

ROZDZIAŁ XIV

DOWODY NIEMOŻLIWOŚCI

§ 1. Niemożliwość przedstawienia pierwiastków wielomianu nieprzywiedlnego 3-go stopnia za pomocą pierwiastników kwadratowych. Udowodnimy następujące

***Twierdzenie 1.** Pierwiastki równania o współczynnikach wymiernych*

$$(1) \quad z^3 + pz + q = 0,$$

nie mającego pierwiastków wymiernych, nie dają się przedstawić za pomocą pierwiastników kwadratowych.

Dowód. Przypuśćmy, że jeden z pierwiastków równania (1), np. z_1 , daje się przedstawić za pomocą pierwiastników kwadratowych. Istnieje więc taki ciąg skończony liczb $a_1, a_2, \dots, a_m$, że a_1^2 jest liczbą wymierną oraz że jeśli $R_0 = \mathcal{R}$ i ogólnie $R_k = R_{k-1}(a_k)$ dla $k=1, 2, 3, \dots, m$, to a_k^2 należy do R_{k-1} dla $k=2, 3, \dots, m$, zaś z_1 należy do R_m . Możemy oczywiście założyć, że dla $k=1, 2, \dots, m$ liczba a_k nie należy do R_{k-1} (t.j. że $R_k \neq R_{k-1}$) oraz że liczba z_1 nie należy do R_{m-1} .

Ponieważ a_m nie należy do R_{m-1} , więc a_m^2 nie jest kwadratem liczby należącej do R_{m-1} , bowiem w razie $a_m^2 = u^2$ przy u należącym do R_{m-1} byłoby $a_m = u$ lub $a_m = -u$, a zatem a_m należałoby do R_{m-1} wbrew założeniu. Ponieważ zaś a_m^2 należy do R_{m-1} , więc w myśl twierdzenia 7 Rozdziału XIII (§ 3, str. 229) dwumian $x^2 - a_m^2$ jest nieprzywiedlny w ciele R_{m-1} , a że liczba a_m jest pierwiastkiem tego dwumianu, więc w myśl twierdzenia 8 tegoż Rozdziału (§ 3, str. 229) każda liczba ciała $R_m = R_{m-1}(a_m)$, zatem i liczba z_1 , daje się przedstawić w postaci $z_1 = a + ba_m$, gdzie liczby a i b należą do R_{m-1} . Lecz z_1 jest pierwiastkiem równania (1); mamy więc:

$$(2) \quad a^3 + 3ab^2a_m^2 + pa + q + (3a^2b + b^3a_m^2 + pb)a_m = 0.$$

Gdyby było $3a^2b + b^3a_m^2 + pb \neq 0$, to z równości (2) oraz z uwagi, że liczby a, b i a_m^2 należą do R_{m-1} , wynikałoby, że a_m należy do ciała R_{m-1} , wbrew założeniu. Jest więc $3a^2b + b^3a_m^2 + pb = 0$ i równość (2) daje:

$$a^3 + 3ab^2a_m^2 + pa + q - (3a^2b + b^3a_m^2 + pb)a_m = 0,$$

co dowodzi, że liczba $z_2 = a - ba_m$ jest również pierwiastkiem równania (1) i to różnym od z_1 , gdyż $b \neq 0$, skoro liczba $z_1 = a + ba_m$ nie należy do R_{m-1} . Niech z_3 oznacza trzeci z kolei pierwiastek równania (1). Będzie, jak wiemy:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$

gdyż w równaniu (1) brak wyrazu, zawierającego z^2 (por. Rozdział X, § 3, równanie (16), str. 175, i wzór (27), str. 177). Zatem:

$$z_3 = -(z_1 + z_2) = -2a,$$

co dowodzi, że z_3 należy do R_{m-1} .

Lecz z_3 nie jest liczbą wymierną, gdyż w myśl założenia równanie (1) pierwiastków wymiernych nie posiada. Istnieje przeto taka liczba naturalna $k \leq m-1$, że z_3 należy do R_k , lecz nie należy do R_{k-1} . Zastępując w przeprowadzonym rozumowaniu liczbę z_1 i ciało R_{m-1} przez liczbę z_3 i ciało R_{k-1} , dojdziemy do wniosku, że jeden z pozostałych pierwiastków (a więc z_1 lub z_2) należy do R_{k-1} , zatem tymbardziej do R_{m-2} (gdyż $k \leq m-1$). Jedną z liczb $a + ba_m$ lub $a - ba_m$ należałaby więc do R_{m-2} , a że a i $b \neq 0$ należą do R_{m-1} , wynika stąd, że a_m należy do R_{m-1} , wbrew założeniu. Twierdzenie 1 zostało zatem udowodnione.

