ROZDZIAŁ VII

DOWÓD ZASADNICZEGO TWIERDZENIA ALGEBRY

§ 1. Lemat Gaussa. *Niech* $f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m$ *będzie wielomianem m-go stopnia* $(m\geqslant 1)$ *o współczynnikach zespolonych, gdzie* $a_0\neq 0$. *Jeżeli dla danej liczby zespolonej* z_0 *jest* $f(z_0)\neq 0$, *to istnieje liczba zespolona z taka, iż* $|f(z)|<|f(z_0)|$.

Dowód. Załóżmy, że dla danej liczby zespolonej z_0 jest

$$f(z_0)\neq 0. \tag{1}$$

Rozwijając $f(z_0+h)$ według rosnących potęg h, otrzymamy jak łatwo widzieć:

$$f(z_0+h)=b_0+b_1h+b_2h^2+\ldots+b_mh^m, \tag{2}$$

gdzie

$$b_0=a_0z_0^m+a_1z_0^{m-1}+\ldots+a_m=f(z_0); \tag{3}$$

zatem w myśl (1):

$$b_0\neq 0, \tag{4}$$

oraz, jak łatwo obliczyć, $b_m=a_0$, skąd wobec założenia, że $a_0\neq 0$

$$b_m\neq 0. \tag{5}$$

Wśród współczynników

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$$

istnieje więc co najmniej jeden różny od zera: niech b_k oznacza pierwszy z nich (będzie więc $1\leqslant k\leqslant m$). Wzór (2) będziemy mogli przepisać w postaci

$$f(z_0+h)=b_0+b_kh^k+b_{k+1}h^{k+1}+\ldots+b_mh^m. \tag{6}$$

Niech

$$c=-\frac{b_0|b_k|}{b_k|b_0|}.$$

Jest to więc pewna liczba zespolona. W myśl tw. 5 Rozdziału VI (§ 7, str. 94), istnieje co najmniej jeden pierwiastek stopnia k z liczby c. Oznaczmy przez α jeden z nich. Jest więc

$$\alpha^k=-\frac{b_0|b_k|}{b_k|b_0|}, \tag{7}$$

skąd w jednej chwili $|\alpha|^k=|\alpha^k|=1$, co z uwagi na to, że moduł jest liczbą rzeczywistą nieujemną, daje

$$|\alpha|=1. \tag{8}$$

Oznaczmy dalej przez ϱ liczbę dodatnią, spełniającą nierówności:

$$\varrho<1,\quad \varrho<\left|\frac{b_0}{b_k}\right|,\quad \varrho<\frac{|b_k|}{|b_{k+1}|+|b_{k+2}|+\ldots+|b_m|} \tag{9}$$

(odrzucając trzecią z nich w razie gdy $k=m$). Przyjmijmy wreszcie

$$h=\varrho\alpha. \tag{10}$$

Wzór (6) daje w myśl tw. 2 Rozdziału VI (§ 5, str. 91) o module sumy:

$$|f(z_0+h)|\leqslant|b_0+b_kh^k|+|b_{k+1}h^{k+1}+b_{k+2}h^{k+2}+\ldots+b_mh^m|. \tag{11}$$

Lecz w myśl (10) i (7):

$$b_0+b_kh^k=b_0+b_k\varrho^k\alpha^k=b_0\left(1-\left|\frac{b_k}{b_0}\right|\varrho^k\right), \tag{12}$$

zaś wobec (9):

$$1-\left|\frac{b_k}{b_0}\right|\varrho^k\geqslant 1-\left|\frac{b_k}{b_0}\right|\varrho>0,$$

zatem wobec (12):

$$|b_0+b_kh^k|=|b_0|\left(1-\left|\frac{b_k}{b_0}\right|\varrho^k\right)=|b_0|-|b_k|\varrho^k. \tag{13}$$

Dalej, wobec (10) i (8) jest w myśl twierdzenia o module sumy:

$$|b_{k+1}h^{k+1}+b_{k+2}h^{k+2}+\ldots+b_mh^m|\leqslant$$
$$\leqslant|b_{k+1}|\cdot|h^{k+1}|+\ldots+|b_m|\cdot|h^m|=|b_{k+1}|\varrho^{k+1}+\ldots+|b_m|\varrho^m,$$

skąd wobec (9):

$$|b_{k+1}h^{k+1}+\ldots+b_mh^m|\leqslant\varrho^{k+1}(|b_{k+1}|+\ldots+|b_m|)<\varrho^k|b_k|. \tag{14}$$

Wobec (11), (13) i (14) jest więc $|f(z_0+h)|<(|b_0|-|b_k|\varrho^k)+|b_k|\varrho^k$, czyli $|f(z_0+h)|<|b_0|$, zatem wobec (3) jest dla $z=z_0+h$

$$|f(z)|<|f(z_0)|.$$

Tym samym lemat Gaussa został dowiedziony.

