ROZDZIAŁ V

MACIERZE

§ 1. Mnożenie macierzy. Przykłady. *Macierzą prostokątną* nazywamy zbiór jakichkolwiek elementów, ustawionych w prostokąt

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdot & \cdot & a_{m,n} \end{matrix}$$

Jest to więc właściwie funkcja dwóch zmiennych naturalnych k i l, określona dla $1 \leqslant k \leqslant m$ i $1 \leqslant l \leqslant n$. Macierz taką oznaczamy przez

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdot & \cdot & a_{m,n} \end{matrix} \right\|,$$

nie przypisując jej zresztą żadnej wartości liczbowej.

Jeżeli elementy macierzy są liczbami, to przez *iloczyn* dwóch macierzy

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdot & \cdot & a_{m,n} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdot & \cdot & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdot & \cdot & b_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdot & \cdot & b_{n,p} \end{matrix} \right\|,$$

z których pierwsza ma tyle kolumn, co druga wierszy, rozumiemy macierz

$$\left\| \begin{matrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdot & \cdot & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdot & \cdot & c_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdot & \cdot & c_{m,p} \end{matrix} \right\|,$$

gdzie

$$c_{k,l} = a_{k,1} b_{1,l} + a_{k,2} b_{2,l} + \ldots + a_{k,n} b_{n,l} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, m \quad \text{i} \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$

czyli macierz otrzymaną przez mnożenie wierszy pierwszej macierzy przez kolumny drugiej.

Oto kilka przykładów mnożenia macierzy:

1. Macierz współczynników przekształcenia (4) ze str. 63 jest iloczynem macierzy współczynników przekształcenia (2) przez macierz współczynników przekształcenia (2').

2. $$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 p_1 + b_1 p_2 & a_1 q_1 + b_1 q_2 & a_1 r_1 + b_1 r_2 \\ a_2 p_1 + b_2 p_2 & a_2 q_1 + b_2 q_2 & a_2 r_1 + b_2 r_2 \end{matrix} \right\|,$$

iloczyn zaś $\left\| \begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$ nie istnieje, gdyż pierwszy czynnik ma więcej kolumn, niż drugi wierszy. Natomiast

$$\left\| \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} p_1 a_1 + p_2 a_2 & p_1 b_1 + p_2 b_2 \\ q_1 a_1 + q_2 a_2 & q_1 b_1 + q_2 b_2 \\ r_1 a_1 + r_2 a_2 & r_1 b_1 + r_2 b_2 \end{matrix} \right\|,$$

zaś iloczyn $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{matrix} \right\|$ nie istnieje. Istnieją atoli oba iloczyny

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{matrix} \right\| \quad \text{i} \quad \left\| \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|.$$

Dwie macierze uważamy za *równe* wtedy i tylko wtedy, jeżeli jedna ma tyleż wierszy, jak również tyleż kolumn, co druga i jeżeli elementy, znajdujące się w obu macierzach na jednakowych miejscach, są równe.

Macierz, w której liczba kolumn jest równa liczbie wierszy, nazywamy *kwadratową*.

Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych jest iloczynem wyznaczników tych macierzy. Iloczyn macierzy kwadratowych istnieje tylko wtedy, gdy macierze te mają tą samą liczbę wierszy (i kolumn).

3. A oto przykłady iloczynów dwóch macierzy kwadratowych:

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & 0 & . & . & 0 \\ a_{2,1} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & . & . & a_{1,1} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & . & . & a_{2,1} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,1} & . & . & a_{n,1} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,1}+a_{1,2}+\ldots+a_{1,n} & 0 & . & . & 0 \\ a_{2,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{2,n} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1}+a_{n,2}+\ldots+a_{n,n} & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \end{Vmatrix}.$$

§ 2. Własności iloczynu macierzy. Mnożenie macierzy *nie jest przemienne:* iloczyn dwóch macierzy zależy w ogóle od porządku czynników, np.

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \text{zaś} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Mnożenie macierzy jest natomiast *łączne*. Istotnie niech będą dane 3 macierze:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . \\ a_{m,1} & . & . & a_{m,n} \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{1,1} & . & . & b_{1,p} \\ . & . & . & . \\ b_{n,1} & . & . & b_{n,p} \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} c_{1,1} & . & . & c_{1,r} \\ . & . & . & . \\ c_{p,1} & . & . & c_{p,r} \end{Vmatrix},$$

z których każda ma tyle kolumn, co następna wierszy.

