ROZDZIAŁ III

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ LINIOWYCH

§ 1. Przekształcenia liniowe. Niech n będzie dowolnie daną liczbą naturalną, zaś

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad \text{oraz} \qquad y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{1}$$

niech będą liczbami, spełniającymi układ równań

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \ldots + a_{1,n}\, x_n \\ y_2 &= a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \ldots + a_{2,n}\, x_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n &= a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \ldots + a_{n,n}\, x_n, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie współczynniki $a_{k,l}$ (dla $k=1,2,\ldots,n$ i $l=1,2,\ldots,n$), są dane. Wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{3}$$

nazywamy *wynacznikiem układu równań* (2).

Minor, odpowiadający elementowi $a_{k,l}$ wyznacznika D, oznaczamy, jak w Rozdziale II, przez $D_{k,l}$.

Niech k będzie którąkolwiek z liczb $1,2,\ldots,n$. Zachodzi następująca równość:

$$\begin{aligned} &(-1)^{k+1} D_{1,k} y_1 + (-1)^{k+2} D_{2,k} y_2 + \ldots + (-1)^{k+n} D_{n,k} y_n = \\ &= \sum_{l=1}^{n} [(-1)^{k+1} a_{1,l} D_{1,k} + (-1)^{k+2} a_{2,l} D_{2,k} + \ldots + (-1)^{k+n} a_{n,l} D_{n,k}]\, x_l, \end{aligned} \tag{4}$$

którą otrzymujemy odrazu, podstawiając zamiast $y_1, y_2, \ldots, y_n$ po lewej stronie odpowiednie wartości tych zmiennych z kolejnych równań układu (2).

W myśl wzorów (14) i (21) z Rozdziału II, wnosimy, że po prawej stronie wzoru (4) współczynnik przy x_k jest równy D, współczynniki zaś przy x_l dla $l \neq k$ są równe 0. Wzór (4) daje więc

$$(-1)^{k+1}D_{1,k}y_1+(-1)^{k+2}D_{2,k}y_2+\dots+(-1)^{k+n}D_{n,k}y_n=Dx_k.$$

Ponieważ k było dowolną z liczb $1,2,\dots,n$, więc wyprowadziliśmy wzory:

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} Dx_1 &= D_{1,1}y_1-D_{2,1}y_2+\dots+(-1)^{n+1}D_{n,1}y_n\\ Dx_2 &= -D_{1,2}y_1+D_{2,2}y_2-\dots+(-1)^{n+2}D_{n,2}y_n\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ Dx_n &= (-1)^{n+1}D_{1,n}y_1+(-1)^{n+2}D_{2,n}y_2+\dots+D_{n,n}y_n. \end{aligned}$$

Wzory (2) pociągają więc za sobą wzory (5). Okażemy teraz, że gdy $D \neq 0$, to i naodwrót: wzory (5) pociągają za sobą wzory (2). Istotnie, ze wzorów (5) otrzymujemy

$$D(a_{k,1}x_1+a_{k,2}x_2+\dots+a_{k,n}x_n)=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}[(-1)^{l+1}a_{k,1}D_{l,1}+(-1)^{l+2}a_{k,2}D_{l,2}+\dots+(-1)^{l+n}a_{k,n}D_{l,n}]\,y_l,$$

co na mocy wzorów (20) i (13) z Rozdziału II, daje

$$D(a_{k,1}x_1+a_{k,2}x_2+\dots+a_{k,n}x_n)=Dy_k,$$

skąd wobec założenia, że $D \neq 0$:

$$a_{k,1}x_1+a_{k,2}x_2+\dots+a_{k,n}x_n=y_k.$$

Ponieważ $k=1,2,\dots,n$, więc w ten sposób otrzymaliśmy wzory (2) z (5). Tak więc gdy $D \neq 0$, wzory (2) i (5) są sobie równoważne. Mamy zatem:

Twierdzenie 1. *Jeżeli układ równań* (2) *ma wyznacznik* $D \neq 0$, *to układ ten jest równoważny układowi równań* (5).

Wzory (2) wyrażają t. zw. *przekształcenie liniowe jednorodne zmiennych* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *na zmienne* $y_1, y_2, \dots, y_n$; w razie gdy $D \neq 0$, wzory (5) dają przekształcenie odwrotne, które wówczas też jest liniowe i jednorodne.

Obszerniej zajmiemy się przekształceniami liniowymi w Rozdziale IV.

§ 2. Rozwiązywanie układu równań liniowych. Zastosujemy teraz otrzymane wyniki do rozwiązywania układu n równań liniowych o n niewiadomych[1]), t. j. układu równań

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\dots+a_{1,n}x_n &= b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\dots+a_{2,n}x_n &= b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\dots+a_{n,n}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

gdzie liczby $a_{k,l}$ oraz b_k są dane dla $k=1,2,\dots,n$ i $l=1,2,\dots,n$. Przypuśćmy, że układ równań (6) ma wyznacznik $D \neq 0$. Wzory (2) są wówczas w myśl twierdzenia 1 równoważne wzorom (5); zatem na to, żeby liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniały równanie (6), potrzeba i wystarcza, żeby było:

$$\text{(7)}\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{D}\Big[D_{1,1}b_1-D_{2,1}b_2+\dots+(-1)^{n+1}D_{n,1}b_n\Big]\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_k &= \frac{1}{D}\Big[(-1)^{k+1}D_{1,k}b_1+(-1)^{k+2}D_{2,k}b_2+\dots+(-1)^{k+n}D_{n,k}b_n\Big]\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n &= \frac{1}{D}\Big[(-1)^{n+1}D_{n,1}b_1+(-1)^{n+2}D_{n,2}+\dots+D_{n,n}b_n\Big]. \end{aligned}\right.$$

Wyrażenie

$$\Delta_k=(-1)^{k+1}D_{1,k}b_1+(-1)^{k+2}D_{2,k}b_2+\dots+(-1)^{k+n}D_{n,k}b_n$$

jest, jak to wynika z rozwinięcia wyznacznika według elementów k-tej kolumny (Rozdział II, § 6, wzór (14)), wyznacznikiem, jaki otrzymujemy z wyznacznika D, zastępując w nim k-tą kolumnę przez kolumnę wyrazów wolnych $b_1, b_2, \dots, b_n$, czyli

$$\text{(8)}\qquad \Delta_k=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot\, a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdot & \cdot & a_{1,n}\\ a_{2,1} & \cdot & \cdot\, a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdot & \cdot & a_{2,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n,1} & \cdot & \cdot\, a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

[1]) Układy równań liniowych mogą być badane też bez pomocy wyznaczników, jeżeli idzie o warunki konieczne i dostateczne rozwiązalności oraz o strukturę rozwiązań (ob. w tym względzie np. H. Hasse, *Höhere Algebra*, Tom I, Sammlung Göschen, Berlin i Lipsk 1926, §§ 11-15, str. 82-109). Praktycznego znaczenia badania te jednak nie mają (ob. tamże, str. 107. Ob. też O. Haupt, *Einführung in die Algebra*, Tom I, Lipsk 1929, str. 187-191, gdzie analizowana jest metoda stopniowej eliminacji).

