

ROZDZIAŁ X.

RÓWNANIA DRUGIEGO, TRZECIEGO I CZWARTEGO STOPNIA

§ 1. Równania 2-go stopnia. Ogólna postać równania 2-go stopnia, zwanego też równaniem *kwadratowym*, jest następująca:

$$(1) \quad a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0,$$

gdzie a_0, a_1 i a_2 są danymi liczbami zespolonymi, przy czym $a_0 \neq 0$.

Łatwo sprawdzić, że przy wszelkim zespolonym z :

$$(2) \quad a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = a_0 \left(z + \frac{a_1}{2a_0} \right)^2 + a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}.$$

Równanie (1) jest więc równoważne równaniu

$$(3) \quad a_0 \left(z + \frac{a_1}{2a_0} \right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0 a_2}{4a_0}.$$

Oznaczmy przez $\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}$ którykolwiek z pierwiastków 2-go stopnia z liczby $a_1^2 - 4a_0 a_2$. Na to, żeby liczba zespolona z spełniała równanie (3), oczywiście potrzeba i wystarcza, iżby było

$$z + \frac{a_1}{2a_0} = \frac{\pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} \quad \text{czyli}$$

$$(4) \quad z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Wzór (4) daje więc wszystkie rozwiązania równania (1). Różnymi następnie dwa przypadki:

$$1^0 \quad a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0. \quad \text{Wzór (4) daje jedną tylko wartość } z = -\frac{a_1}{2a_0}.$$

Równanie (1) ma wtedy tylko jeden pierwiastek, wyrażający się wymiennie przez współczynniki równania (1), a więc wymierny, gdy są one wymierne, i rzeczywisty, gdy są rzeczywiste.

Ponieważ przy $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$ wzór (2) daje dla wszelkich z :

$$a_0z^2 + a_1z + a_2 = a_0 \left(z + \frac{a_1}{2a_0} \right)^2,$$

więc w rozpatrywanym przypadku pierwiastek $z = -a_1/2a_0$ równania (1) jest *dwukrotny*.

2° $a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$. W tym przypadku wzór (4) daje dwie różne wartości:

$$(5) \quad z_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0};$$

równanie (1) ma więc dwa różne pierwiastki: z_1 i z_2 .

Jeżeli współczynniki równania (1) są rzeczywiste, to pierwiastki (5) są rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1^2 - 4a_0a_2 \geq 0$; gdy natomiast $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$, są one zespolone sprzężone. Jeżeli współczynniki a_0 i a_1 są wymierne, to pierwiastki (5) są oba wymierne wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik $a_1^2 - 4a_0a_2$ jest kwadratem liczby wymiernej; w przeciwnym razie żaden z nich nie jest wymierny.

Ostatecznie więc możemy wypowiedzieć

Twierdzenie 1. Równanie 2-go stopnia $a_0z^2 + a_1z + a_2 = 0$, gdzie $a_0 \neq 0$ posiada jeden pierwiastek (dwukrotny, wyrażający się wymiennie przez jego współczynniki), jeżeli $D = a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$, zaś dwa różne pierwiastki, jeżeli $D \neq 0$.

Jeżeli współczynniki równania są rzeczywiste, to ma ono dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy $D > 0$, zaś dwa różne pierwiastki zespolone sprzężone, gdy $D < 0$.

Równanie 2-go stopnia, którego współczynniki nie są rzeczywiste, może mieć dwa pierwiastki, które nie są sprzężone, np. jeden rzeczywisty, a drugi urojony. Takim jest np. równanie:

$$(z-1)(z-i) = z^2 - (1+i)z + i = 0.$$

Zastosujmy teraz równanie 2-go stopnia do rozwiązania następującego zagadnienia:

Znaleźć dwie liczby, których suma i iloczyn są dane.

Niechaj:

$$(6) \quad z_1 + z_2 = a, \quad z_1 z_2 = b,$$

gdzie a i b są to dane liczby zespolone.

Jeżeli liczby z_1 i z_2 spełniają równanie (6), to z pierwszego z nich znajdujemy $z_2 = a - z_1$, wobec czego drugie daje $z_1(a - z_1) = b$ czyli $z_1^2 - az_1 + b = 0$.

Liczba z_1 jest więc pierwiastkiem równania 2-go stopnia:

$$z^2 - az + b = 0;$$

zatem

$$(7) \quad z_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{albo} \quad z_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Biorąc na z_1 pierwszą z tych wartości, otrzymamy wartość $z_2 = a - z_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, biorąc zaś na z_1 drugą z wartości (7), otrzymamy $z_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Jeżeli więc układ liczb z_1, z_2 spełnia równania (6), to mamy:

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{albo} \quad z_1 &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \\ \text{albo} \quad z_1 &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \end{aligned}$$

Na odwrót, bezpośrednio sprawdzamy, że zarówno pierwszy jak drugi z układów (8) spełnia równania (6).

Wzory (8) dają więc wszystkie rozwiązania układu dwóch równań (6) o dwóch niewiadomych z_1 i z_2 . Rozwiązania (8) różnią się tylko porządkiem liczb z_1 i z_2 ; są one jednakowe wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 = 4b$. W tym ostatnim przypadku mamy $z_1 = z_2 = a/2$.

Ostatecznie więc widzimy, że układ równań (6) posiada jedno tylko rozwiązanie, jeżeli $a^2 = 4b$, a dwa rozwiązania (różniące się tylko porządkiem niewiadomych), jeżeli $a^2 \neq 4b$. Rozwiązania te są przy rzeczywistych a i b rzeczywiste w tym i tylko w tym przypadku, gdy $a^2 > 4b$.

Powróćmy jeszcze do równania 2-go stopnia w przypadku ogólnym, t. j. do równania (1) o danych współczynnikach zespolonych. Pierwiastki takiego równania wyrażają się — jak widzieliśmy — wzorami (5), które prócz działań wymiernych zawierają jeszcze drugi pierwiastek z liczby zespolonej, t. j. wyrażenie postaci $\sqrt{a+bi}$. Nasuwa się pytanie, czy wyrażenie to daje się sprowadzić do działań wymiernych na liczbach zespolonych i wyciągania drugich pierwiastków z liczb rzeczywistych dodatnich.

Okażemy, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Wystarczy w tym celu udowodnić

Twierdzenie 2. Wyznaczanie części rzeczywistej oraz współczynnika przy i pierwiastka 2-go stopnia z liczby zespolonej sprowadza się do działań wymiernych na liczbach rzeczywistych oraz do (dwukrotnego) wyciągania drugich pierwiastków z liczb rzeczywistych dodatnich.

Dowód. Załóżmy, że przy danych rzeczywistych a oraz $b \neq 0$ mamy $\sqrt{a+bi} = x+iy$, gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi, czyli że

$$(9) \quad (x+iy)^2 = a+bi.$$

Zatem $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$, skąd:

$$(10) \quad x^2 - y^2 = a \quad \text{ i } \quad 2xy = b.$$

Z równań tych otrzymujemy $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2$ czyli $(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$, co z uwagi na to, że dla x i y rzeczywistych jest zawsze $x^2 + y^2 \geq 0$, daje

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

gdzie pierwiastek należy wziąć arytmetyczny (czyli ze znakiem $+$).

Dodając to równanie stronami do pierwszego z równań (10), a następnie odejmując, otrzymujemy:

$$(11) \quad 2x^2 = \sqrt{a^2 + b^2} + a, \quad 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a.$$

Ponieważ dla rzeczywistych a i b jest zawsze $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$, zatem $\sqrt{a^2 + b^2} \geq -a$ i $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$. Prawe strony wzorów (11) są więc nieujemne, skąd:

$$(12) \quad x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Znaki $\pm$ po prawej stronie wzorów (12) nie mogą być brane dowolnie, gdyż wobec drugiego z równań (10) muszą one być jednakowe, jeżeli $b > 0$, a różne, jeżeli $b < 0$.

Na odwrót, łatwo sprawdzamy, że liczby x i y , wyznaczone z wzorów (12) jako pierwiastki arytmetyczne ze znakami $\pm$ jednakowymi, gdy $b > 0$, zaś różnymi, gdy $b < 0$, spełniają równania (10), a zatem też równanie (9). Wartościami $\sqrt{a+bi}$ są więc liczby postaci

$$\pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{ i } \quad \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}},$$

gdzie znaki $\pm$ należy wziąć jednakowe, jeżeli $b > 0$, i różne, jeżeli $b < 0$. Twierdzenie 2 jest w ten sposób udowodnione.

Jak okażemy w Rozdziale XIV, § 3, analogiczne twierdzenie nie zachodzi już dla trzecich pierwiastków z liczb zespolonych.