Z twierdzenia 1 wynika w szczególności (dla równania $z^3 - 2 = 0$), że liczba $\sqrt[3]{2}$ nie daje się wyrazić za pomocą pierwiastników kwadratowych.

Jest to negatywne rozstrzygnięcie tzw. *zagadnienia podwojenia sześciianu*, w którym idzie o to, aby mając dany bok sześciianu, wykreślić jedynie za pomocą cyrkla i liniału bok sześciianu dwa razy większego co do objętości.

Gdyby to bowiem było możliwe, możnaby było również, przyjmując bok danego sześciianu za 1, zbudować za pomocą jedynie cyrkla i liniału odcinek o długości $\sqrt[3]{2}$ (gdyż taką długość ma bok sześciianu o objętości 2), co znowu — jak dowiedliśmy w § 5 Rozdziału XI (str. 208-209) — pociągałoby za sobą możliwość otrzymania liczby $\sqrt[3]{2}$

z liczby 1 za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych i wyciągania pierwiastków 2-go stopnia, czyli przedstawialność liczby $\sqrt[3]{2}$ za pomocą pierwiastników kwadratowych, wbrew twierdzeniu 1.

Do wyznaczania liczby $\sqrt[3]{2}$ sprowadza się również wyznaczanie dwu średnich geometrycznych między liczbami 1 a 2, t.j. takich liczb x i y , iż $1 : x = x : y = y : 2$.

A oto nietrudny do sprawdzenia przykład pierwiastka 3-go stopnia z liczby niewymiernej, dającego się wyrazić za pomocą pierwiastników kwadratowych:

$$\sqrt[3]{\sqrt{242} + \sqrt{243}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

§ 2. Podział koła na 7 i na 9 równych części. Trójkąt kąt. W § 2 Rozdziału XI dowiedliśmy (str. 202), że równanie

$$t^3 - \frac{7}{3}t - \frac{7}{27} = 0$$

nie posiada pierwiastków wymiernych. W myśl twierdzenia 1 żaden z pierwiastków tego równania nie daje się więc przedstawić za pomocą pierwiastników kwadratowych, co (jak zauważyliśmy tamże na str. 202) pociąga za sobą, że żaden z różnych od jedności pierwiastków równania $z^7 = 1$ nie daje się przedstawić za pomocą pierwiastników kwadratowych.

Wynika stąd, że *jeśli dany jest promień koła, to obwodu koła nie można podzielić za pomocą jedynie cyrkla i liniału na 7 równych części*.

Gdyby to bowiem było możliwe, możnaby było również, mając odcinek o długości 1, znaleźć za pomocą jedynie cyrkla i liniału punkt płaszczyzny $\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$, a więc też wykreślić odcinki o długości $\cos \frac{2\pi}{7}$ oraz $\sin \frac{2\pi}{7}$, co znowu — jak dowiedliśmy w § 5 Rozdziału XI (str. 208-209) — pociągałoby za sobą możliwość otrzymania liczb $\cos \frac{2\pi}{7}$ oraz $\sin \frac{2\pi}{7}$ z liczby 1 za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych i wyciągania pierwiastka 2-go stopnia. Stąd zaś wynikałoby, że liczba $\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$, czyli jeden z różnych od 1 pierwiastków równania $z^7 - 1 = 0$, daje się przedstawić za pomocą pierwiastników kwadratowych, wbrew okazanej przed chwilą nieprzedstawialności ich w ten sposób.

Tak samo z uwagi, że równanie

$$u^3 - 3u + 1 = 0$$

nie posiada pierwiastków wymiernych, wynika na mocy twierdzenia 1, że żaden z pierwiastków tego równania nie daje się wyrazić za pomocą pierwiastków kwadratowych — co, jak wiemy z § 3 Rozdziału XI (str. 204) — pociąga za sobą podobną własność dla różnych od jedności pierwiastków równania $z^9 - 1 = 0$.

Podobnie jak wyżej, wnosimy stąd, że *obwodu koła o danym promieniu nie można podzielić za pomocą jedynie cyrkla i liniału na 9 równych części*¹⁾.

Wynika stąd, że nie można za pomocą jedynie cyrkla i liniału zbudować kąta 40° (gdyż $40^\circ = \frac{360^\circ}{9}$).

Ponieważ zaś potrafimy za pomocą jedynie cyrkla i liniału podzielić obwód koła na 3 równe części, a więc i zbudować kąt 120° , więc — jak widzimy — *istnieje kąt, który można zbudować za pomocą jedynie cyrkla i liniału (np. kąt 120°), lecz którego nie można jedynie za pomocą cyrkla i liniału podzielić na 3 równe części*.

