

ROZDZIAŁ IX

Funkcje $\Gamma(s)$ i $\zeta(s)$. Szeregi Dirichleta.

§ 1. Funkcja $\Gamma(s)$. W Rozdz. VII, § 5, wprowadziliśmy funkcję meromorficzną Γ . Obecnie zajmiemy się nieco bliżej własnościami tej funkcji. Rozważmy całkę

$$(1.1) \quad \int_0^{+\infty} u^{s-1} e^{-u} du,$$

gdzie $s = \sigma + it$ oznacza zmienną zespoloną, zaś $u^{s-1} = \exp((s-1)\text{Log } u)$. Całka (1.1) nosi nazwę *całki Eulera drugiego rodzaju*.

Zauważmy, że $|u^{s-1} e^{-u}| = u^{\sigma-1} e^{-u}$ i że funkcja $u^{\sigma-1} e^{-u}$ jest całkowalna w przedziale $0 \leq u \leq 1$, jeżeli tylko $\sigma > 0$. Z drugiej strony, przy każdym σ mamy nierówność $u^{\sigma-1} e^{-u} \leq e^{-\frac{1}{2}u}$, gdy u jest dostatecznie duże, a więc funkcja $u^{\sigma-1} e^{-u}$ jest całkowalna w przedziale $1 \leq u < +\infty$. Zatem całka (1.1) jest zbieżna, a nawet zbieżna bezwzględnie, gdy $\sigma > 0$.

Całka (1.1) jest niewłaściwa, gdyż przedział całkowania jest nieskończony, a poza tym, jeżeli $0 < \Re s < 1$, to funkcja podcałkowa jest nieograniczona w otoczeniu punktu $u = 0$.

Oznaczmy przez $F(s)$ wartość całki (1.1). Udowodnimy, że rozważana całka jest zbieżna niemal jednostajnie w półpłaszczyźnie

$\Re s > 0$, t. j. że jeżeli przyjmiemy $F_{\delta, R}(s) = \int_{\delta}^R u^{s-1} e^{-u} du$, to $F_{\delta, R}(s)$

dąży w półpłaszczyźnie $\Re s > 0$ niemal jednostajnie do granicy $F(s)$, gdy $\delta \rightarrow 0+$ i $R \rightarrow +\infty$. Wystarczy dowieść, że funkcja $F_{\delta, R}(s)$ dąży jednostajnie do $F(s)$ w każdym pasie $a \leq \Re s \leq b$, gdzie $0 < a < b < +\infty$. Możemy przyjąć, że $\delta < 1 < R$. Wówczas, gdy s należy do wspomnianego pasa, mamy

$$\begin{aligned} |F_{\delta,R}(s) - F(s)| &= \left| \int_0^{\delta} e^{-u} u^{s-1} du + \int_R^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} du \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} e^{-u} u^{a-1} du + \int_R^{+\infty} e^{-u} u^{b-1} du, \end{aligned}$$

co dowodzi jednostajnej zbieżności funkcji $F_{\delta,R}(s)$.

Funkcje $F_{\delta,R}(s)$ są całkowite, a więc funkcja $F(s)$ jest holomorficzna w półpłaszczyźnie $\Re s > 0$. Zatem:

(1.2) Całka (1.1) jest zbieżna bezwzględnie i niemal jednostajnie w półpłaszczyźnie $\Re s > 0$ i przedstawia funkcję holomorficzną w tej półpłaszczyźnie.

Zauważymy jeszcze, że funkcja $F(s)$ spełnia równanie

$$(1.3) \quad F(s+1) = sF(s),$$

jeżeli $\Re s > 0$. Istotnie, całkując przez części, mamy

$$F(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^s du = [-e^{-u} u^s]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} du = sF(s),$$

gdyż wyraz przecalkowany jest równy zeru dla $\Re s > 0$.

Łatwo sprawdzić, że $F(1) = 1$.

Stosując wielokrotnie wzór (1.3), otrzymamy dla całkowitego nieujemnego n równość

$$(1.4) \quad F(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!,$$

jeżeli przez $0!$ umówimy się rozumieć 1.

Na funkcję $\Gamma(s)$ mieliśmy dwa wzory, a mianowicie (str. 300 i 301)

$$(1.5) \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \quad (\gamma = \text{stała Eulera}),$$

$$(1.6) \quad \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}.$$

Wykażemy obecnie, że funkcja Γ w półpłaszczyźnie $\Re s > 0$ daje się również przedstawić przez całkę (1.1), t. zn. że

$$(1.7) \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} du \quad \text{gdy } \Re s > 0.$$

Dowód. Ponieważ obie strony są tu funkcjami holomorficznymi w półpłaszczyźnie $\Re s > 0$, wystarczy udowodnić równość (1.7) w przedziale $0 < s \leq 1$. Ze względu na (1.6) wystarczy wykazać, że w tym przedziale

$$F(s)s(s+1)\cdots(s+n)/n! \rightarrow 1,$$

albo, stosując kilkakrotnie równość (1.3), że

$$(1.8) \quad F(s+n+1)/n!n^s \rightarrow 1 \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Podstawmy $s+n+1$ zamiast s do całki (1.1). Ponieważ przy naszych założeniach co do s mamy nierówności $u^s \leq n^s$ i $u^{s-1} \geq n^{s-1}$, gdy $0 \leq u \leq n$, oraz nierówności przeciwnie, gdy $u \geq n$, przeto:

$$F(s+n+1) \leq n^s \int_0^n e^{-u} u^{s-1} du + n^{s-1} \int_n^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} du,$$

$$F(s+n+1) \geq n^{s-1} \int_0^n e^{-u} u^{s-1} du + n^s \int_n^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} du.$$

Zastosujmy teraz całkowanie przez części do tych całek, które zawierają u^{n+1} . Łatwy rachunek daje:

$$F(n+s+1) \leq n^s \int_0^\infty e^{-u} u^n du + e^{-n} n^{n+s} + n^{s-1} \int_n^\infty e^{-u} u^n du,$$

$$F(n+s+1) \geq n^s \int_0^\infty e^{-u} u^n du - e^{-n} n^{n+s} + n^{s-1} \int_0^n e^{-u} u^n du.$$

W nierównościach tych współczynnik przy n^s wynosi $F(n+1) = n!$, zaś współczynnik przy n^{s-1} jest mniejszy od $n!$. Podzielmy ostatnie nierówności przez $n!n^s$. Wzór (1.8) będzie konsekwencją tych nierówności, jeżeli wykażemy, że $e^{-n} n^n / n! \rightarrow 0$. Otóż odrzucając n pierwszych wyrazów w szeregu na e^n , mamy nierówność

$$e^n \geq \frac{n^n}{n!} \left(1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right).$$

Suma w nawiasie rośnie nieograniczenie wraz z n , gdyż każdy jej składnik zmierza do 1. Zatem $e^n n! / n^n \rightarrow \infty$, co należało wykazać. Wzór (1.7) jest więc udowodniony.

Z (1.3) i (1.4) wynikają następujące wzory:

$$(1.9) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad (1.10) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n=0,1,\dots),$$

które zresztą znaleźliśmy już przedtem (p. str. 301).

Zastąpmy s przez $-s$ we wzorze (1.5) i pomnóżmy stronami nowy wzór przez poprzedni. Korzystając z rozwinięcia funkcji $\sin \pi s$ na iloczyn nieskończony (p. Rozdz. VII, (5.9)), możemy napisać

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(-s)} = -s^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = -\frac{s \sin \pi s}{\pi}.$$

Ze względu na (1.9) mamy $-s\Gamma(-s)=\Gamma(1-s)$, a więc

$$(1.11) \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

Wzór ten odgrywa ważną rolę. Ponieważ punkty s i $1-s$ są symetryczne względem punktu $\frac{1}{2}$, wiąże on wartości funkcji $\Gamma(s)$ w półpłaszczyźnie $\Re s \geq \frac{1}{2}$ z wartościami w półpłaszczyźnie $\Re s \leq \frac{1}{2}$. Kładąc $s=\frac{1}{2}$, otrzymujemy w szczególności

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$$

stąd oraz z (1.9) możemy łatwo otrzymać wartość $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ dla dowolnego n całkowitego.

Udowodnimy jeszcze jeden wzór (z którego skorzystamy później), mianowicie wzór Legendre'a:

$$(1.12) \quad \Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}2^{1-2s}\Gamma(2s).$$

Dowód. Z (1.6) wynika, że

$$\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2})=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^{2s+\frac{1}{2}}(n!)^22^{2n+2}}{2s(2s+1)(2s+2)\dots(2s+2n+1)}=K\cdot\Gamma(2s),$$

gdzie

$$K=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{(n!)^22^{2n+2}\sqrt{n}}{(2n+1)!}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2s}=2^{-2s}\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{(n!)^22^{2n+2}\sqrt{n}}{(2n+1)!}.$$

Ponieważ zaś wzór Wallisa (p. str. 300) może być napisany w postaci

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot\sqrt{2n+1},$$

przeto bez większych trudności znajdujemy, że $K=2^{1-2s}\sqrt{\pi}$, i równość (1.12) jest udowodniona.

Zajmiemy się teraz badaniem rzędu (p. Rozdz. VII, § 6) funkcji całkowitej $1/\Gamma(s)$ i wykazemy, że

$$(1.13) \quad \text{Rząd funkcji } 1/\Gamma(s) \text{ jest równy } 1.$$

Dowód. Wykładnik zbieżności (p. Rozdz. VII, § 8) ciągu $0, -1, -2, \dots$ pierwiastków funkcji $1/\Gamma(s)$ wynosi 1. Na zasadzie tw. 9.4, Rozdz. VII, iloczyn kanoniczny utworzony z pierwiastków funkcji $1/\Gamma(s)$ ma również rząd 1. Ponieważ i rząd funkcji $e^{1/s}$ jest równy 1, więc rząd funkcji $1/\Gamma(s)$ nie przekracza 1 (Rozdz. VII, tw. 6.6).