Mamy więc:

Twierdzenie 2. *Jeżeli układ równań* (6) *ma wyznacznik* $D \neq 0$, *to istnieje jeden i tylko jeden układ liczb* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *spełniający równania* (6), *mianowicie*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{D}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{D}, \tag{9}$$

gdzie liczby Δ_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ *są określone przez wzór* (8).

Wzory (9) nazywane są niekiedy *wzorami Cramer'a.*

Twierdzenie 2 — ze wzorami (8) i (9) — stanowi zarazem ***regułę*** rozwiązywania układu n równań liniowych (niejednorodnych) o n niewiadomych (w przypadku, gdy wyznacznik układu nie jest zerem).

W przypadku, kiedy równania (6) są *jednorodne*, t. j. kiedy $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, mamy wobec (8) $\Delta_k = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$, skąd wobec (9) $x_k = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Mamy zatem:

Twierdzenie 3. *Układ n równań liniowych jednorodnych o n niewiadomych, którego wyznacznik jest różny od* 0, *nie posiada innych rozwiązań prócz zerowego*, t. j. takiego w którym wszystkie niewiadome są równe 0 [1]).

Wynika stąd natychmiast

Twierdzenie 4. *Jeżeli układ n równań liniowych jednorodnych o n niewiadomych posiada rozwiązanie, w którym nie wszystkie niewiadome są zerami, to wyznacznik tego układu jest równy* 0.

Z twierdzenia tego (którego tw. odwrotne udowodnimy w § 6, str. 50) będziemy później często korzystali.

§ 3. Przykłady. 1. Rozwiążmy układ trzech równań o trzech niewiadomych:

$$\begin{aligned} 5x - 2y + 3z &= 7 \\ 2x + 3y - 4z &= 8 \\ 3x + 4y + 5z &= 1. \end{aligned} \qquad \text{Mamy tu} \qquad D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 196 \neq 0,$$

[1]) Twierdzenie odwrotne do tw. 3 też jest prawdziwe (ob. § 6, tw. 6).

zatem

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 8 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{392}{196} = 2, \qquad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$z = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-196}{196} = -1.$$

2. Rozwiążmy układ 4 równań o 4 niewiadomych:

$$\begin{aligned} y + z + t &= a \\ x + z + t &= b \\ x + y + t &= c \\ x + y + z &= d. \end{aligned} \qquad \text{Mamy tu} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

zatem

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2a - b - c - d}{-3}, \qquad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & c & 0 & 1 \\ 1 & d & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2b - a - c - d}{-3}$$

i t. d. Dany układ równań możemy też z łatwością rozwiązać bezpośrednio, zważywszy, że dodając je stronami, otrzymujemy $3(x + y + z + t) = a + b + c + d$, skąd $x + y + z + t = \frac{a + b + c + d}{3}$, zatem, odejmując pierwsze równanie, otrzymujemy $x = \frac{a + b + c + d}{3} - a = \frac{b + c + d - 2a}{3}$ i t. d.

3. Rozwiążmy układ 4 równań o 4 niewiadomych:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 8 &= 0 \\ 3x + 2z - 9 &= 0 \\ 4y + 3t - 20 &= 0 \\ 2z + t - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Wyznacznik tego układu jest

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-18) = 38.$$

Stąd

$$x = \frac{1}{38}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 4 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8 \cdot (-8) - 3 \cdot (-34)}{38} = \frac{38}{38} = 1$$

i podobnie $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$.

4. Ciąg nieskończony u_n $(n=1,2,\ldots)$, określony przez warunki:

$$u_1=u_2=1, \quad \text{zaś} \quad u_n=u_{n-2}+u_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 3,$$

nazywa się, jak wiadomo, *ciągiem Fibonacci'ego* (por. str. 24).

Wyrazimy za pomocą wyznacznika n-ty wyraz tego ciągu. Zauważymy w tym celu, że przy danym naturalnym n liczby $u_1,u_2,\ldots,u_n$ spełniają układ n równań liniowych:

$$\begin{aligned}
&u_1=1\\
&-u_1+u_2=0\\
&-u_1-u_2+u_3=0\\
&\qquad -u_2-u_3+u_4=0\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad -u_{n-2}-u_{n-1}+u_n=0.
\end{aligned}$$

Wyznacznikiem D tego układu równań jest

$$D=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & -1 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & -1 & 1
\end{vmatrix}=1$$

(gdyż wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, zaś wszystkie elementy znajdujące się powyżej niej są równe 0).

Będzie więc

$$u_n=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & -1 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & -1 & 0
\end{vmatrix}$$

Rozwijając ten wyznacznik według elementów ostatniej kolumny, otrzymamy

$$u_n=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0\\
0 & -1 & -1 & 1 & . & . & 0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & -1 & -1
\end{vmatrix}.$$

Wyznacznik po prawej stronie jest $n-1$-go stopnia. Wszystkie elementy jego głównej przekątnej, jako też przekątnej z nią sąsiadującej z dołu, są równe -1, zaś wszystkie elementy przekątnej sąsiadującej z górną przekątną główną są równe 1, wreszcie wszystkie inne elementy są równe 0. Więc np.

$$u_4=\begin{vmatrix}
-1 & 1 & 0\\
-1 & -1 & 1\\
0 & -1 & -1
\end{vmatrix}=3, \qquad u_5=\begin{vmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 0\\
0 & -1 & -1 & 1\\
0 & 0 & -1 & -1
\end{vmatrix}=5.$$

5. Rozwiążmy układ 5 równań o 5 niewiadomych[1]):

$$x_1+x_2=16, \quad x_2+x_3=17, \quad x_3+x_4=18, \quad x_4+x_5=19, \quad x_5+x_1=20.$$

Wyznacznik tych równań jest równy 2. Stosując wzory Cramer'a, otrzymujemy na kolejne niewiadome wartości 9, 7, 10, 8, 11.

W tym wypadku jednak droga elementarna szybciej doprowadza do celu. Dodając stronami wszystkie równania, otrzymujemy $2(x_1+\ldots+x_5)=90$, skąd $x_1+\ldots+x_5=45$. Dodając zaś stronami pierwsze i trzecie równanie, otrzymujemy $x_1+\ldots+x_4=16+18=34$. Stąd $x_5=45-34=11$. Ostatnie równanie daje więc $x_1=20-x_5=20-11=9$, pierwsze $x_2=16-x_1=16-9=7$, drugie $x_3=17-x_2=17-7=10$, trzecie $x_4=18-x_3=18-10=8$.

Widzimy więc, że metoda rozwiązywania równań liniowych za pomocą wyznaczników nie zawsze jest najprostszą.