T.zw. *zagadnienie trysekcji kąta*, czyli możliwości podziału dowolnego kąta na 3 równe części za pomocą jedynie cyrkla i liniału, jest tym samym rozstrzygnięte negatywnie.

Mimo to wciąż jeszcze znajdują się osoby, znające tylko matematykę elementarną, które usiłują znaleźć sposób podziału dowolnego kąta na 3 równe części za pomocą jedynie cyrkla i liniału.

Jeżeli potrafimy dany kąt ϑ podzielić na 3 równe części jedynie za pomocą cyrkla i liniału, to mając odcinek o długości 1 oraz odcinek o długości $a = 2 \cos \vartheta$, potrafimy za pomocą tylko cyrkla i liniału zbudować odcinek o długości $x = 2 \cos \frac{\vartheta}{3}$ i na odwrót. Ponieważ — jak to z łatwością wynika ze wzoru de Moivre'a (ob. Rozdział VI, § 7, wzór (21), str. 93) — mamy:

$$\cos \vartheta = 4 \left(\cos \frac{\vartheta}{3} \right)^3 - 3 \cos \frac{\vartheta}{3},$$

więc:

$$(3) \quad x^3 - 3x - a = 0.$$

¹⁾ Ogólniej: można dowieść, że nie można za pomocą jedynie cyrkla i liniału podzielić koła na p^n równych części, gdzie p jest liczbą pierwszą większą od 2, a n liczbą naturalną większą od 1.

Na to więc, żeby można było przy pomocy tylko cyrkla i liniału podzielić dany kąt ϑ na 3 równe części, potrzeba i wystarcza, iżby pierwiastki równania (3) dały się otrzymać z liczb 1 i a przy pomocy pierwiastków kwadratowych. Można by badać, dla jakich liczb a jest to możliwe.

Wspomniemy tu jeszcze o zagadnieniu *kwadratury koła*.

Jest to zagadnienie budowania, za pomocą jedynie cyrkla i liniału, kwadratu o polu równym polu koła o danym promieniu. Jeżeli promień koła przyjmiemy za 1, to — jak wiemy — bok kwadratu o polu równym polu tego koła wynosi $\sqrt{\pi}$. Gdyby więc kwadratura koła była możliwa, to odcinek o długości π można by zbudować z odcinka o długości 1, używając jedynie cyrkla i liniału (i na odwrót), a więc liczba π dałaby się wyrazić za pomocą pierwiastków kwadratowych, co jest niemożliwe, gdyż — jak wiemy z Rozdziału XII, § 6, str. 222 — π jest liczbą przestępną.

Zagadnienie kwadratury koła jest oczywiście równoważne zagadnieniu *cyrkulatury kwadratu*, t. j. zagadnieniu zbudowania, za pomocą jedynie cyrkla i liniału, koła o powierzchni równej polu danego kwadratu.

Jest ono też, jak łatwo dowieść, równoważne zagadnieniu *wyprostowalności okręgu*, t. j. zbudowaniu, za pomocą jedynie cyrkla i liniału, odcinka o długości równej obwodowi danego koła.

Oto co pisze na ten temat prof. Steinhaus¹⁾:

„Znaczną popularnością cieszą się niektóre naukowe zagadnienia, które przez swą prostą formę są zrozumiałe i dla nie mającego specjalnego wykształcenia ogółu. Pytanie proste, a odpowiedź trudna — do tego rodzaju zadań należy kwadratura koła. Od zamierzchłej przeszłości do ostatnich czasów zagadnienie owo zaprzętało uczonych i profanów, tak że w końcu „kwadratura koła“ stała się przysłowiem oznaczeniem wszystkiego, co trudne, niemożliwe, samo w sobie sprzeczne. W wiekach średnich szukano kwadratury koła w mniemaniu, że da ona temu, kto ją znajdzie, potęgę i wiedzę taką, jaką daje kamień filozoficzny i eliksir życia. Jeżeli ten okres kwadratury koła nazwiemy mistycznym, to wiekom XVIII-mu i XIX-mu, kiedy wśród szerszego ogółu było rozpowszechnione przekonanie o wielkich nagrodach, wyznaczonych przez akademie za kwadraturę, należy się nazwa okresu materialistycznego. (Nb. nagród podobnych nigdy nikt nie wyznaczał). Do dziś dnia ukazują się rozprawki, których autorowie utrzymują, że im właśnie udało się to, nad czym bezskutecznie śleczą matematycy, a kiedy rzekome odkrycie przechodzi bez wrażenia, uskarżają się na zawiść uczonych z rzemiosła. Przeważnie jednak inteligentny ogół stoi na stanowisku krytycznym, t. j. uważa rozwiązanie za niemożliwe. Motywy jednak są często błędne (niewymierność liczby π), często też ów pogląd krytyczny jest wynikiem nieznajomości zagadnienia.

