

ROZDZIAŁ VI

LICZBY ZESPOLONE

§ 1. Liczby zespolone. Ich równość, suma i iloczyn.

Liczbami zespolonymi będziemy nazywali układy (pary uporządkowane) postaci

$$(a, b),$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, przy założeniu dla tych układów następujących definicji:

I. *Definicja równości.* Dwie liczby zespolone (a, b) i (c, d) uważamy za równe i piszemy $(a, b) = (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

Jak łatwo widzieć, stosunek równości liczb zespolonych jest zwrotny, symetryczny i przechodni.

II. *Definicja sumy.* Sumą dwóch liczb zespolonych (a, b) i (c, d) nazywamy liczbę zespoloną $(a+c, b+d)$, co piszemy:

$$(1) \quad (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d).$$

III. *Definicja iloczynu.* Iloczynem liczb zespolonych (a, b) i (c, d) nazywamy liczbę zespoloną $(ac-bd, ad+bc)$ i piszemy:

$$(2) \quad (a, b) (c, d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Z definicji sumy oraz iloczynu liczb zespolonych wynika z łatwością, że działania te są przemienne i łączne.

Udowodnimy np. łączność iloczynu. W myśl (2) mamy:

$$(3) \quad [(a, b) (c, d)] (e, f) = (ac-bd, ad+bc) (e, f) = \\ = ([ac-bd]e - [ad+bc]f, [ac-bd]f + [ad+bc]e),$$

zaś wobec

$$(c, d) (e, f) = (ce-df, cf+de)$$

znajdujemy:

$$(4) \quad (a, b) [(c, d) (e, f)] = (a[ce-df] - b[cf+de], a[cf+de] + b[ce-df]).$$

Prawe strony wzorów (3) i (4) przedstawiają, jak wykazuje łatwy rachunek, tę samą liczbę zespoloną, skąd

$$[(a, b)(c, d)](e, f) = (a, b)[(c, d)(e, f)],$$

co dowodzi, że iloczyn liczb zespolonych czyni zadość prawu łączności.

Równie łatwo jest dowieść, że dla liczb zespolonych zachodzi prawo *rozdzielności* dodawania względem mnożenia, czyli wzór

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

Z definicji sumy i iloczynu liczb zespolonych wynika dalej, że liczba zespolona $(0, 0)$ jest modulem dodawania, zaś liczba $(1, 0)$ modulem mnożenia, t.j. że dla każdej liczby zespolonej (x, y) zachodzą wzory:

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \quad \text{i} \quad (x, y)(1, 0) = (x, y).$$

§ 2. Różnica i iloraz liczb zespolonych. Niech dane będą dwie liczby zespolone (a, b) i (c, d) . Z definicji I i II wynika natychmiast, że na to, aby liczba zespolona (x, y) spełniała równanie

$$(c, d) + (x, y) = (a, b),$$

równoważne wobec przemienności sumy liczb zespolonych równaniu

$$(x, y) + (c, d) = (a, b),$$

potrzeba i wystarcza, iżby było

$$c + x = a \quad \text{i} \quad d + y = b,$$

t.j. iżby było

$$x = a - c \quad \text{i} \quad y = b - d.$$

Dodawanie liczb zespolonych posiada więc jednoznacznie wyznaczone i zawsze wykonalne (w zakresie liczb zespolonych) działanie odwrotne.

Nazywamy je *odejmowaniem liczb zespolonych* (a jego wynik ich *różnicą*) i piszemy:

$$(a - c, b - d) = (a, b) - (c, d).$$

Z definicji I i III wynika, że na to, żeby liczba zespolona (x, y) spełniała równanie

$$(6) \quad (c, d)(x, y) = (a, b),$$

równoważne wobec przemienności iloczynu liczb zespolonych równaniu

$$(x, y)(c, d) = (a, b),$$

potrzeba i wystarcza, iżby było

$$(6) \quad cx - dy = a \quad \text{i} \quad cy + dx = b.$$

Jeżeli $(c, d) = (0, 0)$, t.j. jeżeli $c = d = 0$, to w razie $(a, b) = (0, 0)$ — jak łatwo widzieć — każdy układ liczb rzeczywistych x, y spełnia równania (6), zaś w razie $(a, b) \neq (0, 0)$ żaden układ liczb rzeczywistych x, y nie spełnia równań (6). Jeżeli więc $(c, d) = (0, 0)$, to albo każda liczba zespolona (x, y) spełnia równanie (5), albo też żadna liczba zespolona (x, y) nie spełnia tego równania.

