ROZDZIAŁ XII

LICZBY ALGEBRAICZNE

§ 1. Liczby algebraiczne n-go stopnia. *Liczbą algebraiczną* nazywamy każdą taką liczbę rzeczywistą lub zespoloną, która jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Liczbą algebraiczną n-go stopnia nazywamy każdą liczbę (rzeczywistą lub zespoloną), która jest pierwiastkiem wielomianu n-go stopnia o współczynnikach całkowitych, ale nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu niższego stopnia o współczynnikach całkowitych.

Jeżeli liczba algebraiczna a n-go stopnia jest pierwiastkiem wielomianu n-go stopnia $f(x)$ o współczynnikach całkowitych, to wielomian ten jest nieprzywiedlny. W przeciwnym bowiem razie wielomian f byłby iloczynem dwóch wielomianów f_1 i f_2 stopni niższych od n o współczynnikach wymiernych i liczba a byłaby pierwiastkiem jednego co najmniej z tych wielomianów, a więc pierwiastkiem wielomianu stopnia niższego od n o współczynnikach wymiernych, a więc (po pomnożeniu równania przez ich wspólny mianownik) o współczynnikach całkowitych, wbrew określeniu liczby a, jako algebraicznej n-go stopnia.

Z drugiej strony, jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu nieprzywiedlnego $f(x)$ stopnia n, to jest ona liczbą algebraiczną stopnia n. Przede wszystkim bowiem możemy założyć, że współczynniki wielomianu $f(x)$ są całkowite (w przeciwnym razie wystarczyłoby je pomnożyć przez ich wspólny mianownik). Liczba a jest więc algebraiczna. Pozostaje dowieść, że liczba a nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu stopnia niższego od n o współczynnikach całkowitych. Przypuśćmy, że $g(x)$ jest takim wielomianem. Wielomiany (o współczynnikach całkowitych) f i g posiadają zatem wspólny pierwiastek a i w myśl twierdzenia 27 z Rozdziału VIII (§ 14, str. 135) musi być $f|g$, wbrew założeniu, że stopień wielomianu g jest mniejszy od n. Udowodniliśmy w ten sposób

Twierdzenie 1. *Na to, żeby liczba a była liczbą algebraiczną stopnia n, potrzeba i wystarcza, iżby była pierwiastkiem wielomianu nieprzywiedlnego stopnia n.*

Dwa wielomiany nieprzywiedlne o współczynnikach wymiernych, których pierwiastkiem wspólnym jest liczba algebraiczna a, są w myśl twierdzenia 1, wzajemnie przez siebie podzielne, a więc iloraz ich jest liczbą stałą (wymierną). Wśród takich wielomianów istnieje zatem dokładnie jeden, którego współczynnik przy najwyższej potędze jest jednością. Zachodzi więc

Twierdzenie 2. *Każda liczba algebraiczna jest pierwiastkiem jednego tylko wielomianu nieprzywiedlnego, w którym współczynnik przy najwyższej potędze jest równy* 1.

Liczby algebraiczne, będące pierwiastkami tego samego równania nieprzywiedlnego (które, jak wynika z twierdzenia 2, jest jedyne, jeżeli abstrahować od czynnika stałego), nazywają się *stowarzyszonymi*.

Są one oczywiście wszystkie tego samego stopnia.

Ponieważ wielomian nieprzywiedlny jednej zmiennej rzeczywistej (o współczynnikach całkowitych) ma same różne pierwiastki, więc z łatwością można okazać, że zmienia on znak przy każdym przejściu przez zero. Liczba algebraiczna rzeczywista jest zatem w zupełności określona przez wielomian nieprzywiedlny f, którego jest ona pierwiastkiem, i przez liczbę porządkową, wyrażającą, który raz przy przejściu zmiennej przez tę liczbę algebraiczną wielomian f zmienia swój znak.

W ten sposób pojęcie liczby algebraicznej daje się sprowadzić do pojęcia wielomianu o współczynnikach całkowitych i do liczby naturalnej, czyli *zarytmetyzować*.

Na tym właśnie polega zupełnie prawie zapomniana (jakkolwiek najelementarniejsza) metoda Kroneckera przedstawiania liczb algebraicznych rzeczywistych za pomocą zmian znaku wielomianów nieprzywiedlnych o współczynnikach całkowitych[1]).

ĆWICZENIA. 1. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest liczba $x=\sqrt{6+\sqrt{20}}$.

Odp.: 2-go, gdyż $0=(x^2-6)^2-20=(x^2+2x-4)(x^2-2x-4)$, skąd z łatwością wnosimy, że $x=\sqrt{5}+1$.

2. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest $x=\sqrt{8}+\sqrt{18-\sqrt{320}}$.