Dla $a=0$ i $b=1$ znajdujemy ze wzorów (12) dla drugich pierwiastków z liczby i wartości:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{ i } \quad -\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Podobnie dla $a=0$ i $b=-1$ jako drugie pierwiastki z liczby $-i$ znajdujemy:

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{ i } \quad -\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Jako drugie pierwiastki z liczby $1+i$ znaleźlibyśmy liczby:

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \quad \text{ i } \quad -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right).$$

ĆWICZENIA. 1. Rozwiązać układ równań:

$$yz = a, \quad xz = b, \quad xy = c.$$

2. Rozwiązać układ równań:

$$x+y=a, \quad u+v=b, \quad x^2+u^2=c, \quad y^2+v^2=d.$$

3. Rozwiązać układ równań:

$$x^2+y^2=a, \quad u^2+v^2=b, \quad xy+uv=c, \quad xyuv=d.$$

4. Rozwiązać układ równań:

$$x^2+y^2=a, \quad u^2+v^2=b, \quad ux+vy=c, \quad vx+uy=d.$$

5. Rozwiązać układ równań:

$$xy=a, \quad uv=b, \quad x+u=c, \quad y+v=d.$$

6. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + (u+v)^2 &= a, & (x+u)^2 + (y+v)^2 &= b, \\ (x+v)^2 + (y+u)^2 &= c, & x+y+u+v &= d. \end{aligned}$$

7. Dowieść, że każda liczba zespolona z może być dwoma różnymi sposobami przedstawiona w postaci $z = u + \frac{1}{u}$, gdzie u jest liczbą zespoloną różną od zera.

§ 2. Równania dwukwadratowe. Równaniem *dwukwadratowym* nazywamy równanie postaci:

$$(13) \quad a_0 z^4 + a_1 z^2 + a_2 = 0,$$

gdzie a_0, a_1 i a_2 są danymi liczbami zespolonymi, przy czym $a_0 \neq 0$.

Przez podstawienie $z^2 = u$ równanie takie sprowadza się do równania 2-go stopnia (względem u):

$$(14) \quad a_0 u^2 + a_1 u + a_2 = 0.$$

Jeżeli u_1 i u_2 są pierwiastkami równania (14), to pierwiastkami równania (13) są oczywiście liczby $\pm \sqrt{u_1}$ i $\pm \sqrt{u_2}$.

Równanie (13) (przy $a_0 \neq 0$) posiada:

4 różne pierwiastki, gdy $a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$,

3 różne pierwiastki, gdy $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ i $a_2 = 0$,

2 różne pierwiastki, gdy $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ i $a_2 \neq 0$,

1 tylko pierwiastek ($z=0$), gdy $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ i $a_2 = 0$.

Łatwo też wykazać, że jeżeli równanie (13) ma współczynniki rzeczywiste i $a_0 \neq 0$, to ma ono wtedy i tylko wtedy same pierwiastki rzeczywiste, gdy $a_1^2 - 4a_0 a_2 \geq 0$, $a_0 a_1 \leq 0$ i $a_0 a_2 \geq 0$.

Oto kilka przykładów na zastosowania równań dwukwadratowych:

1. Rozwiązać równanie:

$$x^4 + (x+a)^4 = b.$$

Rozwiązanie: Podstawmy $x = t - \frac{a}{2}$; otrzymamy na t równanie

$$16t^4 + 24a^2 t^2 + a^4 - 8b = 0.$$

2. Rozwiązać równanie:

$$x^5 - (x+a)^5 = b.$$

Wskazówka: Podstawić $x = t - \frac{a}{2}$.

3. Rozwiązać układ równań:

$$x+y=a, \quad x^4+y^4=b.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy $x-y=t$. Będzie $2x=a+t$, $2y=a-t$ i na t otrzymujemy równanie $(a+t)^4 + (a-t)^4 = 2^4 b$ czyli równanie dwukwadratowe $t^4 + 6a^2 t^2 + a^4 = 2^4 b$. Znajdąc zaś t , wyznaczymy z łatwością x oraz y .

4. Rozwiązać układ równań:

$$x+y=a, \quad x^5+y^5=b.$$

Rozwiązanie: Jak wyżej, otrzymujemy dla $x-y=t$ równanie dwukwadratowe $5at^4 + 10a^3 t^2 + a^5 = 2^4 b$.

§ 3. Równania 3-go stopnia. Ogólna postać równania 3-go stopnia jest następująca:

$$(15) \quad a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0,$$

gdzie a_0, a_1, a_2 i a_3 są danymi liczbami zespolonymi oraz $a_0 \neq 0$.

Dzieląc przez a_0 , sprowadzamy to równanie do postaci:

$$z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0;$$

podstawiając

$$z = w - \frac{b_1}{3},$$

otrzymamy na w równanie:

$$(16) \quad w^3 + pw + q = 0,$$

gdzie:

$$p = -\frac{b_1^2}{3} + b_2 = -\frac{a_1^2}{3a_0^2} + \frac{a_2}{a_0},$$

$$q = \frac{2b_1^3}{27} - \frac{b_1 b_2}{3} + b_3 = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}.$$

Każde równanie 3-go stopnia możemy zatem sprowadzić do postaci (16) czyli do tak zwanej *postaci kanonicznej*.

Zajmiemy się więc dalej tylko równaniami postaci (16).

Podstawmy do (16)

$$(17) \quad w = u + v.$$

Otrzymamy równanie:

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0,$$

które będzie oczywiście spełnione, jeżeli wyznaczymy liczby u i v tak, aby spełniały układ dwóch równań:

$$(18) \quad u^3 + v^3 + q = 0, \quad 3uv + p = 0.$$

Gdybyśmy znaleźli układ liczb u, v , spełniający równanie (18), to wyznaczając w ze wzoru (17), otrzymamy oczywiście (przynajmniej jedno) rozwiązanie równania (16).

Zajmiemy się więc układem równań (18).

Jeżeli układ liczb zespolonych u, v spełnia równania (18), to

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{i} \quad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Liczby u^3 i v^3 są — jak wiemy z zagadnienia rozpatrzonego w § 1, str. 170-171 — pierwiastkami równania 2-go stopnia $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, mianowicie (ob. wzory (8)):

$$(19) \quad \begin{aligned} \text{albo } u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{i} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ \text{albo } u^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{i} \quad v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \end{aligned}$$

gdzie przez $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ rozumiemy którykolwiek (ale ustalony) z obu drugich pierwiastków liczby $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, np. pierwiastek główny.

Jeżeli teraz przez $u_0 = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ będziemy rozumieli jeden (którykolwiek, ale ustalony) z pierwiastków 3-go stopnia (np. główny) z liczby $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, zaś przez v_0 jeden (również którykolwiek, ale ustalony), z pierwiastków 3-go stopnia z liczby $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, to oznaczając przez $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 wszystkie trzy pierwiastki 3-go stopnia z jedności, łatwo sprawdzimy, że liczby:

$$(20) \quad u = \varepsilon_k u_0 \quad \text{i} \quad v = \varepsilon_l v_0,$$

gdzie wskaźniki k i l są którymikolwiek z liczb 1, 2, 3, będą spełniały równania (19), a więc też pierwsze z równań (18).

Okażemy teraz, że pierwiastki ε_k i ε_l można tak dobrać, aby liczby (20) spełniały też drugie z równań (18). Na to, jak widać z (20) potrzeba i wystarcza, aby było

$$(21) \quad 3 \varepsilon_k \varepsilon_l u_0 v_0 = -p.$$

Lecz z określenia liczb u_0 i v_0 mamy:

$$u_0^3 v_0^3 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) = -\frac{p^3}{27},$$

co dowodzi, że

$$(22) \quad u_0 v_0 = -\eta \frac{p}{3},$$

gdzie η jest jednym (ale ustalonym) z pierwiastków 3-go stopnia z jedności. Jeżeli więc ε_k i ε_l dobierzemy tak, aby było

$$(23) \quad \varepsilon_k \varepsilon_l \eta = 1,$$

to wobec (22) spełniony też będzie wzór (21). Aby zaś zachodził wzór (23), wystarczy np. przyjąć $\varepsilon_k = 1$ i $\varepsilon_l = \eta^{-1}$, co jest możliwe, gdyż 1 i η^{-1} są pierwiastkami 3-go stopnia z jedności.

Liczby (20), otrzymane w ten sposób, oznaczmy przez u_1 i v_1 . Układ $u = u_1$, $v = v_1$ będzie więc jednym z rozwiązań równań (18).

Przyjmijmy następnie:

$$(24) \quad \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$(25) \quad w_1 = u_1 + v_1, \quad w_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1, \quad w_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.^1)$$

Okażemy, że przy wszelkim zespolonym w jest:

$$(26) \quad w^3 + pw + q = (w - w_1)(w - w_2)(w - w_3).$$

Istotnie, wobec (25) znajdujemy:

$$(27) \quad w_1 + w_2 + w_3 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(u_1 + v_1) = 0,$$

ponieważ $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ wobec (24); dalej:

$$(28) \quad w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(u_1^2 + v_1^2) + 3(\varepsilon + \varepsilon^2)u_1 v_1 = p,$$

gdyż na mocy (24) jest $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$, a ponadto $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$, gdyż układ u_1, v_1 jest jednym z rozwiązań układu równań (18); wreszcie:

$$(29) \quad w_1 w_2 w_3 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(u_1^2 v_1 + u_1 v_1^2) + u_1^3 + v_1^3 = -q,$$

gdyż, jak już wiemy, $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, a ponadto $u_1^3 + v_1^3 + q = 0$ na mocy (19).