Załóżmy więc dalej, że $(c, d) \neq (0, 0)$. Mnożąc pierwsze z równań (6) przez c , a drugie przez d i dodając, (albo też mnożąc pierwsze przez $(-d)$, a drugie przez c i dodając), otrzymujemy równania:

$$(7) \quad (c^2 + d^2)x = ac + bd, \quad (c^2 + d^2)y = bc - ad.$$

Gdyby było $c^2 + d^2 = 0$, mielibyśmy $c = d = 0$, zatem $(c, d) = (0, 0)$, wbrew założeniu. Jest więc $c^2 + d^2 > 0$ i równania (7) dają:

$$(8) \quad x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Z drugiej strony, przez bezpośrednie podstawienie przekonujemy się w myśl definicji III, że liczba

$$(9) \quad (x, y) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

spełnia równanie (5). Zatem:

Jeżeli $(c, d) \neq (0, 0)$, i tylko w tym przypadku, równanie (5) posiada w zakresie liczb zespolonych jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie określone wzorem (9).

Liczbę zespoloną (9) nazywamy *ilorazem* (a wyznaczające go działanie *dzieleniem*) liczby zespolonej (a, b) przez liczbę zespoloną (c, d) , pisząc:

$$(a, b) : (c, d) \quad \text{lub} \quad \frac{(a, b)}{(c, d)}.$$

Iloraz dwóch liczb zespolonych istnieje więc i jest jednoznacznie wyznaczony, jeżeli tylko dzielnik jest różny od liczby zespolonej $(0, 0)$.

Wszystkie cztery działania arytmetyczne (prócz dzielenia przez liczbę zespoloną $(0,0)$) są więc w zakresie liczb zespolonych jednoznacznie wykonalne.

§ 3. Liczba i . Weźmy teraz pod uwagę liczby zespolone postaci $(a,0)$, gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą. W myśl definicji I, dwie liczby $(a,0)$ oraz $(b,0)$ będą równe wtedy i tylko wtedy, jeżeli $a=b$. Dalej, w myśl definicji II i III oraz definicji różnicy i ilorazu, będzie:

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0), \quad (a,0) - (b,0) = (a-b,0),$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0), \quad (a,0) : (b,0) = (a/b,0) \quad \text{dla } b \neq 0.$$

Jeżeli teraz przyporządkujemy każdej liczbie zespolonej $(a,0)$ liczbę rzeczywistą a , t.j. pierwszy element pary $(a,0)$, to — jak wynika z wypisanych wzorów — przyporządkowanie to będzie tego rodzaju, że wynikiem każdego z 4 działań arytmetycznych na liczbach zespolonych omawianej postaci będą odpowiadały wyniki tychże działań na liczbach rzeczywistych przyporządkowanych tym liczbom zespolonym.

Wyrażamy to, mówiąc, że zbiór wszystkich liczb zespolonych typu $(a,0)$ jest ze względu na 4 działania arytmetyczne *izomorficzny* (równokształtny) ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych i że, mianowicie, izomorfizm ten ustalimy, przyporządkowując każdej liczbie zespolonej $(a,0)$ liczbę rzeczywistą a (por. Rozdz. XVII, § 8).

Wobec tego jest już tylko sprawą znakowania, czy liczby zespolone $(a,0)$ będziemy oznaczali wszędzie tymi samymi symbolami, co liczby rzeczywiste a . Umówimy się więc pisać po prostu a zamiast $(a,0)$, czyli przyjmiemy przy wszelkim rzeczywistym a :

$$(10) \quad (a,0) = a.$$

W myśl definicji I liczba zespolona $(0,1)$ jest różną od każdej z liczb zespolonych postaci $(a,0)$, a przeto nie może być oznaczona tym samym symbolem co jakaś liczba rzeczywista.

Oznaczamy ją symbolem i .

Symbolu tego nie będziemy zatem mogli już dalej używać dla oznaczania liczb rzeczywistych. Przyjmiemy więc:

$$(11) \quad (0,1) = i.$$

Niech teraz (a,b) oznacza dowolną liczbę zespoloną. Z definicji I, II i III wynika, iż

$$(a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1),$$

co możemy wobec (10) i (11) napisać w postaci

$$(12) \quad (a,b) = a + bi.$$

Każda więc liczba zespolona (a,b) daje się napisać w postaci (12), gdzie i jest liczbą zespoloną, określoną wzorem (11). Ze wzoru tego, w myśl definicji III i wobec (10), otrzymujemy $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$ czyli

$$i^2 = -1.$$

Łatwo widzieć, że mamy też

$$[(-1)i]^2 = i^2 = -1.$$

Liczby i oraz $(-1)i$ są — jak łatwo stwierdzić — jedynymi liczbami zespolonymi z , spełniającymi równanie

$$z^2 = -1.$$

Jeżeli bowiem liczba zespolona $z = (x,y)$ spełnia to równanie, to mamy wobec (10)