Odp.: 2-go, gdyż (wobec wzoru $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$) jest $x=\sqrt{10}$.

---

[1]) Ob. P. Bernays, Enseignement Mathématique, Tom 34 (1935), str. 59, odsyłacz 1.

3. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest $x=\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{72}-2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{8}}$.

Odp.: 1-go, gdyż $x=0$.

4. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest $x=\sqrt[4]{12}-\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{24}}$.

Odp.: 4-go, gdyż $x=\sqrt[4]{3}$.

5. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest $x=\sqrt[4]{51+\sqrt{2592}}-\sqrt[4]{3}$.

Odp.: 4-go, gdyż $x=\sqrt[4]{12}$.

6. Znaleźć wielomian nieprzywiedlny, którego pierwiastkiem jest liczba $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$.

Odp.: x^3-2.

7. Znaleźć wielomian nieprzywiedlny, którego pierwiastkiem jest liczba $\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{23-\sqrt{448}}}$.

Odp.: $x-2$; wobec podanego wyżej wzoru dla $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ mamy bowiem (dla $a=16$ i $b=7$) $4=\sqrt{7}+\sqrt{23-\sqrt{448}}$.

8. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest liczba

$$x=\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}-\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Odp.: 2-go, gdyż $x=\sqrt{5}$, co wynika z równości

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}.$$

9. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest liczba

$$x=\sqrt{12+\sqrt{10}+\sqrt[4]{23040}}-\sqrt[4]{10}.$$

Odp.: 2-go, gdyż $x=\sqrt{12}$; otrzymujemy to, opierając się dla $a=12$ i $b=\sqrt{10}$ na tożsamości

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}.$$

10. Znaleźć wielomian nieprzywiedlny, którego pierwiastkiem jest

$$x=\sqrt[4]{343}-\sqrt{\sqrt{448}-14}.$$

Odp.: x^4-7, gdyż $\sqrt[4]{343}-\sqrt[4]{7}=\sqrt{\sqrt{448}-14}$.

11. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest $x=\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$.

Odp.: 2-go, gdyż $x=3+\sqrt{2}$.

12. Zbadać, jakiego stopnia liczbą algebraiczną jest $x=\sqrt[3]{\sqrt{242}+\sqrt{243}}$.

Odp.: 4-go, gdyż $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

§ 2. Dowód istnienia liczb algebraicznych dowolnego stopnia. Liczby wymierne i tylko one są liczbami algebraicznymi 1-go stopnia.

Istnieją liczby algebraiczne każdego naturalnego stopnia.

Istotnie, np. liczba $\sqrt[n]{2}$ jest liczbą algebraiczną stopnia n, gdyż jest ona pierwiastkiem wielomianu x^n-2, który w myśl wniosku 1 z twierdzenia 26 Rozdziału VIII (§ 14, str. 134) jest nieprzywiedlny.

Jako inny przykład, okażemy, że $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest liczbą algebraiczną stopnia 4.

Mianowicie, dla $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ znajdujemy $\alpha^2=5+2\sqrt{6}$, skąd $(\alpha^2-5)^2=24$, zatem $\alpha^4-10\alpha^2+1=0$. Liczba α jest więc pierwiastkiem wielomianu $f(x)=x^4-10x^2+1$. Okażemy, że wielomian $f(x)$ jest nieprzywiedlny. Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest. W myśl twierdzenia 24 Rozdziału VIII (§ 13, str. 132), wielomian $f(x)$ byłby więc iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Gdyby jeden z tych czynników był stopnia 1-go, to wielomian $f(x)$ miałby pierwiastek wymierny p/q, przy czym można założyć, że p jest liczbą całkowitą, zaś q liczbą naturalną, pierwszą względem p. Byłoby więc $p^4-10p^2q^2+q^4=0$, skąd $q^2|p^4$ oraz $p^2|q^4$, co wobec $(p,q)=1$ daje natychmiast $q=1$ oraz $p=\pm1$, zatem $p/q=\pm1$; ale jest to niemożliwe, gdyż ani $+1$, ani -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$. Oba czynniki wielomianu $f(x)$ są zatem stopnia 2-go, a więc możemy przyjąć $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$, gdzie liczby a, b, c i d są całkowite. Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach x po obu stronach, mielibyśmy w myśl wniosku z twierdzenia 18 Rozdziału VIII (§ 11, str. 124) $a+c=0$, $b+d+ac=0$ i $bd=1$, zatem $c=-a$ i $b+d=-ac=a^2$. Wobec $bd=1$ mamy $b=\pm1$ i $d=\pm1$, przy czym znaki należy brać bądź oba górne, bądź oba dolne. Otrzymalibyśmy więc $a^2=b+d=\pm2$, co jest niemożliwe wobec niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Zatem wielomian $f(x)$ istotnie jest nieprzywiedlny, a więc α jest liczbą algebraiczną stopnia 4. Stowarzyszonymi z nią liczbami algebraicznymi są liczby $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ i $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Jako jeszcze inny przykład, zbadajmy pierwiastki p-go stopnia z jedności, gdzie p jest liczbą pierwszą.