Z drugiej strony, jak to widać np. ze wzoru (1.5), funkcja $\Gamma(s)$ przyjmuje w punktach sprzężonych wartości sprzężone. Zatem

$$|\Gamma(it)|^2=\Gamma(it)\Gamma(-it)=-\frac{1}{it}\Gamma(it)\Gamma(1-it)=-\frac{\pi}{it\sin\pi it}=\frac{2\pi}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}$$

dla $t>0$. Daje to $1/|\Gamma(it)|>\exp(\frac{1}{2}\pi t)$ dla t dostatecznie wielkiego, a więc rząd funkcji $1/\Gamma(s)$ jest nie mniejszy od 1.

$$\text{ĆWICZENIA. 1. } \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

$$2. \frac{d^2\log\Gamma(s)}{ds^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s+n)^2}.$$

3. W przedziale $(0, +\infty)$ funkcja $\Gamma(s)$ posiada jedno minimum. Jest ono zawarte wewnątrz przedziału $[1, 2]$.

$$4. \text{ Udowodnić, że } \Gamma(s)=\int_1^{+\infty}e^{-u}u^{s-1}du+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(s+n)} \text{ dla każdego } s, \text{ przy}$$

coż całka po prawej stronie przedstawia funkcję całkowitą.

5. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, by funkcja $\Phi(s)$ spełniała równanie funkcyjne $\Phi(s+1)=s\Phi(s)$, jest by $\Phi(s)=\Gamma(s)P(s)$, gdzie $P(s)$ jest funkcją okresową o okresie 1.

6. Jeżeli funkcja $\Phi(s)$ jest holomorficzna na odcinku $[A, +\infty]$, gdzie A jest dowolną liczbą rzeczywistą, i jeżeli $\Phi(s)$ spełnia równanie funkcyjne $\Phi(s+1)=s\Phi(s)$ oraz warunek

$$(*) \quad \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\Phi(\sigma+n+1)}{n!n^\sigma}=1$$

jednostajnie dla $0\leq\sigma<1$, to $\Phi(s)=\Gamma(s)$.

[Wsk. Rozważyć iloraz funkcji $\Phi(s)$ przez prawą stronę wzoru (1.6).]

$$7. \text{ Dowieść, że } |\Gamma(\frac{1}{2}+it)|=\sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}}$$
 dla t rzeczywistych.

8. Dla $0<\Re s<1$ zachodzi równość

$$\int_0^{+\infty}u^{s-1}e^{-iu}du=e^{-\pi is/2}\Gamma(s).$$

$$\text{Wyprowadzić stąd wzory na całki } \int_0^{+\infty}u^{s-1}\cos u du \text{ i } \int_0^{+\infty}u^{s-1}\sin u du.$$

[Wsk. Przecalkować funkcję $z^{s-1}e^{-z}$ wzdłuż brzegu ćwiartki koła o środku w punkcie 0.]

9. Wyprowadzić następujące uogólnienie wzoru Legendre'a (1.11):

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(s+\frac{m-1}{m}\right)=m^{\frac{1}{2}-ms}(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}\Gamma(ms).$$

§ 2. Funkcja $B(p, q)$. Z funkcją $\Gamma(s)$ jest ściśle związana t. zw. *funkcja beta Eulera*, określona przez wzór

$$(2.1) \quad B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du.$$

Całka ta, która nosi również nazwę *całki Eulera pierwszego rodzaju*, istnieje, gdy $\Re p > 0$ i $\Re q > 0$. Przez podstawienie $u = 1 - v$ sprawdzamy natychmiast, że $B(p, q) = B(q, p)$, a więc że $B(p, q)$ jest funkcją symetryczną zmiennych p, q .

(2.2) Przy stałym q o dodatniej części rzeczywistej $B(p, q)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\Re p > 0$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $B_n(p, q) = \int_{1/n}^{1-1/n} u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$ jest funkcją całkowitą zmiennej p i że $B_n(p, q)$ zmierza jednostajnie do $B(p, q)$ w każdej półpłaszczyźnie $\Re p \geq \varepsilon > 0$, gdy $n \rightarrow +\infty$.

Oczywiście p i q w tw. 2.2 można zamienić miejscami.

Udowodnimy obecnie podstawowy związek między funkcją B a funkcją Γ , mianowicie

$$(2.3) \quad B(p, q) = \Gamma(p) \Gamma(q) / \Gamma(p+q), \quad \text{gdy } \Re p > 0, \Re q > 0.$$

Dowód. Potrzebne nam będą wzory:

$$(2.4) \quad \Gamma(p) = 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2p-1} dv,$$

$$(2.5) \quad B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta.$$

Pierwszy z nich otrzymujemy z (1.7) przez podstawienie $u = v^2$, drugi z (2.1) przez podstawienie $u = \sin^2 \theta$.

Załóżmy najpierw, że p i q są rzeczywiste oraz że $p \geq \frac{1}{2}$ i $q \geq \frac{1}{2}$. Wówczas funkcje podcałkowe we wzorach (2.4) i (2.5) są ciągłe. Mamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\left(2 \int_0^R e^{-v^2} v^{2p-1} dv \right) \left(2 \int_0^R e^{-w^2} w^{2q-1} dw \right) \right] \\ &= 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^R e^{-(v^2+w^2)} v^{2p-1} w^{2q-1} dv dw. \end{aligned}$$

Całka podwójna po stronie prawej jest rozciągnięta na kwadrat o boku R . Kwadrat ten zawiera ćwiartkę koła o środku w początku układu i o promieniu R , a sam zawarty jest w podobnie położonej ćwiartce koła o promieniu $R\sqrt{2}$. Przejdźmy teraz do współrzędnych biegunowych i przyjmijmy $v = \rho \cos \theta$ oraz $w = \rho \sin \theta$.

Ponieważ funkcja podcałkowa jest nieujemna, przeto rozważając całki podwójne rozciągnięte na wspomniane ćwiartki kół, znajdziemy, że ostatnia całka w (2.6) jest zawarta między iloczynami:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \cdot \int_0^R e^{-\rho^2} \rho^{2p+2q-1} d\rho, \\ & \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \cdot \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2p+2q-1} d\rho, \end{aligned}$$

które, w myśl równości (2.4) i (2.5), dążą do $\frac{1}{2} B(p, q) \Gamma(p+q)$. Daje to wzór (2.3), przy założeniu że $p \geq \frac{1}{2}$ i $q \geq \frac{1}{2}$. Jeżeli ustalimy $q \geq \frac{1}{2}$, to obie strony wzoru (2.3) będą holomorficzne w półpłaszczyźnie $\Re p > 0$, a więc jest on prawdziwy dla $q \geq \frac{1}{2}$ przy $\Re p > 0$. Podobnie, ustalając p tak, by $\Re p > 0$, i traktując obie strony równości (2.3) jako funkcje zmiennej q , otrzymujemy wzór w przypadku ogólnym.

ĆWICZENIE. 1. Wykazać, że gdy $\Re p > 0$ i $\Re q > 0$, to

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1} du}{(1+u)^{p+q}}.$$

§ 3. Wzory Hankela na funkcję $\Gamma(s)$. Prawa strona wzoru (1.7) jest oznaczona tylko dla $\Re s > 0$. Obecnie podamy wzór całkowy, określający funkcję $\Gamma(s)$ w całej płaszczyźnie.

Przyjmijmy przede wszystkim następujące oznaczenia. Jeżeli $\Phi(z)$ jest funkcją określoną w płaszczyźnie otwartej z pominięciem ewentualnie osi rzeczywistej, wówczas dla każdego punktu rzeczywistego x , dla którego istnieje granica $\Phi(x+iy)$, gdy y dąży do 0 poprzez wartości dodatnie, granicę tę oznaczać będziemy przez $(\Phi(x))_+$. Analogicznie określamy $(\Phi(x))_-$. Jeżeli c i d są liczbami rzeczywistymi,

to całkę $\int_c^d (\Phi(x))_+ dx$ będziemy nazywali *całką funkcji $\Phi(z)$ wzdłuż odcinka $[c, d]$ na górnym brzegu osi rzeczywistej*. Analogicznie określamy *całkę funkcji $\Phi(z)$ wzdłuż odcinka $[c, d]$ na dolnym brzegu osi rzeczywistej*. Określenia te pozwolą nam na skrócenie pewnych wyśłowień.

Weźmy pod uwagę funkcję $\Psi(z) = e^z z^{s-1}$, rozumiejac, jak zwykle, z^{s-1} jako wartość główną potęgi, t. j. jako $e^{(s-1) \operatorname{Log} z}$. Oznaczając przez G obszar, jaki otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny otwartej półoś rzeczywistą $x \leq 0$, widzimy natychmiast, że funkcja $\Psi(z)$ jest holomorficzna w G ; nadto (por. analogiczne rozumowanie w Rozdz. IV, § 8) dla każdego punktu rzeczywistego $z < 0$ mamy

$(\Psi(z))_+ = \Psi(z)$, $(\Psi(z))_- = e^{-2\pi(s-1)t} \Psi(z)$. Zatem dla $\Re s > 0$ i każdego rzeczywistego $N > 0$ mamy

$$(3.1) \quad \int_0^{-N} (e^z z^{s-1})_+ dz + \int_{-N}^0 (e^z z^{s-1})_- dz = (1 - e^{-2\pi(s-1)t}) \int_0^{-N} e^z z^{s-1} dz.$$

