ROZDZIAŁ VIII

# FUNKCJE ELIPTYCZNE

**§ 1. Uwagi ogólne o funkcjach okresowych.** W Rozdz. I, §§ 8, 9, wspomnieliśmy, że funkcja $\sin z$ ma okres $2\pi$, zaś funkcja $e^z$ okres $2\pi i$. Ogólnie nazywać będziemy *okresem* funkcji $F(z)$ meromorficznej w obszarze $G$ każdą liczbę $\omega$ taką, że:

$1^0$ dla każdego punktu $z$, jeżeli jeden z punktów $z$, $z+\omega$ należy do $G$, to należy również i drugi;

$2^0$ jeżeli $z \in G$, to $F(z+\omega)=F(z)$.

Dla funkcji stałej każda liczba jest okresem. Funkcję meromorficzną w obszarze $G$ nazywamy *okresową*, jeżeli posiada przynajmniej jeden okres różny od 0.

Z definicji okresu wynika, że jeżeli $F(z)$ ma okres $\omega$, to ma również okres $m\omega$, gdzie $m$ jest dowolną liczbą całkowitą. Ogólniej, *jeżeli $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ są okresami funkcji $F(z)$, to okresem jest również każda liczba postaci $m_1\omega_1+m_2\omega_2+\ldots+m_p\omega_p$, gdzie $m_1, m_2, \ldots, m_p$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.*

Różniczkując $F(z+\omega)=F(z)$, dostajemy $F'(z+\omega)=F'(z)$. Zatem *pochodna funkcji okresowej $F(z)$ jest również funkcją okresową, przy czym każdy okres funkcji $F(z)$ jest również okresem funkcji $F'(z)$.*

Natomiast funkcja pierwotna funkcji okresowej może już nie być okresowa. Np. funkcja $F(z)=z$ nie jest okresowa, pomimo iż jej pochodna $F'(z)=1$ jest funkcją okresową, jako stała.

Rozważmy teraz dowolną funkcję okresową $F(z)$ i zbiór $\Omega$ wszystkich jej okresów. Jeżeli $F(z)$ nie jest stałą, to $\Omega$ nie posiada punktów skupienia w skończoności. Istotnie, w przeciwnym razie istniałby ciąg $\{\omega_n\}$ okresów różnych, zbieżny do pewnej liczby skończonej $a$, a więc istniałyby okresy $w_n=\omega_n-\omega_{n-1}\neq 0$ o wartości bezwzględnej dowolnie małej. Ponieważ $F(z+w_n)=F(z)$, przeto do dowolnego punktu $z$, w którym funkcja $F$ jest holomorficzna, skupiałyby się punkty $z+w_n$, w których funkcja przyjmowałaby tę samą wartość co w punkcie $z$. A więc $F(z)$ byłaby stałą, wbrew założeniu.

Co do rozmieszczenia punktów zbioru $\Omega$, to rozróżniamy dwa przypadki:

a) *Zbiór $\Omega$ leży na pewnej prostej $p$* (przechodzącej, oczywiście, przez punkt 0). Niech wówczas $\omega \neq 0$ będzie punktem zbioru $\Omega$ położonym najbliżej punktu 0. Ponieważ zbiór $\Omega$ nie posiada punktów skupienia w skończoności i jest symetryczny względem punktu 0, istnieją dokładnie dwie liczby posiadające żądaną własność i różniące się tylko znakiem; wybieramy którąkolwiek z nich jako $\omega$. Przekonywamy się łatwo, że *wszystkie elementy zbioru $\Omega$ są postaci $n\omega$, gdzie $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$*

Istotnie, gdyby istniał okres $w$ nie będący tej postaci, to ponieważ leżałby na prostej $p$, mielibyśmy $w=(m+\theta)\omega$, gdzie $m$ jest liczbą całkowitą, zaś $0<\theta<1$. Liczba $\theta\omega=w-m\omega$ byłaby okresem (jako różnica dwuch okresów) różnym od 0 i leżącym bliżej punktu 0 niż $\omega$, wbrew założeniu o $\omega$.

Liczba $\omega$, określona z dokładnością do znaku, nosi nazwę *okresu pierwotnego* funkcji $F(z)$. Jak wynika z tw. 9.10, Rozdz. I, okresem pierwotnym np. funkcji $e^z$ jest $2\pi i$.

b) *Zbiór $\Omega$ nie leży na jednej prostej.* Niech, jak poprzednio, $\omega \neq 0$ będzie punktem zbioru $\Omega$ najbliższym punktu 0. Ze względu na symetrię zbioru $\Omega$ względem punktu 0 istnieją przynajmniej dwa punkty o tej własności. Niech $p$ oznacza prostą $0\omega$. Rozumowanie takie samo jak w przypadku a) wskazuje, że wszystkie elementy zbioru $\Omega$ leżące na prostej $p$ są postaci $m\omega$, gdzie $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Rozważmy teraz te punkty zbioru $\Omega$, które nie leżą na prostej $p$, i wybierzmy z nich punkt $\omega'$ możliwie najbliższy punktu 0. Jest jasne, że $|\omega'|\geqslant|\omega|$. Udowodnimy, że *wszystkie elementy zbioru $\Omega$ są postaci $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.*

Że liczby tej postaci są okresami, to już wiemy. Pozostaje tylko wykazać, że innych okresów nie ma.

Liczby $m\omega+n\omega'$ są wierzchołkami siatki równoległoboków, pokrywającej płaszczyznę (p. rys. na str. 302). Gdyby jakiś punkt $w$ zbioru $\Omega$ nie był postaci $m\omega+n\omega'$, to leżałby on wewnątrz lub na obwodzie jednego z tych równoległoboków, lecz nie w wierzchołku. Byłoby więc

$$w=(m+\theta)\omega+(n+\theta')\omega',$$



gdzie liczby $\theta$ i $\theta'$ spełniałyby nierówności $0\leqslant\theta<1$ i $0\leqslant\theta'<1$, nie będąc obydwie jednocześnie zerami. Liczba $w'=w-(m\omega+n\omega')=\theta\omega+\theta'\omega'$ byłaby okresem leżącym wewnątrz lub na obwodzie równoległoboku o wierzchołkach $0$, $\omega$, $\omega+\omega'$, $\omega'$, ale w żadnym z tych wierzchołków. Otóż nie może ona leżeć ani wewnątrz ani na obwodzie trójkąta o wierzchołkach $0$, $\omega$, $\omega'$, gdyż ze względu na nierówność $|\omega|\leqslant|\omega'|$ należałaby do koła otwartego $K(0;|\omega'|)$. Mielibyśmy więc $|w'|<|\omega'|$, co jest sprzeczne z definicją liczby $\omega'$. Gdyby zaś $w'$ leżało w trójkącie o wierzchołkach $\omega, \omega+\omega', \omega'$, to liczba $w''=\omega+\omega'-w'$, będąca okresem, leżałaby w trójkącie $0, \omega, \omega'$ i znów doszlibyśmy do sprzeczności.

Para okresów $\omega,\omega'$ taka, że każdy okres jest postaci $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są liczbami całkowitymi, nosi nazwę *pary okresów pierwotnych*. W odróżnieniu od okresu pierwotnego w przypadku a), par pierwotnych w przypadku b) może być nieskończenie wiele. Np. jeżeli $k$ jest całkowite, to wraz z $\omega,\omega'$ para $\omega, k\omega+\omega'$ jest również parą okresów pierwotnych.

Przypadek b) można scharakteryzować w następujący sposób: funkcja posiada dwa okresy o ilorazie nierzeczywistym.

Streszczając, możemy powiedzieć:

(1.1) *Jeżeli funkcja $F(z)$, meromorficzna w obszarze $G$ i różna od stałej, jest okresowa, to zachodzi jedna z następujących dwu możliwości:*

a) *istnieje okres $\omega$ (okres pierwotny) taki, że każdy inny okres jest całkowitą wielokrotnością $\omega$; okres ten jest wyznaczony z dokładnością do znaku;*

b) *istnieje para okresów $\omega$, $\omega'$ różnych od zera o ilorazie nierzeczywistym (para okresów pierwotnych) taka, że każdy okres funkcji $F(z)$ jest postaci $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są dowolnymi liczbami całkowitymi; par $\omega$, $\omega'$ posiadających taką własność jest nieskończenie wiele.*

W przypadku a) funkcja $F(z)$ nazywa się *jednookresową*, w przypadku b) *dwuokresową*. Funkcje redukujące się do stałej będziemy również nazywać *dwuokresowymi*, przy czym przez *parę okresów pierwotnych* takiej funkcji rozumieć będziemy dowolną parę liczb $\omega$, $\omega'$ różnych od zera, o ilorazie nierzeczywistym.

Przypuśćmy, że funkcja $F(z)$, meromorficzna w obszarze $G$, ma okres $\omega$. Przeprowadźmy przez punkty $n\omega$ (dla $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$) rodzinę prostych $q_n$ równoległych, różnych od prostej $0\omega$. W ten sposób cała płaszczyzna zostanie podzielona na szereg pasów równoległych $S_n$, zawartych odpowiednio między $q_n$ a $q_{n+1}$. Jeżeli umówimy się np. zaliczyć do $S_n$ prostą $q_n$, natomiast wyłączyć $q_{n+1}$, to każdy punkt płaszczyzny otwartej należeć będzie dokładnie do jednego pasa $S_n$. Pasy $S_n$ noszą nazwę *pasów okresowości*. Jeżeli $S$ jest jednym z nich, to mamy oczywiście $G\cdot S\neq 0$ (p. str. 341, warunek $1^0$ definicji) i dla zbadania funkcji w całym obszarze $G$ wystarczy ograniczyć się do zbioru $G\cdot S$. Dla funkcyj okresowych najczęściej rozważanym obszarem $G$ jest pas ograniczony przez dwie proste równoległe. Oczywiście, proste ograniczające ten pas muszą być równoległe do prostej $0\omega$. Jako przypadki graniczne otrzymujemy tu jako $G$ półpłaszczyznę ograniczoną przez prostą równoległą do $0\omega$ albo całą płaszczyznę otwartą.

W przypadku funkcji dwuokresowej mającej parę okresów pierwotnych $\omega, \omega'$ rozważmy siatkę równoległoboków pokrywających płaszczyznę, o wierzchołkach w punktach $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są liczbami całkowitymi. Weźmy pod uwagę jeden z takich równoległoboków. Wszystkie jego punkty są postaci $(m+\theta)\omega+(n+\theta')\omega'$, gdzie $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $0\leqslant\theta'\leqslant 1$. Usuńmy z tego równoległoboku punkty odpowiadające $\theta=1$ lub $\theta'=1$, t. zn. zaliczmy do równoległoboku, prócz punktów wewnętrznych, tylko wierzchołek $\zeta=m\omega+n\omega'$ oraz dwa wychodzące zeń boki, lecz bez końców $\zeta+\omega, \zeta+\omega'$. Oznaczmy przez $R_{m,n}$ otrzymaną figurę, którą nazywać będziemy *równoległobokiem okresowości*. Równoległoboki okresowości $R_{m,n}$ nie mają punktów wspólnych i pokrywają całkowicie płaszczyznę otwartą. Równoległobok $R_{0,0}$ o wierzchołkach w punktach $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$ nazywać będziemy *podstawowym*.

Uogólniając definicję przystawania, wprowadzoną w § 9, Rozdz. I, będziemy mówili, że $z_2$ *przystaje do* $z_1$ *modulo* $\omega, \omega'$ i pisali

$$z_2\equiv z_1 \pmod{\omega, \omega'},$$

jeżeli różnica $z_2-z_1$ jest postaci $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są liczbami całkowitymi. Jeżeli liczby $\omega$ i $\omega'$ są ustalone, to będziemy wprost pisać $z_2\equiv z_1$ i mówić, że $z_2$ *przystaje do* $z_1$.

Jeżeli funkcja meromorficzna w obszarze $G$ jest dwuokresowa i $R$ jest jednym z jej równoległoboków okresowości, to $R\cdot G\neq 0$ i dla zbadania funkcji w $G$ wystarczy ograniczyć się do zbioru $R\cdot G$. W dalszych naszych rozważaniach ograniczymy się niemal wyłącznie do przypadku, gdy obszar $G$ jest płaszczyzną otwartą.



## § 2. Rozwinięcie funkcji okresowej na szereg Fouriera.

Jeżeli funkcja $F(z)$ ma okres $\omega$, to funkcja $\Phi(z)=F(z\omega)$ ma okres 1. Nie zmniejszymy więc ogólności rozważań, jeżeli założymy od razu, że funkcja $F(z)$ ma okres 1 (nie zakładamy jednak, że okres ten jest pierwotny; $F(z)$ może być nawet funkcją dwuokresową).