Element o wskaźnikach k, l ($k=1,2,\ldots,m$; $l=1,2,\ldots,r$) w macierzy $(AB)C$ jest, jak łatwo stwierdzimy, równy

$$\begin{aligned} &(a_{k,1}b_{1,1}+a_{k,2}b_{2,1}+\ldots+a_{k,n}b_{n,1})c_{1,l}+ \\ &+(a_{k,1}b_{1,2}+a_{k,2}b_{2,2}+\ldots+a_{k,n}b_{n,2})c_{2,l}+ \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+(a_{k,1}b_{1,p}+a_{k,2}b_{2,p}+\ldots+a_{k,n}b_{n,p})c_{p,l}, \end{aligned}$$

natomiast element o wskaźnikach k, l w macierzy $A(BC)$ jest równy

$$\begin{aligned} &a_{k,1}(b_{1,1}c_{1,l}+b_{1,2}c_{2,l}+\ldots+b_{1,p}c_{p,l})+ \\ &+a_{k,2}(b_{2,1}c_{1,l}+b_{2,2}c_{2,l}+\ldots+b_{n,p}c_{p,l})+ \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+a_{k,n}(b_{n,1}c_{1,l}+b_{n,2}c_{2,l}+\ldots+b_{n,p}c_{p,l}). \end{aligned}$$

Prosty rachunek wykazuje, że obie wypisane sumy są równe, czyli że spełnione jest prawo łączności $(AB)C=A(BC)$. Uwalnia to nas od pisania nawiasów i czyni jednoznacznie określonym symbol ABC. To samo dotyczy iloczynu dowolnej skończonej liczby macierzy.

§ 3. Macierz zerowa i jednostkowa. Macierz liczbową, której wszystkie elementy są równe 0, nazywamy *zerową* i oznaczamy przez 0.

Iloczyn dwóch macierzy, z których co najmniej jedna jest zerową, jest oczywiście macierzą zerową. Ale iloczyn dwóch macierzy może też być macierzą zerową, mimo że żaden z czynników nie jest macierzą zerową. Np. mamy:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0, \qquad \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0.$$

Mamy też przy wszelkich a,b,c,d:

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0;$$

podobnie przy wszelkich $a_1,a_2,a_3,\ b_1,b_2,b_3,\ c_1,c_2,c_3$:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0.$$

Jeżeli zatem iloczyny macierzy są równe i pierwsze czynniki są odpowiednio równe, to nie można stąd jeszcze wnosić o równości drugich czynników, nawet jeżeli wszystkie czynniki są macierzami niezerowymi, bo mamy np.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Macierz kwadratową, w której elementy głównej przekątnej są równe 1, zaś pozostałe równe 0, nazywamy *jednostkową* i oznaczamy przez I.

Z określenia iloczynu macierzy wynika natychmiast, że jeżeli M jest macierzą kwadratową, zaś I macierzą jednostkową mającą tyleż elementów co M, to

$$IM = MI = M.$$

§ 4. Macierz odwrotna. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 1. *Jeżeli*

$$M = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{Vmatrix}$$

jest jakąkolwiek macierzą kwadratową o n^2 elementach, której wyznacznik jest różny od 0, zaś I macierzą jednostkową o n^2 elementach, to istnieje dokładnie jedna macierz kwadratowa M^{-1} o n^2 elementach, taka iż

$$MM^{-1} = I. \tag{1}$$

Niech dla dowodu

$$M^{-1} = \begin{Vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdot & \cdot & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdot & \cdot & x_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdot & \cdot & x_{n,n} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

będzie taką macierzą. Przyjmując $\delta_{k,k}=1$ dla $k=1,2,\ldots,n$, zaś $\delta_{k,l}=0$ dla $k\neq l$ (gdzie $k=1,2,\ldots,n$ oraz $l=1,2,\ldots,n$) będziemy mieli wobec (1) w myśl określenia iloczynu macierzy

$$a_{k,1}x_{1,l}+a_{k,2}x_{2,l}+\ldots+a_{k,n}x_{n,l}=\delta_{k,l} \text{ dla } k=1,2,\ldots,n \text{ i } l=1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Z drugiej strony, jeżeli (2) jest macierzą, której elementy $x_{k,l}$ spełniają układ n^2 równań (3) dla $k=1,2,\ldots,n$ i $l=1,2,\ldots,n$, to zachodzi oczywiście wzór (1). Na to więc, żeby macierz (2) spełniała warunek (1), potrzeba i wystarcza, iżby jej elementy $x_{k,l}$ spełniały układ n^2 równań (3).