Są to więc pierwiastki wielomianu $f(x)=x^p-1$. Wobec tożsamości

$$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)$$

icm

pierwiastkami wielomianu x^p-1 są prócz liczby 1 pierwiastki wielomianu $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$, który w myśl wniosku 2 z twierdzenia 26 Rozdziału VIII (§ 14, str. 134) jest nieprzywiedlny. Wszystkie więc pierwiastki p-go stopnia z jedności, różne od 1, są liczbami algebraicznymi stopnia $p-1$ (stowarzyszonymi między sobą).

Dalsze przykłady: pierwiastkami 4 stopnia z jedności są liczby $1, -1, i$ oraz $-i$, z których pierwsze dwie są liczbami algebraicznymi 1-go stopnia, zaś obie pozostałe 2-go stopnia.

Z pierwiastków 6-go stopnia z jedności — jak łatwo wysnuć z tożsamości $x^6-1=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$ — dwa są liczbami algebraicznymi 1-go stopnia, zaś pozostałe cztery liczbami algebraicznymi 2-go stopnia.

Z pierwiastków 8-go stopnia z jedności dwa są liczbami algebraicznymi stopnia 1, dwa stopnia 2, a pozostałe cztery stopnia 4, co wynika z łatwością z tożsamości $x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)$ oraz z nieprzywiedlności wielomianu x^4+1 (w myśl wniosku 3 z twierdzenia 26 Rozdziału VIII, § 14, str. 135).

Z pierwiastków 9-go stopnia z jedności jeden jest liczbą algebraiczną stopnia 1, dwa stopnia 2, a pozostałe stopnia 6, co wynika z tożsamości $x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)$ i nieprzywiedlności wielomianu $f(x)=x^6+x^3+1$, gdyż wielomian

$$f(x+1)=x^6+6x^5+15x^4+21x^3+18x^2+9x+3$$

jest nieprzywiedlny w myśl twierdzenia 26 Rozdziału VIII, § 14, str. 133 (dla $p=3$).

Możnaby wreszcie z łatwością obliczyć, że z pierwiastków 10-go stopnia z jedności dwa są liczbami algebraicznymi 1-go stopnia, zaś pozostałe osiem liczbami algebraicznymi 4-go stopnia.

§ 3. Twierdzenie o sumie i iloczynie liczb algebraicznych. Udowodnimy następujące

Twierdzenie 3. *Suma oraz iloczyn dwóch liczb algebraicznych są liczbami algebraicznymi.*

Dowód. Niech α i β będą dwiema liczbami algebraicznymi, z których pierwsza jest pierwiastkiem wielomianu nieprzywiedlnego $f(x)$ stopnia m, a druga pierwiastkiem wielomianu nieprzywiedlnego $g(x)$ stopnia n. Możemy założyć, że współczynniki przy najwyższych potęgach x w wielomianach $f(x)$ i $g(x)$ są równe 1. Niech

$$(1)\qquad \alpha_1=\alpha,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_m$$

będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f(x)$, a

$$(2)\qquad \beta_1=\beta,\quad \beta_2,\quad \ldots,\quad \beta_n$$

wszystkimi pierwiastkami wielomianu $g(x)$. Przyjmijmy:

$$(3)\qquad h(x)=\prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n}(x-\alpha_k-\beta_l).$$

Jest to więc wielomian stopnia $m+n$, a jego współczynniki są wielomianami symetrycznymi (o współczynnikach całkowitych) zarówno pierwiastków (1) jak i pierwiastków (2). Przeto (Rozdział IX, § 3, tw. 2, str. 159) są one wielomianami (o współczynnikach całkowitych) współczynników wielomianów $f(x)$ i $g(x)$, a zatem liczbami wymiernymi.

Tym sposobem liczba $\alpha+\beta$ jest pierwiastkiem wielomianu stopnia mn o współczynnikach całkowitych, a zatem liczbą algebraiczną stopnia conajwyżej mn.

Dla iloczynu $\alpha\beta$ dowód jest zupełnie analogiczny.