6. Weźmy pod uwagę układ k równań o k niewiadomych $s_1,s_2,\ldots,s_n$:

$$\begin{aligned}
&s_1=p_1\\
&p_1s_1-s_2=2p_2\\
&p_2s_1-p_1s_2+s_3=3p_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{k-1}s_1-p_{k-2}s_2+\ldots+(-1)^{k-2}p_1s_{k-1}+(-1)^{k-1}s_k=kp_k,
\end{aligned}$$

gdzie $p_1,p_2,\ldots,p_k$ oznaczają liczby dane.

Wyznacznikiem tego układu równań jest, jak łatwo obliczyć, $D=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$, skąd znajdujemy dalej:

$$s_k=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & . & . & 0 & p_1\\
p_1 & -1 & 0 & . & . & 0 & 2p_2\\
p_2 & -p_1 & 1 & . & . & 0 & 3p_3\\
. & . & . & . & . & . & .\\
p_{k-1} & -p_{k-2} & p_{k-3} & . & . & (-1)^{k-2}p_1 & kp_k
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
p_1 & 1 & 0 & . & . & 0\\
2p_2 & p_1 & 1 & . & . & 0\\
3p_3 & p_2 & p_1 & . & . & 0\\
. & . & . & . & . & .\\
kp_k & p_{k-1} & p_{k-2} & . & . & p_1
\end{vmatrix}$$

[1]) Ob. B. Datta i A. N. Singh, *History of Hindu Mathematics*, Tom II (Algebra), Lahore 1938, str. 48; por. tamże str. 17.

Więc np.

$$s_3=\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ 2p_2 & p_1 & 1 \\ 3p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix}=p_1^3-3p_1p_2+3p_3.$$

Gdybyśmy natomiast w tymże układzie równań uważali liczby $s_1, s_2, \ldots, s_k$ za dane, zaś liczby $p_1, p_2, \ldots, p_k$ za niewiadome, otrzymalibyśmy, jak łatwo obliczyć:

$$p_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & . & . & s_1 \end{vmatrix}.$$

Zastosowanie tych wzorów podamy później (ob. Rozdział IX, § 5).

ĆWICZENIA: 1. Rozwiązać układ 3 równań o 3 niewiadomych:

$$5x-y+4z=3, \qquad 10x-y+11z=8, \qquad 15x-7y+2z=1.$$

Odp.: $D=10$, $x=1$, $y=2$, $z=0$.

2. Rozwiązać układ 4 równań o 4 niewiadomych:

$$2x+3y-8=0, \qquad 3x+2z-9=0, \qquad 4y+3t-20=0, \qquad 2z+t-10=0.$$

Odp.: $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=4$.

3. Rozwiązać układ $2n-1$ równań o $2n-1$ niewiadomych [1]:

$$x_1+x_2=a_1, \quad x_2+x_3=a_2, \quad \ldots, \quad x_{2n-2}+x_{2n-1}=a_{2n-2}, \quad x_{2n-1}+x_1=a_{2n-1},$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}$ są liczbami danymi. Zastosować wzory Cramer'a i metodę użytą w przykładzie 5 z § 3. Porównać obie metody.

Odp.: $x_1=(a_{2n-1}-a_{2n-2}+a_{2n-3}-\ldots-a_2+a_1)/2$,
$x_2=(a_1-a_{2n-1}+a_{2n-2}-\ldots-a_3+a_2)/2$ i t. d.

4. Rozwiązać układ równań

$$2x_1+6x_2+4x_3=46, \qquad 4x_1+9x_2-4x_3=53, \qquad 3x_1+7x_2+5x_3=57.$$

Odp.: $x_1=4$, $x_2=5$, $x_3=2$.

5. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1+6x_2-4x_3+10x_4&=22\\ 3x_1+4x_2-26x_3+30x_4&=-72\\ 6x_1+22x_2+6x_3+22x_4&=170\\ 5x_1+11x_2-29x_3+32x_4&=-57. \end{aligned}$$

Odp. $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=6$, $x_4=2$.

[1]) Por. B. Datta i A. N. Singh, tamże, str. 48.

§ 4. Rozwiązywanie układu m równań liniowych o n niewiadomych, gdy stopień wyznacznika podstawowego jest równy liczbie równań. Przystąpimy teraz do rozwiązywania układu m równań o n niewiadomych, gdzie m i n oznaczają dwie dane liczby naturalne. Niech to będzie układ równań:

$$(10) \qquad \begin{aligned} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,n}x_n&=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,n}x_n&=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\ldots+a_{m,n}x_n&=b_m. \end{aligned}$$

Tablicę

$$(11) \qquad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & . & . & a_{m,n} \end{matrix}$$

nazywamy *macierzą współczynników układu równań* (10).

Wyznacznikiem należącym do macierzy (11) będziemy nazywali każdy wyznacznik, utworzony z elementów tablicy, jaką otrzymamy z macierzy (11) przez usunięcie z niej pewnej liczby wierszy oraz pewnej liczby kolumn. Będą to więc wyznaczniki postaci

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1,\beta_1} & a_{\alpha_1,\beta_2} & . & . & a_{\alpha_1,\beta_p} \\ a_{\alpha_2,\beta_1} & a_{\alpha_2,\beta_2} & . & . & a_{\alpha_2,\beta_p} \\ . & . & . & . & . \\ a_{\alpha_p,\beta_1} & a_{\alpha_p,\beta_2} & . & . & a_{\alpha_p,\beta_p} \end{vmatrix},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ jest ciągiem rosnącym utworzonym z liczb $1, 2, \ldots, m$, zaś $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ ciągiem rosnącym utworzonym z liczb $1, 2, \ldots, n$. Stopień żadnego z wyznaczników należących do macierzy (11) nie przekracza oczywiście ani liczby m, ani liczby n.

Jeżeli pominiemy przypadek trywialny, w którym wszystkie współczynniki macierzy (11) są równe 0, to wśród wyznaczników należących do macierzy (11) istnieją różne od zera, jak np. utworzone z jednego tylko elementu macierzy (11). Niech p oznacza najwyższy stopień wyznaczników różnych od zera, należących do macierzy (11). Zatem $p \leqslant m$ oraz $p \leqslant n$ i istnieją wyznaczniki stopnia p różne od zera, należące do macierzy (11): będziemy je nazywali *wyznacznikami głównymi* należącymi do macierzy (11).

Oznaczmy którykolwiek z nich przez P i nazwijmy go *wyznacznikiem podstawowym.*

Nie uszczuplając ogólności rozważań, będziemy mogli, dalej, założyć, że

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdot & \cdot & a_{p,p} \end{vmatrix},$$

w przeciwnym bowiem razie wystarczyłoby w układzie równań (10) zmienić oznaczenia współczynników oraz niewiadomych. Mamy, jak widzieliśmy, $p \leqslant m$ i $p \leqslant n$. Zajmiemy się naprzód przypadkiem $p=m$. Gdyby było również $p=n$, mielibyśmy zbadany już przypadek n równań liniowych o n niewiadomych i wyznaczniku różnym od zera. Przypuśćmy więc, że $p<n$; liczba niewiadomych jest tu więc większa od liczby równań.