Lecz układ n^2 równań (3) rozpada się, jak łatwo spostrzec, na n układów n równań liniowych o n niewiadomych, z których każdy dotyczy innych niewiadomych: są to mianowicie układy równań:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_{1,l}+a_{1,2}x_{2,l}+\ \ldots\ +a_{1,n}x_{n,l} &= \delta_{1,l}, \\ a_{2,1}x_{1,l}+a_{2,2}x_{2,l}+\ \ldots\ +a_{2,n}x_{n,l} &= \delta_{2,l}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_{n,1}x_{1,l}+a_{n,2}x_{2,l}+\ \ldots\ +a_{n,n}x_{n,l} &= \delta_{n,l}, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie każdy z tych układów jest wzięty przy innym $l=1,2,\ldots,n$.

Wyznacznik każdego z tych układów n równań liniowych o n niewiadomych jest równy wyznacznikowi macierzy M, a więc, w myśl założenia, jest różny od 0. Każdy z tych układów ma zatem, na mocy twierdzenia 2 Rozdziału III (str. 40), jedno i tylko jedno rozwiązanie względem $x_{1,l},x_{2,l},\ldots,x_{n,l}$. Wynika stąd natychmiast, że i układ n^2 równań (3) ma jedno i tylko jedno rozwiązanie względem n^2 niewiadomych $x_{k,l}$ (gdzie $k=1,2,\ldots,n$ oraz $l=1,2,\ldots,n$) przy założeniu, że wyznacznik macierzy M jest różny od 0. Zatem macierz M^{-1}, spełniająca wzór (1), nie tylko istnieje, ale jest jedyna, c. b. d. o.

Zauważmy, że jeżeli wyznacznik macierzy M jest równy 0, to dla żadnej macierzy kwadratowej N (o n^2 elementach), nie zachodzi wzór $MN=I$, ani też dla żadnej macierzy Q nie zachodzi wzór $QM=I$. Istotnie, z twierdzenia 5 (str. 27) o mnożeniu wyznaczników oraz z określenia mnożenia macierzy wynika natychmiast, że jeżeli M i N są macierzami liczbowymi kwadratowymi o tej samej liczbie elementów, to wyznacznik macierzy MN jest równy iloczynowi wyznaczników macierzy M i macierzy N. Gdyby więc wyznacznik macierzy M był równy 0, to i wyznacznik macierzy MN byłby równy 0, a więc ta ostatnia nie mogłaby być macierzą I, której wyznacznik jest, jak łatwo spostrzec, równy 1. Warunek, że wyznacznik macierzy M jest różny od 0, jest więc dla prawdziwości twierdzenia 1 konieczny.

Oznaczmy teraz przez D wyznacznik macierzy M i, jak poprzednio, przez $D_{k,l}$ jego minor, odpowiadający elementowi $a_{k,l}$. Rozwiązując przy danym $l=1,2,\dots,n$ układ równań (4), otrzymamy więc, jak wiemy (ob. wzór (7), str. 39):

$$Dx_{k,l}=(-1)^{k+1}D_{1,k}\delta_{1,l}+(-1)^{k+2}D_{2,k}\delta_{2,l}+\dots+(-1)^{k+n}D_{n,k}\delta_{n,l},$$

skąd, wobec $\delta_{l,l}=1$ i $\delta_{k,l}=0$ dla $k\neq l$:

$$Dx_{k,l}=(-1)^{k+l}D_{l,k}. \tag{5}$$

Mamy więc dla $k=1,2,\dots,n$ i $l=1,2,\dots,n$ wzór (5), skąd:

$$D(x_{k,1}a_{1,l}+x_{k,2}a_{2,l}+\dots+x_{k,n}a_{n,l})=$$
$$=(-1)^{k+1}D_{1,k}a_{1,l}+(-1)^{k+2}D_{2,k}a_{2,l}+\dots+(-1)^{k+n}D_{n,k}a_{n,l}.$$

Lecz, jak wiemy, prawa strona wzoru jest równa dla $k=l$ wyznacznikowi D (ob. wzór (14), str. 16), zaś dla $k\neq l$ jest równa 0 (ob. wzór (21), str. 18). Jest ona więc równa liczbie $\delta_{k,l}D$ przy wszelkich k i l z ciągu $1,2,\dots,n$. Wobec $D\neq 0$ znajdujemy stąd:

$$x_{k,1}a_{1,l}+x_{k,2}a_{2,l}+\dots+x_{k,n}a_{n,l}=\delta_{k,l}\quad \text{dla}\quad k,l=1,2,\dots,n,$$

skąd wnosimy natychmiast, że

$$M^{-1}M=I. \tag{6}$$

Mamy zatem

Twierdzenie 2. *Macierz M^{-1}, spełniająca warunek* (1), *spełnia też warunek* (6).

