = a \odot_l b = \frac{a}{b},$$

dalej, jak łatwo sprawdzić:

$$a \odot_{lp} b = a \odot_{pp} b = \frac{b}{a}, \quad a \odot_{pl} b = a \odot_{ll} b = ab.$$

Działaniem odwrotnym prawostronnym względem dzielenia nie jest więc mnożenie.

2. Niech Z oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych. Przyjmijmy $a \odot b = a - b$ dla każdej pary a, b elementów zbioru Z . Oba działania odwrotne są tu oczywiście wykonalne w zbiorze Z , ale są różne (gdyż odejmowanie nie jest przemienne). Mamy tu:

$$\begin{aligned} a \odot_p b &= b - a, & a \odot_l b &= a + b, & a \odot_{pp} b &= a + b, \\ a \odot_{pl} b &= b - a, & a \odot_{lp} b &= a - b, & a \odot_{ll} b &= a - b, \end{aligned}$$

zatem:

$$\odot_{pp} = \odot_l, \quad \odot_{pl} = \odot_p, \quad \odot_{lp} = \odot_{ll} = \odot.$$

3. Dla działania $\odot$ w zbiorze Z o trzech elementach a, b, c , określonego przez tabliczkę

	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

mamy, jak łatwo sprawdzić, $\odot_l = \odot$, zaś działanie $\odot_p$ jest określone przez tabliczkę

	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Ponieważ jest ono przemienne, więc $\odot_{pl} = \odot_{pp}$, zaś wobec $\odot_{pl} = \odot^*$ otrzymamy tabliczki działań $\odot_{pl}$ i $\odot_{pp}$ przez obrót tabliczki działania $\odot$ o 180° dookoła głównej przekątnej, co daje tabliczkę

	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

Wreszcie, wobec $\odot_l = \odot$ mamy $\odot_{lp} = \odot_p$, na mocy zaś twierdzeń 5 i 7, $\odot_{ll} = \odot$, jakoteż $\odot_{ppp} = \odot$.

§ 8. Izomorfizm działań. Przykłady. Działanie $\odot$, określone i wykonalne w zbiorze Z , nazywamy *izomorficznym* z działaniem $\odot'$, określonym i wykonalnym w zbiorze Z' , jeżeli między elementami zbiorów Z i Z' istnieje taka odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna, że wzór:

$$(19) \quad a \odot b = c$$

pociąga za sobą dla wszelkich elementów a, b, c zbioru Z wzór:

$$(20) \quad a' \odot' b' = c',$$

gdzie a', b', c' są elementami odpowiadającymi elementom a, b, c w zbiorze Z' .

Jeżeli działanie $\circ$ jest izomorficzne z działaniem $\odot$, to i wzajemnie, działanie $\odot$ jest izomorficzne z działaniem $\circ$. Innymi słowy zachodzi

Twierdzenie 8. *Stosunek izomorfizmu działań jest symetryczny.*

Dowód. Niech dla elementów a' , b' i c' zbioru Z' zachodzi wzór (20). Przyjmijmy:

$$(21) \quad x = a \circ b.$$

Skoro działanie $\circ$ jest izomorficzne z działaniem $\odot$, to wzór (21) pociąga za sobą wzór:

$$a' \odot b' = x',$$

który wobec (20) daje $x' = c'$, co dowodzi, że:

$$(22) \quad x = c,$$

gdyż odpowiedniość między elementami zbiorów Z i Z' jest z założenia wzajemnie jednoznaczna. Wzory (21) i (22) dają wzór (19).

Dowiedliśmy, że wzór (20) pociąga za sobą wzór (19). Działanie $\odot$ jest więc izomorficzne z działaniem $\circ$, c. b. d. o.

Izomorfizm działań jest też oczywiście stosunkiem zwrotnym i przechodnim, t. j. każde działanie jest izomorficzne ze sobą samym oraz dwa działania izomorficzne z trzecim są izomorficzne.

Aby dowieść, że dwa działania są izomorficzne, wystarcza okazać, że istnieje między elementami zbiorów, w których te działania są określone, odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna, ustalająca izomorfizm, t. j. wynikanie wzoru (20) ze wzoru (19). Natomiast, aby dowieść, że dwa działania nie są izomorficzne, potrzeba okazać, że między elementami zbiorów, w których te działania są określone, nie istnieje żadna odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna, któraby ustalała izomorfizm tych działań.

PRZYKŁADY. 1. Działanie 7 z § 4 (p. tabliczkę 7, str. 285) jest izomorficzne z mnożeniem liczb w zbiorze utworzonym z liczb $a=1$ i $b=-1$; odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna, ustalająca ten izomorfizm, otrzymamy, przyjmując $a'=1$ i $b'=-1$. Działanie 10 z tegoż § 4 jest izomorficzne z mnożeniem w zbiorze dwu liczb $a=1$ i $b=-1$; odpowiedniość, ustalającą ten izomorfizm, otrzymamy, przyjmując $a'=-1$ i $b'=1$. Wynika stąd (wobec przechodności izomorfizmu), że działania 7 i 10 są izomorficzne.

2. Działanie 2 z § 4 (p. tabliczkę 2, str. 285) jest izomorficzne z mnożeniem w zbiorze utworzonym z liczb $a=0$ i $b=1$. Podobnie działanie 8 (tamże).