Wzory (27), (28) i (29) dają natychmiast tożsamość (26).

Otrzymane wyniki możemy ująć w

Twierdzenie 3. Pierwiastki 3-go stopnia z liczb (19) można zawsze tak dobrać, aby oznaczając je odpowiednio przez u_1 i v_1 , mieć $u_1^3 + v_1^3 + q = 0$ i $3u_1 v_1 + p = 0$; wówczas wyznaczając liczby w_1, w_2 , i w_3 ze wzorów (25), będziemy mieli tożsamość (26).

¹⁾ Wzory (25) po podstawieniu w nich na u_1, v_1 i ε wartości z wzorów (19) i (24) noszą nazwę wzorów Cardano od nazwiska włoskiego matematyka, który pierwszy rozwiązał równanie 3-go stopnia. Przed nim rozwiązanie równania 3-go stopnia w przypadku ogólnym było nieznane.

Otóż z tożsamości (26) wynika natychmiast, że *pierwiastkami równania 3-go stopnia* (16) są *liczby* (25) i *tylko te liczby*.

Założmy w szczególności, że współczynniki p i q równania (16) są rzeczywiste i niechaj

$$(30) \quad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Jeżeli $D \geq 0$, to liczby (19) są obie rzeczywiste i za u_0 lub v_0 możemy przyjąć pierwiastki rzeczywiste 3-go stopnia z tych liczb. Ze wzorów (22) wynika, że wówczas liczba η też jest rzeczywistą, zatem $\eta = 1$ (gdyż $\eta^3 = 1$). Możemy więc przyjąć $\varepsilon_k = 1$ i $\varepsilon_l = 1$, co daje $u_1 = u_0$ i $v_1 = v_0$. Liczby u_1 i v_1 są więc w tym przypadku rzeczywiste.

Wobec wzorów (25), pierwiastkami równania (16) będą więc w rozpatrywanym przypadku liczby:

$$u_1 + v_1, \quad \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 \quad \text{i} \quad \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.$$

Na mocy (24) mamy $\varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, zatem:

$$(31) \quad \begin{aligned} \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} u_1 + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} v_1 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \\ \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} u_1 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} v_1 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1). \end{aligned}$$

Z określenia liczb u_1 i v_1 wynika, że $u_1 = v_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $D = 0$. Jeżeli więc $D \neq 0$, to $u_1 - v_1 \neq 0$ i żadna z liczb (31) nie jest rzeczywistą. W tym więc przypadku jeden tylko pierwiastek równania (mianowicie $u_1 + v_1$) jest rzeczywisty, a dwa pozostałe są — jak wynika ze wzorów (31) — różnymi liczbami zespolonymi sprzężonymi.

Jeżeli $u_1 = v_1$ (lub — co na jedno wychodzi — jeżeli $D = 0$), to ze wzorów (31) wynika, że równanie (16) posiada dwa pierwiastki: $2u_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ i (podwójny) $-u_1 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, oba rzeczywiste i różne, gdy $q \neq 0$, zaś jeden tylko (potrójny) $u_1 = 0$, gdy $q = 0$.

Zbadamy wreszcie przypadek $D < 0$. Liczby (19) są wówczas sprzężone. Jeżeli $u_0 = a + bi$ ma sześcienną równą pierwszej z liczb (19), to sześcienną liczby $a - bi$ będzie równą drugiej z liczb (19) i możemy

przyjąć $v_0 = a - bi$; przy tym będzie $u_0 v_0 = a^2 + b^2 \geq 0$ i wobec (22) η wypadnie rzeczywiste. Można więc będzie przyjąć $u_1 = u_0$ i $v_1 = v_0$. Liczby (25) będą wtedy wobec (24) następujące:

$$u_1 + v_1 = 2a, \quad \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 = -a - b\sqrt{3}, \quad \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 = -a + b\sqrt{3}.$$

Wszystkie trzy pierwiastki równania (16) są tu więc rzeczywiste, jakkolwiek wzory (25) dają dwa spośród nich w postaci zespolonej. Ponadto wszystkie te trzy pierwiastki są różne. Istotnie, gdyby równanie (16) posiadało pierwiastek wielokrotny w , to byłby on (ob. Rozdział VIII, § 9, str. 120, twierdzenie 12) zarazem pierwiastkiem pochodnej wielomianu $w^3 + pw + q$. Byłoby więc $3w^2 + p = 0$, skąd $\frac{4}{9}p^2 w^2 = q^2$ czyli $-\frac{4}{27}p^3 = q^2$, zatem $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, wbrew założeniu, że w rozpatrywanym przypadku jest $D < 0$.

Twierdzenie 3 możemy więc uzupełnić przez

Twierdzenie 4. Jeżeli współczynniki równania (16) są rzeczywiste, to w przypadku $D = 0$ równanie to posiada jeden tylko pierwiastek (równy zeru), jeżeli $q = 0$, i dwa różne pierwiastki (oba rzeczywiste), jeżeli $q \neq 0$; w przypadku $D > 0$ posiada ono jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa (różne) zespolone sprzężone; wreszcie w przypadku $D < 0$ ma ono trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

Rozpatrzoną przez nas postać kanoniczną (16) ogólnego równania 3-go stopnia (15) zawiera dwa „parametry” p i q . Można jednak sprowadzić równanie (15) do postaci kanonicznej z jednym tylko parametrem, a mianowicie w sposób następujący:

Jeżeli $p > 0$, podstawiamy do równania (16) $w = \sqrt[3]{p}t$ i przyjmujemy $r = \frac{q}{p\sqrt[3]{p}}$. Otrzymamy wówczas dla t równanie:

$$(32) \quad t^3 + t + r = 0.$$

Jeżeli zaś $p < 0$, podstawiamy do równania (16) $w = \sqrt[3]{-p}t$ i przyjmujemy $r = \frac{q}{-p\sqrt[3]{-p}}$: otrzymamy dla t równanie

$$(33) \quad t^3 - t + r = 0.$$

W ten sposób równanie (16) daje się zawsze sprowadzić do jednej z postaci (32) i (33), a więc do równania z jednym tylko parametrem r . Może to być spożytkowane dla rozwiązywania równań 3-go stopnia za pomocą tablic, podających pierwiastki dla różnych wartości parametru r .

§ 4. Przykłady równań 3-go stopnia. 1. Niech będzie dane równanie:

$$x^3 - 6x - 40 = 0^1).$$

Mamy tu według (30) $D = 20^2 - 2^3 = 2^2(10^2 - 2) = 2^2 \cdot 98 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2 > 0$. Równanie posiada więc jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa (różne) zespolone. Oznaczmy przez $\sqrt[3]{D}$ pierwiastek arytmetyczny 2-go stopnia z liczby (dodatniej) D oraz przez $u_0 = \sqrt[3]{20 + \sqrt{D}}$ i $v_0 = \sqrt[3]{20 - \sqrt{D}}$ pierwiastki arytmetyczne z liczb $20 + \sqrt{D}$ i $20 - \sqrt{D}$ (które są obie dodatnie, gdyż $D = 20^2 - 2^3 < 20^2$). Będzie $u_0 v_0 > 0$, zatem z uwagi na to, że jest tu $p = -6$, wzór (22) daje $\eta = 1$ i wobec (24) możemy przyjąć $\varepsilon_k = \varepsilon_l = 1$.

W myśl określenia liczb u_1 i v_1 będzie więc na mocy (21) $u_1 = u_0$ i $v_1 = v_0$, a zatem wobec (25) pierwiastkami danego równania będą liczby:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}, \\ x_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \\ (34) \quad &= -\frac{1}{2} (\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}) + \frac{i\sqrt{3}}{2} (\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}), \\ x_3 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}) - \frac{i\sqrt{3}}{2} (\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Tym sposobem otrzymaliśmy wszystkie trzy pierwiastki danego równania, ale w postaci dość skomplikowanej.