Macierz M^{-1} nazywamy *odwrotnością macierzy M*.

Niech dalej M i N oznaczają dwie dowolne macierze kwadratowe o tej samej liczbie elementów. Mamy więc

$$(MN)^{-1}(MN)=I,$$

skąd na mocy łączności mnożenia macierzy (ob. str. 69) wynika, że

$$(MN)^{-1}MNN^{-1}M^{-1}=IN^{-1}M^{-1},$$

czyli wobec równości $NN^{-1}=I$ i $MIM^{-1}=MM^{-1}=I$ oraz określenia macierzy I:

$$(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}. \tag{7}$$

Z tego wzoru skorzystamy w § 6.

Zauważmy wreszcie, że z określenia mnożenia macierzy (str. 66) wynika od razu, że układ n równań liniowych o n niewiadomych, podany w Rozdziale III, § 2 (ob. (6), str. 39), daje się przy pomocy mnożenia macierzy napisać w postaci jednego tylko równania

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

Załóżmy, że wyznacznik D danego układu równań jest różny od 0. Mnożąc ostatnią równość lewostronnie przez odwrotność macierzy współczynników, otrzymamy

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

Wzór ten formalnie tylko daje bezpośrednio wartości na $x_1,x_2,\dots,x_n$. Dla znalezienia $x_1,x_2,\dots,x_n$ musielibyśmy bowiem po prawej stronie obliczyć odwrotność macierzy współczynników danego układu równań. Jak wynika ze wzorów (5), element tej odwrotnej macierzy, znajdujący się w k-tym wierszu i l-tej kolumnie, jest równy $\frac{(-1)^{k+l}D_{l,k}}{D}$, gdzie $D_{l,k}$ oznacza minor wyznacznika D, odpowiadający elementowi $a_{l,k}$. Dla znalezienia wszystkich elementów odwrotności danej macierzy musielibyśmy więc obliczyć wyznacznik D oraz n^2 jego minorów. Ostatecznie doszlibyśmy w ten sposób do wzorów (9) z Rozdziału III (§ 2, str. 40) na rozwiązanie układu n równań o n niewiadomych w przypadku, gdy wyznacznik tego układu jest różny od 0.

§ 5. Dzielenie macierzy. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie 3. *Jeżeli macierze M i N są kwadratowe o n^2 elementach, przy czym wyznacznik macierzy M jest różny od 0, to istnieje jedna i tylko jedna macierz kwadratowa Q o n^2 elementach, taka iż*

$$MQ = N, \tag{8}$$

oraz jedna i tylko jedna macierz kwadratowa R o n^2 elementach, taka iż

$$RM = N. \tag{9}$$

Przypuśćmy dla dowodu, że macierze Q i R spełniają warunki (8) i (9). Będziemy stąd mieli:

$$M^{-1}(MQ) = M^{-1}N \quad \text{oraz} \quad (RM)M^{-1} = NM^{-1}.$$

Lecz wobec łączności mnożenia macierzy i twierdzenia 1 jest $M^{-1}(MQ)=(M^{-1}M)Q=IQ=Q$ oraz $(RM)M^{-1}=R(MM^{-1})=RI=R$. Zatem

$$Q=M^{-1}N \quad \text{oraz} \quad R=NM^{-1}. \tag{10}$$

Z drugiej strony, jeżeli macierze Q i R wyznaczymy ze wzorów (10), to będziemy mieli $MQ=M(M^{-1}N)=(MM^{-1})N=IN=N$ oraz $RM=(NM^{-1})M=N(M^{-1}M)=NI=N$, czyli wzory (8) i (9).

Twierdzenie 4 zostało więc udowodnione.

Działanie prowadzące od macierzy M i N do macierzy Q oraz R nazywamy odpowiednio *dzieleniem lewostronnym* i *dzieleniem prawostronnym* N przez M.