3. Działania określone przez tabliczki:

	a	b	c	
a	a	b	c	
b	b	c	a	
c	c	a	b	

	a	b	c	
a	c	a	b	
b	a	b	c	
c	b	c	a	

są izomorficzne; odpowiedniość, ustalającą ten izomorfizm, otrzymamy, przyporządkowując elementom a , b , c odpowiednio elementy b , a , c (t. j. zastępując wzajemnie przez siebie elementy a i b).

Oznaczmy pierwsze z tych działań przez $\circ$. Wykażemy, że nie jest ono izomorficzne z działaniem $\odot$, określonym przez tabliczkę:

	p	q	r	
p	q	p	r	
q	p	r	q	
r	r	q	p	

Istotnie, z tabliczki działania $\circ$ znajdujemy $a \circ a = a$; zatem w razie izomorfizmu działań $\circ$ i $\odot$ byłoby $a' \odot a' = a'$, co jednak — jak widać z tabliczki działania $\odot$ — nie zachodzi ani dla p , ani dla q , ani dla r .

4. Dowodzi się z łatwością, że działanie 1-e z § 4 (str. 285) jest izomorficzne tylko z 16-ym, 2-e tylko z 8-ym, 3-e tylko z 12-ym.

5. Dodawanie w zbiorze wszystkich liczb naturalnych jest izomorficzne z mnożeniem w zbiorze liczb postaci 2^n , gdzie $n=1,2,\dots$. Odpowiedniość, ustalającą izomorfizm tych działań, otrzymamy, przyporządkowując każdej liczbie naturalnej n liczbę 2^n .

6. Dodawanie w zbiorze wszystkich liczb naturalnych nie jest izomorficzne z mnożeniem w tymże zbiorze. Mamy bowiem $1 \cdot 1 = 1$, zaś nie ma takiej liczby naturalnej n , żeby było $n + n = n$.

7. Dodawanie w zbiorze wszystkich liczb naturalnych nie jest izomorficzne z dodawaniem w zbiorze wszystkich liczb wymiernych dodatnich. Gdyby bowiem te działania były izomorficzne, to liczbie naturalnej 1 odpowiadałaby jakaś liczba wymierna dodatnia w . Liczba wymierna dodatnia $v = w/2$ spełnia równanie $v + v = w$, natomiast nie ma takiej liczby naturalnej x , dla której $x + x = 1$.

8. Dodawanie w zbiorze wszystkich liczb naturalnych jest izomorficzne z dodawaniem w zbiorze wszystkich liczb parzystych dodatnich. Odwzorowanie, ustalające ten izomorfizm, otrzymamy, przyporządkowując każdej liczbie naturalnej n liczbę parzystą $2n$.

Natomiast mnożenie w zbiorze wszystkich liczb naturalnych nie jest izomorficzne z mnożeniem w zbiorze wszystkich liczb parzystych dodatnich, gdyż mamy $1 \cdot 1 = 1$, zaś nie ma liczby parzystej dodatniej p , dla której byłoby $p \cdot p = p$.

Tak więc, jeżeli działanie $\circ$ jest określone i wykonalne w zbiorze Z , to może istnieć taka część właściwa Z_1 zbioru Z , że działanie $\circ$ jest wykonalne w zbiorze Z_1 i przy tym izomorficzne z działaniem $\circ$ w całym zbiorze Z albo też z nim nie izomorficzne.

9. Działanie $\circ$, określone w zbiorze wszystkich liczb całkowitych wzorem $a \circ b = a + b + 1$, jest izomorficzne z dodawaniem w tym zbiorze. Odwzorowanie, ustalające ten izomorfizm, otrzymamy, przyporządkowując każdej liczbie całkowitej liczbę o 1 od niej większą. Jeżeli bowiem $a \circ b = c$, to $(a + 1) + (b + 1) = (c + 1) + 1$.

Jeżeli w danym zbiorze określone jest działanie łączne (ale niekoniecznie przemienne), jednoznacznie wykonalne i jednoznacznie odwracalne w tym zbiorze, to mówimy, że zbiór ten stanowi *grupę*.

Własnościami grup zajmujemy się szczegółowiej w Rozdziale XIX-ym.

ROZDZIAŁ XVIII

PODSTAWIENIA

§ 1. Podstawienia. Ich znakowanie. Podstawienia odwrotne. Jeżeli zamiast ciągu elementów $a_1, a_2, \dots, a_n$ bierzemy ciąg $b_1, b_2, \dots, b_n$, to mówimy, żeśmy dokonali *podstawienia* lub *substitucji*), które oznaczamy przez

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

W każdej kolumnie dolnym elementem jest więc ten, który ma zastąpić element górny tejże kolumny.

Zajmiemy się tu w szczególności podstawieniami, polegającymi na tym, że zamiast danej permutacji elementów pewnego zbioru skończonego bierzemy inną permutację elementów tegoż zbioru.

Jeżeli zamiast permutacji $a_1 a_2 \dots a_n$ bierzemy permutację $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_n}$, to dla uproszczenia przy zapisywaniu podstawienia

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{\alpha_1} & a_{\alpha_2} & \dots & a_{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

będziemy opuszczali literę a i wypisywali w obu wierszach tylko wskaźniki. Rozważane podstawienie zapiszemy więc prościej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

lub, przy stałym n , jeszcze prościej: $\begin{pmatrix} k \\ a_k \end{pmatrix}$.

To samo podstawienie moglibyśmy oczywiście zapisać, zmieniając dowolnie porządek kolumn, np.:

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Ogólnie, dla dowolnej permutacji $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ liczb $1, 2, \dots, n$ jest:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ a_{\gamma_1} & a_{\gamma_2} & \dots & a_{\gamma_n} \end{pmatrix}$$