ROZDZIAŁ II.

WYZNACZNIKI.

§ 1. Wstęp historyczny. Początków teorii wyznaczników dopatrywać się należy już u Leibniza[1]), lecz nie zostały one wówczas rozpowszechnione[2]). Po nim Cramer (w połowie 18-go wieku) mimochodem, jako szczegół rachunkowy przy rozwiązywaniu układu równań, stosuje wyrażenia wyznacznikowe, lecz dopiero Vandermonde w r. 1772 określa niezależnie pojęcie wyznaczników i wyprowadza niektóre ich własności. Istotny atoli postęp w teorii wyznaczników zawdzięczamy Cauchy'emu (1815), który pierwszy wprowadził obecnie używane ich znakowanie, oraz Jacobi'emu, którego praca[3]) przyczyniła się do rozpowszechnienia i używania wyznaczników.

Muir ogłosił 5-tomową historię wyznaczników[4]). W języku polskim największym (600-stronicowym) dziełem traktującym o wyznacznikach jest książka Baranieckiego[5]). Wydana przed

---

1) Mianowicie w ustępie listu Leibniz'a do de l'Hospital'a z dnia 28.IV. 1693 r., którego tłomaczenie na język polski podaje Baraniecki na str. 48-50 swej książki cytowanej niżej w odnośniku[5]).

2) „Il n'est pas bon de prostituer nos méthodes" pisze Leibniz w późniejszym ze swych listów do de l'Hospital'a (Por. L. Bieberbach, *Vorlesungen über Algebra*, Lipsk 1928, str. 42).

3) C. G. J. Jacobi, *De formatione et proprietatibus determinantium*, Crelles Journal, Tom 22, 1841.

4) T. Muir, *Contribution to the history of Determinants*, 1900—1920.

5) M. A. Baraniecki, *Teorya Wyznaczników (Determinantów)*, Kurs uniwersytecki, Wydawnictwo Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1879. Stron XXII + 600.

Przedmowę do tej książki poprzedza Baraniecki następującą charakterystyczną cytatą z Jana Śniadeckiego:

„Nikt zapewne nie wątpi o wielkich matematyki pożytkach i przysługach: ale z początkową tylko tey nauki znaiomością żaden kray ani do tych pożytków nie trafi, ani do rzędu narodów gruntownie uczonych nigdy należeć nie będzie. Żeby zaś do głębszych wiadomości matematycznych przebrać się pomyślnie, i uczuć tę rozkosz umysłu, iaką napełniaią myślącego człowieka, trzeba ie koniecznie w początkowych zasadach obiąć gruntownie".

66-ciu laty (jako ówczesny kurs uniwersytecki) jest dziś cokolwiek przestarzała, świadczy jednak o wysokim już wówczas poziomie wykładów matematyki na wyższych uczelniach polskich. Przy końcu swej książki Baraniecki cytuje szereg innych publikacyj polskich, traktujących o wyznacznikach aż do r. 1879, mianowicie Babczyńskiego (1865), Zajączkowskiego (1866), Trzaski (1870 i 1871), Żmurki (1871), Sągajły (1874), Żelewskiego (1877) oraz Niewęgłowskiego (1879). Z osobnych dzieł o wyznacznikach w języku polskim wymienimy jeszcze następujące: S. Zaremba, *Teorja wyznaczników i równań linjowych*, Kraków 1909, stron XI+134, Dr Jan Śleszyński, *Teorja Wyznaczników*, Kraków 1926, stron 136. B. Iwaszkiewicz i M. Kerner, *Teorja Wyznaczników, Zarys elementarny*, Wyd. Koła Mat.-Fiz. S. U. W., tom **28**, Warszawa 1934, stron VIII+80.

W ostatnich latach doniosłe wyniki, dotyczące rachunkowej strony wyznaczników, uzyskał prof. Tadeusz Banachiewicz w związku ze stworzoną przez siebie teorią t. zw. *krakowianów* (ob. § 13 tego Rozdziału oraz § 7 Rozdziału V).

§ 2. Definicja wyznacznika. Weźmy pod uwagę n^2 jakichkolwiek danych liczb $a_{i,k}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,n)$, ustawionych w kwadrat jak następuje:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{matrix} \tag{1}$$

Liczby, tworzące tablicę (1), nazywamy jej *elementami*, a samą tablicę (1) *macierzą* tych elementów. Element $a_{i,k}$ znajduje się w i-tym wierszu oraz w k-tej kolumnie macierzy (1). Jej wiersze i kolumny nazywamy ogólnie *rzędami*.

Przez *wyznacznik* należący do tablicy (1) rozumiemy pewien wielomian liczb (1), określony w następujący sposób.

Weźmy po jednym którymkolwiek elemencie z każdego wiersza tablicy (1), więc np. z pierwszego wiersza element a_{1,α_1}, z drugiego $a_{2,\alpha_2},\ldots,$ z n-tego a_{n,α_n} i utwórzmy ich iloczyn

$$a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n}. \tag{2}$$

Pierwsze wskaźniki czynników iloczynu (2) są kolejnymi liczbami naturalnymi $1,2,\ldots,n$, zaś drugie mają tworzyć pewną permutację tych liczb: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Musimy więc tak wybierać czynniki dla omawianego iloczynu, aby każde dwa należały nietylko do różnych wierszy, ale też do różnych kolumn. Iloczyn (2) opatrujemy znakiem $+$ lub $-$, zależnie od tego, czy permutacja $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ należy do klasy parzystej, czy też nieparzystej. Suma algebraiczna wszystkich takich iloczynów

$$\sum \pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie $n!$ permutacyj drugich wskaźników $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, jest wartością wyznacznika należącego do tablicy (1), który oznaczać będziemy przez

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Liczbę n nazywamy *stopniem* wyznacznika o n wierszach i n kolumnach.

§ 3. Obliczanie wyznaczników pierwszych czterech stopni. W myśl tej definicji wyznacznik 1-go stopnia, utworzony z jednego elementu a, jest równy temu elementowi, czyli $|a|=a$. Nie należy mieszać w tym przypadku znakowania wyznacznika ze znakowaniem wartości bezwzględnej liczby a!

Dla wyznacznika 2-go stopnia, mamy

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1},$$

gdyż z dwóch wskaźników 1,2 można utworzyć tylko dwie permutacje: 1 2 oraz 2 1, z których pierwsza należy do klasy parzystej, a druga do nieparzystej.

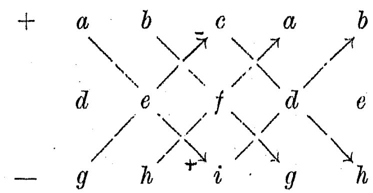
Z trzech wskaźników 1,2,3 mamy 6 permutacyj, z których permutacje 1 2 3; 2 3 1; 3 1 2 należą do klasy parzystej, zaś permutacje 3 2 1; 1 3 2; 2 1 3 do klasy nieparzystej. Jest więc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - \\ - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}.$$

Sposób praktyczny rozwinięcia wyznacznika 3-go stopnia podał Sarrus[1]) Gdy dany jest układ 9 elementów

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ d, & e, & f, \\ g, & h, & i, \end{matrix}$$

to dopiszmy po trzeciej kolumnie pierwszą, a następnie drugą, oraz poprowadźmy od elementów pierwszego wiersza przekątne łączące trzy elementy. Utwórzmy następnie iloczyny elementów znajdujących się na przekątnych i postawmy znak + przed iloczynami odpowiadającymi przekątnym, idącym w kierunku od lewej ku prawej, licząc od góry, zaś znak — przed iloczynami, odpowiadającymi przekątnym, idącym w kierunku od lewej ku prawej, licząc od dołu.