Gdybyśmy zaś rozpoczęli rozwiązywanie danego równania od sprawdzenia sposobem podanym w Rozdziale VIII, § 15 (str. 136-137), czy nie ma ono pierwiastków wymiernych, podstawiając za x dzielniki liczby 40, znaleźlibyśmy z łatwością, że liczba 4 jest pierwiastkiem danego równania. Ponieważ — jak już wiemy — ma ono tylko jeden

pierwiastek rzeczywisty, więc — jak widać ze wzorów (34) — może nim być tylko pierwiastek x_1 . Mamy więc:

$$(35) \quad \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Zatem metoda ogólna rozwiązywania równania 3-go stopnia (za pomocą wzoru Cardano) podaje nam tu pierwiastek rzeczywisty (całkowity) w postaci sumy dwóch liczb niewymiernych. Że istotnie składniki lewej strony wzoru (35) są niewymierne, wnosimy stąd, iż:

$$(2 \pm \sqrt{2})^3 = 2^3 \pm 3 \cdot 2^2 \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 2 \pm 2\sqrt{2} = 20 \pm 14\sqrt{2},$$

więc:

$$(36) \quad \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \quad \text{i} \quad \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Zarazem te wyrażenia pozwalają uprościć wyrażenia na x_2 i x_3 . Mianowicie, podstawiając wartości (36) i (35) do wzorów (34), otrzymujemy:

$$x_2 = -2 + i\sqrt{6} \quad \text{i} \quad x_3 = -2 - i\sqrt{6}.$$

2. Niech będzie dane równanie:

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Mamy tu $D = \frac{9^2}{4} - 2^3 = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 0$. Równanie ma więc jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa (różne) zespolone. Możemy tu przyjąć $\sqrt{D} = \frac{7}{2}$; a za u_0 i v_0 pierwiastki arytmetyczne 3-go stopnia z liczb $\frac{9}{2} + \frac{7}{2}$ i $\frac{9}{2} - \frac{7}{2}$. Będziemy więc mieli $u_0 = \sqrt[3]{8} = 2$ i $v_0 = \sqrt[3]{1} = 1$, wobec czego, jak w przykładzie 1, znajdujemy $\eta = 1$ i będziemy mogli przyjąć $\varepsilon_k = \varepsilon_l = 1$; przyjmując dalej $u_1 = u_0$ i $v_1 = v_0$, wnosimy wobec (25), że pierwiastkami danego równania będą liczby:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

3. Niech będzie dane równanie:

$$x^3 - 3x - 18 = 0.$$

Wzory Cardano dają tu dla jednego z pierwiastków wartość:

$$x = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}.$$

¹⁾ Równanie to rozpatruje Euler w swej *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Wydanie nowe, Lipsk (bez roku wydania), Ph. Reclam, str. 303.

Tymczasem łatwo sprawdzić bezpośrednio, że liczba 3 jest pierwiastkiem danego równania. Mamy też:

$$x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6).$$

Pozostałymi pierwiastkami równania są więc liczby:

$$\frac{-3 + i\sqrt{15}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{-3 - i\sqrt{15}}{2}.$$

Wnosimy stąd, że $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$, co łatwo też sprawdzić bezpośrednio, gdyż

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{27 \pm 27\sqrt{5} + 45 \pm 5\sqrt{5}}{8}} = \sqrt[3]{9 \pm \sqrt{80}}.$$

Widzimy więc, że wzory Cardano podają niekiedy nawet naturalny pierwiastek równania 3-go stopnia w postaci skomplikowanej sumy dwóch liczb niewymiernych (por. przykład 1, str. 180).

4. Niech będzie dane równanie:

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Mamy tu $D = 1 - 1 = 0$; ponieważ $q = -2 \neq 0$, więc równanie posiada dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest podwójny. Przyjmując $u_0 = \sqrt[3]{1} = 1$ i $v_0 = \sqrt[3]{1} = 1$, znajdziemy $\eta = 1$, $v_k = v_l = 1$, $u_1 = u_0$ i $v_1 = v_0$, wobec czego pierwiastkami równania będą liczby:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -1, \\ x_3 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -1. \end{aligned}$$

Łatwo tu sprawdzamy, że jest tożsamościowo:

$$x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2.$$

5. Niech będzie dane równanie:

$$x^3 - 7x - 6 = 0.$$

Mamy tu $D = 3^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{-3 \cdot 10^2}{3^4}$ i przez $\sqrt{D}$ możemy rozumieć liczbę $\sqrt{D} = \frac{10\sqrt{3}}{9}i$. Na u_0 i v_0 mamy więc wzory:

$$u_0 = \sqrt[3]{3 + \frac{10\sqrt{3}}{9}i} \quad \text{i} \quad v_0 = \sqrt[3]{3 - \frac{10\sqrt{3}}{9}i},$$

należałoby jednak ustalić, które z pierwiastków mamy wybrać. Stanowi to pewną trudność, którą w danym przypadku można ominąć, zważywszy, że:

$$\left(-1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}\right)^3 = 3 + \frac{10\sqrt{3}}{9}i \quad \text{i} \quad \left(-1 - \frac{2i}{\sqrt{3}}\right)^3 = 3 - \frac{10\sqrt{3}}{9}i.$$

Możemy więc przyjąć:

$$u_0 = -1 + \frac{2i}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad v_0 = -1 - \frac{2i}{\sqrt{3}},$$

co daje $u_0 v_0 = 1 + \frac{4}{3} > 0$, zatem $\eta = 1$, $\varepsilon_k = \varepsilon_l = 1$, $u_1 = u_0$, $v_1 = v_0$ i jako pierwiastki danego równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(-1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) + \left(-1 - \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) = -2, \\ x_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-1 - \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) = -1, \\ x_3 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-1 - \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) = 3. \end{aligned}$$

Uwaga: Jak wskazują rozpatrzone przykłady, mając do rozwiązania równanie 3-go stopnia o współczynnikach całkowitych, wygodniej jest najprzód zbadać, czy posiada ono pierwiastek wymierny. Znalezienie takiego pierwiastka a pozwala następnie (przez podzielenie lewej strony równania przez $x - a$) sprowadzić wyznaczenie pozostałych dwu pierwiastków do rozwiązania równania 2-go stopnia.

6. Niech będzie dane równanie:

$$x^3 - 15x - 10 = 0.$$

Mamy tu $D = 5^2 - 5^3 = -10^2 < 0$. Wszystkie trzy pierwiastki równania są więc rzeczywiste i różne. Za $\sqrt{D}$ możemy tu przyjąć $\sqrt{D} = 10i$. Na u_0 i v_0 będziemy więc mieli wzory:

$$u_0 = \sqrt[3]{5 + 10i} \quad i \quad v_0 = \sqrt[3]{5 - 10i},$$

przy czym należy ustalić, które z pierwiastków 3-go stopnia tu wybierzemy. Udowodnimy później (ob. Rozdział XIV, § 4), że w danym przypadku przy żadnym wyborze tych pierwiastków liczby u_0 i v_0 nie dadzą się przedstawić w postaci liczb zespolonych, których część rzeczywista oraz współczynnik przy i dałyby się otrzymać z liczby 1 za pomocą skończonej liczby czterech działań arytmetycznych oraz wyciągania pierwiastków arytmetycznych (dowolnych stopni) z liczb dodatnich.

§ 5. Casus irreducibilis równania 3-go stopnia. Powróćmy jeszcze do rozwiązań (25) równania (16). Jak wiemy, liczby u_1 i v_1 są pewnymi pierwiastkami 3-go stopnia z liczb (19), możemy więc ich sumę $w_1 = u_1 + v_1$ przedstawić w postaci zwanej wzorem Cardano (por. str. 177, odnośnik):

$$(37) \quad w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Widzieliśmy już (por. drugi ze wzorów (18)), że na to, aby wzór (37) dawał rozwiązanie równania (16), potrzeba i wystarcza, by pierwiastki 3-go stopnia, będące jego składnikami, były tak dobrane, żeby ich iloczyn był równy liczbie $-\frac{p}{3}$. Z drugiej strony, jak wiemy z twierdzenia 4 (str. 179), w przypadku, gdy $D < 0$, wszystkie trzy pierwiastki równania (16) są rzeczywiste, lecz wzory (37) dają je w postaci sumy dwóch liczb zespolonych (por. przykład 1, str. 180). Żeby je doprowadzić do postaci rzeczywistej, należałoby wyznaczyć liczby rzeczywiste a i b tak, aby było:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = a + bi \quad \text{czyli} \quad (a + bi)^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}.$$

Gdybyśmy stąd chcieli znaleźć liczby a i b z równań otrzymanych przez porównanie (po obu stronach) części rzeczywistych oraz współczynników przy i , doprowadziłoby to nas do równań 3-go stopnia o wyróżniku D ujemnym, a więc których pierwiastki, jakkolwiek wszystkie trzy rzeczywiste, znowu byłyby przez wzory Cardano dane w skomplikowanej postaci sumy dwóch pierwiastków sześciennych z liczb zespolonych. Droga ta nie doprowadziłaby więc do celu.

Z tego względu badany przypadek zwie się *casus irreducibilis* (czyli *przypadek nieprzywiedlny*) równania 3-go stopnia.

