ROZDZIAŁ IX

WIELOMIANY SYMETRYCZNE

§ 1. Funkcje symetryczne podstawowe. Funkcję n zmiennych $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywamy *symetryczną* względem tych zmiennych, jeżeli nie zmienia swej wartości przy dowolnej permutacji zmiennych.

Zajmiemy się tutaj tylko wielomianami n zmiennych, symetrycznymi względem tych zmiennych.

Rozwijając wielomian:

$$W(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \tag{1}$$

według potęg zmiennej x, otrzymujemy wyrażenie:

$$W(x) = x^n - p_1^{(n)} x^{n-1} + p_2^{(n)} x^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n^{(n)}, \tag{2}$$

gdzie

$$\begin{aligned} p_1^{(n)} &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ p_2^{(n)} &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n^{(n)} &= x_1 x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Funkcje $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są oczywiście symetryczne względem tych zmiennych.

Są to t. zw. *funkcje symetryczne podstawowe.*

§ 2. Niezależność algebraiczna funkcyj symetrycznych podstawowych. Jeżeli $W_1, W_2, \ldots, W_m$ są wielomianami lub, ogólniej, jakimikolwiek funkcjami n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to mówimy, że istnieje między nimi *zależność algebraiczna* (albo że są *współzależne algebraicznie*), jeżeli istnieje wielomian m zmiennych $W(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, nie będący tożsamościowo zerem i spełniający dla wszelkich wartości zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ związek:

$$W(W_1, W_2, \ldots, W_m) = 0.$$

Więc np. między trzema wielomianami dwóch zmiennych:

$$x+y, \qquad x-y, \qquad xy$$

istnieje zależność algebraiczna, gdyż wielomian:

$$W(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 4y_3$$

nie jest tożsamościowo zerem, natomiast dla wszelkich x i y mamy:

$$W(x+y, x-y, xy) = 0.$$

Przykładem funkcyj współzależnych są też funkcje $\sin x$ i $\cos x$, gdyż wielomian $W(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 - 1$ nie jest tożsamościowo zerem, a przy wszelkim x jest $W(\sin x, \cos x) = 0$ [1]).

Twierdzenie 1. *Przy wszelkim naturalnym n wielomiany $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$, określone wzorami (3), są algebraicznie niezależne.*

Dowód. Przypuśćmy, że między wielomianami $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$ istnieje zależność algebraiczna. Istnieje więc wielomian n zmiennych $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, nie będący tożsamościowo zerem i taki, że przy wszelkich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest:

$$(4) \qquad W(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}) = 0.$$

Skoro wielomian W nie jest tożsamościowo zerem, istnieją takie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, iż:

$$(5) \qquad W(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Wielomian $x^n - a_1x^{n-1} + a_1x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$ rozklada się — jak wiemy (ob. Rozdział VIII, § 11, str. 124, twierdzenie 16) na n czynników liniowych $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

---

[1]) W zakresie funkcyj zmiennej rzeczywistej tak określona współzależność algebraiczna byłaby pojęciem zbyt szerokim. Gdybyśmy np. mając dowolny zbiór Z liczb rzeczywistych, określili funkcję zmiennej rzeczywistej $f(x)$, przyjmując:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \text{ należących do zbioru } Z, \\ x & \text{dla } x \text{ nie należących do } Z, \end{cases}$$

to funkcje $f(x)$ i $g(x) = x$ byłyby współzależne algebraicznie, gdyż jest tożsamościowo $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 0$.

Za $f(x)$ możnaby wziąć np. funkcję niemierzalną.

Biorąc liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za wartości zmiennych w wielomianach $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$, będziemy mieli dla tych wartości zmiennych (ob. wzór (41), str. 126):

$$p_1^{(n)} = a_1, \qquad p_2^{(n)} = a_2, \qquad \ldots, \qquad p_n^{(n)} = a_n,$$

co wobec tożsamości (4) i nierówności (5) daje sprzeczność. Wielomiany $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$ nie mogą więc być współzależne algebraicznie, c. b. d. o.

