ROZDZIAŁ XI

RÓWNANIA PODZIAŁU KOŁA

§ 1. Równania $z^n - 1 = 0$ dla $n \leqslant 6$. Równaniem podziału koła nazywamy równanie postaci

(1) $$z^n - 1 = 0,$$

gdzie z jest zmienną zespoloną, a n dowolnie daną liczbą naturalną. W Rozdziale VI, § 8, zajmowaliśmy się ogólnym rozwiązywaniem tego równania za pomocą funkcyj trygonometrycznych. Obecnie zajmiemy się algebraicznym rozwiązywaniem tego równania dla niektórych wartości wykładnika n.

Dla $n = 2$ pierwiastkami równania (1) są liczby 1 i -1, dla $n = 3$ liczby:

$$1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

a dla $n = 4$ liczby:

$$1, \quad -1, \quad i \quad \text{oraz} \quad -i.$$

Przejdziemy więc do przypadków $n > 4$.

Równanie $z^5 = 1$. Ponieważ

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1),$$

więc pierwiastki równania $z^5 = 1$, różne od 1, spełniają równanie

(2) $$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

i na odwrót.

Załóżmy, że liczba zespolona z jest pierwiastkiem równania (1). Jest więc $z \neq 0$. Niechaj:

(3) $$u = z + \frac{1}{z},$$

skąd:

(4) $$u^2 = z^2 + z^{-2} + 2.$$

Wobec $z \neq 0$ równanie (2) daje po podzieleniu przez z^2:

$$z^2+z+1++z^{-1}+z^{-2}=0,$$

zatem wobec (3) i (4):

(5) $$u^2+u-1=0,$$

skąd

(6) $$u=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Równanie zaś ($\cancel{2}$) 3 daje:

(7) $$z^2 \cancel{+} uz+1=0,$$

skąd

(8) $$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

Jeżeli teraz za z weźmiemy którąkolwiek z dwóch wartości (8), wstawiając za u którąkolwiek z dwóch wartości (6), to spełnione będą równania (7) i (5). Z równania (7) wynika, że $z \neq 0$, co daje równość (3), która wobec (5) dowodzi, że liczba z spełnia równania (2).

Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że wszystkimi pierwiastkami równania (2) są liczby:

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \qquad z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$z_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \qquad z_4=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Możnaby z łatwością obliczyć, że mamy tu:

$$z_2=z_1^2, \qquad z_3=z_1^3, \qquad z_4=z_1^4.$$

Równanie $\boldsymbol{z^6=1}$. Wobec tożsamości

$$z^6-1=(z-1)(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1)$$

rozwiązywanie równania $z^6-1=0$ sprowadza się do rozwiązywania równań 1-go lub 2-go stopnia i w rezultacie z łatwością doprowadza do znalezienia następujących 6 pierwiastków równania $z^6-1=0$:

$$1, \quad \overset{-1}{-2}, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

z których pierwotnymi (ob. Rozdział VI, § 8, str. 94) są tylko dwa ostatnie.

§ 2. Równanie $\boldsymbol{z^7-1=0}$. Mamy:

$$z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1).$$

Pierwiastkami równania $z^7-1=0$ będą zatem: liczba 1 oraz pierwiastki równania

(9) $$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

Zajmiemy się więc wyznaczeniem pierwiastków równania (9). Liczba 0 nie jest oczywiście pierwiastkiem równania (9); równanie (9) jest więc równoważne równaniu

(10) $$z^3+z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}=0.$$

Załóżmy, że z jest pierwiastkiem równania (9) lub — co na jedno wychodzi — równania (10). Przyjmijmy:

(11) $$z+\frac{1}{z}=u,$$

co daje $u^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2$ i $u^3=z^3+3z+\frac{3}{z}+\frac{1}{z^3}$, skąd $z+z^{-1}=u$, $z^2+z^{-2}=u^2-2$ i $z^3+z^{-3}=u^3-3u$.

Wobec (10) znajdujemy:

(12) $$u^3+u^2-2u-1=0.$$

Jeżeli więc liczba z spełnia równanie (10), to liczba u, wyznaczona ze wzoru (11), spełnia równanie (12).