¹⁾ H. Steinhaus, *Kwadratura koła*, Wszechświat, Warszawa 1908.

...Dziś chyba każdy wie, że oddawna akademie, złożone z „zazdrosnych fachowców“, wrzucają wszelkie rozprawy, podające „wreszcie“ konstrukcję kwadratury koła, do kosza. Niestety kosze, przeznaczone na ten cel, bynajmniej nie są dziś jeszcze szczupłe“.

Nadworny matematyk króla Jana III, bibliotekarz w Wilanowie, ks. Adam Kochański podał *przybliżoną* konstrukcję liczby π za pomocą cyrkla i liniału,

a mianowicie liczby $\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3}$, która — jak łatwo obliczyć — wynosi 3,14153334...,

a zatem różni się od π mniej niż o $6 \cdot 10^{-5}$. Eugen Beutel, autor dziełka *Die Quadratur des Kreises*, nazywa rozwiązanie ks. Kochańskiego „najstarszym z nowoczesnych i jednym z najdokładniejszych“¹⁾.

Inną konstrukcję podał Specht, wychodząc z nierówności:

$$\left| \pi - \frac{13}{50} \sqrt{146} \right| < \frac{7}{10^7}.$$

Zagadnienie kwadratury koła należy odróżniać od następującego zagadnienia, nie mającego z nią bezpośredniego związku: czy można rozbić koło na skończoną liczbę części (niekoniecznie za pomocą tylko cyrkla i liniału), z których możnaby złożyć kwadrat?

Istnienie rozkładu kuli na skończoną liczbę części (których jednak nie potrafimy efektywnie wyznaczyć), z których można złożyć sześcian o tej samej co dana kula (lub nawet innej) objętości, zostało udowodnione przez Banacha i Tarskiego²⁾.

W związku z zagadnieniami możliwości konstrukcji przy pomocy tylko cyrkla i liniału wspomnimy, że — jak okazał Mascheroni³⁾ — wszystkie punkty, które mogą być wyznaczone z danych punktów przy pomocy cyrkla i liniału, mogą też być wyznaczone z nich przy pomocy samego tylko cyrkla. Steiner zaś dowiódł⁴⁾, że mogą one też być zbudowane przy pomocy samego tylko liniału, o ile narysowane jest jakiegokolwiek koło wraz ze środkiem. Koło bez środka do tego celu nie wystarcza⁵⁾.

Niektóre konstrukcje, niewykonalne przy pomocy samego cyrkla i liniału stają się wykonalne przy pomocy tych przyrządów, jeżeli narysowana jest parabola $y = x^2$ lub choćby mały jej łuk.

¹⁾ Ob. książkę S. Jeleńskiego, *Śladami Pitagorasa*, str. 300.

²⁾ S. Banach i A. Tarski, *Fundamenta Mathematicae* Tom 6 (1924), str. 244.

³⁾ L. Mascheroni, *La geometria del compasso*, Pavia 1797.

⁴⁾ J. Steiner, *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*, Berlin 1833, str. 110.

⁵⁾ Zob. H. Rademacher i O. Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, Berlin 1930, str. 141 oraz str. 163.

Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 2. *Gdy narysowana jest parabola $y = x^2$, to (mając daną jednostkę długości) można zbudować za pomocą cyrkla i liniału każdą liczbę rzeczywistą algebraiczną stopnia niewiększego od 4.*

Dowód. Niech t będzie liczbą algebraiczną [rzeczywistą stopnia nie większego od 4. Jak wiadomo (ob. Rozdział X, § 6, str. 187), t spełnia równanie:

$$(4) \quad t^4 + at^2 + bt + c = 0$$

o współczynnikach a, b i c wymiernych, przy czym możemy założyć, że $b \neq 0$, gdyż pierwiastki równania $t^4 + at^2 + c = 0$ potrafimy zbudować za pomocą cyrkla i liniału. Możemy także przyjąć, że $b^2 > 4c$, gdyż w przeciwnym razie wystarczyłoby zamiast liczby t budować liczbę $u = kt$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od $\sqrt{4c/b}$; liczba u spełnia bowiem równanie:

$$u^4 + k^2 au^2 + k^3 bu + k^4 c = u^4 + a_1 u^2 + b_1 u + c_1 = 0,$$

gdzie $b_1 - 4c_1 = k^6 b^2 - 4k^4 c = k^4 (k^2 b^2 - 4c) > 0$.