Całki występujące w tej równości są zbieżne i przedstawiają funkcje holomorficzne względem s w półpłaszczyźnie $\Re s > 0$. Na mocy tw. Cauchy'ego (w sformułowaniu (2.3), Rozdz. IV) stwierdzamy łatwo, że lewa strona wzoru (3.1) równa jest (przy $\Re s > 0$) wyrażeniu

$$(3.2) \quad \int_{-N}^{-R} (e^z z^{s-1})_- dz + \int_{-R}^{-N} (e^z z^{s-1})_+ dz + \int_{C_R} e^z z^{s-1} dz,$$

gdzie C_R oznacza dowolny okrąg $C(0; R)$ o promieniu $R < N$; otóż wyrażenie to składa się już z całek istniejących dla wszystkich wartości skończonych s i przedstawia przeto funkcję holomorficzną względem s w całej płaszczyźnie otwartej. Gdy $N \rightarrow +\infty$, dwie pierwsze z tych całek dążą do granic skończonych niemal jednostajnie względem s . Wyrażenie (3.2) będzie więc przedstawiało funkcję całkowitą względem s również po przejściu w nim do granicy wraz z $N \rightarrow +\infty$. Z drugiej strony, ponieważ dla każdej wartości rzeczywistej $z < 0$ mamy $z^{s-1} = e^{(s-1)\pi i} (-z)^{s-1}$, przeto prawa strona wzoru (3.1) (przy $\Re s > 0$) dąży dla $N \rightarrow +\infty$ do

$$(1 - e^{-2\pi(s-1)t}) \int_0^{-\infty} e^z z^{s-1} dz = \\ = 2i \sin \pi(s-1) \cdot \int_0^{-\infty} e^z (-z)^{s-1} dz = 2i \sin \pi s \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} du.$$

Mamy więc z uwagi na (1.7):

$$2i \sin \pi s \cdot \Gamma(s) = \int_{-\infty}^{-R} (e^z z^{s-1})_- dz + \int_{-R}^{-N} (e^z z^{s-1})_+ dz + \int_{C(0; R)} e^z z^{s-1} dz.$$

Równość ta, udowodniona na zasadzie wzoru (1.7) zachodzącego tylko dla $\Re s > 0$, spełniona jest dla każdej wartości s , ponieważ — jak widzieliśmy — obydwie jej strony są holomorficzne w całej płaszczyźnie otwartej. Uwzględniając omówienia przyjęte na początku tego §, pisze się ją też często w postaci skróconej:

$$(3.3) \quad \Gamma(s) = \frac{1}{2i \sin \pi s} \int_{L(R)} e^z z^{s-1} dz,$$

gdzie krzywa całkowania $L(R)$ składa się z odcinka $[-\infty, -R]$ na dolnym brzegu osi rzeczywistej, okręgu $C(0; R)$ i odcinka $[-R, -\infty]$ na górnym brzegu osi rzeczywistej.

Jeżeli skorzystamy jeszcze z równości (1.11) i zastąpimy s przez $1-s$, to z (3.3) otrzymamy

$$(3.4) \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(R)} z^{-s} e^z dz,$$

gdzie krzywa całkowania $L(R)$ jest ta sama co we wzorze (3.3).

Wzory (3.3) i (3.4) noszą nazwę *wzorów Hankela*.

We wzorach tych całkujemy wzdłuż krzywej dość specjalnej. Ze względu jednak na tw. Cauchy'ego krzywą tę można w znacznym stopniu zmieniać. Czytelnik sprawdzi np. łatwo, że oba wzory Hankela pozostaną prawdziwe, jeżeli ich prawe strony zastąpimy przez całkę wzdłuż krzywej $L_1 + L_2 + L_3$, gdzie L_1 jest półprostą $y = -R$, $-\infty < x \leq 0$, L_2 półokręgiem $z = Re^{i\theta}$, $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ i L_3 półprostą $y = R$, $0 \leq x < \infty$. Moglibyśmy również wziąć za krzywą całkowania krzywą $L'_1 + L_2 + L'_3$, gdzie krzywa L'_1 jest półprostą $\text{Arg}(z + iR) = -\beta$ o początku w punkcie ∞ i końcu w punkcie $-iR$, zaś krzywa L'_3 półprostą $\text{Arg}(z - iR) = \beta$ o początku w punkcie iR i końcu w punkcie ∞ , przy czym $\frac{1}{2}\pi < \beta < \pi$.

Z punktu widzenia jednak zastosowań wzorów Hankela kwestia możliwie największej ogólności krzywej całkowania nie ma znaczenia.

Rozumowanie, które doprowadziło nas do wzoru (3.3), może być zastosowane do całek ogólnych postaci

$$\int_0^{+\infty} u^{s-1} \varphi(u) du,$$

gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu dodatniej półosi rzeczywistej, dążącą do 0 dostatecznie szybko, gdy z dąży do $+\infty$.

Weźmy np. pod uwagę funkcję $\varphi(z) = z/(e^z - 1)$. Jeżeli przyjmujemy, że $R < 2\pi$, to dla $\Re s > 0$ otrzymamy wzór

$$(3.5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{u^s}{e^u - 1} du = \frac{1}{2i \sin \pi s} \int_{L(R)} \frac{z^s}{1 - e^{-z}} dz,$$

gdzie $L(R)$ oznacza tę samą krzywą całkowania co we wzorze (3.3).

ĆWICZENIE. 1. Wykazać, że dla $\Re s > 0$ zachodzi równość

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a+iv} (a+iv)^{-s} dv,$$

gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią.

[Wsk. Równość tę można otrzymać ze wzoru Hankela przez odpowiednią zmianę krzywej całkowania.]

§ 4. Wzór Stirlinga. W wielu zagadnieniach, gdzie występuje funkcja $\Gamma(s)$, istotne jest jej zachowanie się, gdy $s \rightarrow \infty$. W szczególności potrzebne są wzory, które by wyrażały $\Gamma(s)$ przez funkcje elementarne, chociażby w sposób przybliżony.

Niech $0 < \delta < \pi$ i niech $G(\delta)$ oznacza zbiór punktów $s \neq 0$ spełniających warunek

$$(4.1) \quad -\pi + \delta \leq \text{Arg } s \leq \pi - \delta.$$

Wykażemy, że gdy s dąży do ∞ , pozostając w $G(\delta)$, to

$$(4.2) \quad \Gamma(s) \cong \sqrt{2\pi} e^{-s} s^{s-\frac{1}{2}}.$$

Znak $\cong$ równości asymptotycznej (p. str. 301) oznacza tu jak zwykle, że iloraz stron tego wzoru dąży do 1. Przez $s^{s-\frac{1}{2}}$ rozumiemy wartość główną potęgi. Założenie, że s ma spełniać warunek (4.1), jest naturalne, gdyż funkcja $\Gamma(s)$ posiada bieguny w punktach $s=0, -1, -2, \dots$

Wzór (4.2) nosi nazwę *wzoru Stirlinga* i gra ważną rolę w zastosowaniach funkcji Γ . Można go napisać w postaci

$$(4.3) \quad \log \Gamma(s) = \frac{1}{2} \log 2\pi - s + (s - \frac{1}{2}) \log s + \varepsilon(s),$$

gdzie przez $\log \Gamma(s)$ rozumiemy gałąź funkcji przyjmującą wartości rzeczywiste dla $s > 0$ i gdzie $\varepsilon(s) \rightarrow 0$, gdy $s \rightarrow \infty$.

Dowód wzoru Stirlinga oprzemy na wzorze (1.6), który napiszemy w postaci

$$(4.4) \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(s+1) \dots (s+n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} n^{1-s},$$

oraz na lemmacie następującym, który jest w bliskim związku z kryterium całkowym zbieżności szeregów (p. str. 301):

(4.5) Jeżeli $f(u)$ jest funkcją określoną dla $u \geq 0$ i mającą pochodną ciągłą, wówczas dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ mamy

$$(4.6) \quad \sum_{v=0}^n f(v) - \int_0^n f(u) du = \frac{f(0)+f(n)}{2} + \int_0^n f'(u) P(u) du,$$

gdzie $P(u)$ jest funkcją o okresie 1, równą $u - \frac{1}{2}$ dla $0 \leq u < 1$.

Dowód. Rozpatrzmy równości:

$$\begin{aligned} f(v) - \int_{v-1}^v f(u) du &= f(v) - \int_{v-1}^v f(u) d(u - v + \frac{1}{2}) = \\ &= f(v) - \frac{f(v) + f(v-1)}{2} + \int_{v-1}^v f'(u) (u - v + \frac{1}{2}) du = \\ &= \frac{f(v) - f(v-1)}{2} + \int_{v-1}^v f'(u) P(u) du. \end{aligned}$$

Uwzględniając tylko lewą i prawą stronę, otrzymamy przez zsumowanie dla $v=1, 2, \dots, n$ i dodanie $f(0)$ wzór (4.6).