Załóżmy teraz, że liczba u spełnia równanie (12). Gdybyśmy wyznaczyli liczbę $z \neq 0$ tak, aby zachodził wzór (11), to spełniałaby ona równanie (10). Lecz wzór (11) jest wobec $z \neq 0$ równoważny równaniu

$$z^2-uz+1=0,$$

którego pierwiastkami są liczby:

(13) $$\frac{u+\sqrt{u^2-4}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{u-\sqrt{u^2-4}}{2},$$

gdzie przez $\sqrt{u^2-4}$ rozumiemy pierwiastek główny 2-go stopnia z liczby u^2-4.

Dochodzimy więc do wniosku, że wszystkimi pierwiastkami równania (10) są liczby postaci (13), gdzie u jest którymkolwiek z pierwiastków równania (12). To ostatnie równanie przez podstawienie $u=t-{}^1/_3$ przechodzi w równanie

$$t^3-\frac{7}{3}t-\frac{7}{27}=0. \tag{14}$$

Równanie (14) nie posiada pierwiastków wymiernych. Gdyby bowiem t było takim pierwiastkiem, to $u=t-{}^1/_3$ byłoby pierwiastkiem wymiernym równania (12), a więc liczbą postaci p/q, gdzie p i q byłyby wobec (12) dzielnikami liczby 1, skąd $u=\pm 1$. Lecz ani 1, ani -1 nie jest, jak łatwo sprawdzić, pierwiastkiem równania (12).

Stosując do równania (14) metodę rozwiązywania równań 3-go stopnia, podaną w Rozdziale X, § 3, otrzymamy jako pierwiastki tego równania (ob. wzory (25), str. 177) liczby:

$$\sqrt[3]{\frac{7+21\sqrt{-3}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{7-21\sqrt{-3}}{54}},$$
$$\varepsilon\sqrt[3]{\frac{7+21\sqrt{-3}}{54}}+\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{7-21\sqrt{-3}}{54}},$$
$$\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{7+21\sqrt{-3}}{54}}+\varepsilon\sqrt[3]{\frac{7-21\sqrt{-3}}{54}},$$

gdzie $\varepsilon=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, a pierwiastki 3-go stopnia z liczb $\dfrac{7\pm 21\sqrt{-3}}{54}$ należy tak dobrać, aby ich iloczyn był równy $-{}^7/_9$.

Wstawiając te wyrażenia, zmniejszone o ${}^1/_3$, do wzorów (13), otrzymalibyśmy 6 pierwiastków równania (10). Byłyby one wyrażone przez superpozycje pierwiastników 2-go i 3-go stopnia oraz działań wymiernych na liczbach całkowitych, w postaci zresztą dosyć skomplikowanej.

Zauważymy tu jeszcze, że gdyby jeden z pierwiastków równania (9) dał się wyrazić za pomocą superponowanych pierwiastników jedynie 2-go stopnia oraz działań wymiernych na liczbach całkowitych, to w podobny sposób dałby się też wyrazić jeden z pierwiastków równania (14), co — jak okażemy w Rozdziale XIV, § 2 — jest niemożliwe.

§ 3. Równania $z^8-1=0$, $z^9-1=0$ oraz $z^{10}-1=0$.

***Równanie* $z^8-1=0$.** Wobec tożsamości

$$z^8-1=(z^4-1)(z^4+1)$$

pierwiastkami tego równania są pierwiastki równania $z^4-1=0$, czyli liczby 1, -1, i i $-i$, oraz pierwiastki równania $z^4+1=0$. Następnie wobec tożsamości

$$z^4+1=(z^2-i)(z^2+i)$$

mamy do rozwiązania równania $z^2-i=0$ oraz $z^2+i=0$. W myśl wzorów z Rozdziału X § 1, str. 173, znajdujemy jako pierwiastki pierwszego z nich liczby:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad -\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

a jako pierwiastki drugiego liczby:

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad -\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

W ten sposób wszystkimi pierwiastkami równania $z^8-1=0$ są liczby:

$$1,\quad -1,\quad i,\quad -i,\quad \frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad -\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad -\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Pierwiastkami pierwotnymi 8-go stopnia z jedności są tylko 4 ostatnie z wypisanych.