§ 2. Zasadnicze twierdzenie Algebry. *Każdy wielomian m-go stopnia ($m\geqslant 1$) o współczynnikach zespolonych posiada co najmniej jeden pierwiastek zespolony.*

Dowód. Niech

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m \tag{15}$$

będzie wielomianem m-go stopnia ($m\geqslant 1$) o współczynnikach zespolonych, gdzie $a_0\neq 0$. Istnieje liczba R, taka iż

$$R>2 \quad \text{oraz} \quad R>2\frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_m|}{|a_0|}. \tag{16}$$

Wobec (16) będzie $|z|>1$ dla $|z|>R$, zatem:

$$|a_1z^{m-1}+a_2z^{m-2}+\ldots+a_m|\leqslant(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_m|)\cdot|z|^{m-1}. \tag{17}$$

Wobec (15) i (17) mamy więc:

$$\begin{aligned}|f(z)|&\geqslant|a_0z^m|-|a_1z^{m-1}+a_2z^{m-2}+\ldots+a_m|\geqslant\\&\geqslant|a_0z^m|-(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_m|)\cdot|z^{m-1}|=\\&=|a_0z^m|\left(1-\frac{|a_1|+\ldots+|a_m|}{|a_0|\cdot|z|}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Lecz wobec (16) mamy dla $|z|>R$:

$$\frac{|a_1|+\ldots+|a_m|}{|a_0|\cdot|z|}<\frac{1}{2}$$

i wzór (18) daje $|f(z)|>\frac{1}{2}|a_0z^m|$, co z uwagi na to, że w myśl (16) mamy $|z|>R>2$, daje dla $|z|>R$ nierówność $|f(z)|>\frac{1}{2}|a_0|\cdot|z|>\frac{1}{2}|a_0|\cdot R>|a_m|$, gdyż wobec (16):

$$R>2|a_m|/|a_0|.$$

Jest więc:

$$|f(z)|>|a_m| \quad \text{dla} \quad |z|>R. \tag{19}$$

Niech teraz g oznacza kres dolny liczb $|f(z)|$ dla $|z|\leqslant R$. Wobec $f(0)=a_m$ jest:

$$0\leqslant g\leqslant|a_m|. \tag{20}$$

Wobec (15) mamy dla $z=x+iy$:

$$f(z)=a_0(x+iy)^m+a_1(x+iy)^{m-1}+\ldots+a_m=P(x,y)+iQ(x,y),$$

gdzie $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są to wielomiany całkowite względem x i y o współczynnikach rzeczywistych. Stąd

$$|f(z)|=\sqrt{[P(x,y)]^2+[Q(x,y)]^2},$$

zatem $|f(z)|$ jest funkcją (rzeczywistą) ciągłą dwóch zmiennych rzeczywistych x i y:

$$|f(z)|=\varphi(x,y).$$

Warunek $|z|\leqslant R$ jest równoważny warunkowi $x^2+y^2\leqslant R^2$.

Jak wiadomo z Analizy, każda funkcja ciągła $\varphi(x,y)$ osiąga w kole $x^2+y^2\leqslant R^2$ swój kres dolny. Istnieje więc w tym kole punkt (x_0,y_0) taki, iż $\varphi(x_0,y_0)=g$. Przyjmując $z_0=x_0+iy_0$, będziemy zatem mieli $|f(z_0)|=g$.

Gdyby $f(z_0)\neq 0$, to w myśl lematu Gaussa istniałaby liczba zespolona z taka, iż $|f(z)|<|f(z_0)|=g$, przy czym, z uwagi na określenie liczby g, nie mogłoby być $|z|\leqslant R$. Byłoby więc $|z|>R$, zatem, wobec (19), $|f(z)|>|a_m|$, skąd sprzeczność z nierównością (20).

Musi więc być $f(z_0)=0$. Liczba z_0 jest zatem pierwiastkiem wielomianu $f(z)$, c. b. d. d.

Ważne wnioski z zasadniczego twierdzenia Algebry wyprowadzimy w § 11 Rozdziału VIII.

Godnym uwagi jest, że pierwsze dowody tego twierdzenia, choć podawane przez wybitnych matematyków, były błędne. Takimi były m. in. dowody podane przez d'Alembert'a (1746 r.), Euler'a (1749 r.), Lagrange'a (1772 r.) i Laplace'a (drukowany w 1812 r.). Dopiero Gauss podał dowody poprawne (w latach 1799, 1814 i 1850)[1]).

[1]) Ob. *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Tom I, 2, nº 81, str. 192-193.