§ 3. Zasadnicze twierdzenie o wielomianach symetrycznych. Dowód Cauchy'ego. Mamy następujące zasadnicze

Twierdzenie 2. *Każdy wielomian n zmiennych, symetryczny względem tych zmiennych, daje się przedstawić jako wielomian funkcyj podstawowych tych zmiennych, którego współczynniki są wielomianami współczynników danego wielomianu.*

Dowód. Dla $n=1$ twierdzenie jest oczywiste. Niech więc $n>1$ i załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wielomianów $n-1$ zmiennych. Niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznacza wielomian n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, symetryczny względem tych zmiennych. Uporządkujmy go według potęg zmiennej x_n. Otrzymamy:

$$(6) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_0x_n^m + A_1x_n^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x_n + A_m,$$

gdzie $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ są wielomianami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, symetrycznymi względem tych zmiennych, dającymi się zatem, w myśl założenia, przedstawić jako wielomiany funkcyj podstawowych tych zmiennych czyli funkcyj $p_1^{(n-1)}, p_2^{(n-1)}, \ldots, p_{n-1}^{(n-1)}$ o współczynnikach będących wielomianami współczynników wielomianów $A_0, A_1, \ldots, A_m$, a więc też współczynników wielomianu f.

Lecz w myśl wzorów (3) znajdujemy z łatwością:

$$p_1^{(n)} = p_1^{(n-1)} + x_n \qquad p_k^{(n)} = p_k^{(n-1)} + p_{k-1}^{(n-1)}x_n \qquad \text{dla } k=2,3,\ldots,n-1,$$

skąd:

$$p_1^{(n-1)} = p_1^{(n)} - x_n, \qquad p_k^{(n-1)} = p_k^{(n)} - p_{k-1}^{(n-1)}x_n \qquad \text{dla } k=2,3,\ldots,n-1,$$

co pozwala kolejno wyrazić $p_1^{(n-1)}, p_2^{(n-1)}, \ldots, p_{n-1}^{(n-1)}$ jako wielomiany względem zmiennych x_n i $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_{n-1}^{(n)}$ o współczynnikach całkowitych.

Ostatecznie więc przedstawimy $A_0, A_1, \ldots, A_m$ jako wielomiany względem zmiennych x_n i $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_{n-1}^{(n)}$ o współczynnikach, będących wielomianami współczynników wielomianu f. Wstawiając te wyrażenia dla $A_0, A_1, \dots, A_m$ do wzoru (6), przedstawimy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jako wielomian względem zmiennych x_n i $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_{n-1}^{(n)}$ o współczynnikach, będących wielomianami współczynników wielomianu f. Dzieląc $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x)$, jako wielomian względem x, przez wielomian (1) w postaci (2), otrzymamy wobec (2):

$$(7) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) = W(x)Q(x) + R(x),$$

gdzie $Q(x)$ i $R(x)$ są wielomianami względem x, których współczynniki przy kolejnych potęgach x są wielomianami względem $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}$, których współczynniki są z kolei wielomianami współczynników wielomianu f zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$; przy tym $R(x)$ jest względem x wielomianem stopnia mniejszego niż $W(x)$, zatem mniejszego niż n. Lecz wobec (1) jest $W(x_n) = 0$, skąd wobec (7):

$$(8) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = R(x_n) = B_0 x_n^{n-1} + B_1 x_n^{n-2} + \dots + B_{n-1},$$

gdzie $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ są wielomianami względem $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}$, których współczynniki są wielomianami współczynników wielomianu f.

Lewa strona wzoru (8) jest funkcją symetryczną zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, podobnie jak współczynniki $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$. Prawa strona wzoru (8) nie zmieni więc swej wartości, jeżeli zamienimy x_n z którąkolwiek ze zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Załóżmy, że $x_1, x_2, \dots, x_n$ są jakimikolwiek różnymi liczbami. Wielomian $B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \dots + B_{n-1}$ przybierze więc tę samą wartość dla n różnych liczb $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, skąd wnosimy na podstawie twierdzenia 18 Rozdziału VIII (§ 11, str. 124), że jest on niezależny od x, czyli że redukuje się do wyrazu B_{n-1}, wolnego od x. Jest więc wobec (8):

$$(9) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_{n-1}$$

dla każdego układu n różnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$. Obie strony wzoru (9) są funkcjami ciągłymi (wielomianami) zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Równość (9), udowodniona dotąd dla wszystkich układów n różnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, zachodzi więc dla każdego układu liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ponieważ B_{n-1} jest wielomianem względem $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}$ o współczynnikach będących wielomianami współczynników wielomianu f, więc twierdzenie jest prawdziwe dla n zmiennych.