$$(13) \quad (x,y)(x,y) = (-1,0),$$

a że wobec definicji III $(x,y)(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, więc wobec (13) oraz definicji I mamy:

$$(14) \quad x^2 - y^2 = -1 \quad \text{ i } \quad 2xy = 0.$$

Gdyby było $y = 0$, to pierwsze z równań (14) dałoby $x^2 = -1$, co niemożliwe, ponieważ x jest liczbą rzeczywistą. Jest więc $y \neq 0$ i drugie z równań (14) daje $x = 0$ (z uwagi na to, że liczby x i y są rzeczywiste). Zatem pierwsze równanie daje $y^2 = 1$ czyli $y = \pm 1$. Jeżeli $y = 1$, to $(x,y) = (0,1) = i$, jeżeli zaś $y = -1$, to $(x,y) = (0,-1) = (-1)i$.

Z liczby $(-1)i$ istnieją więc w zakresie liczb zespolonych dokładnie dwa pierwiastki kwadratowe, mianowicie i oraz $(-1)i$. Jeżeli pierwszy z nich oznaczymy przez $\sqrt{-1}$, to drugi można będzie oznaczyć przez $-\sqrt{-1}$.

Dla działań arytmetycznych na liczbach zespolonych mamy w myśl (1), (2) i (12) wzory:

$$(15) \quad \begin{aligned} (a+bi) + (c+di) &= (a+c) + (b+d)i \\ (a+bi) - (c+di) &= (a-c) + (b-d)i \\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\ (a+bi) : (c+di) &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \end{aligned}$$

przy czym wszystkie 4 działania (15) są w zakresie liczb zespolonych jednoznacznie wykonalne, z wyjątkiem jedynie dzielenia przez liczbę 0. Działania zaś na liczbach rzeczywistych mogą być uważane w myśl (10) za szczególny przypadek działań na liczbach zespolonych.

§ 4. Liczby zespolone sprzężone. Liczbę zespoloną

$$a-bi,$$

różniącą się tylko znakiem współczynnika przy i od liczby $z = a+bi$, nazywamy *sprzężoną* z liczbą z .

Liczbę sprzężoną z z oznaczamy zazwyczaj przez z' .

Z tego określenia liczb sprzężonych wynika natychmiast, że jeżeli $u = z'$, to $u' = z$, czyli przy wszelkim zespolonym z :

$$(16) \quad (z')' = z.$$

Jeżeli $z = z_1$, to mamy oczywiście $z' = z'_1$ i na odwrót. Jeżeli $z = z'$, to liczba z jest rzeczywistą i na odwrót. W szczególności jeżeli $z = 0$, to $z' = 0$ i na odwrót.

Ze wzorów (15) wnosimy natychmiast, że dla każdych dwóch liczb zespolonych z_1 i z_2 :

$$(16) \quad \begin{aligned} (z_1+z_2)' &= z'_1+z'_2, \quad (z_1-z_2)' = z'_1-z'_2, \\ (z_1z_2)' &= z'_1z'_2 \quad \text{i} \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)' = \frac{z'_1}{z'_2} \quad \text{dla} \quad z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Mozemy więc powiedzieć, że *działania arytmetyczne, wykonywane na liczbach sprzężonych z danymi, dają wyniki sprzężone z wynikami tychże działań, dokonanych na liczbach danych.*

Z trzeciego ze wzorów (16) wynika od razu, że dla każdej liczby zespolonej z mamy przy wszelkim naturalnym n

$$(17) \quad (z^n)' = (z')^n,$$

t.j. *liczba sprzężona z n -tą potęgą danej liczby zespolonej jest n -tą potęgą liczby sprzężonej z daną liczbą.*

Wynika stąd z łatwością (przy pomocy pierwszego ze wzorów (16), uogólnionego drogą łatwej indukcji na dowolną skończoną liczbę składników), że jeżeli

$$f(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \dots + a_{m-1}z + a_m$$

jest wielomianem o współczynnikach zespolonych, to mamy przy wszelkim zespolonym z :

$$[f(z)]' = a'_0(z')^m + a'_1(z')^{m-1} + \dots + a'_{m-1}z' + a'_m.$$

Stąd w szczególności, jeżeli współczynniki wielomianu $f(z)$ są rzeczywiste (t.j. jeżeli $a'_0 = a_0$, $a'_2 = a_2$, ..., $a'_m = a_m$), to:

$$(18) \quad [f(z)]' = f(z').$$

Stąd zaś wynika w szczególności, że jeżeli $f(z) = 0$, to $f(z') = 0$. Mamy zatem:

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba z' (sprzężona z liczbą z) też jest pierwiastkiem tego wielomianu.*