***Równanie* $z^9-1=0$.** Wobec tożsamości

$$z^9-1=(z^3-1)\ (z^6+z^3+1),$$

pierwiastkami równania $z^9-1=0$ są pierwiastki równania $z^3-1=0$ oraz pierwiastki równania

$$z^6+z^3+1=0. \tag{15}$$

Pierwiastki pierwotne 9-go stopnia z jedności są oczywiście pierwiastkami równania (15). Po podstawieniu (11) równanie (15) daje równanie

$$u^3-3u+1=0. \tag{16}$$

Jak wyżej, dochodzimy do wniosku, że wszystkimi pierwiastkami równania (15) są liczby postaci (13), gdzie u jest którymkolwiek z pierwiastków równania (16). Równanie (16) nie posiada pierwiastków wymiernych, gdyż ani $+1$, ani -1 nie jest jego pierwiastkiem.

Gdyby jeden z pierwiastków pierwotnych 9-go stopnia z jedności, a więc jeden z pierwiastków równania (15), dał się wyrazić przez superpozycję jedynie pierwiastników 2-go stopnia i działań wymiernych na liczbach całkowitych, to w podobny sposób dałby się też wyrazić jeden z pierwiastków równania (16), co — jak okażemy w Rozdziale XIV, § 2 — jest niemożliwe.

***Równanie* $z^{10}-1=0$.** Wobec tożsamości

$$z^{10}-1=(z^5-1)(z^5+1)$$

wnosimy z łatwością, że wszystkie 10 pierwiastków tego równania otrzymamy, biorąc ze znakiem $+$ lub $-$ wszystkie 5 pierwiastków równania $z^5-1=0$.

§ 4. Równanie $z^{17}-1=0$. Zbadamy tu jeszcze to równanie jako szczególnie pouczające.

Przyjmijmy:

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17};$$

jak wiemy z twierdzenia 7 Rozdziału VI (§ 8, str. 96), wszystkimi (różnymi) pierwiastkami równania $z^{17}-1=0$ są liczby:

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \dots,\ \varepsilon^{16}.$$

Suma ich jest zerem, gdyż wielomian $z^{17}-1$ nie posiada wyrazu, zawierającego z^{16}.

Algebraiczne rozwiązywanie równania $z^{17}-1=0$ sprowadza się więc do znalezienia algebraicznego wzoru dla liczby ε. Przyjmijmy w tym celu:

$$\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^{2^2}+\varepsilon^{2^3}+\dots+\varepsilon^{2^7}=\eta, \tag{17}$$

$$\varepsilon^3+\varepsilon^{3\cdot2}+\varepsilon^{3\cdot2^2}+\varepsilon^{3\cdot2^3}+\dots+\varepsilon^{3\cdot2^7}=\eta_1. \tag{18}$$

Ponieważ $\varepsilon^{17}=1$, więc:

$$\eta=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^8+\varepsilon^{16}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{13}+\varepsilon^9, \tag{19}$$

$$\eta_1=\varepsilon^3+\varepsilon^6+\varepsilon^{12}+\varepsilon^7+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{11}+\varepsilon^5+\varepsilon^{10}, \tag{20}$$

a zatem $\eta+\eta_1=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\dots+\varepsilon^{16}=-1$ czyli

$$\eta+\eta_1=-1. \tag{21}$$

Gdybyśmy, biorąc pod uwagę, że $\varepsilon^{17}=1$, i posługując się wzorami (19) i (20), rozwinęli iloczyn $\eta\eta_1$, znaleźlibyśmy, że każda z potęg ε^k, gdzie $k=1,2,\dots,16$, występuje 4 razy, skąd

$$\eta\eta_1=-4. \tag{22}$$

Równania (21) i (22) dowodzą, że liczby η i η_1 są pierwiastkami równania 2-go stopnia $t^2+t-4=0$. Ma ono dwa pierwiastki:

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

Musimy rozstrzygnąć, który z tych pierwiastków jest liczbą η, a który liczbą η_1.