Twierdzenie 2 zostało w ten sposób udowodnione przez indukcję dla każdej (skończonej) liczby zmiennych.

Dowód ten pochodzi od Cauchy'ego.

§ 4. Dowód Waringa. Podamy tu jeszcze inny dowód twierdzenia 2 (str. 159), pochodzący od Waringa.

Niech $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznacza wielomian n zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$, symetryczny względem tych zmiennych. Jest on więc sumą skończonej liczby jednomianów postaci $A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są to liczby całkowite nieujemne. Niech g oznacza liczbę naturalną większą od każdego z wykładników $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ w jednomianach, których sumą jest $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Podstawmy:

$$(10) \qquad x_1 = x, \quad x_2 = x^g, \quad x_3 = x^{g^2}, \quad \dots, \quad x_n = x^{g^{n-1}}.$$

Wielomian $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ przejdzie po podstawieniu (10) na wielomian $F(x)$ jednej zmiennej x, zaś składnik $A x^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ wielomianu f przejdzie na składnik

$$(11) \qquad A x^{\alpha_1 + \alpha_2 g + \alpha_3 g^2 + \dots + \alpha_n g^{n-1}}$$

wielomianu F. Możemy zawsze założyć, że w wielomianie f niema wyrazów podobnych. Niema ich więc również w wielomianie F, gdyż każda liczba całkowita nieujemna ma jedno i tylko jedno rozwinięcie według zasady g.

Niech w szczególności (11) oznacza składnik wielomianu F, zawierający x w najwyższej potędze. Dla skrócenia przyjmijmy:

$$(12) \qquad p_1 = p_1^{(n)}, \quad p_2 = p_2^{(n)}, \quad \dots, \quad p_n = p_n^{(n)},$$

gdzie $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}$ są funkcjami wyznaczonymi przez wzory (3). Po zastosowaniu do funkcyj (12) podstawień (10) staną się one oczywiście wielomianami względem x, odpowiednio stopni:

$$g^{n-1}, \quad g^{n-1} + g^{n-2}, \quad \dots, \quad g^{n-1} + g^{n-2} + \dots + g + 1,$$

skąd wynika, że wyrażenie

$$A p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

będzie po zastosowaniu podstawień (10) wielomianem względem x stopnia:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\beta_1 g^{n-1} + \beta_2 (g^{n-1} + g^{n-2}) + \dots + \beta_n (g^{n-1} + g^{n-2} + \dots + g + 1) = \\ &= \beta_n + (\beta_n + \beta_{n-1}) g + \dots + (\beta_n + \beta_{n-1} + \dots + \beta_1) g^{n-1}. \end{aligned}$$

W szczególności przyjmijmy:

$$\beta_n = \alpha_1 \quad \text{i} \quad \beta_{n-k} = \alpha_{k+1} - \alpha_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Wyrażenie (13) będzie więc równe:

$$\alpha_1 + \alpha_2 g + \ldots + \alpha_n g^{n-1},$$

czyli stopniowi wielomianu F.

Wnosimy stąd, że jeżeli w wielomianie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A p_1^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} p_2^{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}} \ldots p_{n-1}^{\alpha_2 - \alpha_1} p_n^{\alpha_1}$$

dokonamy podstawień (10), to otrzymamy wielomian F_1 zmiennej x, który będzie stopnia niższego niż wielomian F, gdyż wyraz z najwyższą potęgą x wielomianu F ulegnie redukcji.

Rozumowanie to możemy oczywiście powtarzać, dopóki nie otrzymamy wielomianu F_m niezależnego od x, czyli stałej. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest sumą skończonej liczby składników postaci $A p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n}$, skąd już z łatwością wynika prawdziwość twierdzenia 2.

Posługując się podstawieniami (10), można łatwo uzupełnić twierdzenie 2 przez następujące

Twierdzenie 3. *Każdy wielomian n zmiennych daje się w jeden tylko sposób przedstawić jako wielomian funkcyj podstawowych tych zmiennych.*

Można je jednak jeszcze prościej wysnuć z twierdzenia 1. Istotnie, przypuśćmy, że wielomian $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, symetryczny względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, daje się przedstawić w dwa sposoby jako wielomian względem funkcyj podstawowych tych zmiennych

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}) = Q(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}).$$

Gdyby nie było tożsamościowo:

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Q(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

to między wielomianami $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$ istniałaby zależność algebraiczna:

$$P(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}) - Q(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}) = 0,$$

wbrew twierdzeniu 1. Wielomiany P i Q nie mogą więc być różne, c. b. d. o.