Jeżeli więc wyznacznik macierzy, kwadratowej M jest różny od 0, to na mocy twierdzenia 3 obydwa działania dzielenia przez M są wykonalne jednoznacznie dla każdej macierzy liczbowej kwadratowej N o tej samej co M liczbie elementów. Dzielenia takie są na ogół różne od siebie, gdyż iloczyny $M^{-1}N$ oraz NM^{-1} mogą być różne. Np. dla

$$M=\begin{Vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad N=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{Vmatrix}$$

mamy, jak łatwo sprawdzić,

$$M^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{Vmatrix}, \quad M^{-1}N=\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad NM^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}.$$

§ 6. Macierz odwrócona. Macierze ortogonalne. Macierz

$$\begin{Vmatrix}a_{1,1} & a_{2,1} & \cdot & \cdot & a_{m,1}\\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{m,2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdot & \cdot & a_{m,n}\end{Vmatrix}$$

nazywamy *odwróconą* (lub *transponowaną*) macierzą

$$M=\begin{Vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdot & \cdot & a_{m,n}\end{Vmatrix}$$

i oznaczamy przez M^*.

Macierz M^* powstaje więc z macierzy M, jeżeli kolumny macierzy M wypiszemy jako wiersze macierzy M^* (a tym samym wiersze macierzy M jako kolumny macierzy M^*).

Macierz kwadratową M, taką iż

$$M^*M = I, \tag{11}$$

nazywamy *ortogonalną*.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby macierz kwadratowa M była ortogonalną, są więc równości (6) ze str. 64.

Warunek (11) jest, jak łatwo wykazać, równoważny warunkowi

$$M^* = M^{-1}. \tag{12}$$

Mamy też oczywiście dla każdej macierzy M:

$$(M^*)^* = M.$$

Wobec wzoru (7) oraz w myśl (12) mamy dla macierzy ortogonalnych M i N (o tej samej liczbie elementów):

$$(MN)^* = N^*M^*, \tag{13}$$

zatem wobec (11) oraz wobec określenia macierzy I:

$$(MN)^*(MN) = (N^*M^*)(MN) = N^*(M^*M)N = N^*IN = N^*N = I,$$

co dowodzi, że macierz MN też jest ortogonalną. Mamy zatem

Twierdzenie 4. *Iloczyn dwóch macierzy ortogonalnych* (o jednakowej liczbie elementów) *jest macierzą ortogonalną.*

§ 7. Krakowiany. Tak zwane *krakowiany*, wprowadzone i stosowane przez prof. T. Banachiewicza, tym się różnią od macierzy, że mnożenie ich odbywa się przez mnożenie kolumn przez kolumny.

Iloczynem dwóch krakowianów

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & \cdot & \cdot & a_{m,n} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot & \cdot & b_{1,p} \\ b_{2,1} & \cdot & \cdot & b_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m,1} & \cdot & \cdot & b_{m,p} \end{vmatrix},$$

mających jednakową liczbę wierszy, jest krakowian

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdot & \cdot & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \cdot & \cdot & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p,1} & \cdot & \cdot & c_{p,n} \end{vmatrix},$$

którego elementy $c_{k,l}$ dla $k = 1, 2, \ldots, p$ i $l = 1, 2, \ldots, n$ wyznaczone są wzorem:

$$c_{k,l} = a_{1,l}b_{1,k} + a_{2,l}b_{2,k} + \ldots + a_{m,l}b_{m,k}.$$

Przez $k(M)$ oznaczać będziemy ogólnie krakowian, utworzony z macierzy M.

Łatwo stwierdzić, że jeśli macierze M i N mają jednakową liczbę wierszy, to

(14) $$k(M) \cdot k(N) = k(N^*M).$$

W szczególności przyjmijmy dla macierzy kwadratowej M o wyznaczniku różnym od 0:

$$N = (M^{-1})^*.$$

Będziemy mieli $N^*M = M^{-1}M = I$. Wzór (14) daje więc

$$k(M)\,k((M^{-1})^*) = k(I).$$

Wobec (14) oraz (13) jest też

$$k((M^{-1})^*)\,k(M) = k(M^*(M^{-1})^*) = k((M^{-1}M)^*) = k(I).$$

Dla każdego krakowianu kwadratowego $k(M)$ o wyznaczniku różnym od 0 istnieje więc krakowian — oznaczmy go przez $k^{-1}(M)$ — taki, iż

$$k(M)k^{-1}(M) = k^{-1}(M)\,k(M) = k(I).$$

Krakowian taki jest tylko jeden. Gdyby bowiem było

$$k(M)k(N) = k(I),$$

to wobec (14) mielibyśmy $k(N^*M) = k(I)$, skąd $N^*M = I$, co daje $N^* = IM^{-1} = M^{-1}$ i wreszcie $N = (M^{-1})^*$.