Z uwagi na to, że $\varepsilon^{17-k}=\varepsilon^k$, $\varepsilon^k+\varepsilon^{-k}=2\cos\frac{2k\pi}{17}$ i $\cos\frac{k\pi}{17}=-\cos\frac{(17-k)\pi}{17}$, mamy wobec (20):

$$\begin{aligned}\eta_1&=(\varepsilon^3+\varepsilon^{14})+(\varepsilon^6+\varepsilon^{11})+(\varepsilon^5+\varepsilon^{12})+(\varepsilon^7+\varepsilon^{10})=\\&=(\varepsilon^3+\varepsilon^{-3})+(\varepsilon^6+\varepsilon^{-6})+(\varepsilon^5+\varepsilon^{-5})+(\varepsilon^7+\varepsilon^{-7})=\\&=2\cos\frac{6\pi}{17}+2\cos\frac{12\pi}{17}+2\cos\frac{10\pi}{17}+2\cos\frac{14\pi}{7}=\\&=2\cos\frac{6\pi}{17}-2\cos\frac{5\pi}{17}-2\cos\frac{7\pi}{17}-2\cos\frac{3\pi}{17}<0,\end{aligned}$$

gdyż $\cos\frac{6\pi}{17}<\cos\frac{5\pi}{17}$, zaś $\cos\frac{7\pi}{17}>0$ i $\cos\frac{3\pi}{17}>0$.

Liczba η_1 jest więc ujemna, zatem:

$$\eta=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad \text{i} \quad \eta_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}. \tag{23}$$

Przyjmijmy dalej:

$$\begin{aligned}&\zeta=\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^{16}+\varepsilon^{13}, &&\zeta_1=\varepsilon^2+\varepsilon^8+\varepsilon^{15}+\varepsilon^9,\\&\zeta_2=\varepsilon^3+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^5, &&\zeta_3=\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{11}+\varepsilon^{10}.\end{aligned} \tag{24}$$

Łatwy rachunek daje:

$$\begin{aligned}&\zeta+\zeta_1=\eta, &&\zeta_2+\zeta_3=\eta_1,\\&\zeta\zeta_1=-1, &&\zeta_2\zeta_3=-1.\end{aligned}$$

Liczby ζ i ζ_1 są więc pierwiastkami równania $z^2-\eta z-1=0$, a liczby ζ_2 i ζ_3 pierwiastkami równania $z^2-\eta_1 z-1=0$.

Ponieważ:

$$\zeta=(\varepsilon+\varepsilon^{16})+(\varepsilon^4+\varepsilon^{13})=(\varepsilon+\varepsilon^{-1})+(\varepsilon^4+\varepsilon^{-4})=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{4\pi}{17}>0,$$

$$\zeta_2=(\varepsilon^3+\varepsilon^{-3})+(\varepsilon^5+\varepsilon^{-5})=2\cos\frac{3\pi}{17}+2\cos\frac{5\pi}{17}>0,$$

gdyż $\frac{2\pi}{17}>\frac{3\pi}{17}>\frac{4\pi}{17}>\frac{5\pi}{17}>\frac{\pi}{2}>0$, więc:

(25) $$\zeta=\frac{\eta+\sqrt{\eta^2+4}}{2},\qquad \zeta_1=\frac{\eta-\sqrt{\eta^2+4}}{2},$$
$$\zeta_2=\frac{\eta_1+\sqrt{\eta_1^2+4}}{2},\qquad \zeta_3=\frac{\eta_1-\sqrt{\eta_1^2+4}}{2},$$

gdzie pierwiastki bierzemy arytmetyczne.

Przyjmijmy dalej:

(26) $$\tau=\varepsilon+\varepsilon^{16}\quad \text{i} \quad \tau_1=\varepsilon^4+\varepsilon^{13}.$$

Wobec (24) i (25) znajdujemy:

(27) $$\tau+\tau_1=\zeta,\qquad \tau\tau_1=\zeta_2.$$

Liczby τ i τ_1 są więc pierwiastkami równania $t^2-\zeta t+\zeta_2=0$, a że wobec (26) jest $\tau=\varepsilon+\varepsilon=2\cos\frac{2\pi}{17}$ i $\tau_1=\varepsilon^4+\varepsilon^{-4}=2\cos\frac{4\pi}{17}$, zatem $\tau>\tau_1$. Wobec zaś (27) jest $\zeta^2-4\zeta_2=(\tau+\tau_1)^2-4\tau\tau_1=(\tau-\tau)^2>0$ i przeto:

(28) $$\varepsilon=\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-4\zeta_2}}{2},\qquad \tau_1=\frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-4\zeta_2}}{2},$$

gdzie pierwiastki należy wziąć arytmetyczne.