§ 5. Wzory Newtona. Ważnym przypadkiem szczególnym funkcyj symetrycznych n zmiennych są sumy jednakowych potęg tych zmiennych, t. j. wyrażenia typu:

$$s_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m. \tag{14}$$

Wyprowadzimy dla nich t.zw. *wzory Newtona.*

Zróżniczkujmy wielomian (1); w myśl wzoru na pochodną iloczynu (ob. str. 106) znajdziemy dla x różnego od każdej z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x - x_1} + \frac{W(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{W(x)}{x - x_n}. \tag{15}$$

Wobec (1) mamy $W(x_k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$; zatem:

$$\frac{W(x)}{x - x_k} = \frac{W(x) - W(x_k)}{x - x_k} \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Lecz wobec (2) i (12):

$$W(x) - W(x_k) = x^n - x_k^n - p_1(x^{n-1} - x_k^{n-1}) + \ldots + (-1)^{n-1} p_{n-1}(x - x_k),$$

skąd na mocy tożsamości

$$x^r - x_k^r = (x - x_k)(x^{r-1} + x_k x^{r-2} + \ldots + x_k^{r-1})$$

otrzymujemy:

$$\frac{W(x) - W(x_k)}{x - x_k} = x^{n-1} + (x_k - p_1) x^{n-2} + (x_k^2 - p_1 x_k + p_2) x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (x_k^{n-1} - p_1 x_k^{n-2} + p_2 x_k^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} p_{n-1}).$$

Ze wzorów (16), (15) i (14) wynika dla $x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} W'(x) = n x^{n-1} &+ (s_1 - n p_1) x^{n-2} + (s_2 - p_1 s_1 + n p_2) x^{n-3} + \ldots \\ &\ldots + (s_{n-1} - p_1 s_{n-2} + p_2 s_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} n p_{n-1}). \end{aligned} \tag{17}$$

Lecz z drugiej strony, wobec (2) i (12):

$$W'(x) = n x^{n-1} - (n-1) p_1 x^{n-2} + (n-2) p_2 x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} p_{n-1}. \tag{18}$$

Prawe strony wzorów (17) i (18) są więc sobie równe co najmniej dla każdej różnej od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wartości x, a więc w każdym razie dla więcej niż $n-1$ różnych wartości x. Jako wielomiany stopnia $n-1$ muszą one zatem (ob. Rozdział VIII, § 11, str. 124, tw. 18) być równe tożsamościowo, skąd, przyrównywując po obu stronach współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej x, otrzymujemy *wzory Newtona*:

$$s_1 - p_1 = 0,$$
$$s_2 - p_1 s_1 + 2p_2 = 0,$$
$$s_3 - p_1 s_2 + p_2 s_1 - 3p_3 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$s_{n-1} - p_1 s_{n-2} + p_2 s_{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} p_{n-2} s_1 + (-1)^{n-1}(n-1) p_{n-1} = 0.$$

Ze wzorów tych obliczamy kolejno [1]):

$$\begin{aligned}
s_1 &= p_1,\\
s_2 &= p_1 s_1 - 2p_2 = p_1^2 - 2p_2,\\
s_3 &= p_1 s_2 - p_2 s_1 + 3p_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3,\\
s_4 &= p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2 - 4p_4,\\
s_5 &= p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1^2 p_3 + 5p_1 p_2^2 - 5p_1 p_4 - 5p_2 p_3 + 5p_5,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Dla sum s_k, gdzie k jest jedną z liczb $1, 2, \dots, n$, można też podać wzór bezpośredni:

$$s_k = \sum^{*} (-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\dots}\, k\, \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\dots\lambda_n!}\, p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n},$$

gdzie sumowanie $\sum^{*}$ rozciąga się na wszystkie układy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ liczb całkowitych nieujemnych, dla których $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = k$ [2]). Więc np. ze wzoru tego z łatwością znajdujemy:

$$\begin{aligned}
s_7 = p_1^7 - 7p_1^5 p_2 + 7p_1^4 p_3 - 7p_1^3 p_4 + 7p_1^2 p_5 - 7p_1 p_6 + 7p_7 + 7p_2^2 p_3 - 7p_2 p_5 - 7p_3 p_4 +\\
+ 14p_1^3 p_2^2 - 21p_1^2 p_2 p_3 + 14p_1 p_2 p_4 - 7p_1 p_2^3 + 7p_1 p_3^2.
\end{aligned}$$