Wobec $b^2 > 4c$ liczba $r = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{(a-1)^2}{4}} - c$ jest pierwiastkiem z liczby wymiernej dodatniej i przeto potrafimy ją zbudować za pomocą cyrkla i liniału. Potrafimy więc też zbudować w ten sposób koło o środku w punkcie $\left(-\frac{b}{2}, \frac{1-a}{2}\right)$ i o promieniu r , czyli koło o równaniu:

$$(5) \quad x^2 + y^2 + bx + (a-1)y + c = 0,$$

a zatem potrafimy przy pomocy narysowanej paraboli

$$(6) \quad y = x^2$$

znaleźć punkty przecięcia koła (5) z parabolą (6). Jednym z tych punktów jest oczywiście punkt (t, t^2) , przyjmując bowiem $x = t$ i $y = t^2$, otrzymujemy wobec (4):

$$x^2 + y^2 + bx + (a-1)y + c = t^2 + t^4 + bt + (a-1)t^2 + c = 0$$

oraz

$$y - x^2 = t^2 - t^2 = 0.$$

Układ x, y spełnia więc równania (5) i (6).

Liczba t jest zatem odciętą punktu $(x, y) = (t, t^2)$; potrafimy więc ją zbudować (mając parabolę (6)) za pomocą cyrkla i liniału, co dowodzi twierdzenia 2.

PRZYKŁAD. Niech $t = \sqrt[3]{2}$. Liczba ta spełnia równanie $t^3 - 2t = 0$. Mamy tu więc $a = 0$, $b = -2$ i $c = 0$, zatem $b^2 > 4c$. Liczba t jest zatem odciętą punktu przecięcia koła o środku $(1, \frac{1}{2})$ i promieniu $\frac{\sqrt{5}}{2}$ z parabolą $y = x^2$.

Widzimy stąd, że mając narysowaną parabolę $y = x^2$, możemy za pomocą jedynie cyrkla i liniału dokonać podwojenia sześcianu.

Podobnie, w myśl twierdzenia 2 możnaby dokonać podziału koła na 7 i na 9 równych części, gdyż zagadnienie to doprowadza do równań stopnia 3-go, których współczynniki dają się zbudować za pomocą cyrkla i liniału.

Możemy też łatwo udowodnić nieco ogólniejsze

Twierdzenie 3. *Gdy narysowana jest parabola $y=x^2$, to (przy danej jednostce długości) można zbudować za pomocą cyrkla i liniału każdą liczbę rzeczywistą, spełniającą równanie stopnia nie wyższego niż 4 o współczynnikach będących liczbami, dającymi się zbudować przy pomocy tej paraboli oraz cyrkla i liniału.*

Wynika stąd w szczególności, że mając narysowaną parabolę $y=x^2$, możemy przy pomocy jedynie cyrkla i liniału dokonać podziału każdego kąta na 3 równe części.

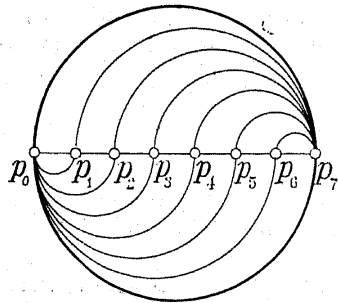
Jeśli bowiem dany jest kąt α , możemy zbudować za pomocą cyrkla i liniału z danej jednostki długości liczbę $\sin \alpha$, skąd wnosimy, że mając narysowaną parabolę $y=x^2$, możemy zbudować za pomocą cyrkla i liniału liczbę $\sin \frac{\alpha}{3}$, która jest pierwiastkiem równania $4x^3 - 3x + \sin \alpha = 0$, a zatem i kąt $\frac{\alpha}{3}$.

Do równania 3-go stopnia doprowadza też zagadnienie podziału promienia $r=1$ kuli na części o długości x i $1-x$ tak, aby płaszczyzna prostopadła do tego promienia i przechodząca przez punkt podziału odcinała z góry część a objętości tej kuli. Ze wzoru na objętość odcinka kuli wynika bowiem, że x jest pierwiastkiem równania $x^2(3-x)=4a$.

Gdy idzie o liczby algebraiczne 3-go stopnia, co właśnie ma zastosowanie przy podwojeniu sześciannu, trysekcji kąta i podziale koła na 7 równych części, to wystarczy mieć narysowaną dowolnie mały łuk L paraboli $y=x^2$, byleby wychodzący z wierzchołka. Jest to łuk, dla którego punktów zachodzi nierówność $0 < x \leq d$, gdzie d jest dowolną liczbą dodatnią.

Każda bowiem liczba algebraiczna stopnia 3 spełnia równanie $t^3 + at + b = 0$ o współczynnikach wymiernych, a więc też równanie (4), gdzie $c=0$ (i to samo dotyczy liczby t/n dla $n=1,2,\dots$). Liczbę t/n otrzymamy więc jako odciętą punktu przecięcia łuku L paraboli z odpowiednim kołem, które potrafimy wykreślić.

