ROZDZIAŁ XV

UKŁADY DWU RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

§ 1. Wspólne pierwiastki dwu wielomianów jednej zmiennej. W Rozdziale VIII (§ 5, str. 114) wprowadziliśmy dla układu dwu wielomianów jednej zmiennej wyznacznik Δ, którego elementami są współczynniki tych wielomianów, czyli t. zw. *rugownik* układu dwu wielomianów jednej zmiennej.

Udowodnimy obecnie

Twierdzenie 1. *Na to, aby dwa wielomiany jednej zmiennej posiadały wspólny pierwiastek, potrzeba i wystarcza, by ich rugownik był równy* 0.

Dowód. Niech będą dane dwa wielomiany zmiennej x:

$$(1)\qquad f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m \qquad \text{i} \qquad g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n.$$

Jeżeli te wielomiany mają wspólny pierwiastek $x=\alpha$, to — jak wiemy z twierdzenia 3 Rozdziału VIII (§ 3, str. 107) — oba są podzielne przez $x-\alpha$, a więc nie mogą być względnie pierwsze. Z drugiej strony, jeżeli wielomiany (1) nie są względnie pierwsze, to mają największy wspólny dzielnik $d(x)$ dodatniego stopnia, a że każdy pierwiastek wielomianu $d(x)$ jest oczywiście pierwiastkiem każdego z wielomianów $f(x)$ i $g(x)$, więc wobec zasadniczego twierdzenia algebry (Rozdział VII, § 2, str. 100) wynika stąd, że wielomiany (1) posiadają co najmniej jeden pierwiastek wspólny.

Zatem na to, żeby wielomiany (1) posiadały co najmniej jeden wspólny pierwiastek, potrzeba i wystarcza, żeby nie były względnie pierwsze, na co znowu w myśl twierdzenia 8 Rozdziału VIII (§ 5, str. 114) potrzeba i wystarcza, iżby ich rugownik był równy 0, c. b. d. o.

Warunek konieczny i dostateczny na to, żeby dwa wielomiany (1) jednej zmiennej posiadały co najmniej jeden wspólny pierwiastek, można też wyprowadzić przy pomocy funkcji symetrycznych.

Mianowicie, niech liczby $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ będą pierwiastkami wielomianu $f(x)$, a liczby $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ pierwiastkami wielomianu $g(x)$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby wielomiany (1) posiadały wspólny pierwiastek, jest oczywiście równość:

$$(2)\qquad f(\beta_1)f(\beta_2)\ldots f(\beta_n)=0.$$

Lewa strona tej równości jest funkcją symetryczną pierwiastków wielomianu $g(x)$; jeśli więc $g(x)$ podzielimy przez b_0, to funkcja ta da się wyrazić jako wielomian względem współczynników wielomianów $f(x)$ i $g(x)$.

Można wykazać, że tak otrzymany wielomian równa się

$$(-1)^{mn}R/b_0^m,$$

gdzie R jest rugownikiem wielomianów $f(x)$ i $g(x)$ [1]).

Zamiast równości (2) moglibyśmy oczywiście rozważać równość $g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_m)=0$. Wobec tego, że $f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)$ i $g(x)=b_0(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_m)$, mamy:

$$f(\beta_1)f(\beta_2)\ldots f(\beta_n)=a_0^n\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}(\beta_k-\alpha_l)$$

i podobnie

$$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_m)=b_0^m\prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n}(\alpha_k-\beta_l).$$

PRZYKŁAD. Niech:

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\qquad g(x)=x^2+b_1x+b_2.$$

Jest tu więc:

$$\begin{aligned}f(\beta_1)f(\beta_2)&=(\beta_1^3+a_1\beta_1^2+a_2\beta_1+a_3)(\beta_2^3+a_1\beta_2^2+a_2\beta_2+a_3)=\\&=(\beta_1\beta_2)^3+a_1(\beta_1^3\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^3)+a_1^2(\beta_1\beta_2)^2+a_2(\beta_1^3\beta_2+\beta_1\beta_2^3)+a_2^2\beta_1\beta_2+a_3(\beta_1^3+\beta_2^3)+\\&\quad+a_3^2+a_1a_2(\beta_1^2\beta_2+\beta_1\beta_2^2)+a_1a_3(\beta_1^2+\beta_2^2)+a_2a_3(\beta_1+\beta_2).\end{aligned}$$