Oznaczmy przez $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ dowolne liczby i przyjmijmy ogólnie dla $i=1,2,\ldots,p$

$$(12) \qquad y_l = b_l - a_{l,p+1}x_{p+1} - a_{l,p+2}x_{p+2} - \ldots - a_{l,n}x_n.$$

Układ równań (10) przybiera teraz postać:

$$(13) \qquad \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,p}x_p = y_p. \end{array}$$

Ponieważ wyznacznik P układu równań (13) jest różny od 0, więc na mocy twierdzenia 1, układ równań (10) jest równoważny układowi

$$x_k = \frac{1}{P}[(-1)^{k+1}P_{1,k}y_1 + (-1)^{k+2}P_{2,k}y_2 + \ldots + (-1)^{k+p}P_{p,k}y_p],$$

dla $k=1,2,\ldots,p$, gdzie $P_{l,k}$ oznacza minor wyznacznika P odpowiadający elementowi $a_{l,k}$.

Możemy więc wobec (11) powiedzieć, że w badanym obecnie przypadku:

Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają układ równań (10) *wtedy i tylko wtedy, gdy przy dowolnych wartościach liczb $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ liczby $x_1, x_2, \ldots, x_p$ są wyznaczone dla $k=1,2,\ldots,p$ ze wzorów*

$$(14) \qquad x_k = \frac{1}{P}\sum_{l=1}^{p}(-1)^{l+k}P_{l,k}(b_l - a_{l,p+1}x_{p+1} - a_{l,p+2}x_{p+2} - \ldots - a_{l,n}x_n);$$

Liczby $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ są tu więc dowolne, zaś liczby $x_1, x_2, \ldots, x_p$ wyrażają się przez nie liniowo wzorami (14). Ponieważ, jak założyliśmy, jest $p<n$, więc mamy tu nieskończenie wiele układów liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$, spełniających układ równań (10).

§ 5. Rozwiązywanie układu m równań liniowych o n niewiadomych, gdy stopień wyznacznika podstawowego jest mniejszy od ilości równań. Zajmijmy się z kolei przypadkiem $p<m$. Każdy z $m-p$ wyznaczników (stopnia $p+1$-go)

$$(15) \qquad W_l = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,p} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1} & \cdot & \cdot & a_{p,p} & b_p \\ a_{l,1} & \cdot & \cdot & a_{l,p} & b_l \end{vmatrix},$$

gdzie $i=p+1, p+2, \ldots, m$, będziemy nazywali *wyznacznikiem charakterystycznym odpowiadającym wyznacznikowi podstawowemu P.*

Przypuśćmy, że istnieje układ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$, spełniający układ równań (10). Dla każdego takiego układu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ określimy liczby $f_1, f_2, \ldots, f_m$ przez wzór:

$$(16) \qquad f_l = b_l - a_{l,1}x_1 - a_{l,2}x_2 - \ldots - a_{l,n}x_n \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Będzie więc $f_l=0$ dla $i=1,2,\ldots,m$, skąd

$$(17) \qquad V_l = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,p} & f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1} & \cdot & \cdot & a_{p,p} & f_p \\ a_{l,1} & \cdot & \cdot & a_{l,p} & f_l \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{dla} \quad i=p+1, p+2, \ldots, m.$$

Wobec (17), (16) i (15) mamy

$$(18) \qquad V_l = W_l - \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta_{l,k},$$

gdzie

$$(19)\quad \Delta_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & . & . & a_{1,p} & a_{1,k} \\ a_{2,1} & . & . & a_{2,p} & a_{2,k} \\ . & . & . & . & . \\ a_{p,1} & . & . & a_{p,p} & a_{p,k} \\ a_{i,1} & . & . & a_{i,p} & a_{i,k} \end{vmatrix} \quad \text{dla } i=p+1,\dots,m \text{ oraz } k=1,2,\dots,n.$$

Jeżeli $k \leqslant p$, to wyznacznik $\Delta_{i,k}$ posiada dwie kolumny równe (k-tą i $p+1$-szą), zatem jest równy 0. Jeżeli zaś $p<k\leqslant n$, to wyznacznik $\Delta_{i,k}$ należy do macierzy (11) i jest stopnia $p+1>p$, musi więc być równy 0 zgodnie z definicją wyznacznika podstawowego P.

Mamy zatem

$$\Delta_{i,k}=0 \quad \text{dla} \quad i=p+1,\dots,m \quad \text{oraz} \quad k=1,2,\dots,n$$

i wzór (18) daje $V_i=W_i$ dla $i=p+1,p+2,\dots,m$, skąd wobec (17):

$$W_i=0 \quad \text{dla} \quad i=p+1,p+2,\dots,m.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że jeżeli układ równań (10) jest rozwiązalny, to każdy z $m-p$ wyznaczników charakterystycznych, odpowiadających wyznacznikowi podstawowemu P, jest równy zeru.

Okażemy teraz, że i na odwrót, jeżeli każdy z wyznaczników charakterystycznych, odpowiadających wyznacznikowi podstawowemu P, jest równy zeru, to układ równań (10) jest rozwiązalny.

W tym celu zauważymy przede wszystkim, że układ utworzony z pierwszych p równań układu (10), jest rozwiązalny, gdyż stopień wyznacznika podstawowego tego układu jest równy liczbie równań, co — jak wiemy z § 4 — pociąga za sobą rozwiązalność układu.

Załóżmy, że każdy z wyznaczników charakterystycznych, odpowiadających wyznacznikowi podstawowemu P, jest równy 0 i niech $x_1,x_2,\dots,x_n$ oznacza jakikolwiek układ liczb, spełniający p pierwszych równań układu (10). Określając liczby f_i dla $i=1,2,\dots,m$ wzorem (16), mamy więc

$$(20)\qquad f_i=0 \quad \text{dla} \quad i=1,2,\dots,p.$$

Z założenia wynika według wzoru (15), że

$$(21)\qquad W_i=0 \quad \text{dla} \quad i=p+1,p+2,\dots,m.$$

Określmy, jak wyżej, V_i przez wzór (17): znajdziemy, że $V_i=W_i$, a zatem, wobec (21), $V_i=0$. Jeśli zaś rozwiniemy wyznacznik V_i według elementów ostatniej kolumny, to z uwagi na (20) otrzymamy

$$V_i=Pf_i,$$

skąd wobec $V_i=0$ oraz $P\neq 0$ wynika, że

$$(22)\qquad f_i=0 \quad \text{dla} \quad i=p+1,p+2,\dots,m.$$

Tak więc z założenia, że wszystkie wyznaczniki charakterystyczne odpowiadające wyznacznikowi podstawowemu P są równe 0 oraz że układ liczb $x_1,x_2,\dots,x_n$ spełnia p pierwszych spośród równań (10), wynika, że układ ten spełnia wszystkie równania (10). Innymi słowy, każde równanie układu (10), późniejsze niż p-te, jest konsekwencją pierwszych p równań tego układu. A zatem w badanym obecnie przypadku:

Warunek konieczny i dostateczny rozwiązalności układu równań (10) *polega na tym, aby wszystkie wyznaczniki charakterystyczne, odpowiadające wyznacznikowi podstawowemu P, były równe* 0.

