ROZDZIAŁ IV

PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

§ 1. Przekształcenia liniowe jednorodne, ich odwracanie i składanie. Niech dane będą liczby

(1) $$a_{k,l}, \quad \text{gdzie } k=1,2,\dots,n \text{ i } l=1,2,\dots,n.$$

Jeżeli od zmiennych $x_1,x_2,\dots,x_n$ przechodzimy do nowych zmiennych $y_1,y_2,\dots,y_n$ za pomocą wzorów (por. Rozdział III, § 1):

(2) $$\begin{aligned} x_1 &= a_{1,1}y_1+a_{1,2}y_2+\dots+a_{1,n}y_n,\\ x_2 &= a_{2,1}y_1+a_{2,2}y_2+\dots+a_{2,n}y_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n &= a_{n,1}y_1+a_{n,2}y_2+\dots+a_{n,n}y_n, \end{aligned}$$

to mówimy, że dokonywamy *przekształcenia* (lub *podstawienia*) *liniowego jednorodnego*.

Na to, żeby każdemu układowi liczb $x_1,x_2,\dots,x_n$ odpowiadał jeden i tylko jeden układ liczb $y_1,y_2,\dots,y_n$, spełniający wzory (2), potrzeba i wystarcza, jak to wynika z Teorii równań liniowych, iżby wyznacznik

(3) $$D=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

przekształcenia (1) był różny od zera. Wiemy z Rozdziału III, § 1, że wówczas zmienne $y_1,y_2,\dots,y_n$ dadzą się wyrazić liniowo i jednorodnie przez zmienne $x_1,x_2,\dots,x_n$ za pomocą wzorów (por. wzory (5), str. 38):

$$\begin{aligned} Dy_1 &= D_{1,1}x_1-D_{2,1}x_2+\dots+(-1)^{n+1}D_{n,1}x_n\\ Dy_2 &= -D_{1,2}x_1+D_{2,2}x_2-\dots+(-1)^{n+2}D_{n,2}x_n\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ Dy_n &= (-1)^{n+1}D_{1,n}x_n+(-1)^{n+2}D_{2,n}x_n+\dots+D_{n,n}x_n, \end{aligned}$$

gdzie $D_{k,l}$ oznacza minor wyznacznika D, odpowiadający elementowi $a_{k,l}$. Wyznacznikiem przekształcenia odwrotnego będzie, jak wykazaliśmy w Rozdziale II, § 12 (ob. wzór (30), str. 31), wyznacznik

$$\Delta=\frac{1}{D^n}\begin{vmatrix} D_{1,1} & -D_{2,1} & \dots & (-1)^{n+1}D_{n,1}\\ -D_{1,2} & D_{2,2} & \dots & (-1)^{n+2}D_{n,2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (-1)^{n+1}D_{1,n} & (-1)^{n+2}D_{2,n} & \dots & D_{n,n} \end{vmatrix}=\frac{D^{n-1}}{D^n}=\frac{1}{D},$$

czyli odwrotność wyznacznika D. Jeżeli zatem $D=1$, to i $\Delta=1$.

Przypuśćmy dalej, że od zmiennych $y_1,y_2,\dots,y_n$ przechodzimy jeszcze do zmiennych $z_1,z_2,\dots,z_n$ za pomocą przekształcenia liniowego jednorodnego

(2′) $$\begin{aligned} y_1 &= b_{1,1}z_1+b_{1,2}z_2+\dots+b_{1,n}z_n,\\ y_2 &= b_{2,1}z_1+b_{2,2}z_2+\dots+b_{2,n}z_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n &= b_{n,1}z_1+b_{n,2}z_2+\dots+b_{n,n}z_n \end{aligned}$$

o wyznaczniku

(3′) $$D'=\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Przejście od zmiennych $x_1,x_2,\dots,x_n$ do zmiennych $z_1,z_2,\dots,z_n$ moglibyśmy też wykonać bezpośrednio za pomocą przekształcenia liniowego jednorodnego

(4) $$\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}z_1+c_{1,2}z_2+\dots+c_{1,n}z_n,\\ x_2 &= c_{2,1}z_1+c_{2,2}z_2+\dots+c_{2,n}z_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n &= c_{n,1}z_1+c_{n,2}z_2+\dots+c_{n,n}z_n. \end{aligned}$$

Aby obliczyć współczynniki $c_{k,l}$ tego przekształcenia, wstawmy do wzorów (2) wyrażenia na $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ze wzorów (2′); otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+\ \ldots\ +a_{1,n}b_{n,1})z_1+\ldots \\
&\qquad \ldots+(a_{1,1}b_{1,n}+a_{1,2}b_{2,n}+\ \ldots\ +a_{1,n}b_{n,n})z_n, \\
x_2 &= (a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+\ \ldots\ +a_{2,n}b_{n,1})z_1+\ldots \\
&\qquad \ldots+(a_{2,1}b_{1,n}+a_{2,2}b_{2,n}+\ \ldots\ +a_{2,n}b_{n,n})z_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= (a_{n,1}b_{1,1}+a_{n,2}b_{2,1}+\ \ldots\ +a_{n,n}b_{n,1})z_1+\ldots \\
&\qquad \ldots+(a_{n,1}b_{1,n}+a_{n,2}b_{2,n}+\ \ldots\ +a_{n,n}b_{n,n})z_n.
\end{aligned}
$$