Przypuśćmy, że $F(z)$ jest funkcją meromorficzną w pasie $R$ określonym przez nierówność $b<\mathfrak{J}z<B$. Funkcja

$$\zeta=e^{2\pi iz} \tag{2.1}$$

przekształca ten pas (oczywiście nie jedno-jednoznacznie) na pierścień $P=\mathrm{P}(0; e^{-2\pi B}, e^{-2\pi b})$. Udowodnimy, że funkcja

$$G(\zeta)=F(z)=F\left(\frac{1}{2\pi i}\log\zeta\right) \tag{2.2}$$

jest funkcją meromorficzną w $P$. Zauważmy przede wszystkim, że wzór (2.2) określa $G(\zeta)$ w $P$ jednoznacznie. Istotnie, wprawdzie wyrażenie $\dfrac{1}{2\pi i}\log\zeta$ ma nieskończenie wiele wartości, ale wszystkie one różnią się o liczby całkowite. Wobec tego, że 1 jest okresem funkcji $F(z)$, otrzymujemy ze wzoru (2.2) we wszystkich przypadkach tę samą wartość na $G(\zeta)$. Niech teraz $\zeta_0$ będzie dowolnym punktem pierścienia $P$ i niech $z_0=\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}\zeta_0$. W otoczeniu punktu $\zeta_0$ istnieje gałąź holomorficzna $L(\zeta)$ funkcji $\dfrac{1}{2\pi i}\log\zeta$. Ponieważ w tym otoczeniu $G(\zeta)=F(L(\zeta))$, przeto jeżeli funkcja $F(z)$ jest holomorficzna w punkcie $z_0$, to $G(\zeta)$ jest holomorficzna w punkcie $\zeta_0$. Jeżeli $F(z)$ posiada biegun $k$-krotny w $z_0$, to uwzględniając, że $L'(\zeta_0)\neq 0$, funkcja $G(\zeta)$ posiada biegun $k$-krotny w $\zeta_0$ (por. Rozdz. III, tw. 8.3). Zatem funkcja $G(\zeta)$ istotnie jest meromorficzna w $P$.

Podobnie, jeżeli funkcja $F(z)$ jest holomorficzna w pasie $R$, to oczywiście funkcja $G(\zeta)$ jest holomorficzna w pierścieniu $P$.

Jeżeli funkcja $F(z)$ jest meromorficzna na płaszczyźnie otwartej, to funkcja $G(\zeta)$, dana przez wzór (2.2), jest meromorficzna w pierścieniu $P=\mathrm{P}(0; 0, \infty)$. (W punktach 0 i $\infty$ funkcja $G(\zeta)$ może mieć oczywiście osobliwości istotne.)

Przypuśćmy teraz, że funkcja $F(z)$ jest holomorficzna w pasie $R$ i że nie da się rozszerzyć z zachowaniem warunku holomorficzności na żaden szerszy pas zawierający $R$.

Funkcja $G(\zeta)$, jako holomorficzna w pierścieniu $P$, rozwija się w nim na szereg Laurenta bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny

$$G(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\zeta^n.$$

Szereg ten jest rozbieżny w punktach nie należących do domknięcia pierścienia $P$, gdyż w przeciwnym razie funkcja $G(\zeta)$ dałaby się rozszerzyć z zachowaniem holomorficzności na pierścień obejmujący $P$ i różny od $P$ (p. Rozdz. III, § 4), wskutek czego funkcja $F(z)$ dałaby się rozszerzyć z zachowaniem holomorficzności na pas obejmujący $R$ i różny od $R$, co jest sprzeczne z założeniem.

Kładąc w ostatniej równości $\zeta=e^{2\pi iz}$, otrzymamy wzór

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inz}, \tag{2.3}$$

gdzie szereg po prawej stronie jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w każdym pasie mieszczącym się w $R$ wraz z prostymi, które go ograniczają. Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

(2.4) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją o okresie* 1, *holomorficzną w pewnym pasie $R$ określonym przez nierówność $b<\mathfrak{I}z<B$, to w pasie tym $F(z)$ rozwija się na szereg postaci* (2.3), *jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w każdym pasie $b'\leqslant\mathfrak{I}z\leqslant B'$, zawartym w $R$.*

*Jeżeli przy tym funkcja $F(z)$ nie daje się rozszerzyć z zachowaniem holomorficzności na żaden pas obejmujący $R$ ale różny od $R$, to szereg* (2.3) *jest rozbieżny wszędzie zewnątrz $R$.*

Rozwinięcie (2.3) nosi nazwę *szeregu* albo *rozwinięcia Fouriera funkcji $F(z)$*. Różnym pasom holomorficzności jednej i tej samej funkcji odpowiadają na ogół różne szeregi Fouriera.

Rozważmy np. funkcję $F(z)=\operatorname{ctg}\pi z$, mającą okres 1. Przyjmując $\zeta=e^{2\pi iz}$, znajdziemy, że $F(z)=i(\zeta+1)/(\zeta-1)$. Prawa strona tej równości ma punkt $\zeta=1$ jako jedyny punkt osobliwy i jej szeregami Taylora w kołach $K(0;1)$ i $K(\infty;1)$ są odpowiednio szeregi:

$$-i(1+2\zeta+2\zeta^2+\ldots),\qquad i(1+2\zeta^{-1}+2\zeta^{-2}+\ldots).$$

Stąd otrzymujemy dla funkcji $\operatorname{ctg}\pi z$ następujące dwa rozwinięcia Fouriera:

$$\operatorname{ctg}\pi z=-i\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\pi inz}\Big),\qquad \operatorname{ctg}\pi z=i\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi inz}\Big), \tag{2.5}$$

mianowicie pierwsze z nich dla $\mathfrak{I}z>0$, a drugie dla $\mathfrak{I}z<0$.



Korzystając z równości $e^{2\pi inz}=\cos 2\pi nz+i\sin 2\pi nz$, możemy wzór (2.3) napisać w postaci:

$$F(z)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi nz+b_n\sin 2\pi nz), \tag{2.6}$$

gdzie

$$a_0=2c_0,\quad a_n=c_n+c_{-n},\quad b_n=i(c_n-c_{-n})\qquad \textit{dla}\ \ n=1,2,\ldots \tag{2.7}$$

Szereg (2.6) jest to postać trygonometryczna szeregu Fouriera.

Niech teraz $H(z)$ będzie funkcją o okresie $\omega\neq 0$, holomorficzną w pasie $b<\mathfrak{I}(z/\omega)<B$, równoległym do prostej $0\omega$. Funkcja $F(z)=H(z\omega)$ ma okres 1 i jest holomorficzna w pasie $b<\mathfrak{I}z<B$, a więc mamy tam wzór (2.3), albo, co na jedno wychodzi, wzór (2.6). Zatem dla $b<\mathfrak{I}(z/\omega)<B$ jest

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{2\pi inz}{\omega}}=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{2\pi nz}{\omega}+b_n\sin\frac{2\pi nz}{\omega}\Big),$$

przy czym dwa ostatnie szeregi różnią się tylko postacią; od jednego do drugiego można łatwo przejść, posługując się wzorami (2.7).

ĆWICZENIA. 1. Niech $F(z)$ będzie funkcją o okresie 1, holomorficzną i ograniczoną dla $\mathfrak{I}z>b$. Wykazać, że $F(z)$ dąży do granicy skończonej, gdy $z$ zmierza do $\infty$ w ten sposób, że $\mathfrak{I}z\to+\infty$.

2. Funkcja całkowita $F(z)$ o okresie 1, ograniczona w pasie $0\leqslant\mathfrak{R}z<1$, jest stałą.

3. O funkcji $F(z)$ meromorficznej o okresie 1 będziemy mówić, że należy do klasy $\mathfrak{K}$, jeżeli funkcja $G(\zeta)$ dana przez wzór (2.2) jest funkcją wymierną zmiennej $\zeta$. Wykazać, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $F(z)$, meromorficzna i mająca okres 1, należała do klasy $\mathfrak{K}$, jest, by dążyła do granicy, skończonej lub nieskończonej, gdy $z$ dąży do $\infty$, pozostając w pasie $0\leqslant\mathfrak{R}z<1$. (Granice dla $\mathfrak{I}z\to+\infty$ oraz dla $\mathfrak{I}z\to-\infty$ nie muszą być te same.)

4. Jeżeli funkcja $F(z)$ klasy $\mathfrak{K}$ nie dąży ani do 0, ani do $\infty$, gdy $0\leqslant\mathfrak{R}z<1$ i $\mathfrak{I}z\to\pm\infty$, wówczas $F(z)$ posiada w pasie $0\leqslant\mathfrak{R}z<1$ dokładnie tyleż pierwiastków co biegunów (uwzględniając krotności zarówno pierwiastków jak biegunów).

5. Niech $F(z)$ spełnia założenia ćw. 4 i niech $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ oraz $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ będą odpowiednio wszystkimi pierwiastkami oraz wszystkimi biegunami funkcji, położonymi w pasie $0\leqslant\mathfrak{R}z<1$. Wówczas

$$F(z)=C\prod_{k=1}^{n}(e^{2\pi iz}-e^{2\pi i\alpha_k})\Big/\prod_{k=1}^{n}(e^{2\pi iz}-e^{2\pi i\beta_k}),$$

gdzie $C$ jest pewną stałą.

## § 3. Twierdzenia ogólne o funkcjach eliptycznych.

Pomiędzy funkcjami meromorficznymi dwuokresowymi rolę szczególnie ważną odgrywają takie, których obszarem meromorficzności jest cała płaszczyzna otwarta. Noszą one nazwę funkcyj *eliptycznych*. W dalszych rozważaniach, dotyczących funkcyj dwuokresowych, ograniczymy się niemal wyłącznie do funkcyj eliptycznych.

Nazwa „funkcje eliptyczne" nie jest najszczęśliwsza i wyraża dość przypadkową własność tych funkcyj. Historycznie powstała ona z tego powodu, że długość łuku elipsy wyraża się przez pewne całki ściśle związane z funkcjami eliptycznymi, t. zw. całki eliptyczne (p. § 14). Przez całki eliptyczne wyraża się jednak długość łuku i wielu innych krzywych, np. lemniskaty.

Niech $F(z)$ będzie funkcją eliptyczną, zaś $\omega, \omega'$ parą jej okresów pierwotnych. Zmieniając ewentualnie porządek okresów, możemy zawsze założyć, że $\mathfrak{I}(\omega'/\omega)>0$, czyli $0<\text{Arg}(\omega'/\omega)<\pi$.

Równoległobok utworzony z odcinków $[0,\omega]$, $[\omega, \omega+\omega']$, $[\omega+\omega', \omega']$ i $[\omega', 0]$ jest więc zorientowany dodatnio (Rozdz. IV, § 11, str. 202).

Rozpoczniemy od dowodu twierdzenia, że

(3.1) *Jedyną funkcją eliptyczną całkowitą jest stała.*

Dowód. Funkcja dwuokresowa całkowita $F(z)$ jest ograniczona w równoległoboku podstawowym. Ponieważ funkcja $F(z)$ w innych równoległobokach okresowości przyjmuje te same wartości co w równoległoboku podstawowym, jest więc ograniczona w całej płaszczyźnie otwartej, a zatem stała.

Widzimy więc, że każda funkcja eliptyczna nie będąca stałą musi posiadać przynajmniej jeden biegun w skończoności, a więc przynajmniej jeden biegun w każdym równoległoboku okresowości.

Jeżeli pominiemy przypadek funkcji stałej, to punkt w nieskończoności jest dla funkcji eliptycznej punktem skupienia biegunów, a więc punktem osobliwym.

(3.2) *Suma, różnica, iloczyn oraz iloraz dwu funkcyj eliptycznych, mających tę samą parę okresów o ilorazie nierzeczywistym, jest funkcją eliptyczną.*

*Pochodna $F'(z)$ oraz pochodna logarytmiczna $F'(z)/F(z)$ funkcji eliptycznej $F(z)$ są również funkcjami eliptycznymi.*

Dowód wynika stąd, że cztery działania arytmetyczne oraz różniczkowanie zachowują zarówno meromorficzność jak i dwuokresowość funkcji.



Wspólna para okresów, występująca w tw. 3.2, nie musi być parą pierwotną dla poszczególnych funkcyj. Jakkolwiek rozważanie par okresów pierwotnych ma zasadnicze znaczenie dla teorii funkcyj eliptycznych, to jednak w pewnych przypadkach celowe jest branie pod uwagę par nie pierwotnych. Funkcje eliptyczne, mające wspólną parę okresów o ilorazie nierzeczywistym, nazywać będziemy *spółokresowymi.*

(3.3) *Jeżeli dwie funkcje eliptyczne spółokresowe $F(z)$ i $F_1(z)$ mają w całej płaszczyźnie te same bieguny i w nich te same części główne, to różnią się o stałą.*

*Jeżeli dwie funkcje eliptyczne spółokresowe $F(z)$ i $F_1(z)$ mają te same pierwiastki i te same bieguny (z uwzględnieniem ich krotności), to różnią się czynnikiem stałym.*

Dowód. W pierwszym przypadku różnica $F_1(z)-F(z)$, a w drugim iloraz $F_1(z)/F(z)$, jest funkcją eliptyczną całkowitą, a więc na mocy tw. 3.1 stałą.

Niech $F(z)$ będzie funkcją eliptyczną, zaś $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jej różnymi biegunami położonymi w równoległoboku podstawowym, o krotnościach odpowiednio $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (przypominamy, że do równoległoboku podstawowego zaliczamy jego wnętrze oraz boki $0\omega$ i $0\omega'$ bez końców $\omega$ i $\omega'$). Liczba

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k,$$

t. j. liczba biegunów położonych w równoległoboku podstawowym z uwzględnieniem ich krotności, nosi nazwę *rzędu* funkcji eliptycznej. Oczywiście, zamiast równoległoboku podstawowego możemy przyjąć w tej definicji dowolny równoległobok okresowości.

Niech $z_0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Rozważmy równoległobok $R$ o wierzchołkach $z_0, z_0+\omega$, $z_0+\omega+\omega'$ i $z_0+\omega'$, otrzymany z równoległoboku podstawowego przez przesunięcie równoległe o $z_0$ (w szczególności $R$ może być równoległobokiem okresowości).

(3.4) *Jeżeli funkcja eliptyczna $F(z)$ jest holomorficzna na obwodzie równoległoboku $R$, to jej całka wzdłuż tego obwodu jest zerem.*

Istotnie, całka ta jest równa

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} F(z)\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0+\omega+\omega'} F(z)\,dz + \int_{z_0+\omega+\omega'}^{z_0+\omega'} F(z)\,dz + \int_{z_0+\omega'}^{z_0} F(z)\,dz,$$

gdzie całkujemy po odcinkach prostoliniowych. Suma pierwszej i trzeciej całki wynosi, jak łatwo widzieć,

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} F(z)\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0} F(z+\omega')\,dz = \int_{z_0}^{z_0+\omega} F(z)\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0} F(z)\,dz,$$

a więc jest zerem. Podobnie jest zerem suma całki drugiej i czwartej.