Lecz jak wiemy (Rozdział VIII, § 11, wzory (41), str. 126):

$$\beta_1+\beta_2=-b_1,\qquad \beta_1\beta_2=b_2,$$

skąd:

$$\begin{aligned}\beta_1^3\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^3&=(\beta_1\beta_2)^2(\beta_1+\beta_2)=-b_1b_2^2,\\ \beta_1^3\beta_2+\beta_1\beta_2^3&=\beta_1\beta_2(\beta_1^2+\beta_2^2)=\beta_1\beta_2[(\beta_1+\beta_2)^2-2\beta_1\beta_2]=b_2(b_1^2-2b_2),\\ \beta_1^3+\beta_2^3&=(\beta_1+\beta_2)^3-3(\beta_1+\beta_2)\beta_1\beta_2=-b_1^3+3b_1b_2,\\ \beta_1^2\beta_2+\beta_1\beta_2^2&=(\beta_1+\beta_2)\beta_1\beta_2=-b_1b_2,\\ \beta_1^2+\beta_2^2&=(\beta_1+\beta_2)^2-2\beta_1\beta_2=b_1^2-2b_2.\end{aligned}$$

---

[1]) Ob. np. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, Tom II, Berlin 1931, str. 5.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dane wielomiany posiadały wspólny pierwiastek, jest więc równość:

$$b_2^3 - a_1 b_1 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2 b_2 (b_1^2 - 2b_2) + a_2^2 b_2 - a_3 (b_1^3 - 3b_1 b_2) + a_3^2 - a_1 a_2 b_1 b_2 + \\ + a_1 a_3 (b_1^2 - 2b_2) - a_2 a_3 b_1 = 0.$$

Iloczyn $g(\alpha_1) g(\alpha_2) g(\alpha_3)$ byłby tu mniej dogodny do obliczenia, gdyż zawiera on 27 składników. Podobnie, nie byłoby dogodne obliczanie iloczynu $\prod_{k=1}^{3} \prod_{l=1}^{2} (\alpha_k - \beta_l)$, mającego 6 czynników dwumiennych, a więc $2^6 = 64$ składników.

§ 2. Wspólne pierwiastki wielomianu i jego pochodnej. Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2. *Na to, aby wielomian $f(x)$ posiadał co najmniej jeden pierwiastek wielokrotny, potrzeba i wystarcza, by jego wyróżnik był zerem.*

Dowód. W myśl twierdzenia 12 Rozdziału VIII (§ 9, str. 120) na to, aby wielomian $f(x)$ posiadał co najmniej jeden pierwiastek wielokrotny, potrzeba i wystarcza, by wielomiany $f(x)$ i $f'(x)$ miały choć jeden pierwiastek wspólny. Jeśli więc $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ oznaczają wszystkie pierwiastki wielomianu $f(x)$, to warunek ten napisać możemy w postaci:

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \dots f'(\alpha_m) = 0. \tag{3}$$

Z Rozdziału VIII (§ 2, str. 105) wiemy, że jeżeli α jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$, to $f'(\alpha)$ jest wartością, jaką przybiera dla $x = \alpha$ iloraz z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez $x - \alpha$. Wobec (2) otrzymamy zatem:

$$f'(\alpha_k) = a_0 (\alpha_k - \alpha_1) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1}) (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \dots (\alpha_k - \alpha_m) = \\ = (-1)^{m-k} a_0 \prod_{j=1}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_j) \prod_{j=k+1}^{m} (\alpha_j - \alpha_k)$$

i przeto:

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \dots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^m \prod_{k=2}^{m} \prod_{j=1}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_j) \cdot \prod_{k=1}^{m} \prod_{j=k+1}^{m} (\alpha_j - \alpha_k).$$

Lecz, jak łatwo sprawdzić:

$$\prod_{k=1}^{m} \prod_{j=k+1}^{m} (\alpha_j - \alpha_k) = \prod_{k=2}^{m} \prod_{j=1}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_j).$$

Jest więc ostatecznie:

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \dots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^m \prod_{k=2}^{m} \prod_{j=1}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_j)^2.$$

Wyrażenie to jest właśnie pomnożonym przez a_0^m wyróżnikiem D wielomianu $f(x)$ (por. Rozdział IX, § 6, str. 168). Warunek (3) jest więc równoważny równości $D = 0$, c. b. d. o.