Zastosujmy ten wzór do funkcji $f(u) = \text{Log}(s+u)$, gdzie $s \in G(\delta)$. Ponieważ funkcją pierwotną dla $f(u)$ jest wówczas $(s+u) \text{Log}(s+u) - u$, więc łatwy rachunek da równość

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n \text{Log}(s+v) &= -\left(s - \frac{1}{2}\right) \text{Log } s + \frac{1}{2} \text{Log}(s+n) + (s-1) \text{Log}(s+n) + \\ &+ (n+1) \text{Log}(s+n) - n + \int_0^n \frac{P(u)}{s+u} du. \end{aligned}$$

Oznaczmy ostatnią całkę przez $J_n(s)$. Jeżeli w otrzymanej równości przyjmiemy $s=1$ i odejmiemy nową równość od poprzedniej, będziemy mieli

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n \text{Log} \frac{s+v}{1+v} &= -\left(s - \frac{1}{2}\right) \text{Log } s + \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{s+n}{n+1}\right) + (s-1) \text{Log}(s+n) + \\ &+ (n+1) \text{Log} \frac{s+n}{1+n} + J_n(s) - J_n(1). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1-s) \text{Log } n + \sum_{v=0}^n \text{Log} \frac{s+v}{1+v} \right] &= -\left(s - \frac{1}{2}\right) \text{Log } s + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1) \text{Log} \frac{s+n}{1+n} + J_n(s) - J_n(1) \right], \end{aligned}$$

albo też, ze względu na (4.4), że

$$-\text{Log } \Gamma(s) = -\left(s - \frac{1}{2}\right) \text{Log } s + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1) \text{Log} \frac{s+n}{1+n} + J_n(s) - J_n(1) \right].$$

Ponieważ $z^{-1} \operatorname{Log}(1+z) \rightarrow 1$, gdy $z \rightarrow 0$, przeto, gdy $n \rightarrow \infty$,

$$(n+1) \operatorname{Log} \frac{s+n}{1+n} = (n+1) \operatorname{Log} \left(1 + \frac{s-1}{n+1} \right) \rightarrow s-1,$$

a więc

$$(4.7) \quad \operatorname{Log} \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \operatorname{Log} s - s + 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} [J_n(1) - J_n(s)].$$

Niech $Q(u) = \int_0^u P(v) dv$. Z określenia funkcji $P(u)$ widać, że jej całka równa się 0 na każdym przedziale $[v, v+1]$, gdzie v jest liczbą całkowitą. Wynikają stąd dwie konsekwencje: 1^o $Q(n) = 0$ dla każdego n całkowitego, 2^o $|Q(u)| \leq \frac{1}{2}$ dla każdego u , gdyż $Q(u) = \int_v^u P(v) dv$, gdzie v jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą u , a $|P(v)| \leq \frac{1}{2}$. Przecalkujmy teraz przez części całkę $J_n(s)$.

$$\text{Otrzymamy, że } J_n(s) = \int_0^n \frac{Q(u)}{(u+s)^2} du, \text{ a więc } J_n(s) \rightarrow \int_0^\infty \frac{Q(u)}{(u+s)^2} du,$$

gdy $n \rightarrow \infty$, gdyż ostatnia całka jest zbieżna, a nawet bezwzględnie zbieżna. Oznaczmy jej wartość przez $J(s)$.

Wykażemy, że $J(s)$ dąży do 0, gdy s dąży do ∞ pozostając w zbiorze $G(\delta)$. Jeżeli bowiem $s = \rho e^{i\theta}$, to zamiana zmiennych $u = v\rho$ oraz nierówność $|Q(u)| \leq \frac{1}{2}$ dają

$$|J(s)| \leq \frac{1}{2\rho} \int_0^\infty \frac{dv}{|v + e^{i\theta}|^2} = \frac{1}{2\rho} \int_0^\infty \frac{dv}{v^2 + 2v \cos \theta + 1} \leq \frac{1}{2\rho} \int_0^\infty \frac{dv}{v^2 - 2v \cos \delta + 1}.$$

Całka po stronie prawej jest skończona, ponieważ mianownik funkcji podcałkowej jest stale różny od zera i dla dostatecznie dużych wartości v przekracza $\frac{1}{2}v^2$. Z nierówności powyższych wynika, że istotnie $J(s)$ dąży do 0, gdy s dąży do ∞ , pozostając w $G(\delta)$.

Na mocy wzoru (4.7), oznaczając przez $\varepsilon(s)$ liczbę dążącą do 0, gdy $s \rightarrow \infty$, możemy więc napisać $\log \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \operatorname{Log} s - s + C + \varepsilon(s)$ lub

$$(4.8) \quad \Gamma(s) \cong C_1 e^{-s} s^{s-\frac{1}{2}},$$

gdzie C i C_1 są stałe, przy czym $C = 1 + J(1)$, zaś $C_1 = \exp C$. Dla znalezienia stałej C_1 skorzystamy ze wzoru Wallisa (p. str. 300)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Ponieważ $n! = \Gamma(n+1)$, przeto ze wzoru (4.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} C_1^2 e^{-2n-2} (n+1)^{2n+1}}{C_1 e^{-(2n+1)} (2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = C_1 e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{2n+1} = \\ &= \frac{1}{2} C_1 e^{-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^{2n+1} = \frac{1}{2} C_1 e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2n+1} = \frac{1}{2} C_1. \end{aligned}$$

Zatem $C_1 = \sqrt{2\pi}$ i wzór Stirlinga jest udowodniony.

Wzorem Stirlinga nazywa się nieraz wzór

$$(4.9) \quad n! \cong \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}},$$

który jest szczególnym przypadkiem wzoru (4.2). Istotnie, wystarczy w (4.2) przyjąć $s = n+1$ i zauważyć, że w równości

$$\sqrt{2\pi} e^{-(n+1)} (n+1)^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}}$$

iloczyn dwu ostatnich czynników po stronie prawej dąży do 1.

ĆWICZENIE. 1. Jeżeli σ należy do przedziału skończonego oraz $|t| \rightarrow +\infty$, to

$$|\Gamma(\sigma + it)| \cong \sqrt{2\pi} |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\pi|t|/2}.$$

§ 5. Funkcja $\zeta(s)$ Riemanna. Rozważmy szereg

$$(5.1) \quad 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots,$$

gdzie $s = \sigma + it$ i $n^s = \exp(s \operatorname{Log} n)$. Ponieważ $|n^s| = n^\sigma$, szereg (5.1) jest zbieżny bezwzględnie, gdy $\Re s > 1$, i zbieżność jest jednostajna w każdej półpłaszczyźnie $\Re s \geq 1 + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$. Suma szeregu (5.1) jest więc funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\Re s > 1$. Funkcja ta nosi nazwę *funkcji $\zeta(s)$ Riemanna*.

Szereg (5.1) jest rozbieżny, gdy $s \leq 1$. Z tw. 8.6, udowodnionego dalej na str. 414, będzie wynikać, że szereg (5.1) jest rozbieżny w każdym punkcie półpłaszczyzny $\Re s < 1$.

Funkcja $\zeta(s)$ gra ważną rolę w teorii liczb pierwszych. Znaczenie tej funkcji dla teorii liczb pierwszych ma swe źródło w równości następującej, którą zawdzięczamy Eulerowi:

$$(5.2) \quad \zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}},$$

gdzie p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$), zaś s jest liczbą dowolną o części rzeczywistej większej niż 1.

Dowód. Dla wykazania prawdziwości wzoru (5.2) zauważmy, że szereg $p_1^{-s} + p_2^{-s} + \dots$, którego wszystkie wyrazy występują w szeregu (5.1), jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w każdej półpłaszczyźnie $\Re s \geq 1 + \varepsilon$ (dla $\varepsilon > 0$). W myśl tw. 1.20, Rozdz. VII, iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})$, zbieżny bezwzględnie w półpłaszczyźnie $\Re s > 1$, przedstawia w niej funkcję holomorficzną. Obie strony równości (5.2) są więc holomorficzne dla $\Re s > 1$ i wystarczy udowodnić tę równość dla s rzeczywistych większych od 1.

Rozważmy dla $s > 1$ iloczyn częściowy

$$F_N(s) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-s}} = \prod_{n=1}^N (1 + p_n^{-s} + p_n^{-2s} + \dots)$$

iloczynu (5.2). Szeregi stojące pod znakiem iloczynu są zbieżne bezwzględnie. Wykonując mnożenie, widzimy, że $F_N(s)$ jest równe sumie wyrazów postaci $p_1^{-\alpha s} p_2^{-\beta s} \dots p_N^{-\lambda s}$, gdzie $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ przebiegają niezależnie od siebie wszystkie wartości całkowite nieujemne. W szczególności suma ta zawiera wyrazy $1, 2^{-s}, 3^{-s}, \dots, N^{-s}$. Ponieważ liczbę naturalną można w jeden tylko sposób rozłożyć na czynniki pierwsze, wszystkie wyrazy sumy są różne. Wynika stąd, że $\sum_{n=1}^N n^{-s} < F_N(s) < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, co dla $N \rightarrow \infty$ daje wzór (5.2).

Ze wzoru (5.2) wynika w szczególności, że $\zeta(s) \neq 0$ dla $\Re s > 1$.

Obecnie przedstawimy funkcję $\zeta(s)$ w postaci całkowej. Wykażemy mianowicie, że dla $\Re s > 1$ zachodzi równość

$$(5.3) \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du.$$

Dowód. Wyjdziemy ze wzoru

$$(5.4) \quad \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-nv} v^{s-1} dv, \quad \text{gdzie } \Re s > 0,$$

który otrzymujemy z (1.7) przez podstawienie $u = nv$. Zatem

$$(5.5) \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{v^{s-1}}{e^v - 1} dv - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{v^{s-1} e^{-Nv}}{e^v - 1} dv.$$

Ponieważ $e^v - 1$ ma pierwiastek jednokrotny w punkcie 0, całki te istnieją, gdy $\Re s > 1$. Jeżeli wykażemy, że druga z nich dąży do 0 gdy N dąży do ∞ , otrzymamy wzór (5.3).

Otóż rozbijając tę całkę na dwie, rozciągnięte odpowiednio na przedziały $[0, \delta]$ i $[\delta, +\infty]$, gdzie $\delta > 0$, i pamiętając, że $e^{-Nv} \leq 1$, widzimy, iż wartość bezwzględna tej całki nie przekracza sumy

$\int_0^{\delta} \frac{v^{s-1}}{e^v - 1} dv + e^{-N\delta} \int_{\delta}^{\infty} \frac{v^{s-1}}{e^v - 1} dv$. Przez dobór dostatecznie małego δ możemy osiągnąć, że pierwszy składnik będzie mniejszy od $\frac{1}{2}\varepsilon$ danej liczby $\frac{1}{2}\varepsilon$. Przy ustalonym δ , drugi składnik zmierza do 0. Zatem dla N dostatecznie dużego wartość bezwzględna drugiej całki w (5.5) jest mniejsza od ε . Wzór (5.3) jest więc udowodniony.