Jak widać z przeprowadzonego rozumowania, twierdzenie 3 można wysłowić w postaci nieco ostrzejszej, a mianowicie jako

Twierdzenie 3'. *Suma i iloczyn dwóch liczb algebraicznych odpowiednio stopni m i n są liczbami algebraicznymi stopnia conajwyżej mn.*

Suma (a tak samo i iloczyn) dwóch liczb algebraicznych stopnia m może być stopnia niższego niż m. Np. liczby algebraiczne $\sqrt[m]{2}$ i $-\sqrt[m]{2}$ są stopnia m, ale ich suma jest liczbą wymierną 0.

Jeżeli α jest liczbą algebraiczną stopnia m, to liczba $-\alpha$ (a w razie gdy $\alpha\neq 0$, również i liczba $1/\alpha$) też jest liczbą algebraiczną stopnia m. Jeżeli bowiem α jest pierwiastkiem wielomianu nieprzywiedlnego $f(x)$, to $-\alpha$ jest pierwiastkiem wielomianu nieprzywiedlnego $f(-x)$, zaś dla $\alpha\neq 0$ liczba $1/\alpha$ jest pierwiastkiem wielomianu nieprzywiedlnego $x^m f(1/x)$. Z twierdzenia 3 wynika więc następujący

Wniosek. *Wynik skończonej liczby działań wymiernych, dokonanych na liczbach algebraicznych, jest liczbą algebraiczną.*

Mając wielomiany:

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m \quad \text{i} \quad g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

(gdzie $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$), których pierwiastkami są odpowiednio liczby α i β, możemy wielomian (stopnia mn), którego pierwiastkiem jest liczba $\alpha+\beta$, a także wielomian (stopnia mn), którego pierwiastkiem jest liczba $\alpha\beta$, napisać również w postaci wyznacznika o elementach, wyrażających się wymiernie przez współczynniki wielomianów f i g.

W tym celu zauważymy przede wszystkim, że skoro

$$f(\alpha)=a_0\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+\ldots+a_m=0 \quad \text{i} \quad g(\beta)=b_0\beta^n+b_1\beta^{n-1}+\ldots+b_n=0,$$

to $a_0\alpha^m=-a_1\alpha^{m-1}-\ldots-a_m$, skąd:

$$a_0^2\alpha^{m+1}=-a_0a_1\alpha^m-a_0a_2\alpha^{m-1}-\ldots-a_0a_m\alpha=$$
$$=(a_1^2-a_0a_2)\alpha^{m-1}+(a_1a_2-a_0a_3)\alpha^{m-2}+\ldots+(a_1a_{m-1}-a_0a_m)\alpha+a_1a_m.$$

Przez łatwą indukcję wnosimy stąd, że α^k jest przy wszelkich całkowitych nieujemnych k i l wielomianem stopnia co najwyżej $m-1$ względem α o współczynnikach, wyrażających się wymiernie przez współczynniki wielomianu f, zaś β^l jest wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$ względem β o współczynnikach, wyrażających się wymiernie przez współczynniki wielomianu g. Wynika stąd, że jeżeli mn iloczynów $\alpha^r\beta^s$, gdzie $r=0,1,2,\ldots,m-1$ i $s=0,1,2,\ldots,n-1$, oznaczymy odpowiednio przez

$$t_1=\alpha^0\beta^0=1, \qquad t_2, \qquad \ldots, \qquad t_{mn},$$

to dla $k=1,2,\ldots,mn$ będzie:

$$(\alpha+\beta)t_k=c_{k,1}t_1+c_{k,2}t_2+\ldots+c_{k,mn}t_{mn},$$

gdzie współczynniki $c_{k,l}$ wyrażają się dla $k=1,2,\ldots,mn$ i $l=1,2,\ldots,mn$ wymiernie przez współczynniki wielomianów f i g. Układ liczb $t_1,t_2,\ldots,t_{mn}$ przedstawia zatem rozwiązanie niezerowe (gdyż $t_1=1$) układu mn równań liniowych jednorodnych o mn niewiadomych, skąd w myśl twierdzenia 4 Rozdziału III, § 2, str. 40, wnosimy, że wyznacznik tego układu jest równy 0.

Liczba $\alpha+\beta$ jest więc pierwiastkiem wielomianu stopnia mn:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x-c_{1,1} & -c_{1,2} & \ldots & -c_{1,mn} \\ -c_{2,1} & x-c_{2,1} & \ldots & -c_{2,mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -c_{mn,1} & -c_{mn,2} & \ldots & x-c_{mn,mn} \end{vmatrix},$$

gdzie współczynnik przy x^{mn} jest oczywiście równy 1.

Z liczbą $\alpha\beta$ postępujemy zupełnie podobnie.