Aby znaleźć rozwiązania układu (10), wystarczy więc znaleźć rozwiązanie układu pierwszych p równań.

§ 6. Sposób rozwiązywania układu m równań liniowych o n niewiadomych w przypadku ogólnym. W §§ 4 i 5 zbadaliśmy wszystkie przypadki, jakie mogą występować przy rozwiązywaniu układu m równań liniowych o n niewiadomych. Na podstawie otrzymanych wyników możemy wypowiedzieć następującą *regułę:*

Chcąc zbadać rozwiązalność układu m równań liniowych o n niewiadomych, musimy przede wszystkim znaleźć stopień p wyznaczników głównych macierzy współczynników tego układu, a następnie wybrać wyznacznik podstawowy P.

Jeżeli $p=m$, to układ jest rozwiązalny, jeżeli zaś $p<m$, to dla rozwiązalności układu potrzeba i wystarcza, iżby każdy z $m-p$ wyznaczników charakterystycznych, odpowiadających wyznacznikowi podstawowemu P, był równy zeru.

Po stwierdzeniu rozwiązalności układu równań liniowych, wystarczy, dla znalezienia rozwiązań, poprzestać na p równaniach, z których współczynników został utworzony wyznacznik podstawowy P. Dla znalezienia wszystkich rozwiązań układu przenosimy wszystkie $n-p$ nie-

wiadomych, których współczynniki nie weszły do wyznacznika P, na prawą stronę i, nadając im dowolne wartości, rozwiązujemy otrzymany w ten sposób układ p równań liniowych o p niewiadomych i o wyznaczniku $P \neq 0$ według reguły otrzymanej w § 2 (str. 40).

W szczególności, jeżeli wszystkie równania danego układu są jednorodne, to, jak wiemy z tw. 3, układ ten jest zawsze rozwiązalny, wobec czego odpada badanie wyznaczników charakterystycznych.

Z otrzymanej reguły wynika nadto

Twierdzenie 5. *Rozwiązalny układ m równań liniowych o n niewiadomych posiada jedyne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy stopień wyznacznika podstawowego równy jest liczbie niewiadomych.*

W szczególności, co się tyczy układu n równań liniowych jednorodnych o n niewiadomych, to, jak wiemy z twierdzenia 3, jeżeli układ taki posiada rozwiązanie nie zerowe, to wyznacznik jego musi być równy 0. Łatwo wykazać, że i na odwrót: jeżeli wyznacznik układu n równań liniowych jednorodnych jest równy 0, to układ ten posiada rozwiązania nie zerowe, przy czym rozwiązań takich jest nieskończenie wiele. W tym bowiem razie stopień p wyznacznika podstawowego P jest mniejszy od n, zatem mniejszy od liczby niewiadomych; $n-p$ niewiadomym, których współczynniki nie wchodzą do P, możemy nadać dowolne wartości, a więc też wartości różne od 0. Mamy więc

Twierdzenie 6. *Na to, aby układ n równań liniowych jednorodnych o n niewiadomych posiadał rozwiązanie niezerowe, potrzeba i wystarcza, aby wyznacznik jego był równy zeru. W tym ostatnim przypadku układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań.*

§ 7. Warunek konieczny i dostateczny rozwiązalności układu m równań liniowych o n niewiadomych. Warunek ten możemy wyrazić krótko, wprowadzając pewne terminy. Niech M oznacza macierz prostokątną, utworzoną ze współczynników przy niewiadomych danego układu równań liniowych. Nazwijmy *rzędem* macierzy M najwyższy stopień wyznaczników różnych od zera, należących do tej macierzy.

Nazwijmy, dalej, *macierzą uzupełnioną* macierz, którą otrzymamy, dopisując do macierzy M kolumnę wyrazów wolnych rozważanych równań jako ostatnią jej kolumnę.

Opierając się na otrzymanych poprzednio wynikach, udowodnimy następujące

Twierdzenie 7[1]. *Na to, żeby układ m równań liniowych o n niewiadomych był rozwiązalny, potrzeba i wystarcza, żeby rząd macierzy współczynników przy niewiadomych tego układu był równy rzędowi macierzy uzupełnionej przez jego wyrazy wolne.*

Dowód. Z jednej strony każdy wyznacznik charakterystyczny, odpowiadający któremukolwiek wyznacznikowi podstawowemu, jest wyznacznikiem stopnia o jedność odeń wyższego, należącym do macierzy uzupełnionej; wynika stąd natychmiast dostateczność podanego warunku, na mocy warunku, udowodnionego w § 5 (str. 49).

Z drugiej zaś strony, przypuśćmy, że rząd q macierzy uzupełnionej jest wyższy od rzędu p macierzy M współczynników przy niewiadomych danego układu równań. Niech Δ oznacza wyznacznik rzędu q, różny od zera i należący do macierzy uzupełnionej. Wyznacznik Δ musi zawierać kolumnę utworzoną z wszystkich lub niektórych wyrazów wolnych, gdyż w przeciwnym razie należałby do macierzy M, a więc musiałby być równy 0, gdyż stopień jego q przekracza rząd p macierzy. Rozwińmy wyznacznik Δ według elementów kolumny wyrazów wolnych; ponieważ $\Delta \neq 0$, więc co najmniej jeden z q składników tego rozwinięcia, np. składnik $P \cdot b_k$ musi być różny od 0, skąd $P \neq 0$. Lecz minor P wyznacznika Δ jest oczywiście wyznacznikiem stopnia $q-1$, a więc, wobec $q > p$, stopnia nie mniejszego niż p, należącym do macierzy M. Jako różny od 0, jest on więc wyznacznikiem podstawowym danego układu równań, zaś Δ jest oczywiście wyznacznikiem charakterystycznym odpowiadającym wyznacznikowi P. Wobec $\Delta \neq 0$ dany układ równań nie jest więc rozwiązalny, w myśl warunku z § 5 (str. 49). Zatem podany warunek jest konieczny.

§ 8. Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą równych współczynników. B. I. Clason podał w r. 1888 metodę rozwiązywania układu równań liniowych za pomocą eliminacji czyli rugowania niewiadomych, znaną pod nazwą *metody równych współczynników*[1]), a polegającą na tym, że pierwsze dwa równania sprowadza się do równań, z których pierwsze nie zawiera pierwszej niewiadomej, zaś drugie drugiej; te dwa zaś nowe równania wraz z trzecim równaniem danego układu sprowadza się do trzech równań, z których każde zawiera tylko jedną z pierwszych trzech niewiadomych, i t. d. Zaletą tej metody jest to, że powtarzają się te same współczynniki, co ułatwia rugowanie. Wyłożymy tu metodę Clasona na przykładzie pięciu równań o pięciu niewiadomych:

[1]) Por. J. Śleszyński, *Teorja Wyznaczników*, Kraków 1926, str. 121, tw. 9.