Napiszmy ten wzór w postaci

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int_1^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du, \quad \text{gdzie } \Re s > 1.$$

Oznaczając całki po stronie prawej odpowiednio przez $P(s)$ i $Q(s)$, stwierdzamy natychmiast (por. Rozdz. II, tw. 5.7 i 6.1), że funkcja $Q(s)$ jest całkowita. Dla zbadania funkcji $P(s)$ wyjdziemy z równości (5.8), Rozdz. VII, którą napiszemy w postaci

$$(5.6) \quad \frac{u}{e^u - 1} = 1 - \frac{1}{2}u + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} B_{\nu}}{(2\nu)!} u^{2\nu},$$

gdzie B_{ν} są liczbami Bernoulli'ego (p. str. 299).

Szereg po stronie prawej tej równości jest zbieżny jednostajnie, gdy $0 \leq u \leq 1$. Pomnożmy obie jej strony przez u^{s-2} , gdzie $\Re s \geq 2$, i scałkujemy w przedziale $0 \leq u \leq 1$. Dostaniemy

$$(5.7) \quad P(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} B_{\nu}}{(2\nu)!} \cdot \frac{1}{s+2\nu-1}.$$

Ze względu na nierówność $\limsup_{\nu} \sqrt[2\nu]{|B_{\nu}|/(2\nu)!} = 1/2\pi < 1$ (gdyż promień zbieżności szeregu (5.6) równa się 2π), szereg (5.7) jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w każdym kole ograniczonym, jeżeli tylko odrzucimy pewną ilość wyrazów początkowych, mających bieguny w tym kole lub na jego okręgu. Zatem $P(s)$ da się rozszerzyć na całą płaszczyznę otwartą jako funkcja meromorficzna, mająca bieguny jednokrotne w punktach $1, 0, -1, -3, -5, \dots$, a poza

tym holomorfeiczna. Ale $1/\Gamma(s)$ jest funkcją całkowitą, mającą pierwiastki jednokrotne w punktach $0, -1, -2, \dots$, a poza tym różną od 0. W punkcie $s=1$ funkcja $\Gamma(s)$ ma wartość 1. Uwzględniając więc równość $\zeta(s) = P(s)/\Gamma(s) + Q(s)/\Gamma(s)$ oraz wzór (5.7), możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

(5.8) Funkcja $\zeta(s)$, określona dla $\Re s > 1$ przez szereg (5.1), daje się rozszerzyć na całą płaszczyznę otwartą jako funkcja meromorficzna o jedynym biegunie w punkcie $s=1$. Biegun ten jest jednokrotny i residuum funkcji $\zeta(s)$ wynosi w nim 1, a więc różnica

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

jest funkcją całkowitą. Funkcja $\zeta(s)$ posiada pierwiastki w punktach $-2, -4, -6, \dots$

Z tw. 5.8 wynika w szczególności, że iloczyn $(s-1)\zeta(s)$ jest funkcją całkowitą.

Wzór całkowy (5.3) zachodzi tylko dla $\Re s > 1$. Obecnie udowodnimy inny wzór całkowy na $\zeta(s)$, który będzie zachodził w całej płaszczyźnie. Wyjdziemy z równości (3.5), gdzie krzywa całkowania $L(R)$ jest ta sama co we wzorze (3.3). Zakładamy przy tym, że $0 < R < 2\pi$, a więc że koło $K(0; R)$ nie zawiera wewnątrz ani na okręgu żadnego z punktów $\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$. Zastąpmy w (3.5) s przez $s-1$. Biorąc pod uwagę wzór (5.3), mamy

$$(5.9) \quad \zeta(s)\Gamma(s) = \frac{1}{2i\sin\pi s} \int_{L(R)} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z} dz \quad \text{przy } \Re s > 1.$$

Ale $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin\pi s$. Zatem

$$(5.10) \quad \zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{L(R)} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z} dz,$$

gdzie $0 < R < 2\pi$, zaś $L(R)$ oznacza krzywą całkowania, składającą się z odcinka $[-\infty, -R]$ dolnego brzegu osi rzeczywistej, okręgu $C(0; R)$ oraz odcinka $[-R, -\infty]$ górnego brzegu osi rzeczywistej.

Jest to wzór, o który nam chodziło. Spełniony jest dla każdego s , gdyż całka po stronie prawej jest wszędzie zbieżna i przedstawia funkcję całkowitą.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że gdy $\Re s > 1$, to:

$$1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \zeta(s)/\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s},$$

gdzie $\mu(1)=1$, $\mu(n)=(-1)^r$ dla tych n , które są iloczynami r różnych czynników pierwszych, a $\mu(n)=0$ w pozostałych przypadkach.

2. Udowodnić wzory:

$$\{\zeta(s)\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, \quad \zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s},$$

gdzie $d(n)$ oznacza ilość dzielników liczby n , zaś $\sigma_k(n)$ sumę k -tych potęg wszystkich dzielników liczby n . Pierwszy z tych wzorów zachodzi, gdy $\Re s > 1$, a drugi, gdy jednocześnie $\Re s > 1$ i $\Re s > k+1$.

$$3. \zeta(1-2m) = (-1)^m B_m/2m, \quad \zeta(2m) = 2^{2m-1} \pi^{2m} B_m/(2m)! \quad (m=1, 2, \dots).$$

4. Niech s będzie dowolną liczbą o części rzeczywistej dodatniej i niech

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} \quad \text{dla } |z| < 1. \text{ Wykazać, że jeżeli z płaszczyzny otwartej usuniemy}$$

przedział $[1, +\infty]$ osi rzeczywistej, to funkcja $\phi(z)$ da się rozszerzyć na pozostały obszar G jako funkcję holomorfeiczną, przy czym dla $z \in G$

$$\phi(z) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1} du}{e^u - z}.$$

Obszarem naturalnym (Rozdz. VI, § 4) funkcji $\phi(z)$ jest płaszczyzna otwarta bez punktu $z=1$.

§ 6. Równanie funkcyjne funkcji $\zeta(s)$. Oznaczmy przez L_N krzywą całkowania $L(R)$ (por. wzór (5.10)) dla $R=2\pi(N+\frac{1}{2})$, $N=1, 2, \dots$. Niech s będzie liczbą rzeczywistą. Koło $K(0; R)$ zawiera obecnie punkty $\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots, \pm N \cdot 2\pi i$. Jeżeli więc zastąpimy $L(R)$ przez L_N we wzorze (5.10), to musimy uwzględnić residua funkcji podcałkowej w wymienionych punktach. Łatwy rachunek daje wzór

$$(6.1) \quad \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{L_N} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z} dz = \zeta(s) - \Gamma(1-s) (2\pi)^{s-1} \cdot 2 \sin \frac{1}{2}\pi s \cdot \sum_{n=1}^N n^{s-1}.$$

Zauważmy najpierw, że dla $s < 0$ lewa strona tej równości dąży do 0, gdy $N \rightarrow \infty$. Istotnie, gdy z płaszczyzny otwartej usuniemy wszystkie koła $K(2\pi in; \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$, a $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, to w pozostałych punktach płaszczyzny zachodzi nierówność $|1-e^{-z}| \geq C_\varepsilon$,

gdzie C_ε jest stałą zależną wyłącznie od ε (dowód analogiczny do dowodu tw. 9.12, Rozdz. I). Zatem funkcja

$$e^z/(1-e^z) = -1/(1-e^{-z})$$

jest ograniczona na sumie okręgów $O(0; 2\pi \cdot (N + \frac{1}{2}))$. Stąd już łatwo wynika, że dla $s < 0$ lewa strona wzoru (6.1) dąży do 0, gdy N dąży do ∞ . Daje to równość

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2}\pi s \cdot \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

która oczywiście musi zachodzić w całej płaszczyźnie, gdyż obie strony są funkcjami meromorficznymi. Zastąpmy s przez $1-s$. Otrzymamy wzór

$$(6.2) \quad \zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos \frac{1}{2}\pi s \cdot \Gamma(s) \zeta(s).$$

Jest to równanie funkcyjne funkcji $\zeta(s)$, udowodnione przez Riemanna. Wiąże ono wartości funkcji ζ w punktach s i $1-s$, a więc z zachowania się funkcji $\zeta(s)$ w półpłaszczyźnie $\Re s > \frac{1}{2}$ pozwala wnioskować o jej zachowaniu się dla $\Re s < \frac{1}{2}$.

§ 7. Pierwiastki funkcji $\zeta(s)$. Ponieważ $\zeta(s) \neq 0$, gdy $\Re s > 1$, więc ze wzoru (6.2) wynika, że w półpłaszczyźnie $\Re s < 0$ funkcja $\zeta(s)$ ma tylko takie pierwiastki, które są biegunami iloczynu $\Gamma(s) \cos \frac{1}{2}\pi s$. Zatem:

(7.1) W półpłaszczyźnie $\Re s > 1$ funkcja $\zeta(s)$ nie ma pierwiastków. W półpłaszczyźnie $\Re s < 0$ jedynymi pierwiastkami funkcji $\zeta(s)$ są punkty $-2, -4, -6, \dots$. Są to pierwiastki jednokrotne.

Pierwiastki $-2, -4, -6, \dots$ nazywają się nieraz pierwiastkami banalnymi funkcji $\zeta(s)$, w odróżnieniu od innych, których dowód istnienia jest głębszy.

Dowód ten podamy obecnie. Oczywiście pierwiastki różne od $-2, -4, -6, \dots$ mogą leżeć tylko w pasie nieograniczonym $0 \leq \Re s \leq 1$. Niech

$$(7.2) \quad \xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s).$$

Biegunki $-2, -4, -6, \dots$ czynnika $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ są tu usunięte przez pierwiastki funkcji $\zeta(s)$. Łatwo widzieć, że funkcja $\xi(s)$ jest holomorficzna również w punktach $s=0$ i $s=1$, a więc jest całkowita, oraz że z wyjątkiem punktów $-2, -4, -6, \dots$ pierwiastki funkcji $\zeta(s)$ i $\xi(s)$ są te same. Ewentualne pierwiastki funkcji $\xi(s)$ mogą więc leżeć tylko w pasie $0 \leq \Re s \leq 1$.