Z (3.4) wynika twierdzenie następujące:

(3.5) *Suma residuów dowolnej funkcji eliptycznej $F(z)$, odpowiadających wszystkim biegunom należącym do jakiegokolwiek równoległoboku okresowości $R$, jest równa zeru.*

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że funkcja $F(z)$ jest holomorficzna na obwodzie rozważanego równoległoboku $R$. Suma residuów, pomnożona przez $2\pi i$, jest wówczas równa całce funkcji $F(z)$, wziętej wzdłuż obwodu równoległoboku $R$ w zwrocie dodatnim, a więc, w myśl tw. 3.4, jest zerem. Oczywiście wystarczyło założyć, że $R$ jest równoległobokiem okresowości przesuniętym równolegle.

Jeżeli $F(z)$ posiada bieguny na obwodzie równoległoboku $R$, rozważmy równoległobok $R'$ powstały z $R$ przez przesunięcie równoległe o $c$, gdzie $c$ jest stałą zespoloną o wartości bezwzględnej dostatecznie małej. Funkcja $F(z)$ posiada w $R$ skończoną ilość biegunów. Jeżeli więc $c$ odpowiednio dobierzemy, to funkcja $F(z)$ będzie miała w $R'$ te same bieguny co w $R$, będąc przy tym holomorficzna na obwodzie równoległoboku $R'$. W myśl rozpatrzonego już przypadku suma jej residuów, odpowiadających biegunom położonym w $R'$, jest więc równa zeru. Zatem suma residuów funkcji $F(z)$ dla biegunów położonych w $R$ jest też równa zeru i twierdzenie jest udowodnione.

(3.6) *Każda funkcja eliptyczna nie całkowita jest rzędu $\geqslant 2$.*

Dowód. Funkcja eliptyczna rzędu 1 posiadałaby w równoległoboku podstawowym dokładnie jeden biegun $z_0$, o części głównej $c/(z-z_0)$. Ponieważ $c \neq 0$, otrzymalibyśmy sprzeczność z tw. 3.5.

Zauważmy teraz, że wraz z $F(z)$ również funkcja $F'(z)/F(z)$ jest eliptyczna i że suma jej residuów w równoległoboku okresowości jest równa różnicy między liczbą pierwiastków a liczbą biegunów funkcji $F(z)$ w tym równoległoboku. Stosując tw. 3.5, wnosimy stąd, że

(3.7) *Liczba pierwiastków funkcji eliptycznej $F(z)$ w dowolnym równoległoboku okresowości jest równa liczbie jej biegunów w tym równoległoboku.*



Zastępując funkcję $F(z)$ przez $F(z)-c$, otrzymujemy, że

(3.8) *Funkcja eliptyczna rzędu $r>0$ przyjmuje w równoległoboku okresowości każdą wartość $c$ dokładnie $r$ razy.*

W myśl tw. 3.7 liczba pierwiastków funkcji eliptycznej w równoległoboku okresowości zależy od liczby biegunów w nim położonych. Wykażemy teraz, że i położenie pierwiastków zależy od położenia biegunów. Mianowicie:

(3.9) *Niech $F(z)$ będzie funkcją eliptyczną rzędu $r>0$, zaś $a_1, a_2, \ldots, a_r$ i $b_1, b_2, \ldots, b_r$ będą odpowiednio pierwiastkami i biegunami funkcji $F(z)$ w równoległoboku okresowości $R$, przy czym zarówno każdy pierwiastek jak i każdy biegun liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność. Wówczas*

$$a_1+a_2+\ldots+a_r \equiv b_1+b_2+\ldots+b_r \pmod{\omega, \omega'}. \tag{3.10}$$

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że $F(z)$ nie ma pierwiastków ani biegunów na obwodzie rozważanego równoległoboku $R$. Oznaczmy przez $z_0$, $z_0+\omega$, $z_0+\omega+\omega'$ i $z_0+\omega'$ jego wierzchołki. Pomnożona przez $2\pi i$ różnica między lewą a prawą stroną wzoru (3.10) równa jest (p. Rozdz. IV, tw. 7.5) całce funkcji $zF'(z)/F(z)$, wziętej wzdłuż obwodu $R$, t. j.

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} z\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0+\omega+\omega'} z\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz + \int_{z_0+\omega+\omega'}^{z_0+\omega'} z\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz + \int_{z_0+\omega'}^{z_0} z\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz. \tag{3.11}$$

Suma pierwszej i trzeciej całki wynosi

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} z\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0} (z+\omega')\frac{F'(z+\omega')}{F(z+\omega')}\,dz =$$

$$= \int_{z_0}^{z_0+\omega} z\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0} (z+\omega')\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = -\omega' \int_{z_0}^{z_0+\omega} \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz.$$

Ponieważ w myśl założenia funkcja $F(z)$ jest holomorficzna i różna od zera na boku $[z_0, z_0+\omega]$, całka funkcji $F'(z)/F(z)$ wzdłuż tego boku równa się przyrostowi $\log F(z)$ (Rozdz. IV, § 5, str. 180), który ze względu na $F(z_0)=F(z_0+\omega)$ jest równy $2n\pi i$, gdzie $n$ jest całkowite.

Zatem suma pierwszej i trzeciej całki w (3.11) wynosi $-2n\pi\omega' i$. Podobnie suma drugiej i czwartej całki jest równa $2m\pi\omega i$, gdzie $m$ jest całkowite. A więc różnica $a_1+a_2+\ldots+a_r-(b_1+b_2+\ldots+b_r)$ jest równa $m\omega-n\omega'$ i wzór (3.10) jest udowodniony. W rozumowaniu powyższym wystarczyło przyjąć, że $R$ jest równoległobokiem okresowości przesuniętym równolegle.

W przypadku, gdy $R$ zawiera na obwodzie pierwiastki lub bieguny funkcji $F(z)$, postępujemy podobnie jak w dowodzie tw. 3.5.

(3.12) *Jeżeli $c'$ i $c''$ są dowolnymi liczbami zespolonymi, skończonymi lub nie, zaś $a_1', a_2', \ldots, a_r'$ i $a_1'', a_2'', \ldots, a_r''$ odpowiednio pierwiastkami równań $F(z)=c'$ i $F(z)=c''$, położonymi w równoległoboku okresowości funkcji eliptycznej $F(z)$ rzędu $r>0$, wówczas*

$$(3.13)\qquad a_1'+a_2+\ldots+a_r' \equiv a_1''+a_2''+\ldots+a_r'' \pmod{\omega, \omega'}.$$

Dowód. Jeżeli np. $c'=\infty$, a $c''$ jest liczbą skończoną, to (3.13) jest konsekwencją tw. 3.9, zastosowanego do funkcji $F(z)-c''$. Jeżeli zaś $c'$ i $c''$ są skończone, to w myśl tw. 3.9, zastosowanego kolejno do funkcyj $F(z)-c'$ i $F(z)-c''$, zarówno lewa jak prawa strona wzoru (3.13) przystają do $b_1+b_2+\ldots+b_r \pmod{\omega, \omega'}$, gdzie $b_1, b_2, \ldots, b_r$ są biegunami funkcji $F(z)$ w rozważanym równoległoboku. A więc i w tym przypadku wzór (3.13) jest prawdziwy.

Wprowadzimy jeszcze pewne pojęcie. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_r$ będzie układem wszystkich pierwiastków funkcji $F(z)$ w równoległoboku podstawowym, przy czym pierwiastki wielokrotne są liczone z odpowiednią krotnością. Układ liczb $a_1, a_2, \ldots, a_r$ będziemy nazywali *układem zupełnym pierwiastków* funkcji $F(z)$, jeżeli

$$a_i \equiv a_i \pmod{\omega, \omega'} \qquad \textit{dla} \quad i=1,2,\ldots,r.$$

Oczywiście układ $a_1, a_2, \ldots, a_r$ równie dobrze reprezentuje pierwiastki funkcji $F(z)$ w całej płaszczyźnie jak układ $a_1, a_2, \ldots, a_r$, gdyż przesuwając punkty $a_1, a_2, \ldots, a_r$ o $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ przebiegają wszystkie wartości całkowite, otrzymamy wszystkie pierwiastki funkcji $F(z)$. Podobnie określamy *układ zupełny biegunów* funkcji $F(z)$ jak również *układ zupełny pierwiastków* równania $F(z)-c=0$.

Wzór (3.10) nie ulegnie zmianie, jeżeli przez $a_1, a_2, \ldots, a_r$ i $b_1, b_2, \ldots, b_r$ będziemy rozumieli odpowiednio dowolne układy zupełne pierwiastków i biegunów funkcji $F(z)$. Podobnie w (3.13) przez $a_1', a_2', \ldots, a_r'$ i $a_1'', a_2'', \ldots, a_r''$ możemy rozumieć układy zupełne pierwiastków równań $F(z)-c'=0$ i $F(z)-c''=0$.



**§ 4. Funkcja $\wp(z)$.** W § 3 udowodniliśmy szereg twierdzeń o funkcjach eliptycznych; dotychczas jednak nie podaliśmy żadnego przykładu takiej funkcji (różnej od stałej). Teraz wykażemy, że *funkcja meromorficzna* $\wp(z)=\wp(z; \omega, \omega')$ (p. § 5, Rozdz. VII) *jest eliptyczna.*

Niech $\omega, \omega'$ będzie parą liczb zespolonych, różnych od 0 i takich, że $\mathfrak{I}(\omega'/\omega)>0$. Rozważmy na płaszczyźnie zbiór $\Omega$ punktów $w=m\omega+n\omega'$, gdzie $m, n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Ustawmy wszystkie te punkty w ciąg nieskończony

$$w_0=0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_k, \ldots$$

Wówczas

$$(4.1)\qquad \wp(z; \omega, \omega')=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-w_k)^2}-\frac{1}{w_k^2}\right).$$

Funkcja $\wp(z)$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie otwartej, z wyjątkiem punktów $w_k$, gdzie posiada bieguny dwukrotne. W punktach różnych od punktów $w_k$ szereg (4.1) jest zbieżny bezwzględnie, a więc suma jego nie zależy od porządku składników. Prócz tego, w każdym kole o promieniu skończonym szereg (4.1) jest jednostajnie zbieżny po odrzuceniu dostatecznej liczby wyrazów początkowych. Można go więc różniczkować wyraz po wyrazie, co daje wzór

$$(4.2)\qquad \wp'(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(z-w_k)^3}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-w_k)^3}.$$

Jeżeli $z$ nie jest okresem, to szereg (4.2) jest zbieżny bezwzględnie, jak to wynika ze zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|w_k|^3$, udowodnionej w § 5, Rozdz. VII.

Wykażemy najpierw, że funkcja $\wp'(z)$ ma okresy $\omega$ i $\omega'$. Otóż ze wzoru (4.2) wynika, że

$$\wp'(z+\omega)=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[z-(w_k-\omega)]^3}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-w_k)^3}=\wp'(z),$$

gdyż wraz z $w_k$ również $w_k-\omega$ przebiega wszystkie punkty zbioru $\Omega$. Ze względu na symetryczną rolę $\omega$ i $\omega'$, mamy również $\wp'(z+\omega')=\wp'(z)$.

Całkując równość $\wp'(z+\omega)-\wp'(z)=0$, dostajemy wzór

$$\wp(z+\omega)-\wp(z)=C,$$

gdzie $C$ jest pewną stałą. Żeby znaleźć jej wartość, zauważmy, że $\wp(z)$ *jest funkcją parzystą zmiennej* $z$, gdyż wzór (4.1) daje

$$\wp(-z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z+w_k)^2}-\frac{1}{w_k^2}\right)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-(-w_k))^2}-\frac{1}{(-w_k)^2}\right),$$

zaś $-w_k$ przebiega wraz z $w_k$ wszystkie wartości zbioru $\Omega$. Przyjmując w równości określającej stałą $C$ wartość $z=-\frac{1}{2}\omega$, znajdujemy

$$C=\wp(\tfrac{1}{2}\omega)-\wp(-\tfrac{1}{2}\omega)=\wp(\tfrac{1}{2}\omega)-\wp(\tfrac{1}{2}\omega)=0.$$

Zatem $\wp(z+\omega)=\wp(z)$. Podobnie $\wp(z+\omega')=\wp(z)$. Funkcja $\wp(z)$, jako dwuokresowa i meromorficzna, jest więc eliptyczna.

Wykazaliśmy, że liczby $w=m\omega+n\omega'$ są okresami funkcji $\wp(z)$. Innych okresów funkcja ta nie ma. Wynika to stąd, że $z=0$ jest biegunem $\wp(z)$; gdyby więc istniały okresy różne od liczb $w_k$, to funkcja $\wp(z)$ miałaby bieguny w punktach różnych od $w_k$, co nie jest prawdziwe. Zatem *$\omega$ i $\omega'$ tworzą parę okresów pierwotnych dla funkcji* $\wp(z;\omega,\omega')$. Ponieważ $\wp(z)$ ma w każdym równoległoboku okresowości jeden biegun dwukrotny, więc *$\wp(z)$ jest funkcją eliptyczną rzędu* 2. *Pochodna $\wp'(z)$ jest funkcją eliptyczną rzędu* 3; *przy tym $\omega,\omega'$ jest również parą jej okresów pierwotnych.*

Funkcje eliptyczne tworzą tylko specjalną, jakkolwiek najważniejszą, klasę funkcyj dwuokresowych. Przykładem funkcji dwuokresowej nie eliptycznej jest funkcja $\exp\wp(z)$. Jest ona meromorficzna i dwuokresowa w płaszczyźnie otwartej pozbawionej punktów $w_k$, w których ma osobliwości istotne. Bowiem w otoczeniu punktu $z=0$ mamy

$$\exp\wp(z)=\exp\{z^{-2}+G(z)\}=H(z)\exp z^{-2},$$

gdzie $G(z)$ i $H(z)$ są funkcjami holomorficznymi w punkcie 0, a więc $z=0$ jest punktem istotnie osobliwym funkcji $\exp\wp(z)$. Nie będąc meromorficzną w całej płaszczyźnie otwartej, funkcja $\exp\wp(z)$ nie jest eliptyczna.