Otrzymamy w ten sposób

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Z czterech wskaźników 1, 2, 3, 4 mamy 24 permutacyj, z których do klasy parzystej należą permutacje 1 2 3 4, 1 3 4 2, 1 4 2 3, 2 3 1 4, 2 4 3 1, 2 1 4 3, 3 4 1 2, 3 1 2 4, 3 2 4 1, 4 1 3 2, 4 2 1 3 i 4 3 2 1, zaś pozostałe 12 permutacyj należą do klasy nieparzystej. Moglibyśmy stąd obliczyć wyznacznik stopnia 4-go. Wyznacznik stopnia 5-go utworzony jest z $5! = 120$ składników, zaś stopnia 6-go z $6! = 720$ składników. Obliczanie wyznaczników stopni wyższych na podstawie podanej wyżej definicji wyznacznika jest uciążliwe; później podamy inne sposoby obliczania ich wartości.

[1]) Por. A. Baraniecki, tamże, str. 23-24.

§ 4. Zamiana wierszy wyznacznika na kolumny. Weźmy teraz pod uwagę w wyznaczniku (3) (n-go stopnia) jeden ze składników

(4) $$\pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n}.$$

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ jest tu więc pewną permutacją z liczb $1, 2, \dots, n$, zaś znak należy wziąć górny (+) lub dolny (—) zależnie od tego, czy permutacja ta należy do klasy parzystej, czy do nieparzystej.

Jak wiemy z Rozdziału I (§ 4, tw. 4), każdą permutację n elementów możemy otrzymać z każdej innej permutacji tych elementów za pomocą skończonej liczby kolejnych transpozycyj. Możemy więc za pomocą skończonej liczby, np. k, transpozycyj otrzymać z permutacji

(5) $$a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n}$$

(elementów $a_{1,\alpha_1}, a_{2,\alpha_2}, \dots, a_{n,\alpha_n}$) taką permutację tych elementów, w której drugimi wskaźnikami będą kolejne liczby naturalne $1, 2, \dots, n$; niech to będzie permutacja

(6) $$a_{\beta_1,1} a_{\beta_2,2} \dots a_{\beta_n,n}.$$

$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ jest tu więc permutacją liczb $1, 2, \dots, n$, którą otrzymujemy z permutacji $12 \dots n$ za pomocą k transpozycyj. Gdybyśmy teraz wykonali kolejno transpozycje odwrotne i w odwrotnym porządku do tych, za pomocą których permutacja (5) przeszła na (6), to oczywiście permutacja (6) przeszłaby z powrotem na (5), a jednocześnie permutacja drugich wskaźników $12 \dots n$ przeszłaby na permutację $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ tych wskaźników. Zatem permutację $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ otrzymujemy z permutacji $12 \dots n$ za pomocą k kolejnych transpozycyj, odwrotnych i wykonanych w odwrotnym porządku do tych k kolejnych transpozycyj, które przeprowadzają permutację $12 \dots n$ w $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$. A więc permutacje $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ oraz $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ należą do tej samej klasy (parzystej lub nieparzystej).

Możemy zatem dla wyrażenia (4) napisać równość

$$\pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n} = \pm a_{\beta_1,1} a_{\beta_2,2} \dots a_{\beta_n,n},$$

gdzie znak należy wziąć po obu stronach górny lub po obu stronach dolny zależnie od tego, czy permutacja $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ (lub — co na jedno wyjdzie — permutacja $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$) należy do klasy parzystej, czy też nieparzystej.

Jak łatwo widzieć, dwom różnym permutacjom $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ oraz $\alpha_1'\alpha_2'\ldots\alpha_n'$ będą odpowiadały zawsze różne permutacje $\beta_1^*\beta_2^*\ldots\beta_n^*$ oraz $\beta_1'\beta_2'\ldots\beta_n'$ (gdyż w razie ich równości, przez te same kolejne transpozycje otrzymalibyśmy z nich tę samą permutację $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$). Gdy więc układ $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ przebiega wszystkie permutacje n liczb $1,2,\ldots,n$, to odpowiedni układ $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ przebiega również wszystkie permutacje tych liczb. Możemy więc napisać równość

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n} = \sum \pm a_{\beta_1,1} a_{\beta_1,2} \ldots a_{\beta_n,n},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, jakoteż $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ liczb $1,2,\ldots,n$, zaś znak należy brać górny lub dolny zależnie od tego, czy permutacja należy do klasy parzystej, czy też nieparzystej.

Przyjmijmy ogólnie

$$(8)\qquad a_{i,k} = b_{k,i} \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n \quad \text{i} \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Będzie więc

$$(9)\qquad \sum \pm a_{\beta_1,1} a_{\beta_2,2} \ldots a_{\beta_n,n} = \sum \pm b_{1,\beta_1} b_{2,\beta_2} \ldots b_{n,\beta_n}.$$

Lecz w myśl definicji wartości wyznacznika prawa strona wzoru (9) jest oczywiście wartością wyznacznika

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdot & \cdot & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdot & \cdot & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdot & \cdot & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

który, wobec (8), równy jest wyznacznikowi:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdot & \cdot & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Wobec (7) mamy więc równość

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdot & \cdot & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik (7) powstaje, jak widzimy, z wyznacznika (3) przez zastąpienie odpowiednich wierszy przez kolumny, albo — można powiedzieć — przez obrót wyznacznika (3) o 180^0 dokoła jego *przekątnej głównej* (t. j. przechodzącej przez elementy $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$). Stąd:

Twierdzenie 1. *Wyznacznik nie zmienia swej wartości, jeśli zastąpimy w nim wszystkie wiersze przez odpowiednie kolumny i odwrotnie.*

Wynika stąd, że każde twierdzenie, udowodnione dla wierszy wyznacznika, prawdziwe będzie też dla jego kolumn (i wzajemnie).

§ 5. Zamiana dwóch równoległych rzędów wyznacznika. Przypuśćmy teraz, że mamy wypisane wszystkie $n!$ permutacyj liczb $1,2,\ldots,n$ oraz że w każdej z wypisanych permutacyj $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ dokonaliśmy transpozycji dwóch sąsiednich elementów, np. k-go i $k+1$-go, że więc, ogólnie, zamiast permutacji $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ napisaliśmy permutację

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\alpha_k\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n.$$

Jak łatwo widzieć, otrzymamy znowu wszystkie $n!$ permutacyj liczb $1,2,\ldots,n$, tylko w innym niż przedtem porządku (permutacja $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ znajdzie się na tym miejscu, gdzie przedtem była permutacja $\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_{k+1}\beta_k\beta_{k+2}\ldots\beta_n$), przy czym na miejscu, gdzie przedtem była permutacja klasy parzystej, będzie teraz permutacja klasy nieparzystej i na odwrót (gdyż liczba kolejnych transpozycyj, za pomocą których dana permutacja została wyprowadzona z zasadniczej, zwiększyła się o 1). Gdybyśmy więc w wyznaczniku (7) zastąpili każdy iloczyn $a_{1,\alpha_1}a_{2,\alpha_2}\ldots a_{n,\alpha_n}$ przez iloczyn

$$a_{1,\alpha_1}a_{2,\alpha_2}\ldots a_{k-1,\alpha_{k-1}}a_{k,\alpha_{k+1}}a_{k+1,\alpha_k}a_{k+2,\alpha_{k+2}}\ldots a_{n,\alpha_n}$$

czyli, co na jedno wychodzi, przez iloczyn

$$a_{1,\alpha_1}a_{2,\alpha_2}\ldots a_{k-1,\alpha_{k-1}}a_{k+1,\alpha_k}a_{k,\alpha_{k+1}}a_{k+2,\alpha_{k+2}}\ldots a_{n,\alpha_n},$$

to dla utrzymania poprzedniej wartości D wyznacznika (7) trzeba będzie zmienić znak przed każdym z tych iloczynów. Wynika stąd natychmiast, że

$$(10)\qquad \sum \pm a_{1,\alpha_1}a_{2,\alpha_2}\ldots a_{k-1,\alpha_{k-1}}a_{k+1,\alpha_k}a_{k,\alpha_{k+1}}a_{k+2,\alpha_{k+2}}\ldots a_{n,\alpha_n} = -D,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie $n!$ permutacyj $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ liczb $1,2,\ldots,n$, zaś znak należy wziąć $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy permutacja $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ należy do klasy parzystej, czy też nieparzystej.