Udowodnimy, że funkcja $\xi(s)$ spełnia równanie

$$(7.3) \quad \xi(1-s) = \xi(s).$$

Ze względu na (7.2) wzór (7.3) jest równoważny następującemu:

$$\zeta(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s} \Gamma(\frac{1}{2}s) \zeta(s) / \Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s),$$

który znów z uwagi na równość $\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s) = \pi / \cos \frac{1}{2}\pi s$ (por. wzór (1.11)) może być napisany w postaci

$$(7.4) \quad \zeta(1-s) = \pi^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma(\frac{1}{2}s) \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s) \zeta(s) \cos \frac{1}{2}\pi s.$$

Jeżeli teraz zastosujemy wzór Legendre'a (1.12) z $\frac{1}{2}s$ zamiast s , to równość (7.4) sprowadzi się do (6.2); wzór (7.3) jest przeto udowodniony.

Dalsze rozumowanie oprzemy na następującym lemmacie:

(7.5) Funkcja całkowita $\Xi(s) = \xi(\frac{1}{2}-is)$ jest funkcją parzystą rzędu 1.

Dowód. Parzystość funkcji $\Xi(s)$ wynika ze wzoru (7.3).

Dla dowodu, że rząd tej funkcji jest równy 1, oznaczymy przez $G(s)$ całkę występującą po prawej stronie wzoru (5.10), przyjmując $R=1$. Niech $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$, gdzie $G_1(s)$ oznacza część całki $G(s)$ wzdłuż okręgu $O(0; 1)$, zaś $G_2(s)$ pozostałą część tej całki. Niech $s = \sigma + it$, $|s| = \varrho > 1$ i niech wreszcie n będzie najmniejszą liczbą całkowitą przekraczającą ϱ . Ponieważ $|1/(1-e^{-u})| \leq Ae^u$ dla $u \leq -1$, gdzie A jest pewną stałą, przeto:

$$(7.6) \quad |G_2(s)| \leq 2Ae^{|\frac{1}{2}\pi|} \int_1^\infty e^{-u} u^{|\sigma|-1} du < 2Ae^{\pi\varrho} \Gamma(n),$$

$$(7.7) \quad |G_1(s)| \leq 2\pi e^{\varrho\pi} \max_{|z|=1} |1/(1-e^{-z})|.$$

Mamy $\Gamma(n) \leq (n-1)^{n-1} \leq \varrho^n = \exp(\varrho \log \varrho)$. Stąd oraz z nierówności (7.6) i (7.7) wynika łatwo, że rząd funkcji całkowitej $G(s)$ nie przekracza 1.

Rozważmy teraz funkcję całkowitą $(s-1)\zeta(s)$, która na zasadzie wzoru (5.10) jest równa $(s-1)G(s)\Gamma(1-s)/2\pi i$. Ponieważ funkcja $1/\Gamma(1-s)$ ma rząd 1 (tw. 1.13), przeto stosując tw. 10.19, Rozdz. VII, znajdujemy, że rząd funkcji $(s-1)\zeta(s)$ nie jest większy niż 1. Zatem i rząd funkcji całkowitej $\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s) = \xi(s)$ nie przewyższa 1. Stosując więc jeszcze raz tw. 10.19, Rozdz. VII, otrzymujemy, że rząd funkcji $\xi(s)$ nie przekracza 1.

Z drugiej strony, gdy s jest rzeczywiste i dąży do $+\infty$, z równości (5.1) widać, że $\zeta(s)$ zmierza do 1. Stosując wzór Stirlinga, wnosimy z (7.2), że iloraz $\text{Log} \xi(s) / \frac{1}{2}s \text{Log} s$ zmierza wówczas do 1. Zatem rząd funkcji $\xi(s)$ jest nie mniejszy od 1.

Rząd funkcji $\xi(s)$ jest więc równy 1. To samo można zatem powiedzieć o rzędzie funkcji $E(s)$.

Ponieważ $E(s)$ jest funkcją parzystą, jej rozwinięcie na szereg potęgowy w punkcie 0 ma wyłącznie potęgi parzyste. Wynika stąd, że $E(\sqrt{s})$ jest funkcją całkowitą rzędu $\frac{1}{2}$. Na zasadzie tw. 11.2, Rozdz. VII, funkcja $E(\sqrt{s})$ ma nieskończenie wiele pierwiastków (ciąg ich ma wykładnik zbieżności $\frac{1}{2}$). Stąd wnosimy, że funkcja $E(s)$, a więc i funkcja $\xi(s)$, posiada nieskończenie wiele pierwiastków. Wiemy z drugiej strony, że pierwiastki funkcji $\xi(s)$ muszą leżeć w pasie $0 \leq \Re s \leq 1$. Zatem:

(7.8) Funkcja $\zeta(s)$ posiada w pasie $0 \leq \Re s \leq 1$ nieskończenie wiele pierwiastków.

Są to t. zw. *pierwiastki niebanalne* funkcji $\zeta(s)$.

Jak rozmieszczone są te pierwiastki, dotychczas dobrze nie wiemy, pomimo że zagadnienie to ma podstawowe znaczenie dla bardzo wielu zagadnień teorii liczb. Stosunkowo łatwo można wykazać, że na prostych granicznych $\Re s = 0$ i $\Re s = 1$ nie ma pierwiastków. Istnieje przypuszczenie, że wszystkie pierwiastki niebanalne funkcji $\zeta(s)$ leżą na linii środkowej $\Re s = \frac{1}{2}$ pasa $0 \leq \Re s \leq 1$. Jest to słynna *hipoteza Riemanna*, która dotychczas nie została dowiedziona. Udało się jednak stwierdzić, że na prostej $\Re s = \frac{1}{2}$ leży istotnie nieskończenie wiele pierwiastków funkcji $\zeta(s)$ (Hardy).

Szczegółowe opracowanie własności funkcji $\zeta(s)$ znaleźć można w książce E. C. Titchmarsh, *The zeta-function of Riemann*, Cambridge 1930.

§ 8. Szeregi Dirichleta. Szeregami Dirichleta nazywa się szeregi postaci

$$(8.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it),$$

gdzie $a_1, a_2, \dots$ są stałymi, zaś $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ dowolnymi liczbami rzeczywistymi zmiernymi zmiernymi monotonicznie do $+\infty$.

Jeżeli przyjąć $\lambda_n = n-1$ dla $n=1, 2, \dots$, to szereg (8.1) staje się szeregiem potęgowym względem e^{-s} . Szeregi Dirichleta można więc uważać za uogólnienie szeregów potęgowych. Zobaczymy dalej, że pewne, jakkolwiek nie wszystkie, własności szeregów potęgowych przenoszą się na szeregi Dirichleta.

Inny ważny przypadek szczególny otrzymujemy, kładąc $\lambda_n = \text{Log} n$. Szereg (8.1) można wówczas napisać w postaci

$$(8.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n / n^s,$$

gdzie $n^s = \exp(s \text{Log} n)$. Szeregi (8.2) noszą nazwę *szezególnych szeregów Dirichleta*. Przyjmując tu $a_1 = a_2 = \dots = 1$, otrzymujemy szereg określający funkcję $\zeta(s)$ Riemanna (p. § 5).

Ponieważ ewentualne skreślenie skończonej liczby wyrazów szeregu (8.1) nie wpływa na jego zbieżność, możemy zawsze przyjąć, że liczby λ_n są nieujemne, a więc że $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

Zamiast szeregów (8.1) można by oczywiście rozważać szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$, które otrzymujemy z (8.1) przez podstawienie $e^{-s} = z$. W przypadku jednak, gdy nie wszystkie liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ są całkowite, punkt $z=0$ jest na ogół punktem krytycznym dla wyrazów, a więc i dla sumy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$. Z tego powodu postać (8.1) jest wygodniejsza dla rozważań, gdyż mamy tu do czynienia z funkcjami jednoznaczными.

Zajmiemy się teraz zbadaniem zbieżności szeregu (8.1); rozpoczniemy od zbieżności bezwzględnej. Wartość bezwzględna n -tego wyrazu tego szeregu wynosi $|a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$. Gdy $\sigma \geq \sigma_0$, to ponieważ wszystkie liczby λ_n są nieujemne, mamy $e^{-\lambda_n \sigma} \leq e^{-\lambda_n \sigma_0}$. Zatem, jeżeli szereg Dirichleta jest zbieżny bezwzględnie w punkcie $s_0 = \sigma_0 + it_0$, to jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w całej półpłaszczyźnie $\Re s \geq \sigma_0$.

Wynika stąd natychmiast, że

(8.3) Dla każdego szeregu Dirichleta (8.1) istnieje liczba rzeczywista α taka, że szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $\Re s > \alpha$ i bezwzględnie rozbieżny dla $\Re s < \alpha$. (W przypadkach granicznych może być $\alpha = \pm \infty$.)

Liczba α nazywa się *odciętą zbieżności bezwzględnej*, prosta $\Re s = \alpha$ *prostą zbieżności bezwzględnej*, zaś półpłaszczyzna $\Re s > \alpha$ *półpłaszczyzną zbieżności bezwzględnej*.

Na samej prostej $\Re s = \alpha$ szereg może być bądź bezwzględnie zbieżny, bądź bezwzględnie rozbieżny, jak to wskazują przykłady szeregów:

$$(8.4) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{Log}^2 n} \cdot \frac{1}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

dla których $\alpha = 1$. Przypadki gdy $\alpha = -\infty$ lub $\alpha = +\infty$ zachodzą np. dla szeregów:

$$(8.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s}.$$

Nieco głębsze jest twierdzenie następujące:

(8.6) (a) Dla każdego szeregu Dirichleta (8.1) istnieje liczba rzeczywista β taka, że szereg jest zbieżny w półpłaszczyźnie $\Re s > \beta$ i rozbieżny w półpłaszczyźnie $\Re s < \beta$. (W przypadkach granicznych może być $\beta = -\infty$ lub $\beta = +\infty$.)