[2]) B. I. Clason, *Société des Sciences de Bruxelles*, Tom 12, 1888, A., str. 50-59, B., str. 251-281; por. też E. T. Whittaker i G. Robinson, *The Calculus of observations*, 1924, str. 236.

$$(1_i) \qquad a_i x + b_i y + c_i z + d_i u + e_i v = f_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dla skrócenia będziemy oznaczali przez $|pq \dots s|$ wyznacznik

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & \cdot & \cdot & s_1 \\ p_2 & q_2 & \cdot & \cdot & s_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_5 & q_5 & \cdot & \cdot & s_5 \end{vmatrix}.$$

Rugując x z równań 1_1 i 1_2, otrzymujemy równanie:

$$(2_2) \qquad |ab|y + |ac|z + |ad|u + |ae|v = |af|.$$

Aby wyrugować y z równań (1_1) i (2_2), mnożymy równanie (1_1) obustronnie przez $-|ab|$, a równanie (2_2) przez b_1, i dodajemy do siebie te równania, dzieląc je następnie przez a_1. Powstające w ten sposób równanie oznaczamy schematycznie przez $\dfrac{-|ab|1_1 + b_1 2_2}{a_1}$. Tak dochodzimy do równania

$$(2_1) \qquad -|ab|x + |bc|z + |bd|u + |be|v = |bf|.$$

Tworząc równanie $2_1 a_3 - 2_2 b_3 + 1_3|ab|$, otrzymujemy:

$$(3_3) \qquad |abc|z + |abd|u + |abe|v = |abf|.$$

Z równań 2_2 i 3_3 rugujemy z, tworząc równanie $\dfrac{|abc|2_2 - |ac|3_3}{-|ab|}$ czyli w postaci rozwiniętej:

$$(3_2) \qquad -|abc|y + |acd|u + |ace|v = |acf|;$$

podobnie, wynikiem eliminacji z z równań (2_1) i (3_3) jest równanie $\dfrac{|abc|2_1 - |bc|3_3}{-|ab|}$ czyli

$$(3_1) \qquad |abc|x + |bcd|u + |bce|v = |bcf|.$$

Tworzymy dalej równanie $-a_4 3_1 + b_4 3_2 - c_4 3_3 + |abc| 1_4$ czyli

$$(4_4) \qquad |abcd|u + |abce|v = |abcf|,$$

następnie rugujemy u z (4_4) i (3_3), tworząc równanie $\dfrac{|abcd|3_3 - |abd|4_4}{-|abc|}$ czyli

$$(4_3) \qquad -|abcd|z + |abde|v = |abdf|.$$

Podobnie otrzymamy:

$$(4_2) \qquad |abcd|y + |acde|v = |acdf|,$$

$$(4_1) \qquad -|abcd|x + |bcde|v = |bcdf|.$$

Tworzymy teraz równanie $a_5 4_1 - b_5 4_2 + c_5 4_3 - d_5 4_4 + |abcd| 1_5$ i otrzymujemy

$$(5_5) \qquad |abcde|v = |abcdf|.$$

Wreszcie z (5_5) i (4_4) rugujemy v w sposób wskazany schematem

$$\frac{|abcde|4_4 - |abce|5_5}{-|abcd|},$$

co daje

$$-|abcde|u = |abcef|.$$

Podobnie otrzymamy:

$$|abcde|z = |abdef|,$$
$$-|abcde|y = |acdef|,$$
$$|abcde|x = |bcdef|.$$

Dany układ równań jest w ten sposób rozwiązany.

Celem jest tu, oczywiście, p r a k t y c z n e rozwiązywanie równań o współczynnikach liczbowych, gdyż, teoretycznie, możnaby otrzymane wzory na niewiadome wypisać odrazu.

§ 9. Przykłady. 1. Zbadajmy układ 3 równań o 3 niewiadomych:

$$2x + 3y + 5z = 33,$$
$$3x - 5y + 2z = -13.$$
$$x + 11y + 8z = 79.$$

Z macierzy współczynników przy niewiadomych możemy tworzyć wyznaczniki co najwyżej stopnia 3-go. Jedyny wyznacznik stopnia 3-go

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 11 & 8 \end{vmatrix}$$

jest, jak łatwo obliczyć, równy 0. Z wyznaczników stopnia 2-go, należących do tej macierzy, już wyznacznik

$$P = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -19$$

jest różny od zera: możemy go więc przyjąć za podstawowy. Wyznacznikowi P odpowiada jedyny wyznacznik charakterystyczny

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 33 \\ 3 & -5 & -13 \\ 1 & 11 & 79 \end{vmatrix},$$

który, jak łatwo obliczyć, jest równy 0. Dany układ równań jest więc rozwiązalny, przy czym wystarczy rozwiązywać pierwsze dwa równania, przyjmując na z dowolną wartość. Otrzymujemy w ten sposób:

$$x = -\frac{1}{19}\begin{vmatrix} 33-5z & 3 \\ -13-2z & -5 \end{vmatrix} = \frac{126-31z}{19}, \qquad y = -\frac{1}{19}\begin{vmatrix} 2 & 33-5z \\ 3 & -13-2z \end{vmatrix} = \frac{125-11z}{19}.$$

Tak np. dla $z = 1$ mamy $x = 5$, $y = 6$; dla $z = 0$ mamy $x = 6\frac{12}{19}$, $y = 6\frac{11}{19}$.

2. Zbadajmy układ 3 równań o 3 niewiadomych:

$$x-2y+3z=1,$$
$$2x-4y+6z=2,$$
$$3x-6y+9z=3.$$

Jedyny wyznacznik stopnia 3-go, utworzony z macierzy współczynników tych równań, czyli wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$$

jest, jak łatwo widzieć, równy 0, jak również wszystkie 9 wyznaczników stopnia 2-go, jakie można utworzyć z tej macierzy; mamy mianowicie:

$$\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Z wyznaczników stopnia 1-go, należących do macierzy, już wyznacznik

$$P=|1|=1$$

jest różny od 0: możemy go więc przyjąć za podstawowy. Wyznacznikowi P odpowiadają dwa wyznaczniki charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix},$$

które są oba równe 0. Dany układ równań jest więc rozwiązalny, przy czym wystarczy uwzględnić tylko pierwsze równanie, przyjmując na y oraz na z dowolne wartości. Otrzymujemy w ten sposób

$$x=2y-3z+1$$

przy dowolnych y oraz z.

Że w tym przykładzie równania drugie i trzecie wynikają z pierwszego, można było również zauważyć bezpośrednio.

