ROZDZIAŁ I.

PERMUTACJE

§ 1. Permutacje n elementów. Mając danych n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, możemy je ustawiać w rozmaitym porządku. Każde uporządkowanie danych elementów nazywamy *permutacją* (przestawieniem). Z dwuch elementów a_1, a_2 można oczywiście utworzyć dwie permutacje

$$(1)\qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1. \end{matrix}$$

Wszystkie permutacje z trzech elementów a_1, a_2, a_3 moglibyśmy otrzymać z permutacyj (1) (dwuch elementów a_1 i a_2), dopisując w nich naprzód nowy element a_3 na ostatnim (3-cim) miejscu, potem na drugim miejscu, wreszcie na pierwszym. Otrzymujemy w ten sposób 6 permutacyj z 3-ch elementów:

$$(2)\qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1. \end{matrix}$$

Podobnie, chcąc otrzymać wszystkie permutacje z 4 elementów a_1, a_2, a_3, a_4, należałoby we wszystkich permutacjach (2) z trzech elementów a_1, a_2, a_3 dopisać element a_4 naprzód na 4-tym miejscu, potem na 3-cim, potem na 2-gim, wreszcie na pierwszym. Otrzymalibyśmy w ten sposób $6 \cdot 4 = 24$ permutacje z 4 elementów.

Postępując w ten sposób kolejno, uzyskujemy regularny sposób wypisania wszystkich permutacyj z n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dla każdego danego naturalnego $n > 1$. Z jednego elementu a_1 można oczywiście otrzymać tylko jedną permutację.

Oznaczmy ogólnie przez P_n liczbę wszystkich permutacyj z n elementów. Jest więc $P_1=1$, $P_2=2$, $P_3=6$, $P_4=24$. Gdy mamy wypisane wszystkie P_n permutacyj z n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to, jak wiemy, aby otrzymać wszystkie P_{n+1} permutacyj z $n+1$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, należałoby w każdej z P_n permutacyj z n elementów dopisać element a_{n+1} naprzód na $n+1$ miejscu, potem, kolejno, na n-tym, $n-1$-szym, ..., 2-gim, wreszcie na 1-szym miejscu. Wynika stąd natychmiast, że

$$P_{n+1}=P_n\cdot(n+1).$$

Zatem $P_5=P_4\cdot 5=24\cdot 5=120$, $P_6=P_5\cdot 6=120\cdot 6=720$ i t. d.; ogólnie

$$P_n=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n, \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots$$

Iloczyn kolejnych n liczb naturalnych $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ oznaczamy, jak wiadomo, przez $n!$ i czytamy: n silnia [1]).

Jest więc

$$P_n=n! \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots$$

Aby wypisać wszystkie P_n permutacyj z n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, możemy oczywiście wypisać naprzód wszystkie P_n permutacyj z n liczb naturalnych $1, 2, \ldots, n$, a potem kolejne elementy każdej takiej permutacji dopisywać jako wskaźniki przy literze a.

W ten sposób, jak widzimy, badanie permutacyj z dowolnych n elementów sprowadza się do badania permutacyj z n liczb naturalnych $1, 2, \ldots, n$.

Dowolną permutację z n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ możemy napisać w postaci

$$a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n},$$

gdzie $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ jest pewną permutacją z n liczb naturalnych $1, 2, \ldots, n$.

§ 2. Nieporządek elementu i permutacji. Podział permutacyj na dwie klasy. Niech

(3) $$a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{k-1}}\, a_{\alpha_k} \ldots a_{\alpha_n}$$

będzie daną permutacją z n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, zaś a_{α_k} dany element tej permutacji. Jest tu więc α_k liczbą naturalną $\leqslant n$. Niech i oznacza liczbę naturalną $<k$. Jeżeli $\alpha_i>\alpha_k$, to mówimy, że w permutacji (3) elementy a_{α_i} oraz a_{α_k} dają *nieporządek*. Nieporządek jest więc wtedy, jeżeli element o większym wskaźniku poprzedza element o mniejszym wskaźniku. Liczbę wszystkich elementów a_{α_i}, gdzie $i<k$ oraz $\alpha_i>\alpha_k$, nazywamy nieporządkiem elementu a_{α_k} w danej permutacji (3) i oznaczamy przez $N_k(a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n})$: jest to więc liczba wszystkich tych wyrazów ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$, które są $>\alpha_k$. Sumę

$$N(a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n}) = \sum_{k=1}^{n} N_k(a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n}),$$

t. j. sumę nieporządków wszystkich elementów danej permutacji nazywamy *nieporządkiem permutacji* (3).