ĆWICZENIE. Stosując do iloczynu wyznaczników

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1+b_1i & c_1+d_1i \\ -c_1+d_1i & a_1-b_1i \end{vmatrix}$$

mnożenie wierszy przez wiersze, wyprowadzić tożsamość:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2) = (aa_1-bb_1+cc_1-dd_1)^2 + (ab_1+ba_1+cd_1+dc_1)^2 + (ac_1+bd_1-ca_1-db_1)^2 + (ad_1-bc_1-cb_1+da_1)^2.$$

Z tożsamości tej wynika, że *iloczyn dwóch liczb całkowitych, z których każda jest sumą kwadratów czterech liczb całkowitych, sam jest sumą kwadratów czterech liczb całkowitych.*

W związku z liczbami zespolonymi wspomniemy tu jeszcze o t. zw. kwaternionach.

Podobnie jak liczby zespolone określiliśmy jako pary uporządkowane liczb rzeczywistych, poddane warunkom I, II i III (p. str. 81, definicje), tak kwaterniony określamy jako pary uporządkowane liczb zespolonych (z, t) , gdzie:

$$\text{I. } (z, t) = (u, v) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } z = u \text{ oraz } t = v.$$

$$\text{II. } (z, t) + (u, v) = (z + u, t + v),$$

$$\text{III. } (z, t)(u, v) = (zu - tv', zv + tu')$$

(u' i v' oznaczają tu liczby zespolone sprzężone z u i v)¹⁾.

Mnożenie kwaternionów nie jest przemienne. Np.:

$$(1, 0)(0, i) = (0, i), \text{ zaś } (0, i)(1, 0) = (0, -i).$$

Liczbę rzeczywistą nieujemną $\sqrt{zz' + tt'}$ nazywamy *tensorem* kwaternionu (z, t) .

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że zbiór wszystkich kwaternionów $(z, 0)$, gdzie z jest liczbą zespoloną, jest izomorficzny ze względu na dodawanie i mnożenie ze zbiorem wszystkich liczb zespolonych z .

Kwaterniony można więc uważać za uogólnienie liczb zespolonych.

2. Dowieść, że przyjmując $j = (0, 1)$ oraz $k = (0, i)$ i pisząc dla zespolonych z , zamiast $(z, 0)$ poprostu z (co jest możliwe wobec izomorfizmu 1), każdy kwaternion można, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci

$$a + bi + cj + dk,$$

gdzie a, b, c i d są liczbami rzeczywistymi, przy czym

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \text{ zaś } jk = -kj = i, \text{ } ki = -ik = j, \text{ i } ij = -ji = k.$$

3. Dowieść, że mnożenie kwaternionów jest łączne.

4. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele różnych kwaternionów, których kwadrat równy jest liczbie (-1) .

5. Dowieść, że iloczyn dwóch kwaternionów wtedy i tylko wtedy jest zerem gdy co najmniej jeden z czynników jest zerem.

6. Dowieść, że tensor sumy dwóch kwaternionów jest nie większy od sumy ich tensorów.

¹⁾ Teoria kwaternionów pochodzi od W. R. Hamilton'a (*Lectures of Quaternions*, 1853, i *Elements of Quaternions*, 1866). Kwaternionom poświęcono szereg książek. W języku polskim o kwaternionach („czworanach“) pisał K. Hertz: *Pierwsze zasady kwaternionów Hamiltona*, Warszawa 1887, stron VI + 142. Godnem uwagi jest, że we wstępie do tej książki, napisanej przez matematyka polskiego przed 60-ciu laty, znajduje się już takie zdanie: „Zwykle określają matematykę, jako naukę o ilościach, nowsze jednak badania wykazały, że to określenie jest zbyt ograniczone i że matematykę należy uważać za naukę, prowadzącą z danych praw wszelkie możliwe wnioski i przedstawiającą je w postaci, która umożliwia porównywanie ich z bezpośrednią obserwacją“.

§ 5. Obrazy geometryczne liczb zespolonych. Moduł. Przyporządkujemy liczbie zespolonej $z = a + bi$ punkt (a, b) płaszczyzny XOY czyli punkt o współrzędnych $x = a$ i $y = b$.

Punkt ten nazwijmy *obrazem geometrycznym* liczby z .

W ten sposób każda liczba zespolona ma swój obraz geometryczny i naodwrot, każdy punkt płaszczyzny XOY jest obrazem pewnej (i tylko jednej) liczby zespolonej.

Płaszczyznę XOY nazywamy *płaszczyzną Gauss'a* liczb zespolonych.