Sumy $s_n, s_{n+1}, \dots$ obliczamy w następujący sposób. Wobec (1), (2) i (12) mamy dla $k = 1, 2, \dots, n$ oraz dla $r = 0, 1, 2, \dots$:

$$x_k^r W(x_k) = x_k^{n+r} - p_1 x_k^{n+r-1} + p_2 x_k^{n+r-2} - \dots + (-1)^n p_n x_k^r = 0,$$

[1]) W przykładzie 6 Rozdziału III, § 3 (str. 43) podaliśmy sposób przedstawienia sum s_k (dla $k = 1, 2, \dots, n-1$) za pomocą wyznaczników.

[2]) Wzór ten (nieco inaczej napisany) wyprowadza M. Domeczky w Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Tom 152 (1910), str. 37-40. Por. też B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, Berlin 1937, str. 86, zadanie 4.

skąd, sumując dla $k = 1, 2, \dots, n$, otrzymujemy wobec (14):

$$s_{n+r} - p_1 s_{n+r-1} + p_2 s_{n+r-2} - \dots + (-1)^n p_n s_r = 0 \qquad \text{dla } r = 0, 1, 2, \dots,$$

zatem:

$$\begin{aligned}
s_n &= p_1 s_{n-1} - p_2 s_{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} p_{n-1} s_1 + (-1)^{n-1} n p_n,\\
s_{n+1} &= p_1 s_n - p_2 s_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} p_n s_1 \qquad \text{i t. d.}
\end{aligned}$$

Wzory te pozwalają obliczać sumy $s_n, s_{n+1}, \dots$, gdy znamy już sumy $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$.

Jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są wszystkie różne od 0, to sumy (14) są określone dla ujemnych całkowitych wykładników m.

Pokażemy, jak można je wyrazić przez funkcje symetryczne podstawowe.

Niech $y_k = \dfrac{1}{x_k}$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Oznaczmy przez $q_1, q_2, \dots, q_n$ funkcje symetryczne podstawowe zmiennych $y_1, y_2, \dots, y_n$. Wobec (14) będzie więc dla $m = -r$, gdzie r jest liczbą naturalną:

$$s_m = y_1^r + y_2^r + \dots + y_n^r$$

i będziemy mogli wyrazić s_m jako wielomian względem $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Wobec $y_k = \dfrac{1}{x_k}$ mamy jednak:

$$q_j = \frac{p_{n-j}}{p_n} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n-1 \qquad \text{oraz} \qquad q_n = \frac{1}{p_n}.$$

Będziemy więc ostatecznie mogli wyrazić s_m jako wielomian względem $p_1/p_n,\ p_2/p_n,\ \dots,\ p^{n-1}/p_n,\ 1/p_n$.

Podamy jeszcze sposób bezpośredniego obliczania sum (14). Wobec (17) mamy oczywiście:

$$\begin{aligned}
(nx^{n-1} + s_1 x^{n-2} + s_2 x^{n-3} + \dots + s_{n-2} x + s_{n-1})(x^n - p_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n p_n) =\\
= nx^{2n-1} + (s_1 - np_1) x^{2n-2} + (s_2 - p_1 s_1 + np_2) x^{2n-3} + \dots\\
\dots + (s_{n-1} - p_1 s_{n-2} + p_2 s_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} n p_{n-1}) x^n + R(x) =\\
= x^n W'(x) + R(x),
\end{aligned}$$

gdzie $R(x)$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż n. Wynika stąd, że wielomian

$$nx^{n-1} + s_1 x^{n-2} + s_2 x^{n-3} + \dots + s_{n-2} x + s_{n-1}$$

jest częścią całkowitą ilorazu z dzielenia wielomianu $x^n W'(x)$ przez wielomian $W(x)$. W ten sposób sumy $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ mogą być znalezione za pomocą zwykłego dzielenia wielomianów.