Lecz, jak łatwo widzieć, lewa strona wzoru (10) jest wyznacz nikiem, który otrzymamy z wyznacznika (7), zastępując w nin k-ty wiersz przez $k+1$-szy i na odwrót. Zatem:

Transpozycja dwóch sąsiednich wierszy wyznacznika powoduje zmianę znaku jego wartości.

Ponieważ zaś, w myśl tw. 1, transpozycja każdych dwóch wierszy wyznacznika może być dokonaną za pomocą nieparzyste liczby kolejnych transpozycyj dwóch sąsiednich wierszy, więc mamy

Twierdzenie 2. *Wyznacznik zmienia znak, jeżeli dokonamy transpozycji dwóch jego wierszy.*

Wobec tw. 1 możemy w tw. 2 zastąpić wyraz „wiersze przez „kolumny".

Przypuśćmy teraz, że wyznacznik D ma dwie kolumny (alb wiersze) złożone z odpowiednio równych elementów. Wyznaczni taki oczywiście się nie zmieni, jeżeli dokonamy transpozycji tyc kolumn (czy wierszy). Z drugiej jednak strony, w myśl tw. 2, mu on przy tym zmienić swój znak. Będzie więc $D=-D$, skąd $D=$ Zatem mamy

Twierdzenie 3. *Wyznacznik, mający dwie jednakowe ko lumny (lub wiersze) jest równy zeru.*

§ 6. Rozwinięcie wyznacznika według elementó wiersza lub kolumny. Zbierzmy teraz w wyznaczniku (wszystkie te składniki, które zawierają czynnik $a_{n,n}$. Będą t składniki postaci

$$\pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \dots a_{n-1,\alpha_{n-1}} a_{n,n},$$

gdzie $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}$ jest jakąkolwiek permutacją liczb $1,2,\dots,n-$ zaś znak należy wziąć $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy permutac $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}n$ należy do klasy parzystej czy też nieparzystej, albo co jak łatwo widzieć na jedno wychodzi — czy permutacja $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ należy do klasy parzystej czy też nieparzystej. Suma algebraiczn obchodzących nas składników będzie więc iloczynem liczby $a_{n,}$ przez wartość wyznacznika $n-1$-go stopnia

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

który otrzymujemy z wyznacznika (7), usuwając w nim ostatni wiersz i ostatnią kolumnę.

Gdybyśmy teraz chcieli zebrać w wyznaczniku (7) wszystkie te składniki, które dla danych wskaźników naturalnych k i l, obu $\leqslant n$, zawierają czynnik $a_{k,l}$, to moglibyśmy postąpić jak następuje. Będziemy transponowali k-tą kolumnę naszego wyznacznika kolejno z następnymi jego kolumnami, aż znajdzie się ona na ostatnim miejscu, co wymaga $n-k$ transpozycyj kolumn. Następnie będziemy transponowali l-ty wiersz otrzymanego wyznacznika, aż znajdzie się na ostatnim miejscu, co wymaga $n-l$ transpozycyj. Ogółem więc dokonamy $2n-(k+l)$ transpozycyj rzędów równoległych wyznacznika D, przez co, w myśl tw. 5, znak jego zmieni się $2n-(k+l)$ razy, czyli wyznacznik D przejdzie na $D'=(-1)^{2n-(k+l)}D=(-1)^{k+l}D$. W tym nowym wyznaczniku D' wyraz $a_{k,l}$ poprzedniego wyznacznika znajdzie się oczywiście w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie, a więc, jak wyprowadziliśmy wyżej, suma algebraiczna składników wyznacznika D zawierających czynnik $a_{k,l}$ będzie iloczynem liczby $a_{k,l}$ przez wyznacznik, jaki otrzymamy z wyznacznika D', usuwając ostatni jego wiersz i ostatnią kolumnę, albo — co, jak łatwo widzieć, na jedno wychodzi — usuwając w wyznaczniku D k-ty wiersz i l-tą kolumnę. Ostatecznie więc:

Suma algebraiczna składników wyznacznika (7), zawierających czynnik $a_{k,l}$, jest równa iloczynowi liczby $(-1)^{k+l}a_{k,l}$ przez wyznacznik (11), jaki otrzymamy z wyznacznika (7), usuwając z niego k-ty wiersz oraz l-tą kolumnę.

Wyznacznik, otrzymany z wyznacznika D przez usunięcie jego k-tego wiersza oraz l-tej kolumny, nazywamy *podwyznacznikiem (minorem)* odpowiadającym elementowi $a_{k,l}$; oznaczamy go przez $D_{k,l}$.

Niech teraz k oznacza daną liczbę naturalną nie większą od stopnia wyznacznika D (t. j. $k\leqslant n$). Każdy składnik wyznacznika (7) zawiera, jak wiemy, jeden i tylko jeden czynnik spośród liczb

$$(12)\qquad a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n};$$

możemy więc składniki wyznacznika D rozbić na n grup, zależnie od tego, który z czynników (12) zawierają. Suma algebraiczna składników l-tej grupy (t. j. zawierających czynnik $a_{k,l}$) wynosi, jak obliczyliśmy wyżej, $(-1)^{k+l}a_{k,l}D_{k,l}$. Stąd:

$$(13)\quad D=(-1)^{k+1}a_{k,1}D_{k,1}+(-1)^{k+2}a_{k,2}D_{k,2}+\dots+(-1)^{k+n}a_{k,n}D_{k,n}.$$

Jest to t. zw. *rozwinięcie wyznacznika według elementów k-go wiersza*[1]).

Z tw. 1 wynika, że mamy również *rozwinięcie wyznacznika według elementów l-tej kolumny*:

$$D=(-1)^{l+1}a_{1,l}D_{1,l}+(-1)^{l+2}a_{2,l}D_{2,l}+\ldots+(-1)^{l+n}a_{n,l}D_{n,l}. \tag{14}$$

W szczególności (dla $k=1$ i $l=1$):

$$\begin{aligned} D&=a_{1,1}D_{1,1}-a_{1,2}D_{1,2}+a_{1,3}D_{1,3}-\ldots+(-1)^{n-1}a_{1,n}D_{1,n}=\\ &=a_{1,1}D_{1,1}-a_{2,1}D_{2,1}+a_{3,1}D_{3,1}-\ldots+(-1)^{n-1}a_{n,1}D_{n,1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Więc np.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$
$$=a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3}-a_{3,2}a_{2,3})-a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3}-a_{3,1}a_{2,3})+a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2}-a_{3,1}a_{2,2}).$$

Wogóle wzór (15) sprowadza obliczanie wyznacznika stopnia n-go (t. j. o n^2 elementach) do obliczania wyznaczników stopnia $n-1$-go (t. j. o $(n-1)^2$ elementach).