3. Zbadajmy układ 3 równań o 3 niewiadomych:

$$3x+2y-4z=5, \quad 2x+3y-6z=5, \quad 5x-y+2z=4.$$

Za wyznacznik podstawowy możemy tu, jak łatwo obliczyć przyjąć

$$P=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5.$$

Jedyny wyznacznik charakterystyczny, odpowiadający wyznacznikowi P, jest tu

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

wobec czego układ jest rozwiązalny i wystarczy uwzględnić tylko dwa pierwsze równania, nadając niewiadomej z wartość dowolną. Otrzymujemy w ten sposób

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4z+5 & 2 \\ 6z+5 & 3 \end{vmatrix}}{5}=1, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4z+5 \\ 2 & 6z+5 \end{vmatrix}}{5}=2z+1.$$

Z przykładu tego widać, że nie każdą z niewiadomych x, y, z można przyjąć za parametr dowolny, gdyż mamy tu stale $x=1$. Jak łatwo sprawdzić, inaczej ma się rzecz w przykładzie 1, gdzie za parametr dowolny można było przyjąć każdą z niewiadomych x, y, z.

4. Zbadajmy układ 3 równań o 3 niewiadomych:

$$x+2y-z=1,$$
$$3x+6y-3z=3,$$
$$5x+10y-5z=1.$$

Za wyznacznik podstawowy możemy tu przyjąć, jak łatwo obliczyć, wyznacznik $P=|1|=1$. Obliczamy dalej wyznaczniki charakterystyczne, odpowiadające wyznacznikowi P. Mamy $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=0$, lecz już $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}=5\neq 0$:

Układ nasz nie jest więc rozwiązalny, co zresztą można było zauważyć bezpośrednio, gdyż równanie pierwsze, pomnożone przez 5, daje $5x+10y-5z=5$, wbrew równaniu trzeciemu.

5. Zbadajmy układ 4 równań o 3 niewiadomych:

$$2x+3y-3z=4,$$
$$3x-y+z=17,$$
$$x+y-2z=1,$$
$$3x+2y-2z=11.$$

Za wyznacznik podstawowy możemy przyjąć wyznacznik

$$P=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=11.$$

Jedynym wyznacznikiem charakterystycznym, odpowiadającym wyznacznikowi P, jest tu wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 17 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 17 \\ 3 & 2 & 11 \end{vmatrix}=0;$$

zatem dany układ jest rozwiązalny i wystarczy uwzględnić tylko pierwsze trzy równania odpowiadające wyznacznikowi podstawowemu. Rozwiązując je według reguły, podanej w § 2, na str. 40, otrzymujemy:

$$x=\frac{1}{11}\begin{vmatrix}4 & 3 & -3\\ 17 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\frac{55}{11}=5,\quad y=\frac{1}{11}\begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\ 3 & 17 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0,\quad z=\frac{1}{11}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 17\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{22}{11}=2.$$

6. Zbadajmy układ 3 równań o 2 niewiadomych

$$\begin{aligned}5x+3y&=1,\\ 3x+2y&=12,\\ 2x+5y&=19.\end{aligned}$$

Za wyznacznik podstawowy możemy przyjąć $P=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1$.

Jedynym wyznacznikiem charakterystycznym, odpowiadającym wyznacznikowi P, jest tu wyznacznik

$$\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 12\\ 2 & 5 & 19\end{vmatrix}=-198\neq 0.$$

Układ nie jest więc rozwiązalny.

7. Zbadajmy układ 3 równań o 3 niewiadomych:

$$\begin{aligned}2x+3y+5z&=0,\\ 5x-2y+3z&=0,\\ 3x-5y-2z&=0.\end{aligned}$$

Układ ten, jako układ równań jednorodnych, jest w myśl twierdzenia 7, zawsze rozwiązalny. Aby się przekonać, czy posiada inne rozwiązania niż zerowe, obliczamy wyznacznik układu

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 5 & -2 & 3\\ 3 & -5 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Na mocy twierdzenia 6 układ ma więc rozwiązania *niezerowe* t. j. takie, w których nie wszystkie niewiadome są równe 0.

Za wyznacznik podstawowy możemy przyjąć $P=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-19$.

Wystarczy zatem uwzględnić tylko pierwsze dwa równania, nadając niewiadomej z wartość dowolną. Otrzymujemy w ten sposób:

$$x=-\frac{1}{19}\begin{vmatrix}-5z & 3\\ -3z & -2\end{vmatrix}=-z,\quad y=-\frac{1}{19}\begin{vmatrix}2 & -5z\\ 5 & -3z\end{vmatrix}=-z.$$

Zatem $x=y=-z$ przy dowolnym z.

8. Zbadajmy układ 3 równań o 3 niewiadomych:

$$\begin{aligned}4x-2y+z&=0,\\ 2x-y-3z&=0,\\ 6x-3y-2z&=0.\end{aligned}$$

Wyznacznikiem tych równań jest

$$\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ 6 & -3 & -2\end{vmatrix}=0;$$

na mocy twierdzenia 6 układ posiada więc rozwiązania niezerowe. Za wyznacznik podstawowy możemy przyjąć

$$P=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=7,$$

skąd widać, że wystarczy uwzględnić pierwsze dwa równania, nadając niewiadomej x dowolną wartość. Otrzymamy w ten sposób:

$$y=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}-4x & 1\\ -2x & -3\end{vmatrix}=2x,\quad z=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}-2 & -4x\\ -1 & -2x\end{vmatrix}=0.$$

W każdym zatem (nawet niezerowym) układzie liczb x, y, z, spełniającym ten układ równań, musi być $z=0$. Nie moglibyśmy więc przyjąć niewiadomej z za parametr dowolny, gdy tymczasem jak łatwo widzieć, można było w przykładzie 7 przyjąć za parametr dowolny każdą z niewiadomych x, y, z.

9. Zbadajmy układ 3 równań o 4 niewiadomych:

$$\begin{aligned}2x-3y+z-5t&=1,\\ x+2y-3z+7t&=2,\\ 3x-y-2z+2t&=4.\end{aligned}$$

Wszystkie 4 wyznaczniki 3-go stopnia, jakie można utworzyć z macierzy współczynników tego układu, są, jak łatwo okazać, równe 0. Za wyznacznik podstawowy możemy tu przyjąć $P=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7$.

Jedynym wyznacznikiem charakterystycznym, odpowiadającym wyznacznikowi P, jest wyznacznik

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=7\neq 0.$$

Na mocy warunku, udowodnionego w § 5, str. 49, układ równań nie jest więc rozwiązalny.

10. Wyraźmy za pomocą wyznacznika warunek konieczny i dostateczny na to, aby trzy dane punkty płaszczyzny (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3) były *współliniowe*, czyli leżały na jednej prostej.

Ponieważ równanie prostej w płaszczyźnie jest postaci $Ax+By+C=0$, gdzie liczby A i B nie są jednocześnie zerami, więc na to, aby dane punkty leżały na jednej prostej, potrzeba i wystarcza, iżby istniał układ liczb A, B, C, gdzie A i B nie są jednocześnie zerami, spełniający równania:

$$(*)\qquad \begin{aligned} Ax_1+By_1+C&=0,\\ Ax_2+By_2+C&=0,\\ Ax_3+By_3+C&=0. \end{aligned}$$

Każdy układ liczb A, B, C, gdzie A i B nie są jednocześnie zerami, spełniający ten układ równań, jest oczywiście jego rozwiązaniem niezerowym. Ale i na odwrót, jeżeli układ liczb A, B, C jest niezerowym rozwiązaniem układu równań (*), to nie może być jednocześnie $A=0$ i $B=0$, gdyż wtedy z równań (*) wypadłoby i $C=0$, wbrew założeniu, że rozwiązanie A, B, C nie jest zerowe.