§ 3. Rozwiązywanie układu dwu równań algebraicznych o dwu niewiadomych. Metoda Sylvestera. Niech będą dane dwa wielomiany o dwu niewiadomych: $f(x, y)$ i $g(x, y)$. Pokażemy, w jaki sposób rozwiązywanie układu równań:

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0 \tag{4}$$

można sprowadzić do rozwiązywania równań o jednej niewiadomej.

Postępowanie to nosi nazwę *rugowania* (czyli *eliminacji*) jednej z niewiadomych z równań (4).

Uporządkujmy każdy z wielomianów f i g według potęg jednej i tej samej zmiennej, np. zmiennej y; niech to będą wielomiany odpowiednio stopnia m i n względem y, zatem:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(x) y^m + a_1(x) y^{m-1} + \dots + a_m(x), \\ g(x, y) &= b_0(x) y^n + b_1(x) y^{n-1} + \dots + b_n(x), \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $a_0(x), a_1(x), \dots, a_m(x), b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)$ są wielomianami względem x o danych współczynnikach liczbowych, przy czym wielomiany $a_0(x)$ i $b_0(x)$ nie są tożsamościowo równe zeru.

Załóżmy, że układ liczb x, y spełnia oba równania (4). Będzie więc również:

$$\begin{aligned} &f(x, y) = 0, \quad && y f(x, y) = 0, \quad && y^2 f(x, y) = 0, \quad && \dots, \quad && y^{n-1} f(x, y) = 0, \\ &g(x, y) = 0, \quad && y g(x, y) = 0, \quad && y^2 g(x, y) = 0, \quad && \dots, \quad && y^{m-1} g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Wypiszmy te $m + n$ równań, wstawiając za $f(x, y)$ i $g(x, y)$ wyrażenia ze wzorów (5), i przyjmijmy:

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = y, \qquad t_3 = y^2, \qquad \dots, \qquad t_{m+n} = y^{m+n-1}.$$

Otrzymamy $m+n$ równań liniowych jednorodnych względem $t_1, t_2, \dots, t_{m+n}$:

$$\begin{array}{llll}
a_0(x)t_{m+1} + a_1(x)t_m & + & \dots & + a_m(x)t_1 = 0, \\
a_0(x)t_{m+2} + a_1(x)t_{m+1} & + & \dots & + a_m(x)t_2 = 0, \\
\dots & & & \dots \\
a_0(x)t_{m+n} + a_1(x)t_{m+n-1} & + & \dots & + a_m(x)t_n = 0, \\
b_0(x)t_{n+1} + b_1(x)t_n & + & \dots & + b_n(x)t_1 = 0, \\
b_0(x)t_{n+2} + b_1(x)t_{n+1} & + & \dots & + b_n(x)t_2 = 0, \\
\dots & & & \dots \\
b_0(x)t_{m+n} + b_1(x)t_{m+n-1} & + & \dots & + b_n(x)t_m = 0.
\end{array}$$

Ten układ $m+n$ równań jest spełniony przez układ liczb $t_1, t_2, \dots, t_{m+n}$, które nie wszystkie są równe 0, gdyż $t_1 = 1$. Wyznacznik tego układu musi więc być równym zeru (Rozdział III, § 6, tw. 6, str. 50). Łatwo sprawdzić, że otrzymamy w ten sposób równanie:

$$R(x) = \begin{vmatrix}
a_0(x) & a_1(x) & \dots & & a_m(x) & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\
0 & a_0(x) & \dots & & a_{m-1}(x) & a_m(x) & \cdot & & 0 \\
\dots & & & & & & & & \dots \\
0 & \dots & & & a_0(x) & \dots & & & a_m(x) \\
b_0(x) & b_1(x) & \dots & b_n(x) & 0 & \dots & & & 0 \\
0 & b_0(x) & \dots & b_{n-1}(x) & b_n(x) & \dots & & & 0 \\
\dots & & & & & & & & \dots \\
0 & \dots & & & b_0(x) & \dots & & & b_n(x)
\end{vmatrix} = 0.$$