Mnożenie krakowianów nie jest łączne. Np. dla

$$A = B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{i} \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mamy, jak łatwo obliczyć:

$$AB = B \qquad \text{i} \qquad BC = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

zatem

$$(AB)C = BC = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{zaś } A(BC) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Przeto

$$(AB)C \neq A(BC).$$

Zarazem mamy tu $CB = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, zatem $BC \neq CB$.

Mnożenie krakowianów nie jest więc przemienne.

Zmiana porządku czynników w iloczynie dwu krakowianów powoduje w krakowianie, będącym iloczynem, zmianę kolumn na wiersze i na odwrót. Np.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 & b_1p_1 + b_2p_2 \\ a_1q_1 + a_2q_2 & b_1q_1 + b_2q_2 \\ a_1r_1 + a_2r_2 & b_1r_1 + b_2r_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 & a_1q_1 + a_2q_2 & a_1r_1 + a_2r_2 \\ b_1p_1 + b_2p_2 & b_1q_1 + b_2q_2 & b_1r_1 + b_2r_2 \end{vmatrix}.$$

Oznaczmy przez τ krakowian $k(I)$, t. j. przyjmijmy

$$\tau = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{Bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla każdego krakowianu K, niekoniecznie kwadratowego, jest

$$K\tau = K,$$

gdzie w τ należy wziąć tyle wierszy, ile ma ich K. Natomiast

$$\tau K = K^*,$$

gdzie K^* oznacza krakowian, otrzymany z krakowianu K przez zamianę jego wierszy na kolumny i na odwrót.

Mamy więc *dla wszelkich dwóch krakowianów A i B, mających po n wierszy*:

(15) $$BA = (AB)^* = \tau\cdot(AB).$$

Mamy też *dla krakowianów kwadratowych A, B, C wzory*:

(16) $$A(BC) = (AC^*)B = [A(\tau C)]B, \qquad (AB)C = A(CB^*) = A[C(\tau B)],$$

które łatwo uzyskujemy przez bezpośrednie sprawdzenie.

§ 8. Rozwiązywanie układu równań liniowych za pomocą krakowianów. Krakowiany mają zastosowanie przy obliczaniu wyznaczników oraz praktycznym rozwiązywaniu układów równań liniowych[1]). Mają one tę wyższość praktyczną nad macierzami, że przy ich mnożeniu mnoży się rzędy równoległe, a nie prostopadłe do siebie, jak w macierzach.

[1]) Ob. T. Banachiewicz, *Calcul des déterminants par la méthode des cracoviens*, Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętności, Seria A, 1937, str. 109-120; A. Chromiński, *Application des cracoviens à la résolution rapide de divers problèmes d'analyse pratique*, tamże 1938; L. Stankiewicz, *Etudes d'analyse pratique*, Cracow Observatory reprint 20 (1938); S. Arend, *Voies nouvelles dans le calcul scientifique*, Ciel et Terre 57, Bruxelles 1941; T. Banachiewicz, *Résolution d'un système d'équations linéaires algébriques par division*, Ciel et Terre, Bruxelles 1942. O zastosowaniu krakowianów w rachunku wyrównawczym ogłosił dłuższą (51-stronicową) pracę prof. E. Warchałowski w Wydawnictwach Akademii Nauk Technicznych, Warszawa 1939.

O. Belluzzi w *Scienza delle Costruzioni* (Tom II, Część 2-a, Rozdział XX), poświęca metodzie Banachiewicza rozwiązywania równań liniowych za pomocą krakowianów § 439 zatytułowany *Risoluzione rapida delle equazioni col metodo di Banachiewicz*. Paragraf ten rozpoczyna on zdaniem: „Un metodo che finalmente risolve con geniale semplicita l'importantissima questione dei sistemi di equazioni lineari, riducendo la laboriosa risoluzione quasi a un giuoco, è quello proposto recentemente da Banachiewicz"[1]).