Na to więc, aby dane trzy punkty były współliniowe, potrzeba i wystarcza, iżby układ trzech równań (*) o niewiadomych A, B i C posiadał rozwiązanie niezerowe, a na to znowu, jak wiemy z twierdzenia 6, potrzeba i wystarcza, iżby wyznacznik tego układu był równy 0, czyli by zachodziła równość

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Wynika stąd natychmiast, że równaniem prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty płaszczyzny (x_1, y_1) i (x_2, y_2), jest równanie

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Podobnie znajdujemy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby cztery punkty przestrzeni (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) i (x_4, y_4, z_4) leżały w jednej płaszczyźnie (były *współpłaszczyznowe*), jest równość

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Równaniem zaś płaszczyzny, przechodzącej przez trzy dane punkty (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) przestrzeni, jest równanie

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

ĆWICZENIA. 1. Rozwiązać układ równań:

$$2x_1+6x_2+4x_3=46,\qquad 4x_1+9x_2-4x_3=53,\qquad 3x_1+7x_2+5x_3=57.$$

Odp.: $x_1=4$, $x_2=5$, $x_3=2$.

2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 2x_1+6x_2-4x_3+10x_4&=22,\\ 3x_1+4x_2-26x_3+30x_4&=-72,\\ 6x_1+22x_2+6x_3+22x_4&=170,\\ 5x_1+11x_2-29x_3+32x_4&=-57. \end{aligned}$$

Odp.: $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=6$, $x_4=2$.

3. Rozwiązać układ równań [1]):

$$\begin{aligned} 6x+2y+3z+2u&=0,\\ 16x+6y+7z+5u&=0,\\ 10x+4y+4z+3u&=0,\\ 10x+2y+7z+4u&=0. \end{aligned}$$

Zbadać, które pary niewiadomych można przyjąć za parametry.

Odp.: Za wyznacznik podstawowy można tu przyjąć

$$P=\begin{vmatrix} 4 & 4\\ 2 & 7 \end{vmatrix}=20;$$

rozwiązaniem układu jest

$$y=\tfrac{1}{2}(z-2x),\qquad u=-2(x+z)$$

przy dowolnych x i z.

4. Rozwiązać układ równań [2]):

$$\begin{aligned} x-2y+3z-u-v&=0,\\ 2x-y+z-2v&=0,\\ -2x-5y+8z-4u+3v&=0,\\ -x-y+2z-u+v&=0,\\ -x-y+z-u+2v&=0. \end{aligned}$$

Zbadać, jakie pary niewiadomych można przyjąć za parametry dowolne.

[1]) M. A. Baraniecki, *Teoria wyznaczników (Determinantów)*, Paryż 1879, str. 302-303.

[2]) L. Bieberbach, *Vorlesungen über Algebra*, Berlin 1928, str. 62-63.

Odp.: Za wyznacznik podstawowy możemy tu przyjąć wyznacznik utworzony ze współczynników przy x, y i z w pierwszych trzech równaniach:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 8 \end{vmatrix} = -3;$$

rozwiązaniem układu jest

$$x = \tfrac{1}{3}(-u+4v), \qquad y = \tfrac{1}{3}(-2u+5v), \quad z = v$$

przy dowolnych u i v. Za parametry dowolne można przyjąć wszystkie pary z wyjątkiem z, v, dla której stale $z = v$.

5. Zbadać przy jakich wartościach parametrów a, b i c rozwiązalny jest układ 6 równań liniowych o 3 niewiadomych x, y, z:

$$\begin{array}{lll} x+y+z=9, & 3x-y+2z=10, & 2x+7y-3z=8, \\ ax-by+cz=20, & ax+by+cz=44, & 10ax+3by-cz=26. \end{array}$$

Odp.[1]): Za wyznacznik podstawowy możemy przyjąć wyznacznik pierwszych trzech równań, którego wartość wynosi 25. Odpowiadające mu trzy wyznaczniki charakterystyczne będą miały odpowiednio wartości:

$$25(20-a+3b-5c), \qquad 25(44-a-3b-5c), \qquad 25(26-10a-9b+5c).$$

Przyrównywując je do zera, otrzymamy na a, b i c trzy równania liniowe o wyznaczniku równym -330. Stosując wzory Cramer'a, otrzymamy stąd $a=2$, $b=4$ i $c=6$. Przy takich więc tylko wartościach parametrów a, b, c, dany układ 6 równań jest rozwiązalny, przy czym dla znalezienia wartości na x, y i z wystarczy rozwiązać układ pierwszych 3 równań, odpowiadających przyjętemu wyznacznikowi podstawowemu; znajdujemy stąd $x=1$, $y=3$, $z=5$.

6. Rozwiązać układ 4 równań o 4 niewiadomych:

$$x_1+x_2=a_1, \quad x_2+x_3=a_2, \quad x_3+x_4=a_3, \quad x_4+x_1=a_4,$$

gdzie liczby a_1, a_2, a_3 i a_4 są dane. Zbadać, w jakim przypadku ten układ równań jest rozwiązalny i znaleźć ewentualne rozwiązanie.

Odp.: Wyznacznik równań jest równy 0. Wyznacznik układu pierwszych trzech równań jest równy 1 i może być przyjęty za podstawowy. Wszystkie odpowiadające mu wyznaczniki charakterystyczne mają wartość bezwzględną równą $a_1-a_2+a_3-a_4$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwiązalności układu jest więc $a_1+a_3=a_2+a_4$. Jeżeli równość ta zachodzi, znajdujemy rozwiązania:

$$x_1 = a_1-a_2+a_3-t, \qquad x_2 = a_2-a_3+t, \qquad x_3 = a_3-t, \quad x_4 = t,$$

gdzie t jest liczbą dowolną.

[1]) Ch. de Comberousse, *Cours d'Algèbre Supérieure*, Część I, Paryż 1915, str. 84-87, gdzie podano bliższe szczegóły rozwiązania.

Warunek $a_1+a_3=a_2+a_4$ łatwo też otrzymać drogą elementarną: dodając bowiem stronami pierwsze i trzecie równanie, albo drugie i czwarte, otrzymujemy po lewej stronie zawsze sumę $x_1+x_2+x_3+x_4$, skąd $a_1+a_3=a_2+a_4$.

7. Zbadać układ $2n$ równań o $2n$ niewiadomych:

$$x_1+x_2=a_1, \qquad x_2+x_3=a_2, \qquad \ldots, \qquad x_{2n-2}+x_{2n}=a_{2n-1}, \qquad x_{2n}+x_1=a_{2n},$$

gdzie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ są dane. (Por. ćwiczenie 3, str. 44).

Odp.: Układ jest rozwiązalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1} = a_2+a_4+\ldots+a_{2n}.$$