§ 4. Wielomiany, których współczynniki są liczbami algebraicznymi. Jako dalsze uogólnienie twierdzenia 3 i wniosku udowodnimy następujące

Twierdzenie 4. *Pierwiastki wielomianu, którego współczynniki są liczbami algebraicznymi, są również liczbami algebraicznymi.*

Dowód. Niech

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$$

będzie wielomianem, którego współczynniki $a_1,a_2,\ldots,a_m$ są liczbami algebraicznymi i współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest równy 1 (co oczywiście nie ogranicza dowodu).

Niech $f_k(x)$, gdzie $k=1,2,\ldots,m$, będzie wielomianem nieprzywiedlnym stopnia n_k o współczynniku przy x^{n_k} równym 1, którego jednym z pierwiastków jest a_k. Niech dalej $a_k^{(1)}=a_k$, $a_k^{(2)}$, ..., $a_k^{(n_k)}$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f_k(x)$. Przyjmijmy:

$$F(x)=\prod_{j_1=1}^{n_1}\prod_{j_2=1}^{n_2}\cdots\prod_{j_m=1}^{n_m}(x^m+a_1^{(j_1)}x^{m-1}+a_2^{(j_2)}x^{m-2}+\ldots+a_m^{(j_m)}).$$

Jest to wielomian stopnia $s=mn_1n_2\ldots n_m$, którego współczynniki są wielomianami symetrycznymi (o współczynnikach całkowitych) pierwiastków każdego z wielomianów $f_k(x)$, a zatem (Rozdział IX, § 3, tw. 2, str. 159) wielomianami o współczynnikach całkowitych współczynników tych wielomianów. Ponieważ zaś współczynniki wielomianów $f_k(x)$, gdzie $k=1,2,\ldots,m$, są wymierne, więc współczynniki wielomianu $F(x)$ również są wymierne.

Lecz jednym z czynników iloczynu $F(x)$ (dla $j_1=j_2=\ldots=j_m=1$) jest $f(x)$. Każdy więc pierwiastek wielomianu $f(x)$ jest zarazem pierwiastkiem wielomianu s-go stopnia $F(x)$ o współczynnikach całkowitych, a zatem liczbą algebraiczną (stopnia $\leqslant s$), c. b. d. o.

§ 5. Przybliżenia wymierne liczb algebraicznych n-go stopnia. Wyprowadzimy obecnie pewną własność liczb algebraicznych stopnia $n>1$, znalezioną przez Liouville'a.

Twierdzenie 5. *Jeżeli α jest liczbą algebraiczną stopnia $n>1$, to istnieje taka liczba $\mu>0$ (zależna jedynie od α), że dla wszelkich liczb całkowitych p i q, gdzie $q>\mu$, zachodzi nierówność:*

$$(5) \qquad \left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{n+1}}.$$

Dowód. Niech

$$(6)\qquad f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

będzie wielomianem nieprzywiedlnym stopnia $n>1$ o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest liczba α. Wobec $f(\alpha)=0$ mamy:

$$(7)\qquad f(x)=(x-\alpha)Q(x),$$

gdzie

$$(8)\qquad \begin{aligned} Q(x)&=a_0x^{n-1}+(a_0\alpha+a_1)x^{n-2}+(a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2)x^{n-3}+\ldots\\ &\ldots+(a_0\alpha^{n-1}+a_{n-2}\alpha^{n-2}+\ldots+a_1\alpha+a_{n-1})=\\ &=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots+c_{n-2}x+c_{n-1};\end{aligned}$$

współczynniki $c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}$ są zatem liczbami zespolonymi, zależnymi od α. Przyjmijmy:

$$(9)\qquad \gamma=|\alpha|+1,$$

$$(10)\qquad \mu=|c_0|\gamma^{n-1}+|c_1|\gamma^{n-2}+\ldots+|c_{n-1}|.$$

Niech teraz p i q będą dwiema dowolnie danymi liczbami całkowitymi, przy czym niech $q>\mu$. Ażeby dowieść, że zachodzi dla nich nierówność (5), zauważmy przede wszystkim, że p/q jest liczbą wymierną, a ponieważ wielomian (6) jest nieprzywiedlny (stopnia $n>1$), więc wynika stąd, że $f(p/q)\neq 0$. Lecz na mocy (6) jest:

$$(11)\qquad \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\frac{|a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_nq^n|}{q^n}=\frac{k}{q^n},$$

gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną. Wobec $f(p/q)\neq 0$, wzór (11) daje $k>0$ czyli $k\geqslant 1$, skąd:

$$(12)\qquad \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\geqslant\frac{1}{q^n}.$$

Na mocy (7) mamy dalej:

$$(13)\qquad \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\left|Q\left(\frac{p}{q}\right)\right|.$$