Więc np. dla permutacji $a_3 a_5 a_4 a_1 a_2$ mamy:

$$N_1=0, \quad N_2=0, \quad N_3=1, \quad N_4=3, \quad N_5=3, \quad \text{zatem} \quad N(a_3 a_5 a_4 a_1 a_2)=7.$$

Dla permutacji podstawowej $a_1 a_2 \ldots a_n$ mamy oczywiście $N(a_1 a_2 \ldots a_n)=0$, zaś dla permutacji odwrotnej do podstawowej, t. j. $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$, mamy

$$N(a_n a_{n-1} \ldots a_1)=0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Permutację zaliczamy do klasy parzystej lub nieparzystej, zależnie od tego czy liczba, którą nazwaliśmy jej nieporządkiem, jest parzysta ($\geqslant 0$), czy też nieparzysta.

Więc np. z permutacyj (2) 1-sza, 4-ta i 5-ta należą do klasy parzystej, pozostałe zaś do nieparzystej. Permutacja zasadnicza $a_1 a_2 \ldots a_n$ należy oczywiście do klasy parzystej.

§ 3. Transpozycje. Ich wpływ na klasę permutacyj. Liczba permutacyj każdej klasy. Weźmy pod uwagę w permutacji $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n}$ dwa dane elementy a_{α_i} oraz a_{α_k}, gdzie $i<k$. Jeżeli elementy te przestawimy jeden na miejsce drugiego, to powiadamy, żeśmy dokonali *transpozycji* (przemieszczenia) położenia elementów a_{α_i} oraz a_{α_k}. Otrzymamy w ten sposób z danej permutacji

(4) $$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{i-1}} a_{\alpha_i} a_{\alpha_{i+1}} \ldots a_{\alpha_{k-1}} a_{\alpha_k} a_{\alpha_{k+1}} \ldots a_{\alpha_n}$$

nową permutację

(5) $$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{i-1}} a_{\alpha_k} a_{\alpha_{i+1}} \ldots a_{\alpha_{k-1}} a_{\alpha_i} a_{\alpha_{k+1}} \ldots a_{\alpha_n}.$$

[1]) Zamiast $n!$ używa się też znakowania $\Gamma(n+1)$ lub $\underline{|n}$.

Twierdzenie 1. *Każda transpozycja dwuch elementów permutacji może być dokonaną zapomocą nieparzystej liczby kolejnych transpozycyj dwuch sąsiednich elementów.*

Dowód. Transponujemy w permutacji (4) element a_{α_i} kolejno z sąsiednimi elementami w prawo, aż a_{α_i} znajdzie się bezpośrednio po a_{α_k}, t. j. transponujemy a_{α_i} kolejno z $a_{\alpha_{i+1}}, a_{\alpha_{i+2}}, \dots, a_{\alpha_k}$. Dokonamy w ten sposób $k-i$ transpozycyj i otrzymamy z permutacji (4) permutację

(6) $$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_{i-1}} a_{\alpha_{i+1}} a_{\alpha_{i+2}} \dots a_{\alpha_{k-1}} a_{\alpha_k} a_{\alpha_i} a_{\alpha_{k+1}} \dots a_{\alpha_n}.$$

Następnie transponujemy w permutacji (6) element a_{α_k} kolejno z sąsiednimi elementami w lewo, aż a_{α_k} znajdzie się przed $a_{\alpha_{i+1}}$. Dokonamy w ten sposób dalszych $k-i-1$ transpozycyj i otrzymamy z permutacji (6) permutację (5).

W ten sposób otrzymujemy permutację (5) z permutacji (4) za pomocą kolejnych $(k-i)+(k-i-1)=2(k-i)-1$ transpozycyj sąsiednich elementów. Ponieważ liczba $2(k-i)-1$ jest nieparzysta, więc twierdzenie zostało udowodnione.

Przypuśćmy teraz, żeśmy w danej permutacji

(7) $$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_k} a_{\alpha_{k+1}} \dots a_{\alpha_n}$$

dokonali transpozycji dwuch sąsiednich elementów a_{α_k} i $a_{\alpha_{k+1}}$. Otrzymamy w ten sposób permutację

(8) $$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_{k-1}} a_{\alpha_{k+1}} a_{\alpha_k} a_{\alpha_{k+2}} \dots a_{\alpha_n}.$$

Obliczmy różnicę między nieporządkami permutacyj (7) i (8). Jak łatwo widzieć, nieporządki każdego z elementów $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_{k-1}}$, jakoteż $a_{\alpha_{k+2}}, a_{\alpha_{k+3}}, \dots, a_{\alpha_n}$, są w permutacjach (7) i (8) jednakowe. Co zaś do elementu a_{α_k}, to jeżeli $\alpha_k > \alpha_{k+1}$, nieporządek jego przy przejściu od permutacji (7) do (8) wzrasta o 1, jeżeli zaś $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ — pozostaje bez zmiany. Natomiast co do elementu $a_{\alpha_{k+1}}$, to jeżeli $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, nieporządek jego przy przejściu od permutacji (7) do (8) pozostaje bez zmiany, jeżeli zaś $\alpha_k > \alpha_{k+1}$ — maleje o 1. Ostatecznie więc, przy przejściu od permutacji (7) do (8) nieporządek permutacji wzrasta lub maleje o 1 zależnie od tego, czy $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, czy też $\alpha_k > \alpha_{k+1}$, w każdym więc razie zmienia się o 1.