(b) Rozważany szereg Dirichleta jest zbieżny niemal jednostajnie w półpłaszczyźnie $\Re s > \beta$ i jego suma jest przeto funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie otwartej $\Re s > \beta$.

Tw. 8.6 wynika natychmiast z twierdzenia następującego:

(8.7) Jeżeli szereg (8.1) jest zbieżny w punkcie s_0 , to jest zbieżny w każdym punkcie s takim, że $\Re s > \Re s_0$. Co więcej, zbieżność jest jednostajna w każdym kącie $|\arg(s - s_0)| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$, gdzie $\delta > 0$.

Dowód. Ponieważ $a_n e^{-\lambda_n s} = a'_n e^{-\lambda'_n s'}$, gdzie $a'_n = a_n e^{-\lambda_n s_0}$ i $s' = s - s_0$, możemy od razu założyć, że $s_0 = 0$, a więc że zbieżny jest szereg $a_1 + a_2 + \dots$ W myśl tw. 2.6 (c), Rozdz. III, dla dowodu jednostajnej zbieżności szeregu (8.1) w kącie $|\arg(s - s_0)| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ wystarczy wykazać, że suma szeregu

$$(8.8) \quad |e^{-\lambda_1 s}| + |e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s}| + \dots + |e^{-\lambda_k s} - e^{-\lambda_{k-1} s}| + \dots$$

jest ograniczona w tym kącie. Otóż

$$(8.9) \quad e^{-\lambda_k s} - e^{-\lambda_{k-1} s} = \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \left(\frac{d}{d\lambda} e^{-\lambda s} \right) d\lambda = -s \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} e^{-\lambda s} d\lambda,$$

zaś wartość bezwzględna ostatniej całki nie przekracza

$$|s| \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} |e^{-\lambda s}| d\lambda = |s| \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} e^{-\lambda \sigma} d\lambda = \frac{|s|}{\sigma} (e^{-\lambda_{k-1} \sigma} - e^{-\lambda_k \sigma}).$$

Ponieważ $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, przeto suma szeregu (8.8) nie przekracza $1 + |s|/\sigma \leq 1 + 1/\sin \delta$ i twierdzenie jest udowodnione.

Liczba β spełniająca warunki tw. 8.6 nazywa się *odciętą zbieżności*, prosta $\Re s = \beta$ *prostą zbieżności*, zaś półpłaszczyzna $\Re s > \beta$ *półpłaszczyzną zbieżności* rozważanego szeregu Dirichleta. Na prostej zbieżności szereg może mieć zarówno punkty zbieżności jak i rozbieżności. Mamy oczywiście $\alpha \geq \beta$, gdzie α jest odcietą zbieżności bezwzględnej.

Pas nieograniczony $\beta < \Re s < \alpha$ (który może być pusty) nosi nazwę *pasa zbieżności warunkowej*. W punktach tego pasa szereg Dirichleta jest zbieżny, ale nie bezwzględnie. Weźmy pod uwagę np. szereg Dirichleta

$$(8.10) \quad 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots,$$

dla którego $\alpha = 1$. Jeżeli s jest rzeczywiste i dodatnie, to szereg ten, jako przemienny o wyrazach monotonicznie dążących do 0, jest zbieżny. Dla $s < 0$ szereg jest rozbieżny. Zatem $\beta = 0$ i pas $0 < \Re s < 1$ jest pasem zbieżności warunkowej.

Zauważmy jeszcze, że suma $F(s)$ szeregu (8.10) daje się łatwo wyrazić przez funkcję $\zeta(s)$ Riemanna. Istotnie, zakładając że $\Re s > 1$, możemy szereg (8.10) napisać w postaci

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots - 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right) = \zeta(s) - 2 \cdot 2^{-s} \zeta(s).$$

Zatem

$$(8.11) \quad F(s) = \zeta(s) (1 - 2^{1-s}).$$

Półpłaszczyzna zbieżności szeregów Dirichleta jest odpowiednikiem koła zbieżności szeregu potęgowego. Między obu przypadkami zachodzą jednak istotne różnice. Tak np. gdy dla szeregów potęgowych koło zbieżności bezwzględnej i koło zbieżności zwykłej pokrywają się, to dla szeregów Dirichleta półpłaszczyzna zbieżności bezwzględnej i półpłaszczyzna zbieżności zwykłej mogą być różne. Dalej, szereg potęgowy musi mieć na okręgu koła zbieżności przynajmniej jeden punkt nieprzedłużalności (p. Rozdz. VI, § 2), podczas gdy funkcja przedstawiona przez szereg Dirichleta może się dać rozszerzyć z zachowaniem holomorficznego na półpłaszczyznę zawierającą półpłaszczyznę zbieżności i różną od niej. Istotnie, pamiętając o tym, że funkcja $\zeta(s)$ jest holomorficzną na płaszczyźnie otwartej z wyłączeniem punktu $s = 1$, w którym ma biegunkę jednokrotną, i uwzględniając związek (8.11), widzimy, że suma $F(s)$ szeregu (8.10) da się rozszerzyć na całą płaszczyznę jako funkcja całkowita. Pomimo to szereg (8.10) jest zbieżny tylko wtedy, gdy $\Re s > 0$.

Podczas gdy każda funkcja holomorficzną w kole rozwija się w nim na szereg potęgowy, zagadnienie warunków koniecznych i wystarczających, jakie musi spełniać funkcja holomorficzną w półpłaszczyźnie, by dać się rozwinąć na szereg Dirichleta, jest bardzo trudne. Istotny postęp w tej dziedzinie jest świeżej daty. Zawdzięczamy go Bohrowi, który wyzyskał tu stworzoną przez siebie teorię t. zw. funkcji prawie okresowych. Natomiast sprawa jednoznaczności rozwinięcia funkcji na szereg Dirichleta nie przedstawia trudności.

(8.12) Funkcja $F(s)$, holomorficzna w półpłaszczyźnie $\Re s > \gamma$, daje się w niej przedstawić przez szereg Dirichleta w jeden co najwyżej sposób.

Gdyby bowiem istniały dwa różne szeregi Dirichleta zbieżne do sumy $F(s)$, gdy $\Re s > \gamma$, to różnica tych szeregów byłaby szeregiem Dirichleta, zbieżnym do 0 dla $\Re s > \gamma$, lecz o współczynnikach nie wszystkich równych 0. Że to jest niemożliwe, wynika z następującego lematu:

(8.13) Jeżeli suma $F(s)$ szeregu (8.1) zbieżnego w półpłaszczyźnie $\Re s > \beta$ posiada nieskończenie wiele pierwiastków $s_1, s_2, \dots$ leżących w kącie $|\arg s| \leq \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ (gdzie $\varepsilon > 0$) i dążących do ∞ , to $a_1 = a_2 = \dots = 0$ i funkcja $F(s)$ znika tożsamościowo.

Dowód. Wyjdziemy z równości $e^{\lambda_1 s} F(s) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)s}$. Jak to wynika z tw. 8.7, szereg po prawej stronie tej równości jest zbieżny jednostajnie w zbiorze $\Re s \geq \beta + \varepsilon$, $|\arg s| \leq \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$. Wobec tego, gdy s zmierza do ∞ pozostając w tym zbiorze, to

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 s} F(s) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{s \rightarrow \infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)s} = a_1.$$

Ale $F(s_n) = 0$ dla $n=1, 2, \dots$, co w związku z poprzednią równością daje $a_1 = 0$. Powtarzając to rozumowanie, otrzymujemy kolejno $a_2 = a_3 = \dots = 0$.

Udowodnimy jeszcze twierdzenie następujące:

(8.14) (a) Jeżeli α i β oznaczają odpowiednio odciętą bezwzględną zbieżności i odciętą zbieżności szeregu (8.1), to

$$(8.15) \quad \alpha - \beta \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\lambda_n}.$$

(b) Jeżeli przy tym $\beta > 0$, to

$$(8.16) \quad \beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_n|}{\lambda_n},$$

gdzie $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Dowód. (a) Oznaczmy prawą stronę nierówności (8.15) przez k . Oczywiście $k \geq 0$ i możemy przyjąć, że $k < +\infty$, gdyż w przeciwnym razie nierówność byłaby oczywista. Niech k' będzie dowolną liczbą większą niż k , zaś ε dowolną liczbą dodatnią. Wystarczy wykazać, że jeżeli s_0 jest punktem zbieżności szeregu (8.1) położonym na osi rzeczywistej, to szereg jest zbieżny bezwzględnie w punkcie

$s_1 = s_0 + k'(1 + \varepsilon)$. Otóż $a_n e^{-\lambda_n s_1} = a_n e^{-\lambda_n s_0} \cdot e^{-\lambda_n k'(1 + \varepsilon)}$. Pierwszy czynnik po prawej stronie, jako wyraz szeregu zbieżnego, dąży do 0. Ponieważ zaś $(\log n) / \lambda_n < k'$ dla $n > n_0$, więc drugi czynnik po prawej stronie nie przekracza $n^{-1 - \varepsilon}$ dla $n > n_0$. Zatem dla wszystkich n dostatecznie dużych mamy $|a_n e^{-\lambda_n s_1}| \leq n^{-1 - \varepsilon}$ i szereg (8.1) jest bezwzględnie zbieżny w punkcie s_1 . Nierówność (8.15) jest więc udowodniona.

(b) Oznaczmy przez γ prawą stronę wzoru (8.16). Liczba γ nie może być ujemna, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $\log |A_n| \rightarrow -\infty$, a więc szereg Dirichleta byłby zbieżny w punkcie $s = 0$ wbrew założeniu. Zatem $\gamma \geq 0$.