Podobnie, porządkując wielomiany $f(x,y)$ i $g(x,y)$ według potęg x i rozumując jak wyżej, otrzymamy równość:

$$R_1(y) = 0.$$

Wyznaczniki $R(x)$ i $R_1(y)$ nazywamy *rugownikami* układu (4). Mamy zatem

Twierdzenie 3. *Każdy układ liczb x, y spełniający równania* (4) *musi spełniać równania:*

(6) $$R(x) = 0 \quad \text{i} \quad R_1(y) = 0,$$

gdzie $R(x)$ i $R_1(y)$ oznaczają rugowniki układu równań (4).

§ 4. Przypadek, gdy żaden z rugowników nie jest tożsamościowo zerem. Jeżeli żaden z wielomianów $R(x)$ i $R_1(y)$ nie jest tożsamościowo równy zeru, to każde z równań (6) posiada skończoną liczbę pierwiastków. Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_k$ są pierwiastkami wielomianu $R(x)$, a $y_1, y_2, \dots, y_l$ pierwiastkami wielomianu $R_1(y)$, to każdy układ liczb x, y spełniający równania (4) będzie jednym z kl układów x_i, y_j, gdzie $i = 1, 2, \dots, k$ i $j = 1, 2, \dots, l$, lecz niekoniecznie na odwrót. Dla znalezienia wszystkich rozwiązań układu równań (4) wystarczy więc sprawdzić, które z układów x_i, y_j dla $i = 1, 2, \dots, k$ i $j = 1, 2, \dots, l$ spełniają równania (4).

Gdyby choć jedno z równań $R(x) = 0$ i $R_1(y) = 0$ nie posiadało pierwiastków (będąc np. postaci $3 = 0$), to układ równań (4) nie posiadałby rozwiązań.

PRZYKŁADY. 1. Niech będą dane równania:

$$xy + x - y - 1 = 0, \qquad xy - 3x - 2y + 6 = 0.$$

Postępując wskazanym sposobem, znajdziemy:

$$R(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ x-2 & -3x+6 \end{vmatrix} = -4(x-1)(x-2),$$

$$R_1(y) = \begin{vmatrix} y+1 & -y-1 \\ y-3 & -2y+6 \end{vmatrix} = -(y+1)(y-3).$$

Pierwiastkami równania $R(x) = 0$ są $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, zaś pierwiastkami równania $R_1(y) = 0$ są $y_1 = -1$ i $y_2 = 3$. Należy więc zbadać, które z układów:

$$1, -1, \qquad 2, -1, \qquad 1, 3, \qquad 2, 3$$

spełniają dany układ równań. Sprawdzamy z łatwością, że własność tę mają tylko układy drugi i trzeci. Układ danych równań ma więc dwa rozwiązania:

$$x = 2, y = -1 \quad \text{i} \quad x = 1, y = 3.$$

2. Niech będzie dany układ równań:

$$xy^2 - y^2 - 4x + 4 = 0, \qquad xy + y + x + 1 = 0.$$

Znajdziemy tu:

$$R(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -4x+4 \\ x+1 & x+1 & 0 \\ 0 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 5(x-1)(x+1)^2,$$

$$R_1(y) = \begin{vmatrix} y^2-4 & -y^2+4 \\ y+1 & y+1 \end{vmatrix} = 2(y+1)(y^2-4).$$

Pierwiastkami równania $R(x)=0$ są $x_1=1$ i $x_2=-1$, a pierwiastkami równania $R_1(y)=0$ są $y_1=-1$, $y_2=2$ i $y_3=-2$. Należy więc zbadać, które z układów:

$$1,-1, \qquad 1,2, \qquad 1,-2, \qquad -1,-1, \qquad -1,2, \qquad -1,-2$$

spełniają dany układ równań. Sprawdzamy, że własność tę mają układy pierwszy, piąty i szósty. Układ danych równań ma więc 3 rozwiązania:

$$x=1,\ y=-1, \qquad x=-1,\ y=2, \qquad x=-1,\ y=-2.$$

3. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2+2xy+y^2-2=0, \qquad x+y-1=0.$$

Znajdziemy tu:

$$R(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2-2 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=-1$$

i ze względu na symetrię danych równań względem x i y również:

$$R_1(y)=-1.$$

Równania $R(x)=0$ i $R_1(y)=0$ nie mogą więc być spełnione przez żaden układ liczb x,y, skąd wnosimy, że dany układ równań nie posiada rozwiązań.