W tym przypadku wzory Cardano nie nadają się do obliczania pierwiastków równania 3-go stopnia¹⁾. Można je natomiast wówczas z łatwością obliczyć przy pomocy funkcji trygonometrycznych.

Wyznamy mianowicie liczbę dodatnią r i kąt ϑ tak, aby było:

$$(38) \quad D = -r^2 \sin^2 \vartheta \quad i \quad -\frac{q}{2} = r \cos \vartheta;$$

łatwo obliczyć, że w tym celu wystarczy przyjąć:

$$r = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} \quad i \quad \cos \vartheta = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}},$$

co jest zawsze możliwe, gdyż wobec $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ mamy

$$-\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4} \geq 0, \quad \text{skąd} \quad \left| \frac{-q/2}{\sqrt{-p^3/27}} \right| < 1.$$

Wzór (37) przybierze wówczas postać:

$$w = \sqrt[3]{r} (\sqrt[3]{\cos \vartheta + i \sin \vartheta} + \sqrt[3]{\cos \vartheta - i \sin \vartheta}).$$

Lecz, jak wiemy (ob. Rozdział VI § 7, str. 93):

$$\sqrt[3]{\cos \vartheta + i \sin \vartheta} = \cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\vartheta + 2k\pi}{3},$$

¹⁾ Udowodnimy w Rozdziale XIV, § 3, że w tym przypadku pierwiastki równania 3-go stopnia nie mogą być otrzymane z liczby 1 za pomocą skończonej liczby czterech działań arytmetycznych oraz wyciągania pierwiastków arytmetycznych (dowolnych stopni) z liczb dodatnich.

zatem:

$$\sqrt[3]{\cos \vartheta - i \sin \vartheta} = \cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{3} - i \sin \frac{\vartheta + 2k\pi}{3},$$

ponieważ na mocy twierdzenia 4 (str. 179) liczba w jest w danym przypadku rzeczywista. Co się zaś tyczy liczby całkowitej k , to może ona być dowolną z liczb 0, 1, 2, gdyż przy każdej z nich iloczyn pierwiastków (37) daje liczbę $\sqrt[3]{r^2} = -\frac{p}{3}$.

Liczbami (37) czyli pierwiastkami równania (16) są tu więc liczby:

$$(39) \quad w_k = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{3} \quad \text{dla } k=0, 1, 2,$$

podane w postaci dogodnej do stosowania tablic logarytmicznych.

ĆWICZENIA. 1. Jako zastosowanie równań stopnia 3-go rozwiązać układ równań:

$$x+y=a, \quad x^6+y^6=b.$$

Wsk.: Przyjmując $x-y=t$, otrzymujemy dla t równanie:

$$t^6 + 15a^2t^4 + 15a^4t^2 + a^6 = 2^6b,$$

które dla $t^2=z$ daje równanie 3-go stopnia.

2. Rozwiązać układ równań:

$$x+y=0, \quad x^7+y^7=b.$$

Wsk.: Jak wyżej, przyjmując $x-y=t$, otrzymujemy dla t równanie:

$$7at^6 + 35a^3t^4 + 21a^5t^2 + a^7 = 2^6b$$

i podstawiamy $t^2=z$.

3. Rozwiązać równanie $x^7 - (x+a)^7 = b$.

Wsk.: Podstawić $x=t-\frac{a}{2}$.

4. Rozwiązać układ równań:

$$x^2+y^2=a, \quad x^3+y^3=b,$$

gdzie liczby a i b są dane.

Rozw.: Przyjmujemy $x+y=z$ czyli $x^2+y^2+2xy=z^2$, skąd wobec pierwszego z danych równań otrzymujemy $2xy=z^2-a$, dalej $x^3+y^3+3xy(x+y)=z^3$, a stąd wobec drugiego z danych równań i z uwagi, że $3xy(x+y)=\frac{3}{2}(z^2-a)z$, dostajemy równanie 3-go stopnia na z :

$$b + \frac{3}{2}(z^2-a)z = z^3.$$

Znalazszy z , znajdujemy x i y z równań:

$$x+y=z, \quad 2xy=z^2-a$$

jako pierwiastki równania 2-go stopnia $2t^2-4tz+(z^2-a)=0$.

§ 6. Równania 4-go stopnia. Ogólna postać równania 4-go stopnia jest następująca:

$$(40) \quad a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0,$$

gdzie a_0, a_1, a_2, a_3 i a_4 są danymi liczbami zespolonymi, przy czym $a_0 \neq 0$. Dzieląc przez a_0 , sprowadzamy to równanie do postaci:

$$z^4 + b_1z^3 + b_2z^2 + b_3z + b_4 = 0,$$

zaś podstawiając

$$z = t - \frac{b_1}{4},$$

otrzymujemy na t równanie:

$$(41) \quad t^4 + pt^2 + qt + r = 0.$$

Zajmiemy się więc dalej tylko równaniem postaci (41).

Podstawmy do równania (41), pomnożonego przez 16:

$$(42) \quad 2t = u + v + w.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 4t^2 &= u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw), \\ 16t^4 &= (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + uw + vw) + \\ &\quad + 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w). \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości do równania (41), będziemy więc mieli równanie

$$(43) \quad \begin{aligned} &(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4p(u^2 + v^2 + w^2) + \\ &\quad + 4(uv + uw + vw)(u^2 + v^2 + w^2 + 2p) + \\ &\quad + 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8(u + v + w)(uvw + q) + 16r = 0. \end{aligned}$$

Zatem, jeżeli znajdziemy układ liczb u, v, w , spełniający równanie (43), to wyznaczając liczbę t ze wzoru (42), otrzymamy rozwiązanie równania (41). Otóż łatwo spostrzec, że układ liczb u, v, w będzie spełniał równanie (43), jeżeli tylko:

$$(44) \quad u^2 + v^2 + w^2 = -2p, \quad uvw = -q, \quad u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = p^2 - 4r.$$

Wystarczy więc wyznaczyć układ u, v, w tak, by spełniony był układ równań (44).

W tym celu zauważymy przede wszystkim, że potrafimy wyznaczyć układ u, v, w , spełniający równania:

$$(45) \quad u^2 + v^2 + w^2 = -2p, \quad u^2v^2w^2 = q^2, \quad u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = p^2 - 4r,$$

ponieważ liczby u^2, v^2 i w^2 są trzema pierwiastkami równania 3-go stopnia:

$$(46) \quad z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Jest to tak zwane *równanie rozwiązujące* równania (41).

Oznaczając jego pierwiastki przez z_1, z_2, z_3 , możemy przyjąć za u dowolny z dwóch pierwiastków 2-go stopnia z liczby (naogół zespolonej) z_1 , za v dowolny z dwóch pierwiastków 2-go stopnia z liczby z_2 , a za w przyjmijmy ten z dwóch (różniących się znakiem) pierwiastków 2-go stopnia z liczby z_3 , przy którym będzie $uvw = -q$. Wobec drugiego z równań (45) mamy bowiem albo $uvw = q$, albo $uvw = -q$, przy czym jedna z tych równości przechodzi w drugą przez zastąpienie w przez $-w$.

Wyznaczywszy w ten sposób liczby u, v i w , otrzymamy układ, spełniający równania (44), a więc i równanie (43). Oznaczmy taki układ przez u_1, v_1, w_1 .

Okażemy, że zachodzi tożsamość:

$$16(t^4 + pt^2 + qt + r) = (2t - u_1 - v_1 - w_1)(2t - u_1 + v_1 + w_1)(2t + u_1 - v_1 + w_1)(2t + u_1 + v_1 - w_1).$$

Istotnie:

$$\begin{aligned} & (2t - u_1 - v_1 - w_1)(2t - u_1 + v_1 + w_1)(2t + u_1 - v_1 + w_1)(2t + u_1 + v_1 - w_1) = \\ & = [(2t - u_1)^2 - (v_1 + w_1)^2][(2t + u_1)^2 - (v_1 - w_1)^2] = \\ & = (4t^2 - u_1^2)^2 - (2t - u_1)^2(v_1 - w_1)^2 - (2t + u_1)^2(v_1 + w_1)^2 + (v_1^2 - w_1^2)^2 = \\ & = 16t^4 - 8t^2(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - 16tu_1v_1w_1 + u_1^4 + v_1^4 + w_1^4 - 2(u_1^2v_1^2 + u_1^2w_1^2 + v_1^2w_1^2), \end{aligned}$$

a ponieważ układ u_1, v_1, w_1 spełnia równania (44), więc:

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = -2p, \quad u_1v_1w_1 = -q$$

i wreszcie:

$$\begin{aligned} & u_1^4 + v_1^4 + w_1^4 - 2(u_1^2v_1^2 + u_1^2w_1^2 + v_1^2w_1^2) = \\ & = (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)^2 - 4(u_1^2v_1^2 + u_1^2w_1^2 + v_1^2w_1^2) = 4p^2 - 4(p^2 - 4r) = 16r. \end{aligned}$$

Pierwiastkami równania (41) są więc liczby:

$$(47) \quad \begin{aligned} t_1 &= \frac{u_1 + v_1 + w_1}{2}, & t_2 &= \frac{u_1 - v_1 - w_1}{2}, \\ t_3 &= \frac{-u_1 + v_1 - w_1}{2}, & t_4 &= \frac{-u_1 - v_1 + w_1}{2} \end{aligned}$$

i tylko te liczby.