§ 7. Wnioski. W szczególnym przypadku, gdy $a_{1,l}=0$ dla $l=2,3,\ldots,n$, wzór (15) daje $D=a_{1,1}D_{1,1}$, czyli

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Wnosimy stąd dalej, że

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}. \tag{17}$$

[1]) Co do uogólnienia rozwinięcia wyznacznika (rozwinięcie według minorów dowolnego stopnia czyli twierdzenie Laplace'a), ob. np. M. Bôcher, *Einführung in die höhere Algebra*, 2-gie wyd., Lipsk i Berlin 1925, str. 26, lub H. Hasse, *Höhere Algebra*, I, Sammlung Göschen, Berlin i Lipsk 1926, § 18, str. 124-138, (gdzie podane jest też uogólnienie rozwinięcia Laplace'a, str. 137, tw. 72).

Zatem:

Wyznacznik, w którym wszystkie elementy znajdujące się nad (albo pod) główną przekątną są równe zeru, jest równy iloczynowi wszystkich elementów głównej przekątnej.

W szczególności np.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{vmatrix} = 1$$

przy wszelkich x, y i z.

Jako inny łatwy wniosek otrzymujemy wzór

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

pozwalający zastąpić wyznacznik stopnia n-go przez wyznacznik stopnia $n+1$-go.

Ze wzoru (13) wynika, że

$$cD=(-1)^{k+1}ca_{k,1}D_{k,1}+(-1)^{k+2}ca_{k,2}D_{k,2}+\ldots+(-1)^{k+n}ca_{k,n}D_{k,n}.$$

Prawa strona tego wzoru jest, jak łatwo widzieć, rozwinięciem według elementów k-go wiersza wyznacznika, jaki otrzymamy z wyznacznika (3), mnożąc każdy element jego k-go wiersza przez c. Zatem:

Jeżeli chcemy pomnożyć wyznacznik przez liczbę c, to wystarczy pomnożyć przez c wszystkie elementy któregokolwiek jego wiersza (albo którejkolwiek jego kolumny).

Wnosimy stąd, że wspólny czynnik wszystkich elementów jednego i tego samego wiersza wyznacznika (albo jednej i tej samej jego kolumny) możemy wyprowadzić przed znak wyznacznika.

Wynika stąd w szczególności w myśl tw. 3, że *wyznacznik, w którym odpowiednie elementy dwóch rzędów równoległych są proporcjonalne, jest równy zeru.*

Inny natychmiastowy wniosek: *wyznacznik, w którego jednym z wierszy (lub kolumnie) wszystkie elementy są równe zeru, jest równy zeru.*

Jako inny jeszcze wniosek otrzymujemy, że *na to, aby zmienić znak wyznacznika, wystarczy zmienić znak wszystkich elementów któregokolwiek jego wiersza (lub którejkolwiek kolumny).*

Zmieńmy w szczególności znaki wszystkich elementów wyznacznika (3), znajdujących się w wierszach np. parzystych, a w otrzymanym w ten sposób wyznaczniku zmieńmy znaki wszystkich elementów znajdujących się w kolumnach parzystych. Ponieważ kolumn parzystych jest tyleż co wierszy parzystych, więc przez to zmienimy znak wyznacznika parzystą liczbę razy, czyli ostatecznie nie zmienimy wartości D tego wyznacznika.

Wynika stąd, że jeżeli

$$b_{k,l}=(-1)^{k+l}a_{k,l} \quad \text{dla} \quad k,l=1,2,..,n,$$

to

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Więc np.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ -d & e & -f \\ g & -h & i \end{vmatrix}.$$

Z wyniku tego skorzystamy później (ob. § 12, str. 30).

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie

$$(19)\quad (-1)^{k+1}a_{l,1}D_{k,1}+(-1)^{k+2}a_{l,2}D_{k,2}+\dots+(-1)^{k+n}a_{l,n}D_{k,n},$$

które otrzymaliśmy z wyrażenia (13), zastępując w nim odpowiednio $a_{k,1},a_{k,2},\dots,a_{k,n}$ przez $a_{l,1},a_{l,2},\dots,a_{l,n}$. Wyrażenie (19) jest więc rozwinięciem wyznacznika, jaki otrzymamy z wyznacznika (3) zastępując w nim elementy k-go wiersza odpowiednio przez elementy i-go wiersza. Jeżeli $i\neq k$, to wyznacznik ten będzie miał dwa wiersze jednakowe (mianowicie i-ty i k-ty), zatem w myśl tw. 6 będzie równy zeru. Zatem:

Jeżeli i oraz k są dwie różne spośród liczb $1,2,\dots,n$, to

$$(20)\quad (-1)^{k+1}a_{l,1}D_{k,1}+(-1)^{k+2}a_{l,2}D_{k,2}+\dots+(-1)^{k+n}a_{l,n}D_{k,n}=0$$

i podobnie

$$(21)\quad (-1)^{k+1}a_{1,l}D_{1,k}+(-1)^{k+2}a_{2,l}D_{2,k}+\dots+(-1)^{k+n}a_{n,l}D_{n,k}=0.$$

§ 8. Rozwinięcie wyznacznika według składników wiersza lub kolumny. Zastosowania. Jeżeli w wyznaczniku (3) elementy pewnej kolumny, np. l-tej, są sumami tej samej liczby składników, np. p składników:

$$\begin{aligned} a_{1,l}&=A_1+A_2+\dots+A_p,\\ a_{2,l}&=B_1+B_2+\dots+B_p,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ a_{n,l}&=L_1+L_2+\dots+L_p,\end{aligned}$$

to wobec (14) znajdziemy:

$$\begin{aligned} D=&(-1)^{l+1}(A_1+A_2+\dots+A_p)D_{1,l}+(-1)^{l+2}(B_1+B_2+\dots+B_p)D_{2,l}+\\ &+\dots+(-1)^{l+n}(L_1+L_2+\dots+L_n)D_{n,l}=\\ =&(-1)^{l+1}A_1D_{1,l}+(-1)^{l+2}B_1D_{2,l}+\dots+(-1)^{l+n}L_1D_{n,l}+\\ &+(-1)^{l+1}A_2D_{1,l}+(-1)^{l+2}B_2D_{2,l}+\dots+(-1)^{l+n}L_2D_{n,l}+\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+(-1)^{l+1}A_pD_{1,l}+(-1)^{l+2}B_pD_{2,l}+\dots+(-1)^{l+n}L_pD_{n,l}.\end{aligned}$$

Widzimy więc, że wyznacznik (3) jest sumą p wyznaczników

$$D=W_1+W_2+\dots+W_p,$$

gdzie (dla $i=1,2,\dots,p$) wyznacznik W_i otrzymujemy, zastępując w wyznaczniku (3) l-tą kolumnę przez kolumnę elementów $A_i,B_i,\dots,L_i$. Zatem:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,l-1} & A_1+A_2+\dots+A_p & a_{1,l+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,l-1} & B_1+B_2+\dots+B_p & a_{2,l+1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,l-1} & L_1+L_2+\dots+L_p & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$=\sum_{l=1}^{p}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,l-1} & A_l & a_{1,l+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,l-1} & B_l & a_{2,l+1} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,l-1} & L_l & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Z dowiedzionych własności wynika natychmiast na mocy twierdzenia 3 tego Rozdziału (str. 14):

Twierdzenie 4. *Nie zmieniając wartości wyznacznika, można do elementów jakiejkolwiek jego kolumny (jakiegokolwiek wiersza) dodać odpowiednie elementy innej kolumny (innego wiersza), pomnożone przez czynnik stały.*

Zastosujemy twierdzenie 4 do obliczenia wartości wyznacznika

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ . & . & . & . \\ (n-1)n+1 & . & . & n^2 \end{vmatrix},$$

gdzie n jest liczbą naturalną $\geqslant 3$.