Niech będzie dany układ n równań liniowych (por. (6), str. 39):

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n = a_{i,0}, \qquad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Przyjmując

$$A' = \begin{Bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} & -a_{1,0} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} & -a_{2,0} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} & -a_{n,0} \end{Bmatrix},$$

możemy układ ten napisać w postaci

(17) $$\tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\}\cdot\tau A' = \tau\{0, 0, \ldots, 0\}.$$

Przypuśćmy, że A' jest rozbite na iloczyn dwóch krakowianów B' i C postaci

$$B' = \begin{Bmatrix} 1 & b_{1,2} & b_{1,3} & . & . & b_{1,n} & -b_{0,1} \\ 0 & 1 & b_{2,3} & . & . & b_{2,n} & -b_{0,2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & -b_{0,n} \end{Bmatrix}, \qquad C = \begin{Bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & . & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & . & . & c_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & c_{n,n} \end{Bmatrix}.$$

Iloczyn $c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{n,n}$ równy jest wyznacznikowi danego układu równań. Jeśli więc wyznacznik ten jest różny od 0, to liczby $c_{1,1}, c_{2,2}, \ldots, c_{n,n}$ są też różne od 0.

Z równości $A' = B'C$ wyprowadzamy, korzystając z wzorów (15) i (16), tożsamość

$$\tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\}\cdot\tau A' = \tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\}\cdot\tau(B'\cdot C) =$$
$$= \tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\}(C\cdot B') = (\tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\}\cdot\tau B')\cdot C.$$

[1]) W tłumaczeniu polskim: „Metodą rozwiązującą ostatecznie z genialną prostotą niezmiernie ważne zagadnienie układów równań liniowych, sprowadzającą mozolne rozwiązywanie prawie do zabawy, jest metoda podana niedawno przez Banachiewicza".

Równanie (17) jest więc równoważne równaniu

$$(\tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\} \cdot \tau B') \cdot C = \tau \cdot \{0, 0, \ldots, 0\}.$$

Otóż wynika stąd, że

(18) $$\tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\} \cdot \tau B' = \tau\{0, 0, \ldots, 0\}.$$

Istotnie, jeżeli $\tau\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\} \cdot \tau B' = \tau\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, to $d_1 \cdot c_{11} = 0$, $d_1 \cdot c_{1,2} + d_2 \cdot c_{3,2} = 0$ i t. d., skąd $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ i t. d. Pisząc (18) w postaci rozwiniętej, otrzymamy:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + b_{1,2}x_2 + b_{1,3}x_3 + \ldots + b_{1,n}x_n & = & b_{0,1} \\ x_2 + b_{2,3}x_3 + \ldots + b_{2,n}x_n & = & b_{0,2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \cdot \\ x_n & = & b_{0,n}. \end{array}$$

Wyznaczenie krakowianów B' i C nie sprawia trudności, gdyż wzór $A' = B'C$ daje:

$$\begin{array}{llll} c_{1,1} = a_{1,1}, & c_{12} = a_{2,1}, & \ldots, & c_{1,n} = a_{n,1}, \\ b_{1,2}c_{1,1} = c_{1,2}, & b_{1,2}c_{1,2} + 1 \cdot c_{2,2} = a_{2,2}, & b_{1,2} \cdot c_{1,3} + 1 \cdot c_{2,3} = a_{3,2}, & \ldots, \\ b_{1,3} \cdot c_{1,1} = a_{1,3}, & b_{1,3}c_{1,2} + b_{2,3}c_{2,2} = a_{2,3}, & \text{i t. d.} & \end{array}$$

ĆWICZENIA. Dowieść następujących tożsamości dla krakowianów:

1. $$\tau\Big(\big\{[(ab)c]d\big\}e\Big) = \Big(\big\{[(e \cdot \tau d) \cdot \tau c] \cdot \tau b\big\} \cdot a\Big).$$

2. $$\big\{[(ab)c]d\big\}e = a\big\{[(e \cdot \tau d) \cdot \tau c] \cdot \tau b\big\} = (ab)[(e \cdot \tau d) \cdot \tau c].$$

3. $$a\big\{[(bc)d]e\big\} = \big\{[(a \cdot \tau e) \cdot \tau d] \cdot \tau c\big\}b.$$

4. $$(ab)^2 = [a(\tau b)^2]a.$$

5. $$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}^2 = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{matrix}\right\}.$$