Zauważymy wreszcie, że wzory Newtona pozwalają wyrazić funkcje symetryczne podstawowe $p_1, p_2, \dots, p_n$ przez sumy $s_1, s_2, \dots, s_n$. Mianowicie ze wzorów tych obliczamy kolejno:

$$p_1 = s_1, \qquad 2p_2 = s_1^2 - s_2, \qquad 3!p_2 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Ogólnie, $k!p_k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$ będzie wielomianem względem $s_1, s_2, \dots, s_k$ o współczynnikach całkowitych [1]).

W następującej tablicy podane są wartości funkcyj symetrycznych pierwszych pięciu stopni pierwiastków równania $x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = 0$ [2]). Występujące w tej tablicy symbole $\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ i podobne oznaczają sumę $\sum x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} x_{i_3}^{\alpha_3}$ rozciągniętą na wszystkie układy trzech różnych liczb i_1, i_2, i_3 nie mniejszych od n.

I. $\sum x_1 = -b.$

II. $\sum x_1^2 = b^2 - 2c,$
$\sum x_1 x_2 = c.$

III. $\sum x_1^3 = -b^3 + 3bc - 3d,$
$\sum x_1^2 x_2 = -bc + 3d,$
$\sum x_1 x_2 x_3 = -d.$

IV. $\sum x_1^4 = b^4 - 4b^2c + 2c^2 + 4bd - 4e,$
$\sum x_1^3 x_2 = b^2c - 2c^2 - bd + 4e,$
$\sum x_1^2 x_2^2 = c^2 - 2bd + 2e,$
$\sum x_1^2 x_2 x_3 = bd - 4e,$
$\sum x_1 x_2 x_3 x_4 = e.$

V. $\sum x_1^5 = -b^5 + 5b^3c - 5bc^2 - 5b^2d + 5cd + 5be - 5f,$
$\sum x_1^4 x_2 = -b^3c + 3bc^2 + b^2d - 5cd - be + 5f,$
$\sum x_1^3 x_2^2 = -bc^2 + 2b^2d + cd - 5be + 5f,$
$\sum x_1^3 x_2 x_3 = -b^2d + 2cd + be - 5f,$
$\sum x_1^2 x_2^2 x_3 = -cd + 3be - 5f,$
$\sum x_1^2 x_2 x_2 x_4 = -be + 5f,$
$\sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = -f.$

[1]) W przykładzie 6 Rozdziału III, § 3 (str. 44) podaliśmy wyrażenie dla p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) za pomocą wyznaczników.

[2]) G. Salmon, *Leçons d'Algèbre Supérieure*, 2-e wyd. franc., Paryż 1890, str. 504. Tamże na str. 504-513 podane są wartości funkcyj symetrycznych aż do 10 stopnia.

Dla funkcyj symetrycznych wyższych stopni wzory są bardziej skomplikowane. Np.:

$$\sum x_1^{10} = b^{10} - 10b^8c + 35b^6c^2 - 50b^4c^3 + 25b^2c^4 - 2c^5 + 10b^7d - 60b^5cd + 100b^3c^2d -$$
$$- 40bc^3d + 25b^4d^2 - 60b^2cd^2 + 15c^2d^2 + 10bd^3 - 10b^6e + 50b^4ce - 60b^2c^2e +$$
$$+ 10c^3e - 40b^3de + 60bcde - 10d^2e + 15b^2e^2 - 10ce^2 + 10b^5f - 40b^3cf +$$
$$+ 30bc^2f + 30b^2df - 20cdf - 20bef + 5f^2 - 10b^4g + 30b^2cg - 10c^2g - 20bdg +$$
$$+ 10eg + 10b^3h - 20bch + 10dh - 10b^2i + 10ci + 10bj - 10k \;{}^{1})\text{.}$$

$$\sum x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4^2 = ce^2 - 2cdf - bef + 5f^2 + 2c^2g + 3bdg - 9eg - 7bch + 6dh + 7b^2i + ci -$$
$$- 15bj + 15k \;{}^{2})\text{.}$$

§ 6. Wyróżnik równania.