Mamy więc dla współczynników $c_{k,l}$ wzory:

$$c_{k,l} = a_{k,1}b_{1,l}+a_{k,2}b_{2,l}+\ \ldots\ +a_{k,n}b_{n,l}, \tag{5}$$

gdzie $k=1,2,\ldots,n$ i $l=1,2,\ldots,n$. Widzimy, że współczynniki przekształcenia (4) otrzymują się tak jak elementy wyznacznika, będącego iloczynem wyznaczników D i D', przez mnożenie *wierszy* wyznacznika D przez *kolumny* wyznacznika D'. Wynika stąd natychmiast, że wyznacznik przekształcenia (4) jest równy iloczynowi wyznaczników przekształceń (2) i (2′). Jeżeli więc $D=1$ oraz $D'=1$, to wyznacznik przekształcenia (4) jest też równy 1.

§ 2. Przekształcenia ortogonalne. Przekształcenie liniowe jednorodne (2) nazywamy *ortogonalnym* (czyli *prostokątnym*), jeżeli suma kwadratów zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przechodzi zawsze na sumę kwadratów zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_n$, t.j. jeżeli przy wszelkich $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mamy

$$x_1^2+x_2^2+\ \ldots\ +x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\ \ldots\ +y_n^2.$$

Zgodnie z (2):

$$x_1^2+x_2^2+\ \ldots\ +x_n^2 = \sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{k,l}^2\Big)y_l^2 + 2\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{p-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{j,p}a_{j,q}\Big)y_p y_q,$$

skąd wynika, że przekształcenie (2) jest ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,l}^2 = 1 \quad \text{dla } l=1,2,\ldots,n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{j,p}a_{j,q} = 0 \quad \text{dla } p \neq q \tag{6}$$

(gdzie $p=1,2,\ldots,n$ i $q=1,2,\ldots,n$).

Wobec twierdzenia o mnożeniu wyznaczników (Rozdział II, § 10, str. 27, tw. 5), wynika stąd z łatwością

Twierdzenie 1. *Kwadrat wyznacznika przekształcenia ortogonalnego jest równy jedności*, (zatem sam wyznacznik ma wartość ± 1).

Z (2) i (6) znajdujemy dla $l=1,2,\ldots,n$:

$$
\begin{aligned}
&a_{1,l}x_1+a_{2,l}x_2+\ldots+a_{n,l}x_n = a_{1,l}(a_{1,1}y_1+\ldots+a_{1,n}y_n)+ \\
&+a_{2,l}(a_{2,1}y_1+\ldots+a_{2,n}y_n)+\ldots+a_{n,l}(a_{n,1}y_1+\ldots+a_{n,n}y_n) = \\
&=(a_{1,l}a_{1,1}+a_{2,l}a_{2,1}+\ldots+a_{n,l}a_{n,1})y_1+\ldots+(a_{1,l}^2+a_{2,l}^2+\ldots+a_{n,l}^2)y_l+\ldots \\
&\ldots+(a_{1,l}a_{1,n}+a_{2,l}a_{2,n}+\ldots+a_{n,l}a_{n,n})y_n = 1\cdot y_l.
\end{aligned}
$$

Mamy więc (por. Rozdział III, § 1, wzory (2)):

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{1,1}x_1+a_{2,1}x_2+\ \ldots\ +a_{n,1}x_n, \\
y_2 &= a_{1,2}x_1+a_{2,2}x_2+\ \ldots\ +a_{n,2}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= a_{1,n}x_1+a_{2,n}x_2+\ \ldots\ +a_{n,n}x_n.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Macierz współczynników przekształcenia (7), odwrotnego względem przekształcenia ortogonalnego (2), otrzymuje się więc z macierzy współczynników tego ostatniego przez zamianę wierszy na kolumny i na odwrót.

Przekształcenie odwrotne względem przekształcenia ortogonalnego oczywiście też jest ortogonalne; wynikają stąd związki:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}^2 = 1 \quad \text{dla } k=1,2,\ldots,n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{p,j}a_{q,j} = 0 \quad \text{dla } p \neq q$$

(gdzie $p=1,2,\ldots,n$ i $q=1,2,\ldots,n$).

Związki te są więc konsekwencją związków (6). Mamy zatem:

Twierdzenie 2. *W macierzy współczynników przekształcenia ortogonalnego suma kwadratów elementów jakiegokolwiek wiersza (lub kolumny) jest równa* 1, *zaś suma iloczynów odpowiednich elementów dwóch różnych wierszy (lub dwóch różnych kolumn) jest równa* 0.