Można dowieść, iż parabola $y=x^2$ daje się zastąpić w rozpatrzonych wyżej konstrukcjach przez dowolną stożkową nie będącą kołem¹⁾.



Rys. 4.

Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej n potrafimy przy pomocy cyrkla i liniału podzielić koło na n części równych co do pola i mających obwody równych długości. Wystarczy bowiem podzielić średnicę koła p_0p_n na n równych części za pomocą punktów $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ i przeprowadzić krzywe L_k ($k=1,2,\dots,n-1$), złożone z dolnej połowy okręgu o średnicy p_0p_k oraz górnej o średnicy p_kp_n . Rys. 4 przedstawia taki podział koła na 7 części.

Gdyby chodziło tylko o podział koła πr^2 za pomocą cyrkla i liniału na n rów-

nych pól, to wystarczyłoby przeprowadzić koła współśrodkowe z danym o promieniach $r(k/n)^{1/2}$ dla $k=1,2,\dots,n-1$.

¹⁾ Ob. A. Adler, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, (Sammlung Schubert, Tom 52), Lipsk 1906, str. 254-259.

§ 3. Niemożliwość przedstawienia za pomocą pierwiastków rzeczywistych pierwiastków wielomianu 3-go stopnia o współczynnikach wymiernych i trzech pierwiastkach rzeczywistych niewymiernych. W § 1 i § 2 zajmowaliśmy się przedstawialnością liczb algebraicznych przez pierwiastniki kwadratowe i geometryczną interpretacją otrzymanych wyników. Obecnie przejdziemy do przedstawialności liczb algebraicznych przez pierwiastniki rzeczywiste.

Twierdzenie 4. *Jeżeli równanie 3-go stopnia o współczynnikach wymiernych ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste niewymierne, to żaden z nich nie daje się przedstawić za pomocą pierwiastników rzeczywistych.*

Dowód. Załóżmy, że równanie 3-go stopnia $f(x)=0$ o współczynnikach wymiernych ma trzy pierwiastki rzeczywiste niewymierne x_1, x_2 i x_3 oraz że co najmniej jeden z nich daje się wyrazić za pomocą pierwiastników rzeczywistych. Istnieje więc taki ciąg skończony liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_m$ i taki ciąg skończony liczb pierwszych $q_1, q_2, \dots, q_m$, że jeśli przyjmiemy $R_0 = \mathcal{R}$ oraz $R_k = R_{k-1}(a_k)$ dla $k=1,2,\dots,m$, to $a_k^{q_k}$ będzie należało do ciała R_{k-1} dla $k=1,2,\dots,m$, zaś jeden co najmniej z pierwiastków równania będzie należał do R_m . Możemy przytem założyć, że dla $k=1,2,\dots,m$ liczba a_k nie należy do R_{k-1} oraz że żaden z pierwiastków równania $f(x)=0$ nie należy do R_{m-1} . Wynika stąd, że wielomian $f(x)$ jest przywiedlny w ciele $R_m = R_{m-1}(a_m)$, gdyż posiada pierwiastek należący do R_m , lecz jest nieprzywiedlny w ciele R_{m-1} , gdyż w przeciwnym razie, jako wielomian stopnia 3-go, rozkładałby się w ciele R_{m-1} na iloczyn dwóch czynników, z których jeden byłby liniowy, a więc posiadałby pierwiastek należący do ciała R_{m-1} , wbrew założeniu.

Ponieważ $R_m = R_{m-1}(a_m)$ i $a_m^{q_m}$ należy do R_{m-1} , lecz a_m do R_{m-1} nie należy, więc dwumian $x^{q_m} - a_m^{q_m}$ jest nieprzywiedlny w ciele R_{m-1} , w przeciwnym bowiem razie, w myśl twierdzenia 7 Rozdziału XIII (§ 3, str. 229), zachodziłaby równość postaci $a_m^{q_m} = a^{q_m}$, gdzie a należy do R_{m-1} ; z uwagi na to, że liczby a_m i a są rzeczywiste, gdyż ciało R_{m-1} składa się tylko z liczb rzeczywistych, mielibyśmy stąd $a_m = a$ lub (w razie, gdy $q_m=2$) $a_m = \pm a$, skąd w każdym razie wynikałoby, iż a_m należy do ciała R_{m-1} , wbrew założeniu.