Że równania danego układu są sprzeczne, można też zauważyć bezpośrednio, gdyż drugie daje $x+y=1$, zatem też $(x+y)^2=1$, zaś pierwsze napisać możemy w postaci $(x+y)^2=2$.

4. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2+y^2-2xy-1=0, \qquad x-y+2=0.$$

Znajdujemy:

$$R(x)=\begin{vmatrix} 1 & -2x & x^2-1 \\ -1 & x+2 & 0 \\ 0 & -1 & x+2 \end{vmatrix}=3-2x^2,$$

$$R_1(y)=\begin{vmatrix} 1 & -2y & y^2-1 \\ 1 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & 2-y \end{vmatrix}=3.$$

Równanie $R_1(y)=0$ nie może tu być spełnione przez żadną liczbę y, skąd wnosimy, że dany układ równań nie posiada rozwiązań.

5. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2y^2-y^2-3=0, \qquad x^2y-y-3=0.$$

Mamy tu:

$$R(x)=\begin{vmatrix} x^2-1 & 0 & -3 \\ x^2-1 & -3 & 0 \\ 0 & x^2-1 & -3 \end{vmatrix}=3(x^2-1)(4-x^2),$$

$$R_1(y)=\begin{vmatrix} y^2 & 0 & -y^2-3 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & -y^2-3 \\ y & 0 & -y-3 & 0 \\ 0 & y & 0 & -y-3 \end{vmatrix}=9y^2(y-1)^2.$$

Równanie $R(x)=0$ ma pierwiastki $1, -1, 2$ i -2, zaś równanie $R_1(y)=0$ pierwiastki 0 i 1. Sprawdzamy, że tylko układy $2, 1$ i $-2, 1$ spełniają dany układ równań.

§ 5. Przypadek, gdy jeden z rugowników jest tożsamościowo zerem. Jeżeli tylko jeden z wielomianów $R(x)$ i $R_1(y)$ nie jest tożsamościowo równy zeru, np. pierwszy, to oznaczając przez $x_1, x_2, \dots, x_k$ jego pierwiastki, wnosimy, że każde rozwiązanie x,y układu równań (4) musi mieć postać x_i, y, gdzie $i=1,2,\dots,k$. Dla znalezienia wszystkich rozwiązań należy więc zamiast układu (4) badać każdy z k układów dwu równań o jednej niewiadomej y:

$$f(x_i,y)=0, \qquad g(x_i,y)=0$$

gdzie $i=1,2,\dots,k$.

PRZYKŁADY. 1. Niech będzie dany układ równań:

$$xy^2-y^2+x-1=0, \qquad xy-y+x-1=0.$$

Znajdziemy tu:

$$R(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 0 & x-1 \\ x-1 & x-1 & 0 \\ 0 & x-1 & x-1 \end{vmatrix}=2(x-1)^3,$$

$$R_1(y)=\begin{vmatrix} y^2+1 & -y^2-1 \\ y+1 & -y-1 \end{vmatrix}=0.$$

Równanie $R(x)=0$ ma jeden tylko pierwiastek $x=1$. Lecz dla $x=1$ dany układ równań jest tożsamościowo spełniony przez każdą liczbę y. Wnosimy więc, że rozwiązania danego układu równań są postaci $1,y$ przy dowolnym y.

2. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2y^2+x^2-y^2-1=0, \qquad x^2y+x^2-y-1=0.$$

Mamy tu:

$$R(x)=\begin{vmatrix} x^2-1 & 0 & x^2-1 \\ x^2-1 & x^2-1 & 0 \\ 0 & x^2-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=2(x^2-1)^3,$$

$$R_1(y)=\begin{vmatrix} y^2+1 & 0 & -y^2-1 & 0 \\ 0 & y^2+1 & 0 & -y^2-1 \\ y+1 & 0 & -y-1 & 0 \\ 0 & y+1 & 0 & -y-1 \end{vmatrix}=0,$$

gdyż trzecia kolumna jest równa pierwszej, pomnożonej przez -1.