Udowodnimy najpierw, że $\beta \leq \gamma$, przy czym możemy założyć, iż $\gamma < +\infty$. Dla dowodu wystarczy wykazać, że jeżeli $\varepsilon > 0$, to szereg jest zbieżny w punkcie $s_0 = \gamma + 2\varepsilon$. Z określenia liczby γ wynika, że $\log |A_n| \leq (\gamma + \varepsilon) \lambda_n$, a więc że $|A_n| \leq e^{(\gamma + \varepsilon) \lambda_n}$, dla $n \geq n_0$. Jeżeli przeto $m > n > n_0$, to stosując przekształcenie Abela (p. str. 124), otrzymamy

$$\sum_{v=n}^m a_v e^{-\lambda_v s_0} = \sum_{v=n}^{m-1} A_v (e^{-\lambda_v s_0} - e^{-\lambda_{v+1} s_0}) - A_{m-1} e^{-\lambda_{m-1} s_0} + A_m e^{-\lambda_m s_0}.$$

Zastosujmy teraz wzór (8.9). Ponieważ $s_0 > 0$, więc uwzględniając nierówność na $|A_v|$, mamy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=n}^m a_v e^{-\lambda_v s_0} \right| &\leq s_0 \sum_{v=n}^{m-1} e^{(\gamma + \varepsilon) \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-s_0 \lambda} d\lambda + e^{(\gamma + \varepsilon) \lambda_{m-1}} e^{-\lambda_{m-1} s_0} + e^{(\gamma + \varepsilon) \lambda_m} e^{-\lambda_m s_0} \leq \\ &\leq s_0 \sum_{v=n}^{m-1} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{(\gamma + \varepsilon - s_0) \lambda} d\lambda + e^{-\varepsilon \lambda_n} + e^{-\varepsilon \lambda_m} \leq s_0 \int_{\lambda_n}^{\infty} e^{-\varepsilon \lambda} d\lambda + 2e^{-\varepsilon \lambda_n} \end{aligned}$$

Przy ustalonym $\varepsilon > 0$ prawa strona dąży do 0, gdy n dąży do ∞ . Stąd wynika zbieżność szeregu w punkcie s_0 .

Wykażemy teraz, że $\beta \geq \gamma$. Niech s_0 będzie dowolnym punktem zbieżności szeregu położonym na osi rzeczywistej. Z założenia mamy $s_0 > 0$. Niech $a_n e^{-\lambda_n s_0} = b_n$, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = B_n$. Przekształcenie Abela daje

$$A_n = \sum_{v=1}^n a_v = \sum_{v=1}^n b_v e^{\lambda_v s_0} = \sum_{v=1}^{n-1} B_v (e^{\lambda_v s_0} - e^{\lambda_{v+1} s_0}) + B_n e^{\lambda_n s_0}.$$

Ponieważ ciąg $\{B_n\}$ jest zbieżny, więc istnieje taka liczba M , że $|B_v| \leq M$ dla $v=1, 2, \dots$. Ze wzoru na A_n dostaniemy zatem

$$|A_n| \leq \sum_{\nu=1}^{n-1} M(e^{\lambda_{\nu+1}s_0} - e^{\lambda_{\nu}s_0}) + M e^{\lambda_n s_0} \leq 2M e^{\lambda_n s_0}.$$

Z tej nierówności oraz z określenia liczby γ wynika natychmiast, że $\gamma \leq s_0$, a więc że $\gamma \leq \beta$.

Wykazaliśmy, że $\gamma \geq \beta$ i że $\gamma \leq \beta$; wzór (8.16) jest przeto dowiedziony.

Wzór ten, zastosowany do szeregu $\sum_n |a_n| e^{-\lambda_n s}$, daje wniosek:

(8.17) Jeżeli odcięta α zbieżności bezwzględnej szeregu (8.1) jest dodatnia, to

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } A_n^*}{\lambda_n},$$

gdzie $A_n^* = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

W przypadku $\beta < 0$ wzór (8.16) jest na ogół fałszywy (np. gdy $\beta < 0$ oraz $a_1 + a_2 + \dots \neq 0$). Jeżeli jednak $\beta > -\infty$, to przez przesunięcie początku układu można zawsze osiągnąć, że $\beta > 0$.

ĆWICZENIA. 1. Dla szeregu Dirichleta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} (\text{Log } n)^s}$ mamy $\alpha = +\infty$ i $\beta = -\infty$.

2. Jeżeli odcięta β zbieżności szeregu (8.1) jest ujemna, to

$$\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} \text{Log } |B_n|, \quad \text{gdzie} \quad B_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Podać wzór na odciętą α zbieżności bezwzględnej, gdy $\alpha < 0$.

3. Jeżeli w szeregu (8.1) wykładniki λ_n spełniają warunek $\lambda_n^{-1} \text{Log } n \rightarrow 0$, to

$$\alpha = \beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} \text{Log } |a_n|.$$

(Wzór ten jest uogólnieniem wzoru Cauchy-Hadamarda na promień zbieżności szeregu potęgowego; por. tw. 1.1, Rozdz. III.)

4. Dowieść, że dla $\Re s > \alpha$ suma $F(s)$ szeregu (8.1) spełnia wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n s} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F(\sigma + it)|^2 dt.$$

Jest to t. zw. *tożsamość Parsevala* dla szeregów Dirichleta (por. Rozdz. III, § 1, ćw. 4).

[Wsk. Przemnożyć szeregi określające funkcje $F(s)$ i $\overline{F(s)}$; zauważyć, że iloraz $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\lambda t} dt$ jest równy 1, gdy $\lambda = 0$, i że dąży do 0 wraz z $1/T$, gdy λ jest rzeczywiste różne od 0.]

5. Szereg $\sum_n n^{-s}$, określający dla $\Re s > 1$ funkcję $\zeta(s)$, jest rozbieżny na prostej $\Re s = 1$. W każdym jednak punkcie tej prostej, różnym od 1, sumy cząstkowe szeregu są ograniczone.

[Wsk. Zbadać różnicę $n^{-s} - \int_n^{n+1} u^{-s} du$ i rozważyć całkę $\int_1^{+\infty} u^{-s} du$.]

6. Przy założeniach że:

a) szereg potęgowy $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ma promień zbieżności nie mniejszy od 1,

b) punkt $z=1$ jest punktem przedłużalności tego szeregu (p. str. 233),

c) szereg Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ ma punkty zbieżności,

suma $G(s)$ szeregu Dirichleta daje się rozszerzyć na całą płaszczyznę otwartą jako funkcja całkowita (Hardy).

W szczególności, gdy np. $0 < \theta < 2\pi$, funkcja $\sum_n e^{in\theta} n^{-s}$ jest całkowita.

(Dla $\theta = \pi$ otrzymujemy szereg (8.10) ze zmienionym znakiem.)

[Wsk. Z warunku c) wynika, że dla n dostatecznie dużych mamy $|a_n| \leq n^k$, gdzie $k \geq 0$. Korzystając z tego oraz ze wzoru (5.4), możemy udowodnić,

że $G(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} u^{s-1} F(e^{-u}) du$ dla $\Re s > k+1$. Postępujemy teraz jak przy do-

wodzie wzoru Hankela (p. uwagi na końcu § 3) i zastępujemy ostatnią całkę przez całkę krzywoliniową wzdłuż krzywej nie przechodzącej przez początek układu.]

7. Niech $F(s)$ oznacza sumę szeregu (8.1) i niech β będzie odciętą zbieżności tego szeregu. Wówczas, jeżeli liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ są nieujemne (lub ogólniej, jeżeli spełniają warunek $|\text{Arg } a_n| \leq \frac{1}{2}\pi - \epsilon$, gdzie $\epsilon > 0$), to punkt β jest punktem nieprzedłużalności dla rozwinięcia funkcji $F(s)$ na szereg potęgowy o środku w jakimkolwiek punkcie półpłaszczyzny $\Re s > \beta$ (por. Rozdz. VI, § 2, ćw. 5 i 6).

[Wsk. Wystarczy rozważyć rozwinięcie funkcji $F(s)$ w punkcie $s = \beta + 1$.]

8. Jeżeli $s \neq 0, -1, -2, \dots$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności szeregu

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

jest zbieżność szeregu Dirichleta

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Jeżeli β jest odciętą zbieżności szeregu (*), to szereg (*) jest zbieżny niemal jednostajnie w półpłaszczyźnie $\Re s > \beta$ pozbawionej punktów $0, -1, -2, \dots$ (Landau).

[Wsk. Zastosować tw. 2.6 (c), Rozdz. III; por. także ćw. 7, § 5, Rozdz. VII.]

9. Niech $a(u)$ będzie funkcją określoną dla $u \geq 0$ i całkowaną w każdym przedziale skończonym $0 \leq u \leq u_0$. Całka

$$(**) \quad \int_0^{+\infty} a(u) e^{-us} du$$

nazywa się *całką Laplace'a* i posiada własności analogiczne do własności szeregów Dirichleta. Dowieść, że:

a) istnieje liczba rzeczywista β (która może być równa $\pm \infty$) taka, że całka $(**)$ jest zbieżna dla $\Re s > \beta$ i rozbieżna dla $\Re s < \beta$;

b) jeżeli $\beta > 0$, to

$$\beta = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } |A(u)|}{u}, \quad \text{gdzie} \quad A(u) = \int_0^u a(v) dv.$$

[Wsk. Dowód jest analogiczny do dowodu wzoru (8.16), lecz zamiast przekształcenia Abela stosujemy całkowanie przez części.]

10. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych (niekoniecznie dążących do ∞). Zbiór S punktów zbieżności bezwzględnej szeregu $\sum_n a_n e^{-\lambda_n s}$ jest wypukły (t. j. jeżeli s_1 i s_2 leżą w S , to i cały odcinek $[s_1, s_2]$ leży w S).

[Wsk. Jeżeli $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, $u > 0$ i $v > 0$, to $u^\alpha v^\beta \leq u + v$.]