Wielomian $f(x)$ jest stopnia 3-go, zaś wielomian $g(x) = x^{q_m} - a_m^{q_m}$ stopnia q_m , gdzie q_m jest liczbą pierwszą. Oba te wielomiany mają współczynniki należące do ciała R_{m-1} i są nieprzywiedlne w tym

§ 4. Niemożliwość przedstawienia części rzeczywistej oraz współczynnika przy i liczby $\sqrt[3]{1+2i}$ za pomocą pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek. Dla żadnej wartości $\sqrt[3]{1+2i}$ ani część rzeczywista, ani współczynnik przy i , nie dają się przedstawić za pomocą pierwiastków rzeczywistych.

Przypuśćmy bowiem, że dla jednej z wartości $\sqrt[3]{1+2i}$ część rzeczywista daje się przedstawić za pomocą pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ liczba dodatnia $\sqrt[3]{5}$ daje się oczywiście przedstawić za pomocą pierwiastków rzeczywistych, więc z przypuszczenia tego wynika, że dla jednej z wartości $\sqrt[3]{5+10i} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{1+2i}$, np. dla wartości $a+bi$, część rzeczywista a daje się przedstawić za pomocą pierwiastków rzeczywistych. Lecz

$$(a+bi)^3 = 5+10i;$$

przyjmując więc $u=a+bi$ i $v=a-bi$, będziemy mieli:

$$u^3 = 5+10i \quad i \quad v^3 = 5-10i,$$

skąd $u^3+v^3=10$ i $(uv)^3=125$, co wobec $uv=a^2+b^2 \geq 0$ daje $uv=5$.

Mamy więc $u^3+v^3=10$ i $uv=5$, skąd wynika, że liczba $z=u+v=2a$ spełnia równanie

$$z^3-15z-10=0.$$

Równanie to ma trzy pierwiastki rzeczywiste, gdyż wyróżnik jego $R=5^2-5^3$ jest ujemny. Nie posiada zaś ono pierwiastków wymiernych, gdyż żaden z dzielników liczby 10 nie jest jego pierwiastkiem.

W myśl twierdzenia 4 liczba $z=2a$ nie daje się więc przedstawić za pomocą pierwiastków rzeczywistych, wbrew określeniu liczby a .

Dowiedliśmy zatem, że dla żadnej wartości $\sqrt[3]{1+2i}$ część rzeczywista nie daje się przedstawić za pomocą pierwiastków rzeczywistych. Wynika stąd, że i współczynnik przy i posiada podobną własność, gdyż z $(a+bi)^3=1+2i$ wynika $(a^2+b^2)^3=5$, co dowodzi, że gdyby liczba b dawała się przedstawić za pomocą pierwiastków rzeczywistych, to i liczba a dawałaby tak się przedstawić, wbrew temu, co zostało przed chwilą dowiedzione. Tym samym wniosek jest udowodniony.

cielo. Ponieważ $g(a_m)=0$, a wielomian $f(x)$ staje się przywiedlnym w ciele $R_m=R_{m-1}(a_m)$, więc w myśl twierdzenia 9 Rozdziału XIII (§ 3, str. 231) wnosimy, że $q_m=3$. Wobec twierdzenia 8 Rozdziału XIII (§ 3, str. 229) każda liczba ciała $R_m=R_{m-1}(a_m)$, a więc w szczególności i jeden z pierwiastków wielomianu $f(x)$, np. x_1 , daje się zatem przedstawić w postaci:

$$(7) \quad x_1 = c_0 + c_1 a_m + c_2 a_m^2,$$

gdzie c_0, c_1 i c_2 są liczbami należącymi do ciała R_{m-1} , a więc w każdym razie liczbami rzeczywistymi.

Przyjmijmy:

$$(8) \quad F(x) = f(c_0 + c_1 x + c_2 x^2).$$

Jest to wielomian o współczynnikach należących do ciała R_{m-1} , przy czym $F(a_m)=f(x_1)=0$. Wielomian $F(x)$ staje się więc zerem dla jednego z pierwiastków wielomianu $g(x)$, nieprzywiedlnego w ciele R_{m-1} . W myśl twierdzenia 6 Rozdziału XIII (§ 3, str. 228) wielomian $F(x)$ jest zatem podzielny przez $g(x)$ i staje się wobec tego zerem dla każdego pierwiastka wielomianu $g(x)$. Lecz wielomian

$$g(x) = x^{q_m} - a_m^{q_m} = x^3 - a_m^3$$

ma jeszcze prócz pierwiastka rzeczywistego a_m dwa pierwiastki zespolone εa_m i $\varepsilon^2 a_m$, gdzie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Będzie więc też $F(\varepsilon a_m)=0$ i $F(\varepsilon^2 a_m)=0$, skąd wnosimy na mocy (8), że liczby $c_0 + c_1 \varepsilon a_m + c_2 \varepsilon^2 a_m^2$ i $c_0 + c_1 \varepsilon^2 a_m + c_2 \varepsilon a_m^2$ są też pierwiastkami wielomianu $f(x)$. Ale