Obrazy liczb rzeczywistych będą, jak łatwo widzieć, wypełniały oś odciętych, liczb zaś urojonych (t.j. liczb postaci $a + bi$, gdzie $a = 0$) — oś rzędnych. Obraz liczby $a - bi$, sprzężonej z liczbą $a + bi$, będzie odbiciem jej obrazu, symetrycznym względem osi odciętych. Obraz liczby $(-z)$ będzie położony symetrycznie do obrazu liczby z względem początku współrzędnych.

Odległość punktu (a, b) od początku współrzędnych nazywamy *modułem* liczby zespolonej $z = a + bi$ i oznaczamy przez $|z|$.

Z trójkąta prostokątnego OMN (rys. 1) widać, że

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(przy czym znak pierwiastka należy wziąć +). Mamy oczywiście zawsze $|-z| = |z|$, oraz $|z'| = |z|$. Jak łatwo widzieć, $|z|$ jest wtedy i tylko wtedy zerem, gdy $z = 0$. Dla $z \neq 0$ mamy więc $|z| > 0$.

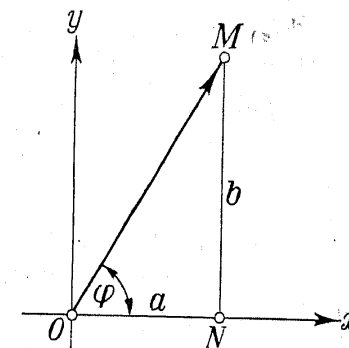
Zbiór wszystkich obrazów geometrycznych liczb zespolonych z , spełniających przy danym dodatnim r warunek

$$|z| = r,$$

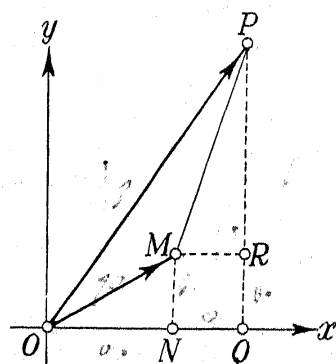
jest oczywiście obwodem koła o promieniu r i o środku w początku układu współrzędnych. Zbiór zaś wszystkich obrazów liczb zespolonych z , spełniających nierówność

$$|z| < r,$$

tworzy wnętrze tego koła.



Rys. 1.



Rys. 2.

Niech dane będą dwie liczby zespolone $z_0 = a_0 + b_0i$ i $z = a + bi$. Oznaczmy przez $M(a_0, b_0)$ i $P(a, b)$ ich obrazy geometryczne (rys. 2). Obliczmy odległość MP . Jak widać z rysunku, mamy tu:

$$MP = \sqrt{MR^2 + RP^2},$$

$$MR = NQ = OQ - ON = a - a_0,$$

$$RP = QP - QR = b - b_0,$$

$$\text{zatem } MP = \sqrt{(a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}.$$

Odległość między obrazami liczb zespolonych $z_0 = a_0 + b_0i$ oraz $z = a + bi$ jest więc równa $\sqrt{(a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}$ czyli liczbie $|z - z_0|$, gdyż $|z - z_0| = |a + bi - (a_0 + b_0i)| = |(a - a_0) + (b - b_0)i| = \sqrt{(a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}$. Zatem:

Odległość między obrazami geometrycznymi liczb zespolonych z_0 i z jest równa $|z - z_0|$ czyli modułowi ich różnicy.

Wynika stąd, że obrazy wszystkich liczb zespolonych z , spełniających przy danym zespolonym z_0 i danym dodatnim r równanie

$$|z - z_0| = r,$$

tworzą obwód koła o promieniu r i o środku w obrazie liczby zespolonej z_0 . Zbiór wszystkich obrazów liczb zespolonych z , spełniających nierówność

$$|z - z_0| < r,$$

tworzy wnętrze tego koła.

Niech będą dane dwie liczby zespolone z_1 i z_2 oraz liczba rzeczywista $m > |z_1 - z_2|$. Zbiór obrazów wszystkich liczb zespolonych z , spełniających równanie

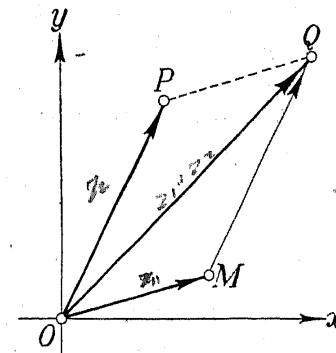
$$|z - z_1| + |z - z_2| = m,$$

tworzy, jak łatwo widzieć, obwód elipsy o większej średnicy m i o ogniskach w obrazach liczb z_1 i z_2 . Obrazy zaś liczb z takich, iż

$$|z - z_1| + |z - z_2| < m,$$

tworzą wnętrze tej elipsy.