Ze wzorów (47) wynika natychmiast, że

$$(48) \quad \begin{aligned} & (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_1 - t_4)(t_2 - t_3)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4) = \\ & = (u_1^2 - v_1^2)(u_1^2 - w_1^2)(v_1^2 - w_1^2), \end{aligned}$$

a że — jak widzieliśmy — u_1^2, v_1^2 i w_1^2 są trzema pierwiastkami równania (46), więc równość (48) dowodzi, że:

Równanie (41) ma wtedy i tylko wtedy 4 różne pierwiastki, gdy równanie rozwiązujące (46) ma 3 różne pierwiastki.

PRZYKŁADY. 1. Rozwiążmy równanie:

$$(49) \quad t^4 + t - 1 = 0.$$

Równaniem rozwiązującym będzie tu równanie:

$$z^3 + 4z - 1 = 0,$$

którego pierwiastkami są, jak obliczamy metodą podaną w § 2, liczby:

$$z_1 = -\frac{1}{2}(\xi + \eta) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\xi - \eta),$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}(\xi + \eta) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\xi - \eta),$$

$$z_3 = \xi + \eta,$$

gdzie:

$$(50) \quad \xi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}}}, \quad \eta = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{283}{108}}},$$

przy czym we wzorach tych należy brać pierwiastki arytmetyczne.

Za u_1 możemy tu, jak widzieliśmy, przyjąć dowolny z dwóch pierwiastków 2-go stopnia z liczby z_1 , a za v_1 dowolny z dwóch pierwiastków 2-go stopnia z liczby z_2 . Napiszmy dla krótkości:

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = a - bi.$$

Z uwagi na to, że $b = \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi - \eta) > 0$, wnosimy (ob. twierdzenie 2, wzór (12), str. 172), że pierwiastkami 2-go stopnia z liczby z_1 są liczby

$$\pm \left[\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + a}{2}} + i \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - a}{2}} \right],$$

$$\text{zaś pierwiastkami 2-go stopnia z liczby } z_2 \text{ są liczby } \pm \left[\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + a}{2}} - i \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - a}{2}} \right].$$

Możemy więc przyjąć:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

i

$$v_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Będzie tu $u_1 v_1 = \sqrt{a^2+b^2} > 0$, a że za w_1 musimy, jak widzieliśmy, przyjąć ten z dwóch pierwiastków 2-go stopnia z liczby $z_3 = \xi + \eta > 0$, przy którym $u_1 v_1 w_1 = -1$, więc mamy:

$$w_1 = -\sqrt{z_3} = -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{283}{108}}}},$$

gdzie pierwiastki należy brać arytmetyczne.

Pierwiastki równania (49) otrzymujemy ze wzorów (47) i (50) przez podstawienie znalezionych wartości na u_1 , v_1 i w_1 . Otóż:

$$u_1 + v_1 = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} = \sqrt{2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta} - (\xi + \eta)},$$

$$u_1 - v_1 = 2i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = i \sqrt{2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta} + (\xi + \eta)},$$

$$w_1 = -\sqrt{\xi + \eta},$$

a zatem:

$$t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta} - (\xi + \eta)} - \frac{1}{2} \sqrt{\xi + \eta},$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\xi + \eta} + \frac{i}{2} \sqrt{2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta} + (\xi + \eta)},$$

$$t_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\xi + \eta} - \frac{i}{2} \sqrt{2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta} + (\xi + \eta)},$$

$$t_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta} - (\xi + \eta)} - \frac{1}{2} \sqrt{\xi + \eta}.$$

Podstawiając za ξ i η wartości ze wzorów (50), otrzymamy ostatecznie wartości wszystkich czterech pierwiastków równania (49), w postaci zresztą dosyć skomplikowanej. Więć np.:

$$t_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2 \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{283}{108}}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{283}{108}}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{283}{108}}}}.$$

Jak widzimy, rozwiązywanie algebraiczne równania 4-go stopnia nawet w przypadku współczynników całkowitych jednocyfrowych, może doprowadzać do wzorów dość złożonych.

W związku z tym zauważymy, że już rozwiązywanie prostych układów dwóch równań 2-go stopnia o dwóch niewiadomych (nawet takich, z których każde jest pierwszego stopnia względem jednej z niewiadomych) może doprowadzić do równie skomplikowanych wzorów. Takim jest np. układ równań:

$$x + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 0,$$

gdyż wstawiając wartość na y z drugiego równania do pierwszego, otrzymujemy $x^4 + x - 1 = 0$, czyli równanie (49). Tak więc, wyznaczanie punktów przecięcia dwóch parabol może wymagać skomplikowanych rachunków.

2. Rozwiążmy równanie:

$$t^4 + t - 2 = 0.$$

Równaniem rozwiązującym jest tu równanie:

$$z^3 + 8z - 1 = 0.$$

Na pierwiastki t_1, t_2, t_3 i t_4 znajdziemy te same wzory, co w przykładzie 1, do których należy tu za ξ i η podstawić:

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{539}{108}}}, \quad \eta = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{539}{108}}}.$$

Doprowadza to znowu do skomplikowanych wzorów. Tymczasem, jak łatwo sprawdzić, jednym z pierwiastków danego równania jest $t = 1$.

Praktyczniej jest więc naprzód znaleźć pierwiastki wymierne (ob. Rozdział VIII, § 15, str. 136-137) równania 4-go stopnia znaną nam metodą (o ile pierwiastki takie istnieją), a następnie sprowadzić zadanie do rozwiązania równania niższego stopnia.

3. Rozwiążmy równanie:

$$2t^3 + 6t + 3 = 0.$$

Równaniem rozwiązującym jest tu równanie:

$$z^3 - 6z - 9 = 0,$$

którego pierwiastkami, jak znaleźliśmy w § 4 (ob. przykład 2, str. 181),

są liczby $z_1 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = 3$. Znajdujemy stąd,

jak w przykładzie poprzednim:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2} + i \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+3}}{2}, \quad v_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2} - i \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+3}}{2}, \quad w_1 = -\sqrt{3}$$

i wzory (47) dają:

$$t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{3}-3} - \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{i}{2} \sqrt{2\sqrt{3}+3},$$

$$t_3 = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{i}{2} \sqrt{2\sqrt{3}+3}, \quad t_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{3}-3} - \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

4. Rozwiążmy równanie:

$$t^4 - 22t^2 - 48t - 23 = 0.$$

Równaniem rozwiązującym jest tu równanie:

$$z^3 - 44z^2 + 576z - 2304 = 0,$$

którego pierwiastkami są liczby 8, 12 i 24. Przyjmując $u_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ i $v_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, musimy wziąć $w_1 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (gdyż $u_1 v_1 w_1 = -q = 48$) i wzory (47) dają:

$$t_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}, \quad t_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6},$$

$$t_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}, \quad t_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

ĆWICZENIA. 1. Rozwiązać równanie $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

Odp.: Pierwiastkami są liczby 1, 2, -3, -4.

2. Znaleźć pierwiastki równania $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$.

Odp.: $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$; $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21})$; $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$; $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

3. Znaleźć pierwiastki równania $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$.

Odp.: 1, 2, 3, -6.

4. Znaleźć pierwiastki równania $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0$.

Odp.: $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$; $1 + i$; $1 - i$.

5. Znaleźć pierwiastki równania $x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 4x - 8 = 0$.

Odp.: $3 + \sqrt{5}$; $3 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{3}$; $1 - \sqrt{3}$.

6. Rozwiązać układ równań: $x^2 - 23y^2 - 48y - 22 = 0$, $xy - 1 = 0$.

Odp.: $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $y_1 = 1/(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ i t. d. (por. przykład 4).

7. Rozwiązać układ równań: $x^2 + y = a$, $x + y^2 = a$.

Odp.: $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4a+1})$, $x_2 = y_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{4a+1})$,

$x_3 = y_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a-3})$, $x_4 = y_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4a-3})$.

Zbadać przypadki szczególne, gdy $a = 0$, $a = 1$ oraz $a = 2$.

8. Jako zastosowanie równania 4-go stopnia rozwiązać układ równań:

$$x + y = a, \quad x^8 + y^8 = b.$$

Wsk.: Przyjmując $(x-y)^2 = z$, otrzymujemy na z równanie 4-go stopnia:

$$z^4 + 28a^2z^3 + 70a^4z^2 + 28a^6z + a^8 = 2^7b.$$

9. Rozwiązać równanie $x^8 + (x+a)^8 = b$.

Wsk., Podstawić $x = t - a/2$.