Jeżeli $\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|>1$, to zachodzi nierówność (5), gdyż z $q>\mu>0$ mamy $q\geqslant 1$ oraz $1/q^{n+1}\leqslant 1$. Możemy więc dalej zakładać, że $\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\leqslant 1$. Ale wtedy jest na mocy (9):

$$\left|\frac{p}{q}\right|=\left|\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)+\alpha\right|\leqslant 1+|\alpha|=\gamma,$$

zatem na mocy (8) i (10):

$$(14)\qquad \left|Q\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|c_0\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+c_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\ldots+c_{n-1}\right|\leqslant\mu.$$

Wzory (12), (13) i (14) dają $\frac{1}{q^n}\leqslant\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\mu$, skąd $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{q^n\mu}$, czyli wobec $q>\mu$ dają one nierówność (5), c. b. d. o.

Ogólniejsze od twierdzenia 5 jest następujące twierdzenie, udowodnione przez Thue'go[1]):

Jeżeli α jest liczbą algebraiczną stopnia $n>1$, to dla każdej pary liczb dodatnich k i c istnieje tylko skończona liczba układów liczb całkowitych p i $q>0$, takich, że

$$|q\alpha-p|<\frac{c}{q^{\frac{n}{2}+k}}.$$

Twierdzenie 5 otrzymuje się stąd jako szczególny przypadek dla $c=1$ i $k=\frac{n}{2}$.

W związku z twierdzeniem Liouville'a (twierdzenie 5) udowodnimy jeszcze

Twierdzenie 6 [2]). *Dla każdej liczby niewymiernej α istnieją dowolnie wielkie liczby naturalne q takie, że przy pewnym całkowitym p zachodzi nierówność:*

$$(15)\qquad \left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

Dowód. Niech n będzie dowolnie daną liczbą naturalną. Weźmy pod uwagę ciąg liczb:

$$(16)\qquad k\alpha-\mathrm{E}(k\alpha)\qquad \text{dla } k=0,1,2,\ldots,n,$$

gdzie symbol E( )[3]) oznacza ogólnie największą liczbę całkowitą nie większą od stojącej w ( ).

[1]) Ob. A. Thue, Journal für reine und angewandte Mathematik, Tom 135 (1909), str. 284-305.

[2]) Twierdzenie to wynika z łatwością ze znanych własności rozwinięć liczb niewymiernych na ułamki łańcuchowe nieskończone. Podany tu dowód nie opiera się na teorii ułamków łańcuchowych.

[3]) czyta się z francuska „Entier z ".

Ponieważ na mocy tego określenia dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzi nierówność $0 \leqslant t - \mathrm{E}(t) < 1$, więc liczby (16) leżą wszystkie w przedziale $0 \leqslant x < 1$. Liczby (16) są przy tym wszystkie różne, gdyż gdyby dla $k \neq l$ było

$$k\alpha - \mathrm{E}(k\alpha) = l\alpha - \mathrm{E}(l\alpha),$$

to mielibyśmy stąd $\alpha = \dfrac{\mathrm{E}(k\alpha) - \mathrm{E}(l\alpha)}{k-l}$, co jest niemożliwe, skoro α jest liczbą niewymierną.

W przedziale $0 \leqslant x < 1$ leży zatem $n+1$ różnych liczb (16); jeżeli więc przedział ten jest podzielony na n przedziałów:

$$0 \leqslant x < \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{n} \leqslant x < 1,$$

to co najmniej jeden z nich będzie zawierał różne spośród liczb (16), np. liczby $k\alpha - \mathrm{E}(k\alpha)$ i $l\alpha - \mathrm{E}(l\alpha)$, gdzie $k > l$. Będzie więc:

$$(17) \qquad |k\alpha - \mathrm{E}(k\alpha) - [l\alpha - \mathrm{E}(l\alpha)]| < \frac{1}{n}.$$

Przyjmijmy:

$$p_n = \mathrm{E}(k\alpha) - \mathrm{E}(l\alpha), \qquad q_n = k - l.$$

Zatem q_n jest liczbą naturalną nie większą od n, a p_n liczbą całkowitą, przy czym wobec (17) będzie:

$$(18) \qquad \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n n}.$$

Tym sposobem dowiedliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna $q_n \leqslant n$ i taka liczba całkowita p_n, że zachodzi nierówność (18). Stąd $-\dfrac{1}{n} < \alpha q_n - p_n < \dfrac{1}{n}$; zatem dla $n \geqslant 2$:

$$-\tfrac{1}{2} < \alpha q_n - p_n < \tfrac{1}{2},$$

skąd $\alpha q_n + \frac{1}{2} - 1 < p_n < \alpha q_n + \frac{1}{2}$, co dowodzi (wobec całkowitości liczby p_n), że

$$(19) \qquad p_n = \mathrm{E}(\alpha q_n + \tfrac{1}{2}).$$

Niech teraz $\mu > 0$ będzie dowolnie daną liczbą rzeczywistą. Gdyby dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ było $q_n < \mu$, to istniałaby taka liczba naturalna q, że dla nieskończenie wielu różnych n byłoby $q_n = q$, a zatem wobec (19) mielibyśmy $p_n = \mathrm{E}(\alpha q + \frac{1}{2}) = p$ i wobec (18) $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qn}$, skąd wynika natychmiast, że $\alpha = p/q$, co jest niemożliwe, gdyż α jest liczbą niewymierną.