Wobec tw. 1 wynika stąd natychmiast, że każda transpozycja dwuch elementów permutacji zmienia jej nieporządek o liczbę nieparzystą. Mamy stąd

Twierdzenie 2. *Każda transpozycja dwuch elementów permutacji zmienia jej klasę* (z parzystej na nieparzystą lub naodwrót).

Weźmy teraz pod uwagę wszystkie permutacje z n danych elementów ($n>1$). Dokonajmy transpozycji dwuch pierwszych elementów w każdej permutacji klasy parzystej. Każda z permutacyj przejdzie więc, w myśl tw. 2, na permutację klasy nieparzystej, przy czym różne permutacje klasy parzystej przejdą na różne permutacje klasy nieparzystej. Wynika stąd, że liczba wszystkich permutacyj klasy nieparzystej jest nie mniejsza od liczby wszystkich permutacyj klasy parzystej. Podobnie dowodzimy że jest i na odwrót. W każdej klasie jest więc jednakowa liczba permutacyj, zatem $n!/2$ permutacyj. Mamy więc

Twierdzenie 3. *Permutacyj klasy parzystej z n elementów, gdzie $n>1$, jest tyleż co klasy nieparzystej* (mianowicie po $n!/2$).

§ 4. Otrzymywanie dowolnej permutacji za pomocą kolejnych transpozycyj. Niech $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_n}$ oznacza dowolną daną permutację z n elementów $a_1, a_2, \dots, a_n$. Permutację tę otrzymać możemy z permutacji zasadniczej $a_1 a_2 \dots a_n$ za pomocą kolejnych transpozycyj w sposób następujący.

Jeżeli $\alpha_1 = 1$, to pozostawiamy element $a_1 = a_{\alpha_1}$ na swoim miejscu. Jeżeli $\alpha_1 \neq 1$, to transponujemy element a_1 z elementem a_{α_1}. W ten sposób otrzymamy permutację, w której element a_{α_1} będzie na pierwszym miejscu. Niech $a_{\alpha_1} a_{\beta_2} \dots a_{\beta_n}$ będzie otrzymaną w ten sposób permutacją. Jeżeli $\beta_2 = \alpha_2$, pozostawiamy element $a_{\beta_2} = a_{\alpha_2}$ na swoim miejscu. W przeciwnym razie transponujemy element a_{β_2} z elementem a_{α_2} (który musi się znaleźć wśród elementów $a_{\beta_2}, a_{\beta_3}, \dots, a_{\beta_n}$). Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy po co najwyżej $n-1$ kolejnych transpozycjach permutację $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_n}$. Mamy więc

Twierdzenie 4. *Każdą permutację* (z n elementów $a_1, a_2, \dots, a_n$) *możemy otrzymać z permutacji zasadniczej* ($a_1 a_2 \dots a_n$) *za pomocą skończonej* ($<n$) *liczby kolejnych transpozycyj.*

Jasnym jest, że i na odwrót, permutację zasadniczą możemy otrzymać z każdej innej za pomocą skończonej liczby kolejnych transpozycyj. Ogólniej: każdą permutację z n elementów możemy otrzymać z każdej innej permutacji tych elementów za pomocą skończonej liczby kolejnych transpozycyj.

Ponieważ każda transpozycja dwóch elementów permutacji zmienia jej klasę (tw. 2), więc mamy

Twierdzenie 5. *Dwie permutacje z n elementów ($n>1$) mogą być otrzymane jedna z drugiej za pomocą tylko parzystej lub tylko nieparzystej liczby kolejnych transpozycyj, zależnie od tego czy należą do tej samej, czy do różnych klas.*

Wynika też stąd

Twierdzenie 6. *Permutacja z n elementów ($n>1$) należy do klasy parzystej lub nieparzystej zależnie od tego, czy może być otrzymana z permutacji zasadniczej tych elementów za pomocą parzystej, czy też nieparzystej liczby transpozycyj.*

W ścisłym związku z permutacjami są t. zw. *substytucje* (podstawienia), którymi zajmiemy się w Rozdziale XVIII.

ĆWICZENIA. 1. Ile jest permutacyj z 10 elementów?

Odp.: 3628800.

2. Do jakiej klasy należy permutacja $a_2a_3 \dots a_n a_1$?

Odp.: Do parzystej, jeżeli liczba n jest nieparzysta, i do nieparzystej, jeżeli liczba n jest parzysta.

3. Ile kolejnych transpozycyj sąsiednich elementów należy dokonać, aby z permutacji $a_n a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ otrzymać permutację $a_2 a_3 \dots a_n a_1$?

Odp.: $2n-2$.