W myśl tw. 3.6 rząd funkcji eliptycznej (różnej od stałej) jest przynajmniej 2. Funkcje rzędu 2 są więc najprostszymi funkcjami eliptycznymi. Grają one w teorii funkcyj dwuokresowych taką samą podstawową rolę jak funkcja wykładnicza w teorii funkcyj okresowych.

Rozważmy teraz pochodną $\wp'(z)$. Jak łatwo widać ze wzoru (4.2), jest ona funkcją nieparzystą. Jeżeli $w$ jest jej okresem, to mamy równości

(4.3) $$\wp'(-\tfrac{1}{2}w)=-\wp'(\tfrac{1}{2}w),\qquad \wp'(-\tfrac{1}{2}w)=\wp'(\tfrac{1}{2}w),$$



z których pierwsza jest konsekwencją nieparzystości, a druga—okresowości funkcji $\wp'(z)$. Dostaniemy stąd

(4.4) $$\wp'(\tfrac{1}{2}w)=0.$$

Zakładaliśmy w tym rozumowaniu milcząco, że liczba $\frac{1}{2}w$ nie jest sama okresem, gdyż w przeciwnym razie dla $z=\frac{1}{2}w$ obie strony wzorów (4.3) byłyby nieskończone. Ograniczając się do równoległoboku podstawowego, rozważmy punkty doń należące i będące połówkami okresów, ale nie okresami. Punkty takie są trzy, a mianowicie:

(4.5) $$\tfrac{1}{2}\omega,\quad \tfrac{1}{2}\omega',\quad \tfrac{1}{2}(\omega+\omega').$$

W myśl wzoru (4.4) są one pierwiastkami funkcji $\wp'(z)$. Ponieważ $\wp'(z)$ jest funkcją eliptyczną rzędu 3, więc posiada dokładnie trzy pierwiastki w równoległoboku podstawowym. Liczby (4.5) są więc jedynymi pierwiastkami $\wp'(z)$ w równoległoboku podstawowym.

Stąd wynika, że jedynie wartości przyjmowane przez funkcję $\wp(z)$ w punktach (4.5) są wielokrotne; wartości przyjmowane przez $\wp(z)$ w pozostałych punktach równoległoboku podstawowego są jednokrotne.

Niech

(4.6) $$\wp(\tfrac{1}{2}\omega)=e_1,\quad \wp(\tfrac{1}{2}\omega')=e_2,\quad \wp(\tfrac{1}{2}\omega+\tfrac{1}{2}\omega')=e_3.$$

Funkcja $\wp(z)$ jest rzędu 2; jeżeli więc $c$ jest stałą, to równanie $\wp(z)-c=0$ ma dokładnie dwa pierwiastki w równoległoboku podstawowym. Każdą z wartości $e_1, e_2, e_3$ funkcja $\wp(z)$ przyjmuje w nim przeto tylko w jednym punkcie, ale dwukrotnie. Zatem *liczby $e_1, e_2, e_3$ są różne*, gdyż w przeciwnym razie funkcja $\wp(z)$ przyjmowałaby w równoległoboku podstawowym pewną wartość przynajmniej cztery razy. Jeżeli teraz $c$ jest różne od $e_1, e_2, e_3$, to równanie $\wp(z)-c=0$ posiada w równoległoboku podstawowym dwa różne pierwiastki jednokrotne $z_0$ i $z_1$. Żeby znaleźć związek między $z_0$ a $z_1$, zauważmy, że funkcja $\wp(z)$ jest parzysta, a więc wraz z $z_0$ również i $-z_0$ jest pierwiastkiem równania $\wp(z)-c=0$. Zatem $z_1$ jest punktem równoległoboku podstawowego przystającym do $-z_0 \pmod{\omega,\omega'}$.

ĆWICZENIA. 1. Niech $a$ i $b$ będą liczbami rzeczywistymi różnymi od 0. Wykazać, że funkcja $z=\wp(z;a,bi)$ przyjmuje na prostych $\Re z=\frac{1}{2}an$ oraz na prostych $\Im z=\frac{1}{2}bn$, gdzie $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, wyłącznie wartości rzeczywiste. Proste te dzielą płaszczyznę na siatkę prostokątów. Udowodnić, że we wnętrzu każdego z nich funkcja $\wp(z;a,bi)$ jest jednoznacznie odwracalna i przekształca to wnętrze bądź na półpłaszczyznę $\Im z>0$, bądź na półpłaszczyznę $\Im z<0$.

**§ 5. Równanie różniczkowe funkcji $\wp(z)$.** Udowodnione własności funkcji $\wp'(z)$ pozwalają wyprowadzić równanie różniczkowe funkcji $\wp(z)$. Zauważmy w tym celu, że w równoległoboku podstawowym $\wp'(z)$ ma biegun trzykrotny dla $z=0$ oraz pierwiastki jednokrotne w punktach (4.5). Zatem $\wp'^2(z)$ ma dla $z=0$ biegun sześciokrotny, zaś w punktach (4.5) pierwiastki dwukrotne. Rozważmy iloczyn

$$(5.1) \qquad (\wp(z)-e_1)\,(\wp(z)-e_2)\,(\wp(z)-e_3).$$

Punkt $z=0$ jest dlań biegunem sześciokrotnym, zaś punkty (4.5) są pierwiastkami dwukrotnymi. Ze względu na tw. 3.3, $\wp'^2(z)$ różni się od iloczynu (5.1) tylko czynnikiem stałym. Żeby ten czynnik znaleźć, wystarczy porównać części główne rozważanych funkcyj w punkcie $z=0$. Ze wzorów (4.1) i (4.2) znajdziemy, że część główna funkcji $\wp'^2(z)$ jest $4z^{-6}+\ldots$, zaś część główna iloczynu (5.1) jest $z^{-6}+\ldots$ Zatem szukany czynnik wynosi 4, a więc

$$(5.2) \qquad \wp'^2(z)=4(\wp(z)-e_1)\,(\wp(z)-e_2)\,(\wp(z)-e_3).$$

Jest to właśnie szukane *równanie różniczkowe funkcji* $\wp(z)$.

Podamy jeszcze inną postać tego równania. Połóżmy dla $n=3,4,5,\ldots$

$$(5.3) \qquad s_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{w_k^n},$$

gdzie suma rozciągnięta jest na wszystkie okresy $w_k$ różne od 0. Dla $n\geqslant 3$ szeregi (5.3) są zbieżne bezwzględnie (p. str. 303), przy czym, jeżeli $n$ jest nieparzyste, to $s_n=0$, gdyż wyrazy odpowiadające okresom różniącym się znakiem znoszą się nawzajem.

Zauważmy teraz, że

$$\frac{1}{(z-w_k)^2}=\frac{1}{w_k^2(1-(z/w_k))^2}=\frac{1}{w_k^2}+2\frac{z}{w_k^3}+3\frac{z^2}{w_k^4}+\ldots \qquad \textit{dla} \quad |z|<|w_k|.$$

Zastosujmy ten wzór do każdego ze składników po prawej stronie równości (4.1). W myśl tw. 5.9, Rozdz. III, otrzymamy dla $z$ dostatecznie bliskich punktu 0 rozwinięcie

$$(5.4) \qquad \wp(z)=z^{-2}+3s_4z^2+5s_6z^4+\ldots,$$

skąd $\wp'(z)=-2z^{-3}+6s_4z+20s_6z^3+\ldots$, $\wp'^2(z)=4z^{-6}-24s_4z^{-2}-80s_6+\ldots$, $\wp^3(z)=z^{-6}+9s_4z^{-2}+15s_6+\ldots$ Z dwu ostatnich wzorów widzimy, że $\wp'^2(z)-4\wp^3(z)=-60s_4z^{-2}-140s_6+\ldots$, a więc

$$(5.5) \qquad \wp'^2(z)-4\wp^3(z)+60s_4\wp(z)=-140s_6+\ldots$$



Lewa strona, która jest funkcją eliptyczną, może posiadać bieguny wyłącznie w punktach $w_k$. Jak widać z ostatniej równości, rozważana funkcja jest holomorficzna w punkcie $z=0$. Jest więc holomorficzna wszędzie, a zatem stała. Wartość tej stałej, jak to również wynika z (5.5), wynosi $-140s_6$. Funkcja $\wp(z)$ spełnia więc równanie różniczkowe

$$(5.6) \qquad \wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3,$$

gdzie, za Weierstrassem, używamy znakowania:

$$(5.7) \qquad g_2=60s_4=60\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{w_k^4}, \qquad g_3=140s_6=140\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{w_k^6}.$$

Liczby $g_2$ i $g_3$, które grają ważną rolę w teorii funkcyj eliptycznych, noszą nazwę *niezmienników*. (Uzasadnienie tej nazwy poznamy w § 11, str. 374.)

Lewe strony równań (5.2) i (5.6) są sobie równe. To samo można więc powiedzieć o stronach prawych, co przez porównanie spółczynników daje związki:

$$(5.8) \qquad e_1+e_2+e_3=0, \quad e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\tfrac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3=\tfrac{1}{4}g_3.$$

Jeszcze jeden związek między wielkościami $e_i$ i $g_j$ zasługuje na uwagę. Liczby $e_1, e_2, e_3$ są pierwiastkami równania sześciennego

$$(5.9) \qquad x^3-\tfrac{1}{4}g_2x-\tfrac{1}{4}g_3=0.$$

Otóż wiadomo z algebry, że jeżeli $e_1, e_2, e_3$ są pierwiastkami równania sześciennego $x^3+px+q=0$, to wyrażenie

$$(e_1-e_2)^2\,(e_1-e_3)^2\,(e_2-e_3)^2,$$

zwane wyróżnikiem równania, wynosi $-4p^3-27q^2$. Dla równania (5.9) otrzymujemy więc:

$$(5.10) \qquad 16(e_1-e_2)^2\,(e_2-e_3)^2\,(e_1-e_3)^2=g_2^3-27g_3^2.$$

Równość (5.10) można otrzymać też i bezpośrednio. Zróżniczkujmy w tym celu wzór $4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)=4z^3-g_2z-g_3$ i przyjmijmy następnie $z=e_1$. Otrzymamy $(e_1-e_2)(e_1-e_3)=3e_1^2-\frac{1}{4}g_2$. Permutacja wielkości $e_1, e_2, e_3$ daje dwa inne analogiczne wzory; przez przemnożenie ich stronami dostajemy

$$-(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2=(3e_1^2-\tfrac{1}{4}g_2)(3e_2^2-\tfrac{1}{4}g_2)(3e_3^2-\tfrac{1}{4}g_2).$$

Jeżeli wykonamy mnożenie po stronie prawej i uwzględnimy równości:

$$\begin{aligned} e_1^2+e_2^2+e_3^2 &= (e_1+e_2+e_3)^2-2(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2) &&= \tfrac{1}{2}g_2,\\ e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2+e_1^2e_2^2 &= (e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)^2-2e_1e_2e_3(e_1+e_2+e_3) &&= \tfrac{1}{16}g_2^2,\\ e_1^2e_2^2e_3^2 & &&= \tfrac{1}{16}g_3^2, \end{aligned}$$

to otrzymamy wzór (5.10).

W § 4 wykazaliśmy, że liczby $e_1, e_2, e_3$ są wszystkie różne. Z równości (5.10) wynika więc, że *liczba* $g_2^3-27g_3^2$ *jest różna od zera.*

Powróćmy jeszcze do równania (5.6) i podstawmy doń zamiast $\wp(z)$ szeregi ze wzoru (5.4). Wykonując potęgowanie, możemy otrzymać przez porównanie spółczynników związki między wielkościami $s_n$. Dla uproszczenia rachunku zróżniczkujmy najpierw równość (5.6). Skracając przez $\wp'(z)$, widzimy, że

$$\wp''(z)=6\wp^2(z)-\tfrac{1}{2}g_2. \tag{5.11}$$

Wprowadźmy jeszcze jedno uproszczenie, kładąc $(2n-1)s_{2n}=c_n$ dla $n=2,3,\dots$ Wzór (5.4) przyjmie teraz kształt $\wp(z)=z^{-2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}c_n z^{2n-2}$.

Ponieważ $g_2=60s_4=20c_2$, więc równość (5.11) możemy przepisać w postaci

$$6z^{-4}+\sum_{n=2}^{\infty}(2n-2)(2n-3)c_n z^{2n-4}=-10c_2+6\left(\frac{1}{z^2}+\sum_{n=2}^{\infty}c_n z^{2n-2}\right)^2.$$

Porównanie spółczynników przy $z^{2n-4}$ daje wzór

$$(n-3)(2n+1)c_n=3(c_2c_{n-2}+c_3c_{n-3}+\dots+c_{n-2}c_2)\quad dla\quad n=4,5,\dots$$

W szczególności:

$$c_4=\tfrac{1}{3}c_2^2,\qquad c_5=\tfrac{3}{11}c_2c_3,\qquad c_6=\tfrac{1}{13}(2c_2c_4+c_3^2)=\tfrac{1}{13}(\tfrac{2}{3}c_2^3+c_3^2),\ \dots\qquad \text{i t. d.}$$

Wszystkie liczby $c_n$ są więc wielomianami o spółczynnikach wymiernych względem $c_2$ i $c_3$. Inaczej mówiąc, mamy następujące ciekawe twierdzenie:

(5.12) *Wielkości* $s_4, s_6, s_8, \dots, s_{2n}, \dots$, *określone przez wzór* (5.3), *wyrażają się jako wielomiany o spółczynnikach wymiernych względem niezmienników* $g_2$ *i* $g_3$ *(a więc i względem wielkości* $s_4$ *i* $s_6$*)*.