Istnieje przeto taka liczba naturalna n, iż $q_n > \mu$. Przyjmując $p = p_n$ i $q = q_n$, będziemy więc mieli $q > \mu$ i $q \leqslant n$, skąd wobec (18) $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qn} \leqslant \dfrac{1}{q^2}$, c. b. d. o.

§ 6. Dowód Liouville'a istnienia liczb przestępnych.

Jako zastosowanie twierdzenia 5 weźmy pod uwagę liczbę rzeczywistą α, mającą rozwinięcie na ułamek dziesiętny nieskończony

$$\alpha = 0, c_1 c_2 \ldots,$$

w którym wszystkie cyfry $c_{k!}$, gdzie $k = 1, 2, \ldots$, są różne od zera, zaś wszystkie pozostałe cyfry są zerami. Jedynymi cyframi różnymi od zera są więc te, które znajdują się po przecinku na miejscach 1-ym, 2-im, 6-ym, 24-ym, 120-ym i t.d. Innymi słowy: liczba α ma rozwinięcie na szereg nieskończony:

$$\alpha = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_6}{10^6} + \ldots + \frac{c_{k!}}{10^{k!}} + \ldots$$

Okażemy, że α nie jest liczbą algebraiczną.

Przypuśćmy bowiem, że liczba α jest algebraiczną stopnia n. Ponieważ rozwinięcie jej na ułamek dziesiętny nie jest okresowe, więc liczba ta nie jest wymierna. Mamy zatem $n > 1$ i możemy do liczby α zastosować twierdzenie 5. Niech μ oznacza liczbę dodatnią, dla której jest spełniona nierówność (5). Obierzmy dalej liczbę naturalną k tak, aby było:

$$k > n \quad \text{i} \quad 10^{k!} > \mu.$$

Przyjmijmy:

$$q = 10^{k!}.$$

Zatem $q > \mu$ i przeto nierówność (5) zachodzić będzie przy wszelkim całkowitym p. Przyjmijmy w szczególności:

$$p = 10^{k!}(0, c_1 c_2 \ldots c_{k!}).$$

Stąd $\dfrac{p}{q} = (0, c_1 c_2 \ldots c_{k!})$, a przeto $\alpha - \dfrac{p}{q}$ daje rozwinięcie na ułamek dziesiętny, w którym pierwszą różną od zera cyfrą jest cyfra $c_{(k+1)!}$, znajdująca się na $(k+1)!$-ym miejscu. Wnosimy stąd, że:

$$(20) \qquad 0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{10^{(k+1)!-1}} \leqslant \frac{1}{10^{k!k}},$$

gdyż $(k+1)! - 1 = k!(k+1) - 1 \geqslant k!(k+1) - k! = k!k$.

Lecz wobec $k>n$ mamy $k\geqslant n+1$, skąd $\frac{1}{10^{k!k}}=\frac{1}{q^k}\leqslant\frac{1}{q^{n+1}}$, a więc wobec (20) otrzymalibyśmy $\left|a-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{n+1}}$, wbrew (5). Nie-algebraiczność liczby a jest tym samym udowodniona. Mamy zatem

***Twierdzenie 7.** Istnieją liczby rzeczywiste, które nie są liczbami algebraicznymi.*

Liczby takie nazywamy *przestępnymi* [1]).

Przykładem liczby przestępnej jest np. liczba

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}=0{,}110001000000000000000001\,0\ldots$$

Na innej zupełnie drodze udowodnił Ch. Hermite (w 1873 r.), że zasada logarytmów naturalnych (neperowskich), t. j. liczba

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots,$$

jest przestępna, a F. Lindemann (w 1882 r.), że liczba π jest przestępna [2]).

Już w 1761 r. I. H. Lambert dowiódł, że liczba π jest niewymierna.