Wreszcie, z (26) znajdujemy $\tau=\varepsilon+\varepsilon^{-1}$, skąd $\varepsilon^2-\tau\varepsilon+1=0$, co z uwagi na to, że $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$ oraz $\cos\frac{2\pi}{17}>0$ i $\sin\frac{2\pi}{17}>0$, jak również na to, że wobec $\tau=2\cos\frac{2\pi}{17}$ jest $0<\tau<2$, a zatem $4-\tau^2>0$, daje:

(29) $$\varepsilon=\frac{\tau+i\sqrt{4-\tau^2}}{2},$$

gdzie pierwiastek należy wziąć arytmetyczny.

Stosując kolejno wzory (23), (25), (28) i (29), możemy zarówno część rzeczywistą liczby ε jak jej współczynnik przy i otrzymać z liczby 1 za pomocą skończonej liczby kolejnych działań na liczbach już otrzymanych, z których każde jest bądź dodawaniem, bądź odejmowaniem, bądź mnożeniem przez liczbę całkowitą [1]), bądź dzieleniem przez liczbę 2, bądź wreszcie wyciąganiem pierwiastka 2-go stopnia z liczby rzeczywistej dodatniej.

Mając dany odcinek o długości 1, możemy — jak wiadomo — każde z tych działań wykonać za pomocą tylko cyrkla i liniału. Wątpliwość może tu zachodzić jedynie co do wyciągania pierwiastka 2-go stopnia z liczby dodatniej czyli co do otrzymania za pomocą cyrkla i liniału odcinka o długości $\sqrt{a}$ z danych odcinków o długości a i o długości 1.

Otóż ze znanych twierdzeń Geometrii elementarnej wynika, że odcinek taki jest wysokością trójkąta prostokątnego, którego podstawą jest przeciwprostokątna o długości $a+1$, przy czym — jak wiadomo — wysokość tę potrafimy zbudować za pomocą tylko cyrkla i liniału, mając dane odcinki o długości 1 oraz o długości $\overline{a}$.

Wynika stąd, że obraz geometryczny liczby zespolonej $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$, czyli punkt płaszczyzny o spółrzędnych $x=\cos\frac{2\pi}{17}$ i $y=\sin\frac{2\pi}{17}$, potrafimy zbudować za pomocą jedynie cyrkla i liniału, mając dane osie współrzędnych oraz odcinek o długości 1. Ponieważ łuk koła o środku w początku współrzędnych i o promieniu 1, zawarty między punktem ε a osią odciętych, jest równy $\frac{1}{17}$ obwodu tego koła, więc wnosimy stąd, że *potrafimy podzielić obwód koła na 17 równych części za pomocą tylko cyrkla i liniału* [2]).

Ogólniej: Gauss dowiódł, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to na to, żeby można było za pomocą jedynie cyrkla i liniału podzielić koło na p równych części, potrzeba i wystarcza, żeby p było liczbą postaci 2^n+1. Łatwo też okazać, że wówczas musi być $n=2^k$ czyli $p=2^{2^k}+1$, bowiem $2^{l(2m+1)}+1$ jest podzielne przez 2^l+1.

[1]) Np. we wzorze (25) dla liczby ζ występuje iloczyn η^2, który, wobec (23), możemy napisać w postaci $\eta^2=9-\sqrt{17}$. Można dowieść ogólnie, że zapomocą jedynie cyrkla i liniału można zbudować odcinek o długości ab, mając dane odcinki o długościach 1, a i b.

[2]) Kto interesuje się bliżej samą konstrukcją geometryczną tego podziału, znajdzie ją w książce: P. Bachmann, *Die Lehre von der Kreistheilung*, Lipsk 1872, str. 66—75.