10. Rozwiązać układ równań: $x + y = a$, $x^9 + y^9 = b$.

Wsk. Przyjmując $(x-y)^2 = z$, otrzymujemy na z równanie:

$$9az^4 + 84a^3z^3 + 126a^5z^2 + 36a^7z + a^9 - 2^9b = 0.$$

§ 7. Rozwiązywanie równań 4-go stopnia przy pomocy funkcji symetrycznych. Rozwiązywanie równań 4-go stopnia można sprowadzić do rozwiązywania równań niższych stopni jeszcze w inny sposób. Niech

$$(51) \quad f(z) = z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0$$

będzie danym równaniem 4-go stopnia, a z_1, z_2, z_3 i z_4 jego pierwiastkami. Nie obliczając ich, możemy obliczyć współczynniki równania

$$F(z) = [z - (z_1 + z_2)][z - (z_3 + z_4)][z - (z_1 + z_3)][z - (z_2 + z_4)][z - (z_1 + z_4)] \cdot [z - (z_2 + z_3)] = 0,$$

gdyż są one funkcjami symetrycznymi pierwiastków równania $f(z) = 0$

(ob. Rozdział IX, § 1, str. 157). Przez podstawienie $z = t - \frac{a_1}{2}$ równanie

$$F(z) = 0 \text{ przechodzi w równanie } \varphi(t) = F\left(t - \frac{a_1}{2}\right) = 0, \text{ które zawiera}$$

tylko potęgi parzyste zmiennej t , gdyż wobec $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -a_1$ jest:

$$\left[t - \frac{a_1}{2} - (z_1 + z_2)\right] \left[t - \frac{a_1}{2} - (z_3 + z_4)\right] =$$

$$= \left[t - \frac{a_1}{2} - (z_1 + z_2)\right] \left[t - \frac{a_1}{2} + a_1 + z_1 + z_2\right] = t^2 - \left(\frac{a_1}{2} + z_1 + z_2\right)^2$$

i podobnie:

$$\left[t - \frac{a_1}{2} - (z_1 + z_3)\right] \left[t - \frac{a_1}{2} - (z_2 + z_3)\right] = t^2 - \left(\frac{a_1}{2} + z_1 + z_3\right)^2,$$

$$\left[t - \frac{a_1}{2} - (z_1 + z_3)\right] \left[t - \frac{a_1}{2} - (z_2 + z_3)\right] = t^2 - \left(\frac{a_1}{2} + z_1 + z_3\right)^2.$$

Podstawiając $t^2 = u$, otrzymamy z równania $\varphi(t) = 0$ równanie 3-go stopnia względem u . Jeżeli u_1, u_2 i u_3 są jego pierwiastkami, to $\pm\sqrt{u_1}, \pm\sqrt{u_2}$ i $\pm\sqrt{u_3}$ będą sześcioma pierwiastkami równania $\varphi(t) = 0$; przez podstawienie $\xi = t - \frac{a_1}{2}$ znajdziemy następnie 6 pierwiastków $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ równania $F(z) = 0$. Wreszcie, dla znalezienia pierwiastków równania $f(z) = 0$ wystarczy rozwiązać układ 6 równań:

$$z_1 + z_2 = \xi_1, \quad z_1 + z_3 = \xi_2, \quad z_1 + z_4 = \xi_3, \quad z_2 + z_3 = \xi_4, \quad z_2 + z_4 = \xi_5, \quad z_3 + z_4 = \xi_6,$$

dających $3z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, skąd $2z_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + a_1$ i t. d.

§ 8. Sposób Ferrari'ego rozwiązywania równań 4-go stopnia. Inny jeszcze sposób sprowadzenia równania 4-go stopnia do równań niższych stopni (pochodzący od Ferrari'ego) jest następujący.

Napiszmy równanie (51) w postaci:

$$z^4 + a_1 z^3 = -a_2 z^2 - a_3 z - a_4.$$

Dodając do obu stron $\frac{a_1^2 z^2}{4}$, aby lewa strona była kwadratem zupełnym, otrzymamy:

$$(52) \quad \left(z^2 + \frac{a_1}{2} z\right)^2 = \left(\frac{a_1^2}{4} - a_2\right) z^2 - a_3 z - a_4.$$

Oznaczając przez y liczbę, której wyznaczenie zastrzegamy sobie na później, dodajmy do obu stron wyrażenie

$$\left(z^2 + \frac{a_1}{2} z\right) y + \frac{y^2}{4}.$$

Otrzymamy z (52):

$$(53) \quad \left(z^2 + \frac{a_1}{2} z + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1^2}{4} - a_2 + y\right) z^2 + \left(\frac{a_1}{2} y - a_3\right) z + \left(\frac{y^2}{4} - a_4\right).$$

Wyznaczymy teraz y w ten sposób, aby prawa strona była kwadratem zupełnym. W tym celu wystarczy, aby:

$$\left(\frac{a_1}{2} y - a_3\right)^2 = \left(\frac{a_1^2}{4} - a_2 + y\right)(y^2 - 4a_4)$$

czyli:

$$(54) \quad y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4a_4) y - a_4(a_1^2 - 4a_2) - a_3^2 = 0.$$

Otóż, biorąc którykolwiek pierwiastek y równania (54), potrafimy rozwiązać równanie (51), gdyż jest ono (przy wszelkim y) równoważne równaniu (53), które w przypadku, gdy y jest pierwiastkiem równania (54), daje się napisać w postaci:

$$\left(z^2 + \frac{a_1}{2} z + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1^2}{4} - a_2 + y\right) \left[z + \frac{\frac{a_1}{2} y - a_3}{2\left(\frac{a_1^2}{4} - a_2 + y\right)}\right]^2 = 0$$

i przeto rozpada się na dwa równania 2-go stopnia (względem z).

Pokrewny powyższemu (ale dający się wyłożyć nieco krócej) sposób sprowadzenia równania 4-go stopnia do równań stopni niższych podaje Jan Śniadecki na str. 135 Tomu I swego słynnego dzieła *Rachunku algebraicznego teorya*, wydane w 1783 r.¹⁾

Niech będzie dane równanie (por. (41), str. 50):

$$(55) \quad y^4 + ay^2 + by + c = 0.$$

Niech z oznacza pierwiastek równania 3-go stopnia

$$(56) \quad 4(z^2 - c)(2z - a) = b^2,$$

zaś y pierwiastek równania 2-go stopnia

$$(57) \quad y^2 + z = \sqrt{2z - a} \left[y - \frac{b}{2(2z - a)} \right].$$

¹⁾ Jana Śniadeckiego *Rachunku algebraicznego teorya przystósowana do linii krzywych*, Tom I zawierający Algebrę na dwie części podzieloną. (Cena dwóch tomów zł. 12), Kraków 1783. Stron III + 312.

„Część pierwsza: wykłada się naturę i własności funkcyi oraz zrównań algebraicznych, działania w odmianach funkcyi i sposoby w rozwiązywaniu równań zachodzące. Część druga: tłumacząca naturę i własności funkcyi przestępnych, oraz sposoby onych wyrażania... W obydwóch zaś tego Tomu częściach to wszystko, czegokolwiek nas dziś Algebra może o zrównaniach i funkcyach nauczyć“ (str. 312).

Z (57) i (56) znajdujemy:

$$(y^2+z)^2 = (2z-a) \left[y^2 - \frac{by}{2z-a} + \frac{b^2}{4(2z-a)^2} \right] = \\ = (2z-a) \left[y^2 - \frac{by}{2z-a} + \frac{z^2-c}{2z-a} \right] = (2z-a)y^2 - by + z^2 - c$$

czyli

$$y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z-a)y^2 - by + z^2 - c,$$

skąd, odejmując od obu stron $2zy^2 + z^2$, wnosimy, że y spełnia równanie (55).

§ 9. Metoda Tschirnhausena przekształcania równań. Pokażemy obecnie, w jaki sposób, umiając rozwiązywać równanie 4-go stopnia, można rozwiązywać każde równanie m -go stopnia

$$(58) \quad z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0$$

sprowadzić do rozwiązywania równania tegoż stopnia

$$(59) \quad y^m + b_1 y^{m-1} + b_2 y^{m-2} + \dots + b_{m-1} y + b_m = 0,$$

w którym:

$$(60) \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0 \quad \text{i} \quad b_3 = 0.$$

Niech więc (58) będzie danym równaniem stopnia m . Przyjmijmy:

$$(61) \quad y = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4,$$

przy czym wyznaczenie współczynników p_0, p_1, p_2, p_3 i p_4 zastrzegamy sobie na później.