Gelfond [3]) dowiódł w 1934 r., że jeżeli a jest liczbą algebraiczną różną od 0 i od 1, zaś b jest liczbą algebraiczną niewymierną, to a jest liczbą przestępną (więc taką jest np. $2^{\sqrt{2}}$). T. Schneider zaś dowiódł w swej rozprawie doktorskiej (Frankfurt 1934), że jeżeli $0\neq a\neq 1$ i b jest liczbą niewymierną, to z trzech liczb a, b i a^b co najmniej jedna jest przestępna. Jeżeli przyjąć $a=2$ i $b=\sqrt{2}$, to wynika z twierdzenia Schneidera przestępność liczby $2^{\sqrt{2}}$; jeżeli zaś przyjąć $a=e^{\pi}$ i $b=i$, to wobec $e^{\pi i}=-1$ twierdzenie to daje przestępność liczby e^{π}.

[1]) Podany tu dowód istnienia liczb przestępnych pochodzi od J. Liouville'a (z 1851 r.).

[2]) Względnie elementarny dowód przestępności liczb e i π (oparty na wzorze $e^{\pi i}=-1$) znajdzie czytelnik w książce: O. Perron, *Irrationalzahlen*, Berlin 1939, § 48 i § 49, str. 186-194.

[3]) Ob. A. Gelfond, Dokłady Akademii Nauk (Sprawozdania Akademii Nauk) ZSRR, Tom 2 (Moskwa 1934), str. 1-6.

Prosty dowód istnienia liczb przestępnych wynika natychmiast ze znanych twierdzeń Teorii mnogości, udowodnionych przez jej twórcę G. Cantora w 1873 r., a mianowicie stąd, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny, zaś zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny [1]).

Przed 40 laty poświęcił Maillet liczbom przestępnym osobną książkę [2]).

W związku z istnieniem liczb przestępnych udowodnimy jeszcze

***Twierdzenie 8.** Każda liczba rzeczywista o wartości bezwzględnej mniejszej od 1 jest pierwiastkiem wielomianu stopnia nieskończonego* (t. zw. *szeregu potęgowego*) *o współczynnikach całkowitych.*

Dowód. Niech ξ będzie liczbą rzeczywistą i $0<\xi<1$. Określimy przez indukcję liczby całkowite a_k dla $k=0,1,2,\ldots$, jak następuje. Niech $a_0=1$ i dla naturalnych n niech $a_n=-\mathrm{E}[(a_0+a_1\xi+\ldots+a_{n-1}\xi^{n-1})/\xi^n]$, gdzie symbol E[ ] oznacza „Entier" z [ ], jak na str. 219.

Mamy zatem $0<a_0+a_1\xi+\ldots+a_n\xi^n<\xi^n$, a że ξ^n zmierza wobec $|\xi|<1$ do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie, więc $a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots=0$, c. b. d. o. [3]).

Zauważymy, że Zermelo udowodnił przy pomocy swego t. zw. pewnika wyboru [4]), że istnieje zbiór liczb zespolonych Z, mający cztery następujące własności:

I. Suma, różnica oraz iloczyn dwóch liczb zbioru Z należą do Z.
II. Każda liczba zespolona jest ilorazem dwóch liczb zbioru Z.
III. Każda liczba *całkowita algebraiczna* [5]) należy do Z.
IV. Żadna liczba algebraiczna niecałkowita nie należy do Z.

Liczby tworzące zbiór Z możnaby uważać za liczby przestępne całkowite [6]). Niestety, zbiorów Z o powyższych własnościach jest — jak się tego dowodzi przy pomocy pewnika wyboru — nieskończenie wiele, a przy dzisiejszym stanie nauki żadnego z nich nie potrafimy wyróżnić, czyli określić „efektywnie".

[1]) Ob. np. moją książkę *Zarys Teorii Mnogości.* Część I, Wydanie 3-e, Warszawa 1928, str. 56—59.

[2]) E. Maillet, *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*, Paryż 1906, stron V+274.

[3]) Szereg potęgowy o współczynnikach całkowitych, którego suma jest zerem dla pewnej przestępnej wartości zmiennej, nie jest oczywiście bezustannie zbieżny. Można atoli dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej ξ większej od 0 i mniejszej od 1 istnieje szereg potęgowy bezustannie zbieżny o współczynnikach wymiernych, którego suma jest dla tej liczby zerem. Ob. H. Blumberg, *Über eine von Herrn Maillet vorgeschlagene Definition der ganzen transzendenten Zahlen*, Archiv der Mathematik und Physik, Tom 20 (1913), str. 55.

[4]) E. Zermelo, *Über ganze transcendente Zahlen*, Mathematische Annalen, Tom 75 (1914), str. 434.

[5]) Nazywamy tak liczby algebraiczne, które są pierwiastkami wielomianów kształtu $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, gdzie współczynniki $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są całkowite.

[6]) Por. H. Blumberg, tamże, str. 53-57.