Przypominamy, że wielkości $s_3, s_5, s_7, \dots$ są równe zeru.

Tw. 5.12 jest odpowiednikiem twierdzenia bardziej elementarnego, dotyczącego liczb $S_n=\sum\limits_k{}' 1/k^n$, gdzie sumowanie jest rozciągnięte na wszystkie liczby całkowite $k\neq 0$. Ze wzoru (5.7), Rozdz. VII, wynika, że $S_{2n}$ jest wymierną wielokrotnością liczby $\pi^{2n}$, a więc i wymierną wielokrotnością $S_2^n$.

Dotychczas traktowaliśmy $\wp(z)$ wyłącznie jako funkcję zmiennej $z$, ustalając parę okresów pierwotnych $\omega, \omega'$. W niektórych zagadnieniach trzeba jednak uwzględnić jeszcze zależność funkcji $\wp$ od okresów $\omega$ i $\omega'$. Zwrócimy uwagę, że *funkcja* $\wp(z;\omega,\omega')$, *traktowana jako funkcja wszystkich trzech zmiennych, jest jednorodna stopnia* $-2$, t. zn., że dla dowolnego $\lambda\neq 0$ mamy

$$\wp(\lambda z;\lambda\omega,\lambda\omega')=\lambda^{-2}\wp(z;\omega,\omega').$$

Widać to natychmiast, jeżeli we wzorze (4.1) zastąpimy $z$ przez $\lambda z$, zaś $w_k=m\omega+n\omega'$ przez $\lambda w_k$.

Liczby $e_1, e_2, e_3$, określone wzorami (4.6), są funkcjami $\omega$ i $\omega'$, t. j. $e_i=e_i(\omega,\omega')$ dla $i=1,2,3$. Z poprzednich uwag wynika, że *liczby* $e_i$ *są funkcjami jednorodnymi stopnia* $-2$ *zmiennych* $\omega$ *i* $\omega'$.

ĆWICZENIE. 1. Wykazać, że

$$\wp'(z)\wp'(z+\tfrac{1}{2}\omega)\wp'(z+\tfrac{1}{2}\omega')\wp'(z+\tfrac{1}{2}\omega+\tfrac{1}{2}\omega')=g_2^3-27g_3^2.$$

[*Wsk.* Sprawdziwszy, że lewa strona jest stałą, zbadać jej wartość, gdy $z\to 0$. Zastosować w tym celu wzór (5.11).]



**§ 6. Funkcje $\zeta(z)$ i $\sigma(z)$.** Ważną rolę w teorii funkcyj eliptycznych grają również funkcje $\sigma(z)$ i $\zeta(z)$, z którymi spotkaliśmy się już wcześniej (por. Rozdz. VII, § 5). Pierwsza z nich jest funkcją całkowitą, określoną przez iloczyn bezwzględnie zbieżny

$$\sigma(z)=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{w_k}\right)e^{\frac{z}{w_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{w_k}\right)^2}, \tag{6.1}$$

rozciągnięty na wszystkie punkty $w_k=m\omega+n\omega'$, różne od 0. Funkcja $\sigma(z)$ ma pierwiastki (jednokrotne) w punktach $w_k$ i tylko w nich. Funkcja $\zeta(z)$ jest pochodną logarytmiczną funkcji $\sigma(z)$:

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-w_k}+\frac{1}{w_k}+\frac{z}{w_k^2}\right) \tag{6.2}$$

i ma bieguny jednokrotne w punktach $w_k$. Wszystkie jej residua są równe 1. Funkcje $\sigma(z)$ i $\zeta(z)$ są związane z $\wp(z)$ równościami

$$\wp(z)=-\frac{d}{dz}\zeta(z)=-\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z). \tag{6.3}$$

Ze wzoru (6.1) widzimy, że funkcja $\sigma(z)$ zmieni znak, gdy zastąpimy $z$ przez $-z$ (ponieważ jednocześnie możemy zmienić $w_k$ na $-w_k$). Zatem $\sigma(z)$ *jest funkcją nieparzystą zmiennej* $z$.

Podobnie, zastępując w szeregu (6.2), określającym funkcję $\zeta(z)$, zmienną $z$ przez $-z$, zaś $w_k$ przez $-w_k$, wnosimy, że $\zeta(z)$ *jest funkcją nieparzystą zmiennej* $z$.

Z równania

$$\frac{d}{dz}(\zeta(z+\omega)-\zeta(z))=-(\wp(z+\omega)-\wp(z))=0 \tag{6.4}$$

oraz z analogicznego równania, jakie otrzymujemy, zastępując $\omega$ przez $\omega'$, dostajemy:

$$\zeta(z+\omega)-\zeta(z)=\eta,\qquad \zeta(z+\omega')-\zeta(z)=\eta', \tag{6.5}$$

gdzie $\eta$ i $\eta'$ są to pewne stałe. Stosując wielokrotnie (6.5), otrzymujemy wzór ogólny

$$\zeta(z+m\omega+n\omega')=\zeta(z)+m\eta+n\eta'. \tag{6.6}$$

Widzimy więc, że funkcja $\zeta(z)$ posiada pewną „pseudo-okresowość": powiększając zmienną niezależną $z$ o wielkość $w_k$, zmieniamy funkcję o składnik stały. Może się zdarzyć, że jedna z liczb $\eta$, $\eta'$ jest równa 0, ale obie jednocześnie znikać nie mogą, gdyż funkcja $\zeta(z)$ ma w równoległoboku podstawowym tylko jeden biegun (jednokrotny), a więc byłaby wówczas funkcją eliptyczną rzędu 1 (por. tw. 3.6).

Połóżmy w pierwszym ze wzorów (6.5) $z=-\frac{1}{2}\omega$, a w drugim $z=-\frac{1}{2}\omega'$. Uwzględniając nieparzystość $\zeta(z)$, znajdziemy:

$$\eta=2\zeta(\tfrac{1}{2}\omega), \qquad \eta'=2\zeta(\tfrac{1}{2}\omega').$$

Wielkości $\eta, \eta', \omega, \omega'$ są związane pewną zależnością. Żeby ją znaleźć, rozważmy całkę funkcji $\zeta(z)$ wzdłuż obwodu równoległoboku $R$ o kolejnych wierzchołkach $z_0$, $z_0+\omega$, $z_0+\omega+\omega'$ i $z_0+\omega'$, gdzie $z_0$ jest dowolną liczbą nie będącą biegunem funkcji $\zeta(z)$. Całka ta może być napisana w postaci

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega'}\{\zeta(z+\omega)-\zeta(z)\}\,dz-\int_{z_0}^{z_0+\omega}\{\zeta(z+\omega')-\zeta(z)\}\,dz=\omega'\eta-\omega\eta'.$$

Ponieważ $R$ zawiera tylko jeden biegun funkcji $\zeta(z)$, o residuum 1, więc

$$\omega'\eta-\omega\eta'=2\pi i. \tag{6.7}$$

Jest to właśnie zależność, o którą chodziło. Nosi ona nazwę *równości Legendre'a*. Przypominamy, iż okresy $\omega$ i $\omega'$ dobraliśmy tak, by $\mathfrak{I}(\omega'/\omega)>0$.

Przyjmijmy:

$$w=m\omega+n\omega', \qquad \tilde{\eta}=m\eta+n\eta'.$$

Pisząc wzór (6.6) w postaci

$$\sigma'(z+w)/\sigma(z+w)=\sigma'(z)/\sigma(z)+\tilde{\eta}$$

i całkując, dostaniemy równość

$$\sigma(z+w)=Ce^{\tilde{\eta}z}\sigma(z), \tag{6.8}$$

gdzie $C$ jest pewną stałą. Przypuśćmy najpierw, że $\sigma(\frac{1}{2}w)\neq0$ i połóżmy w ostatniej równości $z=-\frac{1}{2}w$. Uwzględniając nieparzystość $\sigma(z)$, otrzymamy $C=-\exp\frac{1}{2}\tilde{\eta}w$.

Rozumowanie powyższe zawodzi przy $\sigma(\frac{1}{2}w)=0$, gdyż wtedy po podstawieniu $z=-\frac{1}{2}w$ obie strony wzoru (6.8) stają się równe zeru. Ale zauważmy, że ponieważ $\sigma(z)$ jest funkcją nieparzystą, $\sigma'(z)$ jest funkcją parzystą. Zróżniczkujmy teraz równość (6.8) i przyjmijmy $z=-\frac{1}{2}w$. Jeżeli $\sigma(\frac{1}{2}w)=0$, to $\sigma'(\frac{1}{2}w)\neq0$, gdyż pierwiastki funkcji $\sigma(z)$ są jednokrotne. Skróćmy obie strony otrzymanej równości przez $\sigma'(\frac{1}{2}w)$ i uwzględnijmy parzystość funkcji $\sigma'$. Dostaniemy w rozważanym przypadku $C=\exp\frac{1}{2}\tilde{\eta}w$, a więc liczbę różniącą się znakiem od poprzedniej wartości na $C$.



Zauważmy teraz, że $\frac{1}{2}w_k$ jest wtedy i tylko wtedy pierwiastkiem funkcji $\sigma$, gdy $m$ i $n$ są jednocześnie parzyste. Ponieważ $m$ i $n$ są wtedy i tylko wtedy parzyste, gdy wyrażenie $mn+m+n$ jest parzyste, dostajemy wzór ogólny

$$\sigma(z+w)=(-1)^{mn+m+n}e^{\tilde{\eta}(z+\frac{1}{2}w)}\sigma(z), \quad \textit{gdzie} \quad w=m\omega+n\omega',\ \tilde{\eta}=m\eta+n\eta'.$$

Kładąc w szczególności $m=1, n=0$ oraz $m=0, n=1$, mamy:

$$\sigma(z+\omega)=-e^{\eta(z+\frac{1}{2}\omega)}\sigma(z), \qquad \sigma(z+\omega')=-e^{\eta'(z+\frac{1}{2}\omega')}\sigma(z). \tag{6.9}$$

Zatem funkcja $\sigma(z)$ jest również „pseudo-okresowa", chociaż w innym sensie niż $\zeta(z)$: przy powiększeniu zmiennej $z$ o $\omega$ lub $\omega'$ funkcja mnoży się przez czynnik wykładniczy.

ĆWICZENIA. 1. Dla $\lambda\neq0$ mamy:

$$\sigma(\lambda z;\lambda\omega,\lambda\omega')=\lambda\sigma(z;\omega,\omega'), \qquad \zeta(\lambda z;\lambda\omega,\lambda\omega')=\lambda^{-1}\zeta(z;\omega,\omega').$$

2. Udowodnić, że funkcja $\sigma(nz)/[\sigma(z)]^{n^2}$ jest eliptyczna. Wykazać, że $\sigma(2z)/\sigma^4(z)=-\wp'(z)$.

3. Niech $\omega'/\omega=\tau$ i $z/\omega=v$. Wykazać, że:

$$\sigma(z;\omega,\omega')=\frac{\omega}{\pi}e^{\frac{1}{2}\eta\omega v^2}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2\pi v}{\sin^2 n\pi\tau}\right),$$

$$\zeta(z;\omega,\omega')=\eta v+\frac{\pi}{\omega}\left(\operatorname{ctg}\pi v+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\pi(v+n\tau)+\operatorname{ctg}\pi(v-n\tau)\right)\right),$$

$$\wp(z;\omega,\omega')=-\frac{\eta}{\omega}+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sin^2(v+n\tau)\pi},$$

gdzie $\eta=2\zeta(\frac{1}{2}\omega;\omega,\omega')$ (Weierstrass).

[*Wsk.* Aby otrzymać np. wzór na $\zeta(z)$, należy we wzorze (6.2), gdzie $w_k$ przebiega wartości $m\omega+n\omega'$, sumować najpierw według wskaźnika $m$, następnie skorzystać z rozwinięcia funkcji $\pi\operatorname{ctg}\pi v$ na ułamki proste (por. wzór (5.1), Rozdz. VII). Otrzymamy wówczas na $\zeta(z)$ wyrażenie

$$\frac{2\pi^2}{\omega}\left(\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2 n\pi\tau}\right)v+\frac{\pi}{\omega}\left(\operatorname{ctg}\pi v+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\pi(v+n\tau)+\operatorname{ctg}\pi(v-n\tau)\right)\right).$$

Żeby znaleźć spółczynnik wyrazu liniowego względem $v$, podstawić $z=\frac{1}{2}\omega$.]