Dodając do elementów 3-ej kolumny wyznacznika D odpowiednie elementy 2-ej jego kolumny, pomnożone przez -1, a następnie do elementów 2-ej kolumny odpowiednie elementy pierwszej kolumny, pomnożone przez -1, otrzymamy, jak łatwo widzieć, wyznacznik, w którym wszystkie elementy 2-ej oraz 3-ej kolumny będą równe 1, zatem wyznacznik, który w myśl tw. 3 będzie równy zeru. Jest więc na mocy tw. 4:

$$D_n=0 \quad \text{dla} \quad n\geqslant 3.$$

Oczywiście mamy tu $D_1=1$ i $D_2=-2$.

Podobnie możnaby obliczyć wyznacznik

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (2n)^2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & (n^2)^2 \end{vmatrix}$$

dla stopni $n\geqslant 4$. Odejmując od czwartej kolumny tego wyznacznika trzecią, od trzeciej drugą i od drugiej pierwszą, a następnie w otrzymanym w ten sposób wyznaczniku odejmując od czwartej kolumny trzecią i od trzeciej drugą, otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić, wyznacznik, w którym kolumny trzecia i czwarta będą jednakowe, co w myśl tw. 3 daje $\Delta_n=0$ dla $n\geqslant 4$. (Natomiast $\Delta_2=-20$ i $\Delta_3=-216$).

§ 9. Wyznacznik Vandermonde'a.

Jako inny przykład, obliczmy wyznacznik stopnia $n=4$:

$$V_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix},$$

gdzie liczby a_1, a_2, a_3 i a_4 są dowolnie dane. Odejmując od 2-ej, 3-ej i 4-ej kolumny kolumnę 1-ą, nie zmieniamy wartości wyznacznika. Lecz wtedy nowe elementy 2-ej kolumny będą wszystkie podzielne przez a_2-a_1, 3-ej przez a_3-a_1, i 4-ej przez a_4-a_1. Wyprowadzając te dzielniki przed znak wyznacznika (ob. § 7, str. 17), otrzymamy:

$$V_4=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^2 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & a_1+a_4 \\ a_1^3 & a_1^2+a_1a_2+a_2^2 & a_1^2+a_1a_3+a_3^2 & a_1^2+a_1a_4+a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{a_1}+a_2 & \cancel{a_1}+a_3 & \cancel{a_1}+a_4 \\ a_1^2+\cancel{a_1a_2}+a_2^2 & a_1^2+\cancel{a_1a_3}+a_3^2 & a_1^2+\cancel{a_1a_4}+a_4^2 \end{vmatrix}$$

Odejmując w otrzymanym (jako ostatni czynnik) wyznaczniku od 2-go wiersza 1-szy wiersz pomnożony przez a_1, zaś od 3-go 2-gi pomnożony przez a_1, zastąpimy go przez równy mu wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}.$$

Postępując z tym wyznacznikiem podobnie jak z wyznacznikiem V_4, otrzymamy jako jego wartość

$$(a_3-a_2)(a_4-a_2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_2^2 & a_2+a_3 & a_2+a_4 \end{vmatrix}=(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3),$$

zatem

$$V_4=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=\prod_{k=2}^{4}\prod_{l=1}^{k-1}(a_k-a_l).$$

Ogólnie obliczymy przez indukcję t. zw. *wyznacznik Vandermonde'a* dowolnego stopnia $n>1$:

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ a_1 & a_2 & . & . & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & . & . & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Otrzymamy:

$$V_n = \prod_{k=2}^{n} \prod_{l=1}^{k-1} (a_k - a_l). \tag{22}$$

Jak łatwo widzieć, prawa strona tego wzoru jest iloczynem $\frac{n(n-1)}{2}$ różnic $a_k - a_l$, gdzie $1 \leqslant l < k \leqslant n$, po rozwinięciu więc daje sumę algebraiczną $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ składników (wśród których mogą być podobne). Ponieważ zaś wyznacznik V_n po rozwinięciu jest sumą algebraiczną $n!$ składników, wśród których niema podobnych (gdyż do każdego składnika wchodzi po jednym elemencie z każdego wiersza i każdej kolumny), więc wnosimy stąd, że (dla $n > 1$):

$$n! \leqslant 2^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{23}$$

Tak więc za pomocą wyznacznika Vandermonde'a udowodniliśmy nierówność (23).

Np. dla $n=3$ będziemy mieli już $3! = 6 < 8 = 2^{\frac{3.2}{2}}$; po rozwinięciu iloczynu V_3 muszą więc nastąpić redukcje składników podobnych.

Zauważmy jeszcze, że wobec wzoru (22) mamy oczywiście

$$a_1 a_2 \ldots a_n V_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & . & . & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^n & a_2^n & . & . & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik ten różni się od wyznacznika (3)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

tylko tym, że zamiast elementu a_k^l piszemy $a_{k,l}$, t. j. że wykładniki zostały wzięte jako drugie wskaźniki. Wnosimy stąd, że wartość wyznacznika D_n otrzymamy, rozwijając iloczyn

$$a_1 a_2 \ldots a_n V_n = a_1 a_2 \ldots a_n \prod_{k=2}^{n} \prod_{l=1}^{k-1} (a_k - a_l)$$

oraz (po ewentualnej redukcji wyrazów podobnych) pisząc wykładniki jako drugie wskaźniki odpowiednich czynników.

Własność tę możnaby przyjąć za punkt wyjścia dla definicji wyznacznika, pozwalającej z łatwością wyprowadzić niektóre własności wyznaczników.

Co do iloczynu (22), to zauważymy jeszcze, że po wymnożeniu przedstawia on wielomian zmiennych $a_1 a_2 \ldots a_n$, zmieniający swój znak (z zachowaniem swej wartości bezwzględnej) przy każdej transpozycji dwóch zmiennych. Możnaby dowieść, że jest to najprostszy wielomian o tej własności, mianowicie że każdy inny wielomian n zmiennych o tej własności jest iloczynem wielomianu V_n przez *wielomian symetryczny* (t. j. nie zmieniający swej wartości przy dowolnej permutacji zmiennych).

ĆWICZENIA. 1. Rozwijając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ a & u & a & a \\ b & v & b & b \\ c & w & c & c \end{vmatrix}$$

według elementów 1-go wiersza i stosując tw. 3, dowieść, że jest on równy 0 przy wszelkich wartościach liczb $a, b, c, x, y, z, t, u, v, w$.

2. Obliczyć wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Odp.: Stosując rozwinięcie według elementów 1-go wiersza, a do drugiego otrzymanego podwyznacznika — rozwinięcie według elementów 1-szej kolumny, znajdujemy z łatwością, że $W = 1 - ab$.

3. Obliczyć wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}.$$

Odp.[1]): $D = -5$.

[1]) Ch. de Comberousse, *Cours d'Algèbre Supérieure*, Cz. I, Paryż 1915, str. 46-47, gdzie podano szczegóły rachunku.

4. Obliczyć wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} 20 & 25 & 35 & 45 \\ 12 & 16 & 24 & 33 \\ 20 & 27 & 36 & 55 \\ 28 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}.$$

Odp.[1]: $D = 20$.

5. Dowieść tożsamości[2])

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ 1 & a_3+y & b_3+y & c_3+y \\ 1 & a_4+z & b_4+z & c_4+z \end{vmatrix}$$

6. Dowieść, że

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^3.$$

7. Dowieść, że wyznacznik, którego kolejne wyrazy są pierwszymi n^2 wyrazami dowolnego postępu geometrycznego, jest równy 0. Dowieść, że własność tę ma też wyznacznik, utworzony z n^2 pierwszych wyrazów t. zw. *ciągu Fibonacci'ego* $u_1, u_2, \ldots$, t. j. ciągu, w którym $u_1 = u_2 = 1$, zaś $u_{k+1} = u_{k-1} + u_k$ dla $k = 2, 3, \ldots$[3])

8. Dowieść, że dla $a_{1,1} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{1,1}^{n-2}} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n-1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-2,2} & \ldots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

gdzie $b_{k,l} = a_{1,1} a_{k+1,l+1} - a_{1,l+1} a_{k+1,1}$ dla $k, l = 1, 2, \ldots, n-1$.