Równanie $R(x)=0$ ma tu dwa pierwiastki: $x=1$ i $x=-1$. Dla każdej z tych dwu wartości na x dany układ równań daje tożsamość dla y. Rozwiązania danego układu równań mają więc postać $1,y$ i $-1,y$ przy dowolnym y.

3. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2-xy=0, \qquad xy-x=0.$$

Mamy tu:

$$R(x)=\begin{vmatrix} -x, & x^2 \\ x, & -x \end{vmatrix}=x^2(1-x),$$

$$R_1(y)=\begin{vmatrix} 1, & -y, & 0 \\ y-1, & 0, & 0 \\ 0, & y-1, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Równanie $R(x)=0$ ma tu dwa pierwiastki $x=0$ i $x=1$. Dla $x=0$ dany układ daje na y tożsamość, zaś dla $x=1$ daje on na y równania $1-y=0$ i $y-1=0$, spełnione tylko przez $y=1$. Rozwiązaniami danego układu równań są więc układy $1,1$ i $0,y$ przy dowolnym y.

§ 6. Przypadek, gdy oba rugowniki są tożsamościowo równe zeru. W przypadku, kiedy oba wyznaczniki $R(x)$ i $R_1(y)$ są tożsamościowo równe 0, należy szukać rozwiązań danego układu równań na innej drodze.

PRZYKŁADY. 1. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2y^2-1=0, \qquad xy^2+y=0.$$

Znajdujemy tu:

$$R(x)=\begin{vmatrix} x^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & -1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$R_1(y)=\begin{vmatrix} y^2 & 0 & -1 \\ y^2 & y & 0 \\ 0 & y^2 & y \end{vmatrix}=0.$$

Jeżeli x,y jest rozwiązaniem danego układu równań, to musi być $y\neq 0$, gdyż dla $y=0$ pierwsze równanie nie może być spełnione przy żadnym x. Lecz gdy $y\neq 0$, drugie równanie daje $xy+1=0$, skąd $x=-1/y$, a układ $-1/y,y$ spełnia oba dane równania przy wszelkim $y\neq 0$. Rozwiązania danego układu równań mają więc postać $-1/y,y$ przy dowolnym $y\neq 0$.

2. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2y^2-x^2+x=0, \qquad xy^2-x+1=0.$$

Wyznaczniki $R(x)$ i $R_1(y)$ są tu, jak łatwo obliczyć, tożsamościowo równe 0.

Jeżeli układ x,y spełnia dane równania, to musi być $y\neq\pm 1$, gdyż dla $y=\pm 1$ drugie równanie nie może być spełnione przy żadnym x. Lecz dla $y\neq\pm 1$ drugie równanie daje $x=\dfrac{1}{1-y^2}$, zaś układ $\dfrac{1}{1-y^2},y$ spełnia oba równania przy wszelkim $y\neq\pm 1$. Rozwiązania danego układu równań mają więc postać $\dfrac{1}{1-y^2},y$ przy dowolnym $y\neq\pm 1$.

3. Niech będzie dany układ równań:

$$x^2+y^2-1=0, \qquad x^2+y^2-2=0.$$

Znajdujemy tu z łatwością, że zarówno $R(x)$ jak $R_1(y)$ są tożsamościowo równe zeru. Natomiast układ równań, jak łatwo sprawdzić, nie posiada rozwiązań, gdyż odejmując je stronami, otrzymujemy sprzeczność: $1=0$.

Zauważymy, że układ dwu równań o dwu niewiadomych x,y, z których pierwsze jest względem x pierwszego stopnia, a względem y drugiego stopnia, natomiast drugie jest względem x drugiego stopnia, a względem y pierwszego stopnia, może nie być rozwiązalny za pomocą pierwiastników (jakiegokolwiek stopnia).