Niech OM i OP oznaczają odpowiadające liczbom z_1 i z_2 wektory, t.j. odcinki skierowane z początku współrzędnych ku obrazom tych liczb (rys. 3). Niech OQ będzie wektorem, odpowiadającym sumie $z = z_1 + z_2$. Jak widać z rysunku, punkt Q możemy otrzymać w następujący sposób. Z punktu M prowadzimy wektor MQ , równy co do długości wektorowi OP , równoległy do niego i w tę samą stronę skierowany. W ten sposób wektor OQ jest sumą geometryczną wektorów OM i OP . A więc:



Rys. 3.

Dodawaniu liczb zespolonych odpowiada dodawanie geometryczne odpowiadających im wektorów.

Z trójkąta OMQ (rys. 3) widzimy też, że $OQ \leq OM + MQ$, czyli wobec $OQ = |z_1 + z_2|$, $OM = |z_1|$ i $MQ = OP = |z_2|$, mamy

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Mamy zatem:

Twierdzenie 2. *Moduł sumy dwóch liczb zespolonych nie przekracza sumy modułów tych liczb.*

Twierdzenie to uogólniamy z łatwością przez indukcję na dowolną skończoną liczbę składników.

§ 6. Forma trygonometryczna liczb zespolonych. Powróćmy do rysunku 1, przy czym założmy, że $z \neq 0$, zatem $M \neq O$.

Argumentem liczby zespolonej z nazywamy kąt φ , jaki tworzy z dodatnim kierunkiem osi OX odcinek (wektor) OM , skierowany z początku O układu współrzędnych do obrazu geometrycznego M liczby zespolonej z , liczony w kierunku przeciwnym biegowi strzałki zegara i wyrażony w radianach.

Jeżeli φ jest argumentem liczby zespolonej z , to oczywiście każdy kąt postaci $\varphi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, też jest argumentem tej liczby. Jak łatwo widzieć, każda liczba zespolona różna od zera ma jeden i tylko jeden argument φ , taki iż $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Warunek ten można oczywiście zastąpić przez warunek $-\pi < \varphi \leq \pi$ i wówczas liczbę φ nazywamy *amplitudą* liczby zespolonej z .

Z trójkąta OMN (rys. 1) znajdujemy natychmiast, przyjmując $|z| = r$:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

zatem

$$(19) \quad z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Jest to t.zw. *postać trygonometryczna* liczb zespolonych.

Każda więc liczba zespolona daje się przedstawić w postaci trygonometrycznej (19), gdzie r jest modulem, zaś φ argumentem liczby zespolonej z . Dla liczby $z=0$ mamy oczywiście $r=0$ i wzór (19) będzie spełniony przy każdym rzeczywistym φ .

Niech będą dane dwie liczby zespolone w ich postaciach trygonometrycznych:

$$(20) \quad z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Wobec (20) znajdujemy:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Iloczyn $z_1 z_2$ jest więc liczbą zespoloną, której modulem jest $r_1 r_2$, zaś argumentem $\varphi_1 + \varphi_2$. Mamy zatem:

Twierdzenie 3. *Moduł iloczynu dwóch liczb zespolonych jest iloczynem ich modułów, zaś argument iloczynu jest sumą argumentów czynników.*

Drogą łatwej indukcji twierdzenie to uogólniamy na dowolną skończoną liczbę czynników. Możemy więc powiedzieć, że:

Przy mnożeniu liczb zespolonych mnoży się ich moduły i dodaje ich argumenty.

Wynika stąd, że:

Moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych jest ilorazem ich modułów, zaś argument ilorazu jest różnicą między argumentem dzielnej a argumentem dzielnika.

§ 7. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Z twierdzenia 3 o mnożeniu liczb zespolonych wynika dalej natychmiast

Twierdzenie 4. *Moduł n -tej potęgi liczby zespolonej z jest n -tą potęgą jej modułu, zaś argument jest równy argumentowi liczby z pomnożonemu przez n .*

A więc dla dowolnych rzeczywistych $r > 0$ i φ zachodzi wzór:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

co daje t.zw. *wzór Moivre'a*:

$$(21) \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Niech będzie dana liczba zespolona $u = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Przyjmijmy przy danym naturalnym n :

$$(22) \quad z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n-1.$$

W myśl twierdzenia 4 o potęgowaniu liczb zespolonych będziemy mieli

$$z_k^n = r [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)] = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = u.$$

Liczby (22) spełniają więc równanie

$$(23) \quad z^n = u,$$

są zatem pierwiastkami n -go stopnia z liczby zespolonej u .