Uwaga. Przekształcenie to pozwala obniżyć stopień wyznacznika, a więc też obliczać go przez kolejne obniżanie jego stopnia.

9. Obliczyć wyznacznik t. zw. *kołujący* 5-go stopnia:

$$K_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Odp.: $K_5 = 3 \cdot 5^4$.

[1]) Tamże, str. 709.
[2]) Tamże, str. 710.
[3]) Ob. dalej, str. 42.

Uwaga. Można dowieść, że wartość wyznacznika kołującego n-go stopnia jest liczbą

$$K_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}.$$

Czytelnik zechce sprawdzić to dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

10. Wyprowadzić dla $n = 2, 3, \ldots$ tożsamość

$$\begin{vmatrix} u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 & u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \\ u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n & v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \end{vmatrix} = \sum_{1 \leqslant l < k \leqslant n} \begin{vmatrix} u_l & u_k \\ v_l & v_k \end{vmatrix}^2$$

11. Dowieść, że wyznacznik n-go stopnia o elementach $a_{k,l} = \min(k, l)$ ma wartość 1, zaś o elementach $a_{k,l} = \max(k, l)$ ma wartość $(-1)^{n-1} n$ (dla $k = 1, 2, \ldots, n$ i $l = 1, 2, \ldots, n$).

§ 10. Mnożenie wyznaczników jednakowego stopnia.

Mając dwa dane wyznaczniki tego samego stopnia:

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

utwórzmy wyznacznik

$$C = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

przyjmując dla $k = 1, 2, \ldots, n$ i $l = 1, 2, \ldots, n$

$$c_{k,l} = a_{k,1} b_{l,1} + a_{k,2} b_{l,2} + \ldots + a_{k,n} b_{l,n}. \tag{24}$$

Niech l będzie którąkolwiek z liczb $1, 2, \ldots, n$. W myśl tw. 4 (str. 20) wyznacznik C będzie sumą n wyznaczników, z których pierwszy będzie iloczynem liczby $b_{l,1}$ przez wyznacznik, jaki otrzymamy z wyznacznika C, zastępując w nim l-tą kolumnę przez 1-szą kolumnę wyznacznika A, drugi — iloczynem $b_{l,2}$ przez wyznacznik, jaki otrzymamy z wyznacznika C, zastępując w nim l-tą kolumnę przez 2-gą kolumnę wyznacznika A, i t. d., wreszcie n-ty — iloczynem $b_{l,n}$ przez wyznacznik, jaki otrzymamy z wyznacznika C, zastępując w nim l-tą kolumnę przez n-tą kolumnę wyznacznika A.

Stosując takie rozwinięcia do kolejnych kolumn wyznacznika C (t. j. kolejno dla $l=1,2,\dots,n$), dochodzimy z łatwością do wniosku, że wyznacznik C jest sumą n^n iloczynów postaci

$$b_{1,j_1} b_{2,j_2} \dots b_{n,j_n} W_{j_1,j_2,\dots,j_n},$$

gdzie $W_{j_1,j_2,\dots,j_n}$ jest wyznacznikiem, którego 1-sza kolumna jest j_1-tą kolumną wyznacznika A, druga — j_2-ą kolumną wyznacznika A i t.d., wreszcie n-ta — j_n-ą kolumną wyznacznika A, zaś sumowanie rozciąga się na wszystkie n^n ciągów $j_1, j_2, \dots, j_n$ liczb naturalnych $\leqslant n$.

Weźmy pod uwagę jeden z takich ciągów i przypuśćmy, że ciąg ten zawiera dwa równe wyrazy, np. $j_p = j_q$ dla $1 \leqslant p < q \leqslant n$. Wynika stąd, jak łatwo widzieć, że w wyznaczniku $W_{j_1,j_2,\dots,j_n}$ p-ta oraz q-ta kolumna są jednakowe, zatem $W_{j_1,j_2,\dots,j_n} = 0$.

Zamiast rozciągać sumowanie na wszystkie n^n ciągów $j_1, j_2, \dots, j_n$ liczb naturalnych $\leqslant n$, wystarczy więc dla otrzymania wartości wyznacznika C rozciągnąć je tylko na wszystkie ciągi, utworzone z n różnych liczb ciągu $1,2,\dots,n$. Jest zatem

$$C = \sum b_{1,j_1} b_{2,j_2} \dots b_{n,j_n} W_{j_1,j_2,\dots,j_n}, \tag{25}$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie $n!$ permutacyj z liczb $1,2,\dots,n$.

Niech $j_1 j_2 \dots j_n$ oznacza którąkolwiek permutację z tych liczb. Wyznacznik $W_{j_1,j_2,\dots,j_n}$ różni się od wyznacznika A co najwyżej porządkiem kolumn. Aby go otrzymać z wyznacznika A, należy w tym ostatnim poprzestawiać kolumny tak, aby na miejscu pierwszej znalazła się j_1-sza, zamiast 2-giej — j_2-ga, i. t. d., wreszcie zamiast n-tej — j_n-ta. Można to (p. str. 5) uzyskać za pomocą kolejnych transpozycyj dwóch kolumn, odpowiadających transpozycjom, potrzebnym dla otrzymania permutacji $j_1 j_2 \dots j_n$ z permutacji $12\dots n$. Liczba tych transpozycyj będzie więc parzystą lub nieparzystą zależnie od tego, czy permutacja $j_1 j_2 \dots j_n$ należy do klasy parzystej, czy do nieparzystej. W pierwszym przypadku będzie w myśl tw. 2 (str. 14) $W_{j_1,j_2,\dots,j_n} = A$, w drugim $W_{j_1,j_2,\dots,j_n} = -A$. Wzór (26) daje więc

$$C = A \sum \pm b_{1,j_1} b_{2,j_2} \dots b_{n,j_n},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje $j_1 j_2 \dots j_n$ z liczb $1,2,\dots,n$, zaś znak należy wziąć $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy permutacja należy do klasy parzystej, czy nieparzystej. Jest więc

$$\sum \pm b_{1,j_1} b_{2,j_2} \dots b_{n,j_n} = B$$

i przeto

$$C = AB.$$

Wzór (24) wyrażamy krótko, mówiąc, że „wyraz $c_{k,l}$ jest iloczynem k-go wiersza wyznacznika A przez l-ty wiersz wyznacznika B". Mamy zatem

Twierdzenie 5. *Iloczyn dwóch wyznaczników A i B jednakowego stopnia jest równy wyznacznikowi tegoż stopnia, w którym element znajdujący się w (dowolnym) k-tym wierszu i (dowolnej) l-tej kolumnie jest iloczynem k-go wiersza wyznacznika A przez l-ty wiersz wyznacznika B.*