Takim jest np. układ równań:

$$x(1-10y^2)+2y^2=0, \qquad x^2y-1=0.$$

Wstawiając bowiem do pierwszego z tych równań wartość na y, wyznaczoną z drugiego, otrzymamy na x równanie 5-go stopnia $x^5-10x+2=0$, które nie jest rozwiązalne za pomocą pierwiastników żadnego stopnia (ob. dalej, str. 423, ćwiczenie 2).

§ 7. Metoda Fermata rozwiązywania układu dwu równań algebraicznych. Rozwiązywanie układu dwu równań algebraicznych o dwu niewiadomych daje się sprowadzić do rozwiązywania jednego równania algebraicznego o jednej niewiadomej drogą zupełnie elementarną, wskazaną przez Fermata.

Niech

$$(7) \qquad a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_m=0 \quad \text{i} \quad b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n=0$$

będą dwoma danymi równaniami, gdzie współczynniki a_i dla $i=0,1,2,\dots,m$ oraz b_j dla $j=0,1,2,\dots,n$ zależą od y. Rozwiązując układ dwu równań o jednej niewiadomej y, mianowicie $a_m=0$ i $b_n=0$, łatwo znaleźć wszystkie takie rozwiązania układu (7), w których $x=0$. Możemy więc dalej szukać już tylko takich rozwiązań, w których $x\neq 0$. Otóż napiszmy dane równania w postaci:

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_{m-1}x=-a_m,$$
$$-b_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x.$$

Mnożąc te równania stronami i dzieląc obie strony otrzymanego równania przez x (o którym możemy teraz założyć, że jest różne od 0, gdyż ewentualne rozwiązania, w których $x=0$, już znaleźliśmy), otrzymamy równanie:

$$a_0b_nx^{m-1}+a_1b_nx^{m-2}+\dots+a_{m-1}b_n=a_mb_0x^{n-1}+\dots+a_mb_{n-1}.$$

Jeżeli $m\geqslant n$, będzie to równanie stopnia co najwyżej $m-1$. Uwzględniając to równanie oraz równanie:

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n=0,$$

będziemy mieli zamiast równań stopni m i $n\leqslant m$ dwa nowe równania stopni $m-1$ i n.

Obniżyliśmy więc stopień jednego z danych równań. Postępując w ten sam sposób dalej, musimy wreszcie dojść do równania stopnia zerowego względem x, czyli otrzymać równanie o jednej tylko niewiadomej y.

Jako ćwiczenie, czytelnik zechce zastosować tę metodę do dwu równań 2-go stopnia względem x i porównać otrzymany wynik z wyłożoną w §§ 3-6 metodą Sylvestera.

ROZDZIAŁ XVI

OBLICZANIE PIERWIASTKÓW RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

§ 1. Twierdzenie Sturma. Niech $f(x)$ oznacza wielomian o współczynnikach rzeczywistych, nie posiadający pierwiastków wielokrotnych. Wielomiany $f(x)$ i $f_1(x)=f'(x)$ są więc w myśl twierdzenia 12, Rozdziału VIII (§ 9, str. 120) względnie pierwsze. Zastosujmy względem nich algorytm Euklidesa z tą jedynie różnicą znakowania, że przy każdym kolejnym dzieleniu zmienimy znak reszty. Będzie więc:

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)f_1(x)-f_2(x),\\ f_1(x) &= q_2(x)f_2(x)-f_3(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ f_{k-2}(x) &= q_{k-1}(x)f_{k-1}(x)-f_k(x),\\ f_{k-1}(x) &= q_k(x)f_k(x), \end{aligned} \tag{1}$$

przy czym $f_k(x)$ będzie stałą różną od zera, gdyż wielomiany $f(x)$ i $f_1(x)$ są względnie pierwsze.

Weźmy pod uwagę dla danej wartości rzeczywistej x ciąg liczb:

$$f_0(x)=f(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\quad \dots,\quad f_k(x), \tag{2}$$

zwany *ciągiem Sturma.*

Jeżeli w tym ciągu, po ewentualnym odrzuceniu wyrazów pośrednich równych zeru, następuje po dodatnim wyrazie ujemny lub na odwrót, to będziemy mówili, że w ciągu występuje (co najmniej jedna) *zmiana znaku.*

Dla każdej wartości liczby rzeczywistej x możemy obliczyć liczbę $Z(x)$ kolejnych zmian znaku w ciągu (2).