Nie każda jednak liczba postaci $2^{2^k}+1$ jest pierwszą, np. $2^{2^5}+1$ jest podzielna przez 641. Udowodniono też, że dla $k=6$, 12, 23 i 36 otrzymujemy liczby złożone.

Niewiadomo dotąd, czy liczb pierwszych postaci 2^n+1 jest skończenie czy nieskończenie wiele.

Następną po 17 liczbą pierwszą p, dla której podział koła na p części jest możliwy przy pomocy jedynie cyrkla i liniału, jest liczba $p=2^8+1=257$ [1]), następną zaś po niej liczba $2^{16}+1=65537$. Więcej liczb pierwszych postaci 2^n+1 dotąd nie znamy.

Na to zaś, aby można było podzielić koło na m równych części za pomocą jedynie cyrkla i liniału potrzeba i wystarcza, żeby liczba m rozkładała się na czynniki pierwsze

$$m=2^\alpha \quad \text{lub} \quad m=2^\alpha p_1 p_2, \ldots, p_k,$$

gdzie α jest liczbą całkowitą nieujemną, a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi postaci 2^n+1.

Nauce o podziale koła za pomocą cyrkla i liniału poświęcił osobną 300-stronicową książkę P. Bachmann (ob. odnośnik [2]) do str. 207).

§ 5. Konstrukcje za pomocą cyrkla i liniału. Ogólniej, możemy powiedzieć, że mając dany odcinek o długości 1, potrafimy za pomocą cyrkla i liniału zbudować każdy odcinek, którego długość wyraża się liczbą, otrzymaną z liczby 1 za pomocą skończonej liczby kolejnych działań, z których każde jest bądź jednym z czterech działań arytmetycznych, bądź wyciąganiem pierwiastka 2-go stopnia [2]).

Istotnie, załóżmy, że mając dany odcinek o długości 1 i używając dalej tylko cyrkla i liniału, otrzymaliśmy odcinek o długości a. Figury geometryczne, jakie można wykreślić za pomocą jedynie cyrkla i liniału, składają się tylko z kół i prostych (lub ich części), przy czym koła możemy zataczać tylko wtedy, gdy dany jest środek i promień, a prostą przeprowadzać tylko przez dwa punkty dane. Dany zaś promień koła możemy otrzymać tylko z jakiegoś danego

[1]) Podziałowi koła na 257 części poświęcił dłuższą pracę F. J. Richelot, Crelles Journal, Tom 9 (1832), str. 1-26, 146-161, 209-230, 337-358.

[2]) Wyciąganie pierwiastka 2-go stopnia z liczby zespolonej sprowadza się, jak wiemy (ob. Rozdział X, § 1, str. 172, tw. 2), do wyciągania pierwiastków 2-go stopnia z liczb rzeczywistych dodatnich.

odcinka, którego końce są znalezionymi już punktami. Wszystko zatem sprowadza się do znajdowania pewnego ciągu punktów, które otrzymujemy z końców danego odcinka o długości 1 jako punkty przecięcia dwóch kół, dwóch prostych lub koła z prostą. Otóż współrzędne takich punktów przecięcia wyrażają się — jak wiadomo z Geometrii analitycznej — za pomocą działań wymiernych i wyciągania pierwiastka 2-go stopnia, dokonywanych wychodząc ze współczynników równań tych kół lub tych prostych.

Jeżeli więc jeden z końców danego odcinka o długości 1 przyjmiemy za początek układu współrzędnych, a drugi za punkt płaszczyzny o współrzędnych (10), to współrzędne każdego punktu, otrzymanego z tych dwóch punktów przy użyciu (skończoną liczbę razy) tylko cyrkla i liniału, dadzą się otrzymać z liczby 1 za pomocą skończonej liczby działań wymiernych oraz wyciągania pierwiastka 2-go stopnia.

Dotyczy to w szczególności końców (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) odcinka o długości a, którego znalezienie było celem konstrukcji geometrycznej (wykonanej według założenia z pomocą jedynie cyrkla i liniału), a więc i samej liczby a, gdyż $a=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, c. b. d. o.