Z twierdzenia 5 wynika wobec twierdzenia 1 (str. 13), że iloczyn wyznaczników A i B jest też równy wyznacznikowi, w którym element $c_{k,l}$ znajdujący się w k-tym wierszu i l-tej kolumnie jest równy

$$a_{k,1} b_{1,l} + a_{k,2} b_{2,l} + \dots + a_{k,n} b_{n,l},$$

czyli iloczynem k-go wiersza wyznacznika A przez l-tą kolumnę wyznacznika B. Mówimy tutaj, że dokonaliśmy mnożenia wierszy wyznacznika A przez kolumny wyznacznika B. Podobnie iloczyn AB jest równy wyznacznikowi, otrzymanemu przez mnożenie kolumn wyznacznika A przez wiersze wyznacznika B, albo też kolumn wyznacznika A przez kolumny wyznacznika B. W ten sposób iloczyn dwóch wyznaczników jednakowego stopnia możemy przedstawić za pomocą wyznacznika w czterech postaciach mnożenia: wierszy przez wiersze, wierszy przez kolumny, kolumn przez wiersze i kolumn przez kolumny. Tak np.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{1,2} & a_{1,1}b_{2,1}+a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{1,2} & a_{2,1}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{2,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1}+a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1}+a_{2,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{2,1}b_{2,1} & a_{1,2}b_{1,1}+a_{2,1}b_{2,1} \\ a_{1,1}b_{1,2}+a_{2,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix}.$$

W szczególności:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & 30 \\ 38 & 44 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 41 \\ 34 & 73 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 39 \\ 39 & 69 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & 50 \\ 33 & 66 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 48 \\ 38 & 63 \end{vmatrix} = 66.$$

Natomiast

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ 28 & -29 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 35 \\ 13 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 29 \\ 7 & -32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ 28 & -29 \end{vmatrix} = -363;$$

mnożenie wierszy przez wiersze daje tu więc ten sam wyznacznik, co mnożenie kolumn przez kolumny.

Podobnie

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

W szczególności wnosimy z tw. 5, że:

Kwadrat wyznacznika może być przedstawiony w postaci wyznacznika tegoż stopnia, symetrycznego względem głównej przekątnej.

Np. mnożąc wiersze przez wiersze, znajdujemy

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2;$$

lecz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, skąd tożsamość

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

§ 11. Mnożenie wyznaczników różnych stopni. Twierdzenie 5 pozwala przedstawić iloczyn dwóch wyznaczników jednakowego stopnia jako wyznacznik tegoż stopnia. Gdyby dane wyznaczniki były różnych stopni, moglibyśmy zastąpić wyznacznik niższego stopnia przez wyznacznik wyższego, jak wskazano w § 7, str. 17, wzór (18), i w ten sposób zrównać stopnie obu wyznaczników, a potem dokonać ich mnożenia. Np.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha + a_2\beta & a_1\gamma + a_2\delta & a_3 & a_4 \\ b_1\alpha + b_2\beta & b_1\gamma + b_2\delta & b_3 & b_4 \\ c_1\alpha + c_2\beta & c_1\gamma + c_2\delta & c_3 & c_4 \\ d_1\alpha + d_2\beta & d_1\gamma + d_2\delta & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha + b_1\gamma & a_1\beta + b_1\delta & c_1 & d_1 \\ a_2\alpha + b_2\gamma & a_2\beta + b_2\delta & c_2 & d_2 \\ a_3\alpha + b_3\gamma & a_3\beta + b_3\delta & c_3 & d_3 \\ a_4\alpha + b_4\gamma & a_4\beta + b_4\delta & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Można jednak iloczyn wyznacznika m-go stopnia przez wyznacznik n-go stopnia przedstawić jako wyznacznik $m+n$-go stopnia według wzoru

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,m} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{n,1} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Aby wyprowadzić wzór (26), wystarczy przedstawić oba dane wyznaczniki jako wyznaczniki $m+n$-go stopnia, zapełniając brakujące elementy głównej przekątnej, przedłużonej w dół (dla pierwszego czynnika) lub w górę (dla drugiego czynnika), jednościami, zaś wszystkie inne brakujące elementy zerami, t. j. pisząc:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{m,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

a następnie mnożąc otrzymane wyznaczniki $m+n$-go stopnia wierszami przez wiersze.

§ 12. Wyznacznik utworzony z minorów danego wyznacznika. Jako inne zastosowanie twierdzenia 5 o mnożeniu wyznaczników, obliczmy dla wyznacznika (3) stopnia $n>1$ o wartości $D \neq 0$ wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{1,1} & \dots & D_{1,n} \\ D_{2,1} & \dots & D_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n,1} & \dots & D_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{27}$$

utworzony z minorów wyznacznika D, odpowiadających poszczególnym jego elementom.

Jak dowiedliśmy w § 7, str. 18, mamy wobec (27):

$$\Delta = \begin{vmatrix} W_{1,1} & \dots & W_{1,n} \\ W_{2,1} & \dots & W_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{n,1} & \dots & W_{n,n} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$W_{k,l} = (-1)^{k+l} D_{k,l} \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\dots,n \quad \text{i} \quad l = 1,2,\dots,n. \tag{28}$$

W myśl twierdzenia 5 o mnożeniu wyznaczników będzie

$$D\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W_{1,1} & \dots & W_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{n,1} & \dots & W_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{29}$$

gdzie

$$c_{k,l} = a_{k,1} W_{l,1} + a_{k,2} W_{l,2} + \dots + a_{k,n} W_{l,n}$$

dla $k=1,2,\dots,n$ i $l=1,2,\dots,n$; zatem, wobec (28):

$$c_{k,l} = (-1)^{l+1} a_{k,1} D_{l,1} + (-1)^{l+2} a_{k,2} D_{l,2} + \dots + (-1)^{l+n} a_{k,n} D_{l,n}.$$

W myśl (20) mamy więc

$$c_{k,l} = 0 \qquad \text{dla } k \neq l,$$

zaś w myśl (13)

$$c_{k,k} = D \qquad \text{dla } k = 1,2,\dots,n.$$

Wobec (29) $D\Delta$ jest więc wyznacznikiem stopnia n, w którym wszystkie elementy głównej przekątnej są równe D, zaś wszystkie inne elementy są zerami. Wartością takiego wyznacznika jest więc, jak wiemy (ob. § 7, str. 17), iloczyn wszystkich elementów głównej przekątnej, czyli w danym razie D^n. Zatem

$$D\Delta = D^n, \tag{30}$$

skąd wobec założenia, że $D \neq 0$,

$$\Delta = D^{n-1}.$$

Można dowieść na innej drodze (powołując się na ciągłość wielomianu), że równość ta zachodzi również w przypadku, gdy $D=0$.

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć wyznaczniki:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -10 & -11 & 12 & 4 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & -10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix}$$

Odp.: $A = 8100$, $B = -972$, $C = 194400$.

2. Dowieść, że przy wszelkich wartościach liczb $a, b, c, \ldots, r$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & b & c & d & e \\ g & b & c & d & e \\ h & i & j & k & l \\ m & n & p & q & r \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & c & d & e \\ h & i & c & d & e \\ j & k & c & d & e \\ l & m & n & p & q \end{vmatrix} = 0.$$

3. Dowieść tożsamości

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = [(a+c)^2 - (b+d)^2]\,[(a-c)^2 + (b-d)^2].$$

4. Obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 & a \\ 6 & 11 & 2 & b \\ 2 & 3 & -5 & c \\ 4 & 6 & 12 & d \end{vmatrix}.$$

Odp.: $88a + 308b - 440c - 286d$.

5. Rozwiązać równanie

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 & x \\ 6 & 11 & 2 & x \\ 2 & 3 & -5 & x \\ 6 & 29 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odp.: $x = -1$.

6. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych x, y, dla których

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ y & 2 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

Odp.: $x = 5$, y dowolne.

7. Dowieść, że liczba $x = 0$ jest pierwiastkiem równania

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 27 \\ (x+1)^3 & (x-1)^3 & (x+3)^3 \\ (x+2)^3 & (x-2)^3 & (x+6)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Udowodnić tożsamość

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

9. Rozwiązać równanie

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -15.$$

Odp.: $x = 1$.