**§ 7. Budowanie funkcyj eliptycznych przy pomocy funkcji $\sigma(z)$.** Niech $F(z)$ będzie funkcją eliptyczną rzędu $r$, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ oraz $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ układami zupełnymi (str. 352) pierwiastków i biegunów. W myśl tw. 3.9 oraz uwag końcowych § 3, różnica między sumą liczb $\alpha_j$ a sumą liczb $\beta_j$ jest postaci $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są liczbami całkowitymi. Zastępując np. $\beta_r$ przez $\beta_r+m\omega+n\omega'$, możemy przyjąć od razu, że

(7.1) $$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r.$$

Rozważmy teraz funkcję meromorficzną

(7.2) $$\Phi(z)=\frac{\sigma(z-\alpha_1)\,\sigma(z-\alpha_2)\ldots\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_1)\,\sigma(z-\beta_2)\ldots\sigma(z-\beta_r)}.$$

Wykażemy, że $\Phi(z)$ posiada okresy $\omega$ i $\omega'$. Niech bowiem $\alpha$ i $\beta$ oznaczają dwie dowolne stałe, zaś $G(z)=\sigma(z-\alpha)/\sigma(z-\beta)$. Z pierwszego wzoru (6.9) wynika, że $G(z+\omega)=e^{\eta(\beta-\alpha)}G(z)$. Zastosujmy to do prawej strony równości (7.2). Uwzględniając warunek (7.1), widzimy, że

$$\Phi(z+\omega)=e^{\eta(\beta_1-\alpha_1+\beta_2-\alpha_2+\ldots+\beta_r-\alpha_r)}\,\Phi(z)=\Phi(z).$$

Zatem $\omega$, a przez analogię i $\omega'$, jest okresem funkcji $\Phi(z)$. Ta ostatnia ma te same pierwiastki i bieguny co $F(z)$, a więc w myśl tw. 3.3 różni się od $F(z)$ czynnikiem stałym. Stąd:

(7.3) *Każda funkcja eliptyczna $F(z)$ rzędu $r$ daje się przedstawić w postaci*

(7.4) $$F(z)=C\,\frac{\sigma(z-\alpha_1)\,\sigma(z-\alpha_2)\ldots\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_1)\,\sigma(z-\beta_2)\ldots\sigma(z-\beta_r)},$$

*gdzie $C$ jest stałą, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ są odpowiednio układami zupełnymi pierwiastków i biegunów funkcji $F(z)$, spełniającymi warunek* (7.1). *Odwrotnie, każda funkcja postaci* (7.4), *gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ są dowolnymi liczbami spełniającymi równość* (7.1), *jest funkcją eliptyczną.*

*Przykłady:* 1. Wyrazić $\wp'(z)$ przez funkcję $\sigma(z)$. Funkcja $\wp'(z)$ posiada w równoległoboku podstawowym biegun trzykrotny dla $z=0$ oraz pierwiastki $\frac{1}{2}\omega, \frac{1}{2}(\omega+\omega')$ i $\frac{1}{2}\omega'$. Jeżeli więc położymy:

$$\alpha_1=\tfrac{1}{2}\omega,\qquad \alpha_2=-\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),\qquad \alpha_3=\tfrac{1}{2}\omega',\qquad \beta_1=\beta_2=\beta_3=0,$$

to warunek $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$ będzie spełniony i na zasadzie twierdzenia 7.3

(7.5) $$\wp'(z)=C\,\frac{\sigma(z-\frac{1}{2}\omega)\,\sigma(z+\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega')\,\sigma(z-\frac{1}{2}\omega')}{\sigma^3(z)}.$$

Dla znalezienia stałej $C$, rozważmy spółczynniki przy $z^{-3}$ w rozwinięciu obu stron na szereg Laurenta w punkcie $z=0$. Dostaniemy

$$C=-\frac{2}{\sigma(\frac{1}{2}\omega)\,\sigma(\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega')\,\sigma(\frac{1}{2}\omega')}.$$



2. Wyrazić przez $\sigma(z)$ funkcję $F(z)=\wp(z)-\wp(u)$, gdzie $u$ jest stałą, nie będącą okresem funkcji $\wp$.

Przypuśćmy chwilowo, że $u$ nie jest półokresem. Funkcja $F(z)$ ma biegun dwukrotny dla $z=0$ oraz dwa pierwiastki jednokrotne, istotnie różne, $u$ i $-u$. Możemy więc we wzorze (7.4) położyć $\alpha_1=u$, $\alpha_2=-u$ i $\beta_1=\beta_2=0$, co daje $F(z)=C\sigma(z-u)\,\sigma(z+u)/\sigma^2(z)$. Rozważając części główne obu stron dla $z=0$, dostaniemy $C=-1/\sigma^2(u)$, t. zn.

(7.6) $$\wp(z)-\wp(u)=-\frac{\sigma(z-u)\,\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(u)}.$$

Przez ciągłość otrzymujemy prawdziwość tego wzoru również dla przypadku, gdy $u$ jest półokresem.

ĆWICZENIA. 1. W niektórych przypadkach dogodnie jest pisać $\omega_1$ zamiast $\omega$, a $\omega_2$ zamiast $\omega'$, i rozważać okres pomocniczy $\omega_3$, określony przez warunek $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$. Niech $e_i=\wp(\frac{1}{2}\omega_i)$ dla $i=1,2,3$. Udowodnić, że funkcje $\sqrt{\wp(z)-e_i}$ są wszystkie jednowartościowe, a więc meromorficzne w całej płaszczyźnie otwartej. Dobierając wartość pierwiastka tak, by residuum dla $z=0$ wynosiło 1, wykazać, że

(*) $$\sqrt{\wp(z)-e_i}=e^{-\frac{1}{2}\eta_i z}\,\frac{\sigma(z+\frac{1}{2}\omega_i)}{\sigma(z)\,\sigma(\frac{1}{2}\omega_i)},\quad \textit{gdzie}\quad \eta_i=2\zeta(\tfrac{1}{2}\omega_i;\omega_1,\omega_2)\qquad (i=1,2,3).$$

Jeżeli więc, idąc za Weierstrassem, wprowadzimy funkcje pomocnicze

$$\sigma_i(z)=e^{-\frac{1}{2}\eta_i z}\,\frac{\sigma(z+\frac{1}{2}\omega_i)}{\sigma(\frac{1}{2}\omega_i)}\qquad (i=1,2,3),$$

to wzór (*) może być napisany w postaci

$$\sqrt{\wp(z)-e_i}=\frac{\sigma_i(z)}{\sigma(z)}\qquad (i=1,2,3).$$

[*Wsk.* Zastosować (7.6).]

2. Wykazać, że funkcje $\sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma_3(z)$ (ćw. 1) są parzyste (funkcja $\sigma(z)$ jest nieparzysta).

3. Udowodnić, że funkcja $\sqrt{\wp(z)-e_i}$, określona przez wzór (*) z ćw. 1, jest funkcją eliptyczną rzędu 2, mającą dwa różne bieguny w równoległoboku okresowości, przy czym $(\omega_i, 2\omega_k)$ jest parą okresów pierwotnych ($i,k=1,2,3$; $i\neq k$).

4. Wykazać, że:

$$\sigma_i^2(z)-\sigma_k^2(z)=(e_k-e_i)\,\sigma^2(z),\qquad (e_2-e_3)\,\sigma_1^2(z)+(e_3-e_1)\,\sigma_2^2(z)+(e_1-e_2)\,\sigma_3^2(z)=0.$$

5. Wykazać, że $\wp'(z)=-2\sigma_1(z)\,\sigma_2(z)\,\sigma_3(z)/\sigma^3(z)$.

6. Udowodnić wzór

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix}=2\,\frac{\sigma(v-w)\,\sigma(w-u)\,\sigma(u-v)\,\sigma(u+v+w)}{\sigma^3(u)\,\sigma^3(v)\,\sigma^3(w)},$$

gdzie $u, v, w$ są liczbami dowolnymi.

[*Wsk.* Jeżeli $\wp(v)\neq\wp(w)$, to lewa strona wzoru jest funkcją eliptyczną zmiennej $u$, mającą biegun trzykrotny w punkcie $u=0$ oraz pierwiastki w punktach $u=v$, $u=w$ i $u=-(v+w)$ (por. tw. 3.9). Przy obliczaniu stałej $C$ we wzorze (7.4) zastosować (7.6).]

**§ 8. Wyrażanie funkcyj eliptycznych przez funkcje $\zeta(z)$ i $\wp(z)$.** Zajmiemy się obecnie wzorami wyrażającymi funkcję eliptyczną $F(z)$ przez funkcję $\zeta(z)$. Zaczniemy od przypadku najprostszego, gdy bieguny $F(z)$ są jednokrotne. Niech $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ będzie układem tych biegunów, należących do dowolnego równoległoboku okresowości, zaś $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(r)}$ odpowiednimi residuami. Rozważmy funkcję meromorficzną

(8.1) $$G(z)=C^{(1)}\zeta(z-\beta_1)+C^{(2)}\zeta(z-\beta_2)+\ldots+C^{(r)}\zeta(z-\beta_r).$$

Funkcja $G(z)$ ma okresy $\omega$ i $\omega'$, bo jeżeli np. powiększymy $z$ o $\omega$, to $G(z)$ powiększy się o liczbę $\eta(C^{(1)}+C^{(2)}+\ldots+C^{(r)})$, równą zeru ze względu na tw. 3.5. Jako meromorficzna, $G(z)$ jest więc funkcją eliptyczną. Ma ona te same bieguny (jednokrotne) co $F(z)$ i te same residua. Na mocy tw. 3.3, $F(z)$ różni się od $G(z)$ o stałą. A więc:

(8.2) *Jeżeli funkcja eliptyczna $F(z)$ ma wyłącznie bieguny jednokrotne, to*

(8.3) $$F(z)=C+C^{(1)}\zeta(z-\beta_1)+C^{(2)}\zeta(z-\beta_2)+\ldots+C^{(r)}\zeta(z-\beta_r),$$

*gdzie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ jest układem wszystkich biegunów funkcji, należących do dowolnego równoległoboku okresowości, liczby $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(r)}$ są odpowiednimi residuami, zaś $C$ stałą.*

Przechodząc do przypadku ogólnego, rozważmy dowolny biegun $\beta$ o krotności $k \geqslant 1$ funkcji eliptycznej $F(z)$. Część główną funkcji $F(z)$ w punkcie $\beta$ możemy napisać w postaci

(8.4) $$\frac{C_1}{z-\beta}-\frac{1!C_2}{(z-\beta)^2}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!C_k}{(z-\beta)^k}.$$

Ponieważ część główna funkcji $\zeta(z-\beta)$ w punkcie $\beta$ jest równa $1/(z-\beta)$, więc funkcja

(8.5) $$C_1\zeta(z-\beta)+C_2\zeta'(z-\beta)+\ldots+C_k\zeta^{(k-1)}(z-\beta)$$

będzie miała w punkcie $\beta$ część główną (8.4). Niech $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ będzie układem wszystkich różnych biegunów funkcji $F(z)$, położonych w jakimkolwiek równoległoboku okresowości, o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Napiszmy część główną funkcji $F(z)$ w tych biegunach w postaci (8.4), zastępując $\beta$ przez $\beta_i$, $k$ przez $k_i$, zaś $C_1, C_2, \ldots$ przez $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, \ldots$ $(i=1,2,\ldots,s)$. Jeżeli więc położymy

$$G(z)=\sum_{i=1}^{s}\left(C_1^{(i)}\zeta(z-\beta_i)+C_2^{(i)}\zeta'(z-\beta_i)+\ldots+C_{k_i}^{(i)}\zeta^{(k_i-1)}(z-\beta_i)\right),$$



to różnica $F(z)-G(z)$ będzie funkcją całkowitą. Powiadamy, że jest ona dwuokresowa. Istotnie, funkcje $\zeta'=-\wp$, $\zeta''=-\wp'$, ... są dwuokresowe; zatem, przy powiększeniu $z$ o $\omega$, wyrażenie (8.5) wzrasta o $C_1\eta$, a więc $G(z)$ wzrasta o wielkość $(C_1^{(1)}+C_1^{(2)}+\ldots+C_1^{(s)})\eta$, równą zeru ze względu na tw. 3.5. Funkcja $G(z)$ ma zatem okres $\omega$, i podobnie okres $\omega'$. To samo można powiedzieć o funkcji $F(z)-G(z)$. Funkcja ta, jako dwuokresowa i całkowita, musi więc być stała. Stąd otrzymujemy twierdzenie następujące:

(8.6) *Każda funkcja eliptyczna $F(z)$ może być przedstawiona w postaci*

(8.7) $$A+\sum_i\left(C_1^{(i)}\zeta(z-\beta_i)+C_2^{(i)}\zeta'(z-\beta_i)+\ldots+C_{k_i}^{(i)}\zeta^{(k_i-1)}(z-\beta_i)\right),$$

*gdzie $A$ jest pewną stałą, zaś suma $\sum_i$ rozciągnięta jest na wszystkie bieguny różne dowolnego równoległoboku okresowości. Liczby $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, \ldots, C_{k_i}^{(i)}$ są spółczynnikami części głównej $F(z)$ w punkcie $\beta_i$, napisanej w postaci* (8.4).

*Odwrotnie, każda funkcja postaci* (8.7) *jest eliptyczna, jeżeli tylko* $\sum_i C_1^{(i)}=0$.

Oczywiście, we wzorze (8.7) możemy zastąpić $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ odpowiednio przez $-\wp, -\wp', -\wp'', \ldots$

Zajmiemy się teraz wyrażeniem funkcji eliptycznej przez funkcję $\wp(z)$ i rozpoczniemy od kilku uwag.

(a) Jeżeli funkcja eliptyczna $G(z)$ jest nieparzysta i jest holomorficzna w punkcie $z_0=\frac{1}{2}w$ będącym półokresem, to $G(z_0)=0$. Istotnie, z jednej strony, ze względu na okresowość, mamy $G(-z_0)=G(z_0)$, a z drugiej, ze względu na nieparzystość, $G(-z_0)=-G(z_0)$. Zatem $G(z_0)=-G(z_0)$, a ponieważ wartość $G(z_0)$ jest skończona, więc jest równa zeru.