Co do argumentu φ liczby u , to jak wiemy z § 6, możemy założyć, że $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wobec $0 \leq k \leq n-1$ będzie więc $0 \leq \varphi + 2k\pi < 2n\pi$; zatem przyjmując

$$\varphi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n-1,$$

będziemy mieli

$$0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n-1} < 2\pi.$$

Obrazy geometryczne liczb zespolonych $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, gdzie $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, są więc wszystkie różne, a przeto i liczby te są różne.

Liczby (22) są zatem n różnymi pierwiastkami równania (23), a że równanie to, jako równanie stopnia n , więcej niż n różnych pierwiastków mieć nie może¹⁾, więc liczby (22) są wszystkimi pierwiastkami równania (22). Mamy zatem

Twierdzenie 5. Każda liczba zespolona $u = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ma dokładnie n pierwiastków n -go stopnia: są to liczby (22)²⁾.

Ten z pierwiastków n -go stopnia z liczby zespolonej u , który ma najmniejszy nieujemny argument, będziemy nazywali *pierwiastkiem głównym* n -go stopnia z liczby u .

Jeżeli u jest liczbą rzeczywistą dodatnią (czyli o argumencie 0) to pierwiastek główny n -go stopnia z liczby u jest po prostu pierwiastkiem (arytmetycznym) n -go stopnia z liczby u .

§ 8. Pierwiastki n -go stopnia z jedności. Zajmiemy się w szczególności pierwiastkami n -go stopnia z liczby 1.

Dla $u=1$ możemy przyjąć $r=1$ i $\varphi=0$. Wzory (22) dadzą więc jako pierwiastki n -go stopnia z jedności liczby:

$$(24) \quad z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{gdzie } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Obrazy geometryczne tych liczb otrzymamy, dzieląc obwód koła, zatoczonego promieniem 1 z początku współrzędnych, na n równych części, odkładanych od punktu, w którym koło to przecina dodatni kierunek osi odciętych, czyli od punktu $z_0=1$.

Z tego względu równanie

$$(25) \quad z^n = 1$$

nazywa się *równaniem podziału koła*.

Zajmiemy się nim szczegółowiej w Rozdziale XI.

Pierwiastek n -go stopnia z jedności nazywamy *pierwotnym*, jeżeli nie jest pierwiastkiem niższego (naturalnego) stopnia z jedności.

¹⁾ p. Rozdział VIII, § 11, str. 124, tw. 17.

²⁾ Przeprowadzony tutaj dowód istnienia pierwiastków dowolnego naturalnego stopnia z każdej liczby zespolonej używa funkcji trygonometrycznych, a więc niejako obcych algebrze. Dowód tegoż twierdzenia bez pomocy funkcji trygonometrycznych jest nieco dłuższy od podanego tutaj i korzysta z pewnej własności wielomianów, która jest następstwem ich ciągłości. Dowód taki znajdzie czytelnik w mojej książce *Analiza*, Tom I, Część pierwsza, Wydanie drugie, Warszawa 1923, str. 192-196.

Liczba zespolona z jest więc pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jedności, jeżeli zachodzi równość (25) i jeżeli $z^q \neq 1$ dla $q=1, 2, \dots, n-1$.

Twierdzenie 6. Liczba (24) jest wtedy i tylko wtedy pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jedności, jeżeli k jest liczbą pierwszą względem n ,

t.j. jeżeli $(k, n)=1$, gdzie (k, n) oznacza największy wspólny dzielnik liczb k i n .

Istotnie, jeżeli $(k, n)=1$, to liczba qk nie jest podzielna przez n dla $q=1, 2, \dots, n-1$, gdyż w razie $n|qk$ ¹⁾, mielibyśmy $n|q$ wobec $(k, n)=1$. Gdyby zaś było $z_k^q=1$, to wobec (24) i (21) mielibyśmy:

$$z_k^q = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^q = \cos \frac{2kq\pi}{n} + i \sin \frac{2kq\pi}{n} = 1,$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy $\frac{2kq\pi}{n} = 2l\pi$, gdzie l jest liczbą całkowitą, czyli gdy $n|kq$.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli $(k, n)=1$, to liczba z_k jest pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jedności.

Na odwrót, jeżeli $(k, n)=d > 1$, to możemy założyć, że $k=ld$ i $n=qd$, gdzie l i q są to liczby całkowite, przy czym wobec $d > 1$ mamy $q < n$. Stąd $kq=ldq=ln$, zatem w myśl (21):

$$z_k^q = \cos \frac{2kq\pi}{n} + i \sin \frac{2kq\pi}{n} = \cos 2l\pi + i \sin 2l\pi = 1,$$

co wobec $q < n$ dowodzi, że z_k nie jest pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jedności. Twierdzenie 6 jest więc udowodnione.