Niech $z_1, z_2, \dots, z_m$ oznaczają wszystkie pierwiastki równania (58). Każdemu pierwiastkowi $z = z_k$ tego równania odpowiada w myśl wzoru (61) pewna wartość $y = y_k$. Równaniem, którego pierwiastkami są liczby $y_1, y_2, \dots, y_m$, jest — jak wiemy (ob. Rozdział VIII, § 11, str. 124, tw. 16) — równanie:

$$(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_m) = 0,$$

czyli równanie (59), gdzie $b_1 = -(y_1 + y_2 + \dots + y_m)$. Wobec (61) jest $b_1 = -(mp_0 + s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3 + s_4 p_4)$, gdzie s_k oznacza dla $k = 1, 2, 3, 4$ sumę k -tych potęg pierwiastków równania (58), a więc wyraża się wymiennie przez jego współczynniki. Zatem b_1 jest funkcją liniową jednorodną zmiennych $p_0, p_1, \dots, p_4$, której współczynniki wyrażają się wymiennie przez współczynniki równania (58). Podobnie $b_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{m-1} y_m$ będzie wobec (61) funkcją jednorodną

2-go stopnia zmiennych $p_0, p_1, \dots, p_4$, której współczynniki jako funkcje symetryczne pierwiastków równania (58) wyrażają się wymiennie przez jego współczynniki. Wreszcie, b_3 będzie funkcją jednorodną 3-go stopnia zmiennych $p_0, p_1, \dots, p_4$, której współczynniki wyrażają się wymiennie przez współczynniki równania (58).

Jeżeli więc ma być $b_1 = 0$, to otrzymamy na współczynniki $p_0, p_1, \dots, p_4$ równanie liniowe, z którego będzie można p_0 wyrazić liniowo i jednorodnie przez p_1, p_2, p_3 i p_4 . Jeżeli dalej ma być $b_2 = 0$, to otrzymamy na $p_1, p_2, \dots, p_4$ równanie jednorodne 2-go stopnia. Lecz, jak wiemy (Rozdział VIII, § 21, str. 149, tw. 34), wielomian jednorodny 2-go stopnia zmiennych p_1, p_2, p_3 i p_4 daje się przedstawić w postaci:

$$b_2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2,$$

gdzie P_1, P_2, P_3, P_4 są wielomianami liniowymi jednorodnymi zmiennych p_1, p_2, p_3, p_4 .

Jeżeli nie jest tożsamościowo $P_1 + iP_2 = 0$ (co wobec $P_1^2 + P_2^2 = (P_1 + iP_2)(P_1 - iP_2)$ dawałoby $P_1^2 + P_2^2 = 0$), to możemy z równania $P_1 + iP_2 = 0$ jedną z niewiadomych p_1, p_2, p_3, p_4 , np. p_1 , wyrazić liniowo i jednorodnie przez pozostałe. Podobnie, jeżeli nie jest tożsamościowo $P_3 + iP_4 = 0$ (co dawałoby $P_3^2 + P_4^2 = 0$), to możemy z równania $P_3 + iP_4 = 0$ jedną z niewiadomych p_2, p_3, p_4 , np. p_2 , wyrazić liniowo i jednorodnie przez pozostałe, t.j. przez p_3 i p_4 .

Ponieważ b_3 jest wielomianem jednorodnym 3-go stopnia względem zmiennych p_1, p_2, p_3 i p_4 , więc skoro wyraziliśmy już liniowo i jednorodnie p_1 przez p_2, p_3 i p_4 , a p_2 przez p_3 i p_4 , to b_3 jest wielomianem jednorodnym 3-go stopnia względem p_3 i p_4 . Jeżeli nie jest tożsamościowo $b_3 = 0$, to b_3 zależy od jednej co najmniej ze zmiennych p_3 i p_4 . Jeżeli np. b_3 zależy od p_3 , to przyjmujemy $p_4 = 1$ i wyznaczmy p_3 z równania (co najmniej 3-go stopnia) $b_3 = 0$.

Można więc wyznaczyć współczynniki $p_0, p_1, \dots, p_4$ podstawienia (61) tak, aby zachodziły wzory (62), przy czym nie wszystkie ze współczynników p_1, p_2, p_3, p_4 będą równe 0.

Zauważymy, że dla znalezienia pierwiastka z równania (58), odpowiadającego pierwiastkowi y równania (59) w myśl wzoru (61), nie potrzeba rozwiązywać równania (61) względem z , lecz można pierwiastek z wyrazić wymiennie przez pierwiastek y . Mianowicie, podnosząc (61) stronami do kolejnych potęg 1, 2, ..., $m-1$ i korzystając z równości (58), otrzymujemy dla y^k (przy $k = 1, 2, \dots, m-1$) wzory:

$$(63) \quad y^k = q_0^{(k)} + q_1^{(k)} z + q_2^{(k)} z^2 + \dots + q_{m-1}^{(k)} z^{m-1} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1),$$

gdzie $q_0^{(k)}, q_1^{(k)}, \dots, q_{m-1}^{(k)}$ są wielomianami względem współczynników $a_1, a_2, \dots, a_m$ oraz $p_0, p_1, \dots, p_4$. Rozwiązując układ $m-1$ równań liniowych (63) względem niewiadomych $z, z^2, \dots, z^m$ (a jest on rozwiązalny, gdyż dla każdego y^i , gdzie $i=1, 2, \dots, m$, istnieje odpowiednie z^i takie, iż $y^i = p_0 + p_1 z^i + p_2 z_i^2 + p_3 z_i^3 + p_4 z_i^4$), wyrazimy z jako wielomian względem $y, y^2, \dots, y^{m-1}$ o współczynnikach, wyrażających się wymiennie przez $a_1, a_2, \dots, a_m, p_0, p_1, \dots, p_4$.

Ostatecznie więc mamy

Twierdzenie 6. Rozwiązywanie równania m -go stopnia (58) daje się sprowadzić do rozwiązywania równania (59), w którym współczynniki przy y^{m-1}, y^{m-2} i y^{m-3} są równe zeru, przy czym wymaga to rozwiązania jednego tylko równania 4-go stopnia.

Jest to metoda *Tschirnhausena*.

W szczególności, na mocy twierdzenia 6 ogólne równanie 5-go stopnia daje się w ten sposób sprowadzić do postaci $y^5 + ry + s = 0$,

a jeśli przyjąć $y = \sqrt[4]{rt}$ i $a = s/\sqrt[4]{r^5}$, nawet do postaci $t^5 + t + a = 0$, a więc do równania 5-go stopnia o jednym tylko parametrze.

Jest to metoda *Jerrarda*.

Do przypadków szczególnych metody *Tschirnhausena* należy też sprowadzenie ogólnego równania 3-go stopnia do równania dwumienne. W tym celu przyjmujemy w równaniu (58) $m=3$, a we wzorze (62) $p_3 = p_4 = 0$, wreszcie wzory (61) zastępujemy przez $b_1 = 0$ i $b_2 = 0$. Jak wyżej, z równania $b_1 = 0$ wyrazimy p_0 liniowo i jednorodnie przez p_1 i p_2 , zaś b_2 , o ile nie jest tożsamościowo zerem, jest wielomianem jednorodnym 2-go stopnia względem p_1 i p_2 ; równanie $b_2 = 0$ jest więc 2-go stopnia względem p_1 i p_2 .

Można też stosować metodę *Tschirnhausena* w celu sprowadzenia równania 4-go stopnia do równania 3-go stopnia. W tym celu należy przyjąć w równaniu (58) $m=4$, we wzorze (62) $p_4 = 0$, wreszcie wzory (61) zastąpić przez wzory $b_1 = 0$ i $b_3 = 0$.

ROZDZIAŁ XI

RÓWNANIA PODZIAŁU KOŁA

§ 1. Równania $z^n - 1 = 0$ dla $n \leq 6$. Równaniem podziału koła nazywamy równanie postaci

$$(1) \quad z^n - 1 = 0,$$

gdzie z jest zmienną zespoloną, a n dowolnie daną liczbą naturalną. W Rozdziale VI, § 8, zajmowaliśmy się ogólnym rozwiązywaniem tego równania za pomocą funkcji trygonometrycznych. Obecnie zajmiemy się algebraicznym rozwiązywaniem tego równania dla niektórych wartości wykładnika n .

Dla $n=2$ pierwiastkami równania (1) są liczby 1 i -1 , dla $n=3$ liczby:

$$1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

a dla $n=4$ liczby:

$$1, \quad -1, \quad i \quad \text{oraz} \quad -i.$$

Przejdziemy więc do przypadków $n > 4$.

Równanie $z^5 = 1$. Ponieważ

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1),$$

więc pierwiastki równania $z^5 = 1$, różne od 1, spełniają równanie

$$(2) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

i na odwrót.

Założmy, że liczba zespolona z jest pierwiastkiem równania (1). Jest więc $z \neq 0$. Niechaj:

$$(3) \quad u = z + \frac{1}{z},$$

skąd:

$$(4) \quad u^2 = z^2 + z^{-2} + 2.$$