§ 6. Wyróżnik równania. Niech

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{19}$$

będzie danym równaniem, przy czym $a_0 \neq 0$, i niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ oznaczają wszystkie jego pierwiastki, niekoniecznie różne między sobą. Utwórzmy dla każdego pierwiastka różnice między nim a wszystkimi $n-1$ pozostałymi pierwiastkami, a więc różnice:

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)$$
$$(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Iloczyn D tych wszystkich $n(n-1)$ różnic jest funkcją symetryczną pierwiastków równania (19), a więc w myśl twierdzenia 2 jest wielomianem funkcyj podstawowych:

$$p_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad p_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad p_3 = -\frac{a_3}{a_0}, \quad \dots, \quad p_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Wielomian ten (względem a_1/a_0, a_2/a_0, ..., a_n/a_0) nazywamy *wyróżnikiem (dyskryminantą)* równania (19).

Czynniki iloczynu D możemy połączyć w pary, zaliczając do jednej pary czynniki różniące się tylko znakiem, a więc np. $x_1 - x_2$ oraz $x_2 - x_1$, ogólnie $(x_\alpha - x_\beta)$ oraz $(x_\beta - x_\alpha)$. Par takich mamy oczywiście $\frac{n(n-1)}{2}$. Ponieważ $(x_\alpha - x_\beta)(x_\beta - x_\alpha) = -(x_\alpha - x_\beta)^2 = -(x_\beta - x_\alpha)^2$, więc mamy też

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\alpha \neq \beta} (x_\alpha - x_\beta)^2,$$

[1]) tamże, str. 509.

[2]) tamże, str. 512.

gdzie iloczyn $\prod\limits_{\alpha \neq \beta}$ rozciąga się na wszystkie $\frac{n(n-1)}{2}$ kombinacyj dwóch różnych liczb ciągu $1, 2, \ldots, n$. Tak np. dla $n=2$ jest $D=-(x_1-x_2)^2$; dla $n=3$ jest $D=-(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$; dla $n=4$ jest $D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2$.

Znaczenie wyrażenia D tłumaczy następujące oczywiste

Twierdzenie 4. *Na to, żeby wszystkie pierwiastki równania* (19) *były różne, potrzeba i wystarcza, żeby jego wyróżnik był różny od zera.*

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć wyróżnik D równania (19) dla $n=2$.

Odp.: $D=\dfrac{4a_0a_2-a_1^2}{a_0^2}$.

2. Obliczyć wyróżnik D równania (19) dla $n=3$.

Odp.: $D=-\dfrac{a_1^2a_2^2}{a_0^4}+\dfrac{4a_1^3a_3}{a_0^4}+\dfrac{4a_2^3}{a_0^3}-\dfrac{18a_1a_2a_3}{a_0^3}+\dfrac{27a_3^2}{a_0^2}$.

ROZDZIAŁ X.

RÓWNANIA DRUGIEGO, TRZECIEGO I CZWARTEGO STOPNIA

§ 1. Równania 2-go stopnia. Ogólna postać równania 2-go stopnia, zwanego też równaniem *kwadratowym*, jest następująca:

$$a_0z^2+a_1z+a_2=0, \tag{1}$$

gdzie a_0, a_1 i a_2 są danymi liczbami zespolonymi, przy czym $a_0 \neq 0$.

Łatwo sprawdzić, że przy wszelkim zespolonym z::

$$a_0z^2+a_1z+a_2=a_0\left(z+\frac{a_1}{2a_0}\right)^2+a_2-\frac{a_1^2}{4a_0}. \tag{2}$$

Równanie (1) jest więc równoważne równaniu

$$a_0\left(z+\frac{a_1}{2a_0}\right)^2=\frac{a_1^2-4d_0a_2}{4a_0}. \tag{3}$$

Oznaczmy przez $\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}$ którykolwiek z pierwiastków 2-go stopnia z liczby $a_1^2-4a_0a_2$. Na to, żeby liczba zespolona z spełniała równanie (3), oczywiście potrzeba i wystarcza, iżby było

$$z+\frac{a_1}{2a_0}=\frac{\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0} \quad \text{czyli}$$

$$z=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}. \tag{4}$$

Wzór (4) daje więc wszystkie rozwiązania równania (1). Rozróżnimy następnie dwa przypadki:

1° $a_1^2-4a_0a_2=0$. Wzór (4) daje jedną tylko wartość $z=-\dfrac{a_1}{2a_0}$.

Równanie (1) ma wtedy tylko jeden pierwiastek, wyrażający się wymiernie przez współczynniki równania (1), a więc wymierny, gdy są one wymierne, i rzeczywisty, gdy są rzeczywiste.