Na mocy tego twierdzenia pierwiastków pierwotnych n -go stopnia z jedności jest tyle, ile jest w ciągu $1, 2, \dots, n$ liczb pierwszych względem n , t.j. $\varphi(n)$, gdzie φ oznacza znaną w Teorii liczb funkcję Gauss'a. W szczególności liczba (24) dla $k=1$, t.j. liczba

$$\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

jest pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jedności.

¹⁾ $a|b$ oznacza, że liczba a jest dzielnikiem liczby b , t.j. że istnieje liczba całkowita t taka, iż $b=at$.

Jeżeli z jest pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jednościami, to, jak łatwo zobaczyć, liczby

$$(26) \quad z, z^2, \dots, z^{n-1}, z^n$$

są wszystkie różne. Gdyby bowiem było $z^l = z^m$ dla pewnych naturalnych l i m takich, że $1 \leq l < m \leq n$, to przyjmując $m-l = q$, mielibyśmy $1 \leq q < n$ oraz $z^l = z^{l+q}$, skąd $z^q = 1$, co niemożliwe, skoro z jest pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jednościami.

Z drugiej strony, jeżeli $z^n = 1$, to również $(z^q)^n = (z^n)^q = 1$ dla $q = 1, 2, \dots, n$.

Jeżeli więc z jest pierwiastkiem pierwotnym n -go stopnia z jednościami, to liczby (26) są różnymi pierwiastkami n -go stopnia z jednościami, a więc z tw. 5 wynika, że są to wszystkie pierwiastki n -go stopnia z jednościami. Mamy zatem:

Twierdzenie 7. Kolejne potęgi (od 1-ej do n -tej) dowolnego pierwiastka pierwotnego n -go stopnia z jednościami dają wszystkie pierwiastki n -go stopnia z jednościami.

Niech teraz n oznacza daną liczbę naturalną i niech

$$(27) \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$$

będą to wszystkie pierwiastki n -go stopnia z jednościami. Niech dalej z_1 oznacza którykolwiek z pierwiastków n -go stopnia z danej, różnej od zera, liczby zespolonej u . Mamy więc:

$$(28) \quad z_1^n = u.$$

Lecz z określenia liczb (27) wynika, że są one wszystkie różne oraz że

$$(29) \quad \varepsilon_k^n = 1 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Wobec (28) i (29) znajdujemy:

$$(\varepsilon_k z_1)^n = u \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

co dowodzi, że liczby

$$(30) \quad \varepsilon_1 z_1, \varepsilon_2 z_1, \dots, \varepsilon_n z_1$$

są pierwiastkami n -go stopnia z liczby u . Ale liczby (30) są wszystkie różne, gdyż liczby (27) są wszystkie różne, zaś $u \neq 0$. Liczby (30) są więc n różnymi pierwiastkami n -go stopnia z liczby u , zatem, w myśl twierdzenia 5, wszystkimi pierwiastkami n -go stopnia z tej liczby. Stąd:

Twierdzenie 8. Jeżeli z_1 jest jednym z pierwiastków n -go stopnia z liczby zespolonej $u \neq 0$, zaś $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ są wszystkimi pierwiastkami n -go stopnia z jednościami, to liczby

$$\varepsilon_k z_1 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

są wszystkimi pierwiastkami n -go stopnia z liczby u .

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że przyjmując $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$, mamy tożsamość:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z).$$

2. Niech

$$\varphi(x, y) = A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1,$$

$$\psi(x, y) = A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2$$

będą dwoma wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Jakie związki między tymi współczynnikami są konieczne i wystarczające na to, aby $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ było wielomianem zmiennej $z = x + yi$ o współczynnikach zespolonych?

Odp.: $B_1 = -2A_2$, $B_2 = 2A_1$, $C_1 = -A_1$, $C_2 = -A_2$, $E_1 = -D_2$, $E_2 = D_1$.

3. Sprawdzić, że $1 - (2 + 3i)^4 = 120(1 + i)$.

4. Dowieść, że liczby $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$ dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$, są wszystkie różne, lecz mają ten sam moduł. (Znacznie trudniej jest dowieść, że wyrazy postępu geometrycznego nieskończonego $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, są wszystkie różne).

5. Jakie liczby zespolone z spełniają równanie

$$(9z^4)^3 + (1 - 9z^3)^3 + (3z - 9z^4)^3 = 1 \quad ?$$

Odp.: Wszystkie.

6. Jakie liczby zespolone z spełniają równanie

$$(2z + 1)^6 + (z - 2)^6 = (2z - 1)^6 + (z + 2)^6 + 360z^5 \quad ?$$

Odp.: Jedynie liczba $z = 0$, gdyż różnica między lewą a prawą stroną tego równania wynosi $(-360)z$.