$$c_0 + c_1 \varepsilon a_m + c_2 \varepsilon^2 a_m^2 = c_0 - \frac{c_1}{2} a_m - \frac{c_2}{2} a_m^2 + (c_1 a_m - c_2 a_m^2) \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Skoro więc pierwiastki wielomianu $f(x)$ są wszystkie rzeczywiste (gdyż liczby c_0, c_1, c_2 i a_m są rzeczywiste), musi tu być $c_1 a_m - c_2 a_m^2 = 0$. Wynika stąd wobec $a_m \neq 0$ (gdyż a_m nie należy do R_{m-1}), że $c_1 - c_2 a_m = 0$. Gdyby było $c_2 = 0$, mielibyśmy więc $c_1 = 0$, a zatem na mocy (7) $x_1 = c_0$, co jest niemożliwe, gdyż x_1 nie należy do R_{m-1} . Jest więc $c_2 \neq 0$ i wzór $c_1 - c_2 a_m = 0$ dowodzi, że a_m należy do ciała R_{m-1} , wbrew założeniu. Udowodniliśmy więc twierdzenie 4.

Natomiast dla każdej z wartości $\sqrt[3]{1+i}$ zarówno część rzeczywista jak i współczynnik przy i dają się wyrazić za pomocą pierwiastników rzeczywistych. Wartościami tymi są bowiem:

$$\frac{-1+i}{\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2}} \quad i \quad \frac{1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i}{2\sqrt[3]{2}}.$$

§ 5. Własność pierwiastków pierwotnych 7-go i 9-go stopnia z jedności. W Rozdziale XI (§ 2, str. 201-202) dowiedliśmy, że jeżeli przez z oznaczyć pierwiastek równania $z^7-1=0$ różny od liczby 1 i przyjąć $t=z+z^{-1}+1/3$, to liczba t spełnia równanie:

$$t^3 - \frac{7}{3}t - \frac{7}{27} = 0,$$

które, jak okazaliśmy tamże, nie posiada pierwiastków wymiernych.

Wyróżnik $R = \frac{7^2}{27^2 \cdot 4} - \frac{7^3}{27^2}$ tego równania jest ujemny, wszystkie więc trzy jego pierwiastki są rzeczywiste i w myśl twierdzenia 4 (str. 249) żaden z nich, a zatem i liczba t , nie daje się przedstawić za pomocą pierwiastników rzeczywistych.

Jeżeli przyjmiemy $z=a+bi$, to (wobec $z^7=1$) będzie oczywiście $z^{-1}=a-bi$, a zatem $t=z+z^{-1}+1/3=2a+1/3$. Gdyby więc liczba a dawała się przedstawić za pomocą pierwiastników rzeczywistych, to podobną własność miałyby też liczba t wbrew temu, czego dowiedliśmy wyżej. Liczba a nie daje się więc przedstawić za pomocą pierwiastników rzeczywistych. Podobną własność ma też liczba b , co wynika natychmiast z równości $a^2+b^2=1$ czyli $a^2=1-b^2$ oraz z dowiedzionej własności liczby a . Zatem:

Dla żadnego z pierwiastków pierwotnych 7-go stopnia z jedności, część rzeczywista, ani też współczynnik przy i , nie dają się przedstawić za pomocą pierwiastników rzeczywistych.

Tę samą własność mają pierwiastki pierwotne 9-go stopnia z jedności.

Jeżeli bowiem $z=a+bi$ jest takim pierwiastkiem, to z^3 jest różnym od 1 pierwiastkiem 3-go stopnia z jedności, a zatem:

$$(a+bi)^3 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Dla $u=a+bi$ i $v=a-bi$ będziemy więc mieli:

$$u^3 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad i \quad v^3 = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2},$$

skąd $u^3+v^3=-1$ i $(uv)^3=1$; ponieważ zaś $uv=a^2+b^2 \geq 0$, więc $uv=1$, a zatem $3uv=3$. Liczba $w=u+v=2a$ jest więc pierwiastkiem równania

$$w^3 - 3w + 1 = 0.$$

Równanie to nie posiada pierwiastków wymiernych, a wyróżnik jego $R = -\frac{3}{4}$ jest ujemny. Posiada więc ono trzy pierwiastki rzeczywiste, z których żaden w myśl twierdzenia 4 nie daje się przedstawić za pomocą pierwiastników rzeczywistych. Zatem ani liczba a , ani też liczba b (gdyż $a^2=1-b^2$), nie dają się przedstawić w ten sposób, c. b. d. o.