(b) Jeżeli $F(z)$ jest funkcją parzystą, to pochodna $F'(z)$ jest nieparzysta; podobnie, nieparzystość funkcji $F(z)$ pociąga parzystość $F'(z)$. Stąd wynika ogólnie, że jeżeli $F(z)$ jest funkcją parzystą, to funkcja $F^{(2k)}(z)$ jest parzysta, zaś $F^{(2k+1)}(z)$ nieparzysta; jeżeli $F(z)$ jest funkcją nieparzystą, to funkcja $F^{(2k)}(z)$ jest nieparzysta, a $F^{(2k+1)}(z)$ parzysta $(k=0,1,2,\ldots)$.

(c) Jeżeli funkcja eliptyczna parzysta $F(z)$ ma pierwiastek w punkcie $z_0=\frac{1}{2}w$, będącym półokresem, to krotność tego pierwiastka jest parzysta. Wynika to stąd, że ze względu na (b) i (a) wszystkie pochodne rzędu nieparzystego znikają w punkcie $z_0$.

Ponieważ biegun funkcji $F(z)$ jest pierwiastkiem funkcji $1/F(z)$, więc jeżeli $z_0=\frac{1}{2}w$ jest biegunem funkcji eliptycznej parzystej $F(z)$, to krotność bieguna jest parzysta.

Rozważmy teraz dowolną funkcję eliptyczną parzystą $F(z)$ i niech $a$ będzie jej pierwiastkiem. Ze względu na parzystość funkcji $F(z)$, liczba $-a$ będzie również jej pierwiastkiem, przy tym istotnie różnym od $a$, o ile tylko $a$ nie jest półokresem. W tym ostatnim przypadku $a$ będzie pierwiastkiem o krotności parzystej. W każdym więc razie istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_s$, które wraz z $-a_1, -a_2, \ldots, -a_s$ tworzą układ zupełny pierwiastków funkcji $F(z)$. (Wynika stąd, w szczególności, że funkcje eliptyczne parzyste są rzędu parzystego.) Podobnie możemy znaleźć liczby $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, tworzące wraz z $-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_s$ układ zupełny biegunów funkcji $F(z)$. Załóżmy na chwilę, że okresy $w$ nie są ani pierwiastkami, ani biegunami dla funkcji $F(z)$. Ponieważ $\wp(z)$ jest funkcją parzystą, więc łatwo dostrzec, że funkcja $F(z)$ ma te same pierwiastki i bieguny co funkcja

$$(8.8)\qquad \frac{[\wp(z)-\wp(a_1)]\,[\wp(z)-\wp(a_2)]\ldots[\wp(z)-\wp(a_s)]}{[\wp(z)-\wp(\beta_1)]\,[\wp(z)-\wp(\beta_2)]\ldots[\wp(z)-\wp(\beta_s)]}.$$

Ze względu na tw. 3.3, $F(z)$ różni się czynnikiem stałym od ilorazu (8.8), a więc

(8.9) *Każda funkcja eliptyczna parzysta $F(z)$ wyraża się jako funkcja wymierna funkcji $\wp(z)$.*

Udowodniliśmy to przy założeniu, że $z=0$ nie jest ani pierwiastkiem ani biegunem funkcji $F(z)$. Jeżeli punkt $z=0$ jest pierwiastkiem lub biegunem, to w każdym razie o krotności parzystej, ze względu na parzystość funkcji $F(z)$. Istnieje więc takie $k$ całkowite, że $F(z)[\wp(z)]^k$ jest funkcją holomorficzną i różną od zera dla $z=0$. Stosując otrzymany wynik do tej ostatniej funkcji, widzimy, że twierdzenie 8.9 jest prawdziwe w przypadku ogólnym.

Jeżeli $F(z)$ jest funkcją eliptyczną nieparzystą, to iloraz $F(z)/\wp'(z)$ jest funkcją eliptyczną parzystą, a więc wymierną względem $\wp(z)$. Inaczej mówiąc, *funkcja eliptyczna nieparzysta jest iloczynem $\wp'(z)$ przez funkcję wymierną funkcji $\wp(z)$*. Ponieważ zaś dla każdej funkcji $F(z)$ mamy

$$F(z)=\tfrac{1}{2}[F(z)+F(-z)]+\tfrac{1}{2}[F(z)-F(-z)],$$



gdzie pierwszy składnik po prawej stronie jest funkcją parzystą, a drugi nieparzystą, więc

(8.10) *Każda funkcja eliptyczna $F(z)$ daje się napisać w postaci*

$$(8.11)\qquad R(\wp)+\wp' R_1(\wp),$$

*gdzie $R(u)$ i $R_1(u)$ są funkcjami wymiernymi zmiennej $u$.*

*Odwrotnie, każda funkcja postaci* (8.11) *jest eliptyczna.*

Niech $W(x,y)$ będzie dowolną funkcją wymierną zmiennych $x$ i $y$. Funkcja $W(\wp,\wp')$ jest eliptyczna. Z drugiej strony, każda funkcja eliptyczna jest postaci (8.11), a więc jest funkcją wymierną względem $\wp$ i $\wp'$. Zatem:

(8.12) *Klasa funkcyj eliptycznych jest identyczna z klasą funkcyj postaci $W(\wp,\wp')$, gdzie $W(x,y)$ jest dowolną funkcją wymierną dwu zmiennych.*

Twierdzenie 8.12 jest równoważne twierdzeniu 8.10, gdyż wyrażenie $W(\wp,\wp')$ jest tylko pozornie ogólniejsze od wyrażenia (8.11). Wystarczy bowiem zauważyć, że na mocy równości (5.6) każdą potęgę parzystą $\wp'$ możemy wyrazić wymiernie przez $\wp$, a więc $W(\wp,\wp')$ jest postaci (8.11).

ĆWICZENIA. 1. Niech $\beta_1$ i $\beta_2$ będą dwoma różnymi punktami równoległoboku podstawowego. Wykazać, że najogólniejsza funkcja eliptyczna drugiego rzędu, mająca bieguny w punktach $\beta_1$ i $\beta_2$, daje się napisać w każdej z dwu postaci:

$$A\{\zeta(z-\beta_1)-\zeta(z-\beta_2)\}+B,\qquad \frac{A}{\wp(z-\beta)-\wp(\beta_1-\beta)}+B,$$

gdzie $A$ i $B$ są liczbami stałymi, zaś $\beta$ jest środkiem odcinka $[\beta_1,\beta_2]$.

2. Każda funkcja eliptyczna drugiego rzędu, mająca w równoległoboku podstawowym biegun dwukrotny $\beta$, jest postaci $A\wp(z-\beta)+B$, gdzie $A$ i $B$ są liczbami stałymi.

3. Udowodnić, że

$$\wp(z-u)-\wp(z+u)=\wp'(z)\wp'(u)/\{\wp(z)-\wp(u)\}^2.$$

4. Dowieść, że

$$\frac{1}{\wp(2z)-\wp(z)}=-\sum_{m,n}\frac{1}{3\wp'(z_{m,n})}[\zeta(z-z_{m,n})+\zeta(z_{m,n})],$$

gdzie $z_{m,n}=\frac{1}{3}(m\omega+n\omega')$, przy czym $m$ i $n$ przebiegają wartości $0, 1, 2$, ale nie są jednocześnie zerami.

**§ 9. Twierdzenie algebraiczne o dodawaniu dla funkcji $\wp(z)$.** Mówimy, że funkcja meromorficzna $F(z)$ *spełnia twierdzenie algebraiczne o dodawaniu*, jeżeli między wielkościami $F(x), F(y), F(x+y)$ istnieje związek algebraiczny, t. j. jeżeli zachodzi tożsamościowo równość

$$W\big(F(x), F(y), F(x+y)\big)=0,$$

gdzie $W(u,v,w)$ jest wielomianem względem zmiennych $u,v,w$, nie tożsamościowo równym zeru. Tak np. twierdzenie algebraiczne o dodawaniu spełniają funkcje: $e^z, \cos z, \operatorname{tg} z$. Wykażemy, że

(9.1) *Funkcja $\wp(z)$ spełnia twierdzenie algebraiczne o dodawaniu.*

Dowód. Napiszmy wzór (7.6) w postaci

$$\wp(x)-\wp(y)=-\sigma(x+y)\,\sigma(x-y)/\sigma^2(x)\,\sigma^2(y).$$

Tworząc pochodne logarytmiczne obu stron, najpierw względem $x$, a następnie względem $y$, otrzymujemy równości:

$$\wp'(x)/[\wp(x)-\wp(y)]=\zeta(x+y)+\zeta(x-y)-2\zeta(x),$$
$$-\wp'(y)/[\wp(x)-\wp(y)]=\zeta(x+y)-\zeta(x-y)-2\zeta(y),$$

skąd przez dodanie stronami:

$$\tfrac{1}{2}[\wp'(x)-\wp'(y)]/[\wp(x)-\wp(y)]=\zeta(x+y)-\zeta(x)-\zeta(y).$$

Zróżniczkujmy ten wzór np. względem $x$. Dostaniemy

$$\wp(x+y)=\wp(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right]. \tag{9.2}$$

Gdybyśmy wykonali teraz różniczkowanie i zastosowali równość $\wp''=6\wp^2-\frac{1}{2}g_2$, otrzymalibyśmy wzór wyrażający $\wp(x+y)$ przez $\wp(x), \wp(y), \wp'(x), \wp'(y)$ (podobnie jak np. $\sin(x+y)$ wyraża się przez $\sin x$, $\sin y$, $(\sin x)'$, $(\sin y)'$). Oczywiście, korzystając z równości $\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$, moglibyśmy w otrzymanym wzorze wyrazić $\wp'(x)$ i $\wp'(y)$ odpowiednio przez $\wp(x)$ i $\wp(y)$ kosztem wprowadzenia pierwiastków, które następnie przez potęgowanie możnaby usunąć.

Twierdzeniu o dodawaniu dla funkcji $\wp$ można nadać postać bardziej symetryczną. Napiszmy wzór (9.2) w postaci

$$\wp(x+y)=\wp(x)-\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp''(x)}{\wp(x)-\wp(y)}-\frac{\wp'(x)[\wp'(x)-\wp'(y)]}{[\wp(x)-\wp(y)]^2}\right\}. \tag{9.3}$$



Zamieńmy tu $x$ i $y$ miejscami i dodajmy tak otrzymany wzór do (9.3). Otrzymamy

$$2\wp(x+y)=\wp(x)+\wp(y)-\frac{1}{2}\frac{\wp''(x)-\wp''(y)}{\wp(x)-\wp(y)}+\frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right]^2.$$

Zastosujmy równość $\wp''=6\wp^2-\frac{1}{2}g_2$ (por. (5.11)). Dostaniemy wzór

$$\wp(x+y)+\wp(x)+\wp(y)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right]^2. \tag{9.4}$$

Jest to właśnie postać twierdzenia o dodawaniu, o którą nam chodziło.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że

$$\wp(z+\tfrac{1}{2}\omega_i)=e_i+\frac{(e_i-e_j)\,(e_i-e_k)}{\wp(z)-e_i},$$

gdzie trójka liczb $i,j,k$ jest permutacją trójki 1, 2, 3, zaś liczby $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ są określone jak w ćw. 1, § 7.

2. Wykazać, że

$$\wp(2z)=\frac{\wp^4+\frac{1}{2}g_2\wp^2+2g_3\wp+\frac{1}{16}g_2^2}{4\wp^3-g_2\wp-g_3},$$

gdzie $\wp=\wp(z)$.

**§ 10. Związki algebraiczne między funkcjami eliptycznymi.**

(10.1) *Między każdymi dwiema funkcjami eliptycznymi spółokresowymi $F_1(z)$ i $F_2(z)$ zachodzi związek algebraiczny, t.j. związek postaci*

$$W\big(F_1(z), F_2(z)\big)=0, \tag{10.2}$$

*gdzie $W(u,v)$ jest wielomianem względem zmiennych $u,v$ nie równym zeru tożsamościowo.*

Dowód. Niech $\omega, \omega'$ będzie wspólną parą okresów funkcyj $F_1(z)$ i $F_2(z)$, zaś $z_1, z_2, \dots, z_\nu$ układem wszystkich różnych punktów, będących biegunami przynajmniej jednej z funkcyj $F_1(z)$, $F_2(z)$ i leżących w równoległoboku o wierzchołkach $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$. Niech $k_i'$ oraz $k_i''$ będą odpowiednio krotnościami bieguna funkcji $F_1(z)$ oraz funkcji $F_2(z)$ w punkcie $z=z_i$ i niech $k_i=\operatorname{Max}(k_i', k_i'')$. Niech wreszcie $N$ będzie liczbą naturalną taką, że $N+3>2(k_1+k_2+\dots+k_\nu)$. Ogólna postać wielomianu $V(u,v)$ dwu zmiennych $u,v$ stopnia $N$ jest następująca:

$$V(u,v)=c_{00}+\sum_{\substack{k,l=0\\0<k+l\leqslant N}}^{N} c_{kl}\,u^k v^l,$$

przy czym liczba wyrazów nie stałych po stronie prawej wynosi

$2+3+\ldots+(N+1)=\frac{1}{2}N(N+3)$. Podstawmy do tej równości zamiast $u$ i $v$ odpowiednio $F_1(z)$ i $F_2(z)$ i niech $G(z)=V\big(F_1(z),F_2(z)\big)$. Funkcja $G(z)$ jest eliptyczna, o okresach $\omega,\omega'$, i posiadać może bieguny wyłącznie w punktach $z_1,z_2,\ldots,z_\nu$ (oraz przystających do nich). Biegun funkcji $G(z)$ w punkcie $z_i$ ma krotność co najwyżej $k_iN$. Na to, aby funkcja $G(z)$ była holomorficzna w $z_i$, potrzeba i wystarcza, by spółczynniki $c_{kl}$, gdzie $k+l>0$, spełniały $k_iN$ równań liniowych jednorodnych. Na to więc, aby funkcja $G(z)$ była holomorficzna we wszystkich punktach $z_1,z_2,\ldots,z_\nu$ — a więc na całej płaszczyźnie otwartej — wystarczy, aby wspomniane spółczynniki spełniały $N(k_1+k_2+\ldots+k_\nu)$ równań liniowych jednorodnych. Ze względu na określenie liczby $N$, liczba równań jest tu mniejsza niż liczba niewiadomych, których mamy $\frac{1}{2}N(N+3)$. Układ równań posiada więc rozwiązanie nie zerowe. Funkcja $G(z)$, odpowiadająca temu rozwiązaniu, jako eliptyczna i całkowita, jest więc stałą, co prowadzi natychmiast do wzoru postaci (10.2).