10. Dla jakich liczb rzeczywistych x zachodzi równość

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odp.: Dla każdego rzeczywistego x.

11. Dowieść tożsamości

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x+y+z)\,(x+y-z)\,(x+z-y)\,(y+z-x).$$ [1]

12. Obliczyć wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} z & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3z & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5z & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7z & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9z \end{vmatrix}.$$

Odp.: $D = 945z^5 - 1050z^3 + 225$.

[1] G. Salmon, *Leçons d'Algèbre Supérieure*, Wyd. 2-e, Paryż 1890, str. 23, Ex. XIII.

13. Okazać, że (dla $n=2,3,\ldots$) wyznacznik $(n-1)$-go stopnia

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 2^2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 3^2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 4^2 & 9 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 5^2 & 11 & 1 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

ma wartość $n!$ (Whittaker i Robinson).

Odp.: Rozwijając wyznacznik D_{n-1}, gdzie $n \geq 4$, według elementów ostatniej kolumny, znajdujemy wzór zwrotny

$$D_{n-1}=(2n-1)\,D_{n-2}-(n-1)^2\,D_{n-3},$$

skąd przez indukcję dowodzimy, że $D_{n-1}=n!$ dla $n=2,3,\ldots$

Albo też: od drugiego wiersza odejmujemy podwojony pierwszy; w tak otrzymanym wyznaczniku od trzeciego wiersza odejmujemy potrojony drugi w nowym wyznaczniku odejmujemy od czwartego wiersza czterokrotny trzeci i t. d., co prowadzi do wyznacznika, w którym na głównej przekątnej są liczby $2,3,4,\ldots,n$, zaś poniżej głównej przekątnej są same zera.

14. Dowieść, że dla $x \neq 0$ wartość wyznacznika

$$W(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} a & x^{-1} & 0 & 0 \\ -x & b & x^{-1} & 0 \\ 0 & -x & c & x^{-1} \\ 0 & 0 & -x & d \end{vmatrix}$$

nie zależy od x, oraz że $W(a,b,c,d)=W(d,c,b,a)$. Uogólnić to na wyznaczniki wyższych stopni.

15. Dowieść, że wyznacznik nie zmienia swej wartości, jeżeli każdy jego element $a_{k,l}$ pomnożyć przez liczbę p^{k-l}, gdzie p jest dowolną liczbą różną od 0.

16. Dowieść, że jeżeli

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1} & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

to można zawsze wiersze tego wyznacznika tak przestawić, aby w otrzymanym przez to wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & . & . & b_{1,n} \\ . & . & . & . \\ b_{n,1} & . & . & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

było

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & . & . & b_{1,k} \\ . & . & . & . \\ b_{k,1} & . & . & b_{k,k} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{dla } k=1,2,\ldots,n.$$

Dowód. Rozwijamy wyznacznik D według elementów ostatniej kolumny. Jeden co najmniej z minorów musi być różny od 0. Brakujący wiersz jego przestawiamy z ostatnim wierszem wyznacznika D. Z wyróżnionym minorem postępujemy jak z wyznacznikiem D i t. d.

§ 13. Metoda Banachiewicza obliczania wyznaczników.

Metoda ta polega na przedstawieniu wyznacznika (3) jako iloczynu dwóch wyznaczników „trójkątnych" postaci

$$D=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & g_{1,2} & . & . & g_{1,n} \\ 0 & 1 & . & . & g_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & . & . & h_{1,n} \\ 0 & h_{2,2} & . & . & h_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & h_{n,n} \end{vmatrix}$$

Przy pewnych warunkach elementy $g_{1,2},\ldots,\ g_{n-1,n}$ i $h_{1,1},\ldots,\ h_{n,n}$ mogą być wyznaczone jednoznacznie. Mianowicie, uważając dany wyznacznik za otrzymany z mnożenia wyznaczników trójkątnych kolumnami przez kolumny, otrzymujemy naprzód

$$h_{1,1}=a_{1,1},\quad h_{1,2}=a_{2,1},\quad \ldots,\quad h_{1,n}=a_{n,1},$$

następnie

$$h_{1,1}\,g_{1,2}=a_{1,2},\quad h_{1,1}\,g_{1,3}=a_{1,3},\quad \ldots,\quad h_{1,1}\,g_{1,n}=a_{1,n},$$

co, jeżeli $h_{1,1} \neq 0$, pozwala obliczyć $g_{1,2},\ldots,\ g_{1,n}$; dalej, z równości

$$h_{1,2}\,g_{1,2}+h_{2,2}=a_{2,2},\quad h_{1,3}\,g_{1,2}+h_{2,3}=a_{3,2},\quad \ldots,\quad h_{1,n}\,g_{1,2}+h_{2,n}=a_{n,2}$$

znajdujemy $h_{2,2},h_{2,3},\ldots,h_{2,n}$, a następnie z równości

$$h_{1,2}g_{1,3}+h_{2,2}g_{2,3}=a_{2,3},\quad h_{1,2}g_{1,4}+h_{2,2}g_{2,4}=a_{2,4},\quad \ldots,\quad h_{1,2}g_{1,n}+h_{2,2}g_{2,n}=a_{2,n}$$

jeżeli $h_{2,2} \neq 0$, znajdujemy $g_{2,3},\ g_{2,4},\ldots,\ g_{2,n}$; następnie z równości

$$g_{1,3}\,h_{1,3}+g_{2,3}\,h_{2,3}+h_{3,3}=a_{3,3},\quad g_{1,3}\,h_{1,4}+g_{2,3}\,h_{2,4}+h_{3,4}=a_{3,4},\quad \ldots$$

wyznaczamy $h_{3,3},\ h_{3,4},\ldots,\ h_{3,n}$ i t. d. Rachunek ten wymaga jednak założenia, że

$$(31)\qquad h_{1,1} \neq 0,\quad h_{2,2} \neq 0,\quad \ldots,\quad h_{n,n} \neq 0.$$

Wartością D obliczonego wyznacznika (3) będzie, jak łatwo widzieć, iloczyn

$$D=h_{1,1}\,h_{2,2}\ldots h_{n,n}.$$

Czynniki tego iloczynu otrzymamy, wyznaczając $\overset{n^2}{m^2}$ elementów g oraz h z równań, łatwo się rozwiązujących kolejno. Do obliczenia wyznaczników równych 0 metoda ta nie ma zastosowania, ponieważ wymaga założenia (31). Natomiast można okazać, że jeżeli tylko $D \neq 0$, to zawsze można tak poprzestawiać w rozpatrywanym wyznaczniku jego wiersze i kolumny, aby powyższa metoda była stosowalna.

Dawniej znany sposób Chiò obliczania wyznaczników (1853) polega na kolejnym obniżaniu jego stopnia:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdot & \cdot & \dfrac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \dfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}} a_{2,1} & \cdot & \cdot & a_{2,n} - \dfrac{a_{1,n}}{a_{1,1}} a_{2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} - \dfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}} a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} - \dfrac{a_{1,n}}{a_{1,1}} a_{n,1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} - \dfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}} a_{2,1} & a_{2,3} - \dfrac{a_{1,3}}{a_{1,1}} a_{2,1} & \cdot & \cdot & a_{2,n} - \dfrac{a_{1,n}}{a_{1,1}} a_{2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} - \dfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}} a_{n,1} & a_{n,3} - \dfrac{a_{1,3}}{a_{1,1}} a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} - \dfrac{a_{1,n}}{a_{1,1}} a_{n,1} \end{vmatrix} = \cdots$$

(por. § 9, ćwiczenie 8).

PRZYKŁAD:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 446.$$