W szczególności dla $F_2(z)=F_1'(z)$ otrzymujemy z tw. 10.1 wniosek następujący:

(10.3) *Każda funkcja eliptyczna $F(z)$ spełnia równanie różniczkowe algebraiczne pierwszego rzędu postaci*

$$W\big(F(z),\,F'(z)\big)=0,$$

*gdzie $W(u,v)$ jest wielomianem względem zmiennych $u,v$ (nie równym zeru tożsamościowo).*

**§ 11. Funkcja modułowa $J(\tau)$.** Rozważmy parę okresów pierwotnych $\omega,\omega'$ funkcji $\wp(z;\omega,\omega')$, przy czym, jak zawsze, zakładamy, że $\mathfrak{I}(\omega'/\omega)>0$.

Niech liczby $g_2=g_2(\omega,\omega')$ oraz $g_3=g_3(\omega,\omega')$ będą niezmiennikami, t. j. niech

$$(11.1)\quad g_2(\omega,\omega')=60\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\omega+n\omega')^4},\quad g_3(\omega,\omega')=140\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\omega+n\omega')^6},$$

gdzie znak $'$ wskazuje, iż wyrazu odpowiadającego wskaźnikom $m=n=0$ nie uwzględnia się przy sumowaniu. W § 5 udowodniliśmy, że wyróżnik $g_2^3-27g_3^2$ jest różny od zera. Dla teorii funkcyj eliptycznych ważne jest następujące zagadnienie: *Dane są dwie dowolne liczby $a$ i $b$, spełniające warunek $a^3-27b^2\neq 0$. Czy istnieje taka para okresów $\omega,\omega'$, że $g_2(\omega,\omega')=a$, $g_3(\omega,\omega')=b$?* Rozwiązanie tego zagadnienia podamy w § 13. Opierać się ono będzie na własnościach pewnej specjalnej funkcji, t. zw. funkcji modułowej $J(\tau)$, którą zajmiemy się obecnie.



Wprowadzimy najpierw pewne definicje ogólne. Funkcję $F$ meromorficzną w obszarze $G$ nazywamy *automorficzną względem* pewnej *grupy* $\mathfrak{T}$ przekształceń obszaru $G$ (p. Wstęp, § 8, str. 15), jeżeli dla każdego przekształcenia $T\in\mathfrak{T}$ mamy tożsamościowo $F\big(T(z)\big)=F(z)$ w obszarze $G$. Jeśli np. $\omega\neq 0$ jest dowolną liczbą zespoloną, a $G$ oznacza całą płaszczyznę lub pas ograniczony przez dwie równoległe do prostej $0\omega$, to przekształcenia postaci $\mathfrak{z}=z+m\omega$, gdzie $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, tworzą grupę przekształceń obszaru $G$, zaś na to, aby funkcja $F$ meromorficzna w $G$ była automorficzna względem tej grupy, konieczne jest i wystarcza, by funkcja $F$ była okresowa o okresie $\omega$. Podobnie, jeżeli $\omega$ i $\omega'$ oznaczają liczby zespolone różne od zera o ilorazie nierzeczywistym, to przekształcenia postaci $\mathfrak{z}=z+m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są dowolnymi liczbami całkowitymi, tworzą grupę przekształceń płaszczyzny otwartej, i na to, aby funkcja meromorficzna $F$ była automorficzna względem tej grupy, konieczne jest i wystarcza, by była dwuokresowa o okresach $\omega$ i $\omega'$.

Jak stwierdzamy natychmiast (por. Rozdz. I, § 14, str. 80-81), przekształcenia homograficzne, które mogą być napisane w postaci

$$(11.2)\qquad \mathfrak{z}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

*gdzie $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ są liczbami rzeczywistymi całkowitymi, zaś $\alpha\delta-\beta\gamma=1$,*

tworzą grupę przekształceń płaszczyzny domkniętej. Grupa ta nosi nazwę *grupy modułowej* i odgrywa w teorii funkcyj szczególnie ważną rolę. Dwa punkty, z których jeden można przeprowadzić w drugi przy pomocy jakiegokolwiek przekształcenia tej grupy, nazywają się *przystającymi względem grupy modułowej*.

*Każde przekształcenie należące do grupy modułowej przekształca półpłaszczyznę górną $\mathfrak{I}z>0$ w siebie.* Ponieważ, ze względu na rzeczywistość spółczynników przekształceń (11.2), oś rzeczywista przechodzi przy przekształceniach tych w siebie, wystarczy okazać, że przy przekształceniach (11.2) jeden choćby punkt półpłaszczyzny górnej przechodzi w punkt tej samej półpłaszczyzny; otóż podstawiając np. $z=i$ w (11.2), znajdujemy istotnie

$$\mathfrak{I}\mathfrak{z}=(\alpha\delta-\beta\gamma)/(\gamma^2+\delta^2)>0.$$

Wynika stąd zarazem, że grupa modułowa stanowi grupę nie tylko przekształceń całej płaszczyzny domkniętej, ale również i przekształceń półpłaszczyzny górnej otwartej.

Funkcja $F(z)$ meromorficzna w półpłaszczyźnie górnej nazywa się *eliptyczną funkcją modułową*, jeżeli jest automorficzna względem grupy modułowej albo przynajmniej względem jakiejkolwiek, nie redukującej się do samego tylko przekształcenia tożsamościowego, podgrupy grupy modułowej (t. zn. rodziny przekształceń zawartej w grupie modułowej i tworzącej grupę). Zanim podamy przykłady funkcyj modułowych, udowodnimy następujący lemmat:

(11.3) *Niech $\omega,\omega'$ będzie parą okresów pierwotnych jakiejkolwiek funkcji eliptycznej, zaś $w,w'$ parą okresów danych przez wzory:*

(11.4) $$w'=\alpha\omega'+\beta\omega, \qquad w=\gamma\omega'+\delta\omega,$$

*gdzie $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ są liczbami całkowitymi. Wówczas warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by para $w,w'$ była również parą okresów pierwotnych, jest związek*

(11.5) $$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm1;$$

*na to zaś, aby przy tym liczby $\mathfrak{I}(\omega'/\omega)$ oraz $\mathfrak{I}(w'/w)$ były tego samego znaku, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest związek $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.*

Dowód. Połóżmy $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma$. Rozwiązując układ (11.4) względem $\omega$ i $\omega'$, otrzymujemy:

(11.6) $$\omega'=(\delta w'-\beta w)/\Delta, \qquad \omega=(-\gamma w'+\alpha w)/\Delta.$$

Jeżeli $\Delta=\pm1$, to $\omega$ i $\omega'$ są sumami całkowitych wielokrotności liczb $w$ i $w'$. Każdy więc okres rozważanej funkcji eliptycznej, jako suma całkowitych wielokrotności liczb $\omega$ i $\omega'$, jest sumą całkowitych wielokrotności liczb $w,w'$. Para okresów $w,w'$ jest przeto pierwotna i wystarczalność warunku (11.5) jest udowodniona. Przechodząc do dowodu konieczności, załóżmy, że para $w,w'$, określona przez wzory (11.4), jest parą pierwotną. Wówczas $\Delta\neq0$, a z (11.6) wynika, że wszystkie cztery spółczynniki:

$$a=\delta/\Delta, \quad b=-\beta/\Delta, \quad c=-\gamma/\Delta, \quad d=\alpha/\Delta$$

muszą być liczbami całkowitymi. Połóżmy $D=ad-bc$. Łatwo sprawdzić, że $D=(\alpha\delta-\beta\gamma)/\Delta^2=1/\Delta$. Ponieważ zaś $D$ i $\Delta$ są liczbami całkowitymi, więc $\Delta=\pm1$.

Dla dowodu drugiej części lemmatu zauważmy, że jeżeli przyjmiemy $\omega'/\omega=z$ i $w'/w=z'$, to z (11.4) wynika

$$z'=(\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$$

i punkt $z'$ leży wtedy i tylko wtedy wraz z $z$ w tej samej półpłaszczyźnie (górnej lub dolnej), jeżeli $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, t. j. gdy $\Delta=1$. Lemmat 11.3 jest więc udowodniony.



Powracając do niezmienników $g_2$ i $g_3$, zauważymy przede wszystkim, że są one funkcjami jednorodnymi okresów $\omega$ i $\omega'$, stopni odpowiednio $-4$ i $-6$. Jeżeli położymy $\omega'/\omega=\tau$, to $g_2(\omega,\omega')=\omega^{-4}g_2(1,\tau)$, $g_3(\omega,\omega')=\omega^{-6}g_3(1,\tau)$. Wyróżnik $\Delta(\omega,\omega')=g_2^3-27g_3^2$ jest więc funkcją jednorodną stopnia $-12$. Iloraz $g_2^3/\Delta$ jako funkcja jednorodna stopnia 0 zmiennych $\omega,\omega'$ zależy przeto tylko od ilorazu $\tau=\omega'/\omega$. Otóż iloraz $g_2^3/\Delta$ będziemy oznaczali przez $J(\tau)$. Zatem:

(11.7) $$J(\tau)=\frac{g_2^3(1,\tau)}{\Delta(1,\tau)}, \qquad J(\tau)-1=\frac{27g_3^2(1,\tau)}{\Delta(1,\tau)}.$$

(11.8) *Funkcja $J(\tau)$ jest holomorficzna w półpłaszczyźnie $\mathfrak{I}(\tau)>0$ i automorficzna względem grupy modułowej, t. j.*

(11.9) $$J(\tau)=J\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \qquad gdy \quad \mathfrak{I}\tau>0,$$

*dla każdego układu liczb całkowitych $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, dla których $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.*

Dowód. Wykażemy przede wszystkim, że funkcja

(11.10) $$g_2(1,\tau)=60\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(m+n\tau)^4}$$

jest holomorficzna dla $\mathfrak{I}\tau>0$. Ponieważ każdy składnik tego szeregu jest holomorficzny w półpłaszczyźnie górnej, więc wystarczy dowieść, że szereg jest jednostajnie zbieżny w każdym półpasie $S$ określonym przez nierówności $-a\leqslant\mathfrak{R}\tau\leqslant a$, $\mathfrak{I}\tau\geqslant b$, gdzie $a$ i $b$ są dowolnymi liczbami dodatnimi. Oznaczmy w tym celu przez $h$ mniejszą z dwu wysokości równoległoboku o wierzchołkach $0,1,1+\tau,\tau$. Jeżeli $\tau$ należy do $S$, to wysokość $h$ jest ograniczona z dołu przez liczbę $\varepsilon>0$, i — jak wynika z rozważań na str. 303 — wartości bezwzględne wyrazów szeregu (11.10) nie przekraczają w $S$ wyrazów pewnego szeregu liczbowego zbieżnego. Dowodzi to, że szereg (11.10) jest jednostajnie zbieżny w $S$. Zatem $g_2(1,\tau)$ jest istotnie funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie górnej.

Ten sam wynik otrzymamy dla funkcji $g_3(1,\tau)$. Wynika stąd, że i $\Delta(1,\tau)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie górnej, a ponieważ $\Delta(1,\tau)\neq0$, więc funkcja $J(\tau)$ jest w niej również holomorficzna.

Dla dowodu pozostałej części twierdzenia rozpatrzmy przekształcenie (11.4), gdzie $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ są liczbami całkowitymi i $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Jeżeli $\omega,\omega'$ jest parą okresów pierwotnych funkcji $\wp(z)$, to i $w,w'$ jest jej parą okresów pierwotnych, t. zn. że gdy $m$ i $n$ przebiegają wszystkie wartości całkowite, zbiór okresów $mw+nw'$ jest identyczny ze zbiorem okresów $m\omega+n\omega'$. Tym samym, jak to wynika z (11.1),

$$g_2(\omega,\omega')=g_2(w,w'),\qquad g_3(\omega,\omega')=g_3(w,w')$$

(stąd pochodzi nazwa n i e z m i e n n i k i liczb $g_2$ i $g_3$). Zatem również $\Delta(\omega,\omega')=\Delta(w,w')$ i możemy napisać

$$J(\tau)=\frac{g_2^3(\omega,\omega')}{\Delta(\omega,\omega')}=\frac{g_2^3(w,w')}{\Delta(w,w')}=J\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

ponieważ $w'/w=(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$ ze względu na (11.4). Tw. 11.8 jest więc udowodnione.

Szczególnymi przekształceniami grupy modułowej są przekształcenia:

$$\tau'=\tau+1=\frac{1\cdot\tau+1}{0\cdot\tau+1},\qquad \tau'=-\frac{1}{\tau}=\frac{0\cdot\tau+1}{-1\cdot\tau+0}.$$

Zatem:

(11.11) $$J(\tau+1)=J(\tau),\qquad J(-1/\tau)=J(\tau),\qquad \textit{gdy}\quad \Im\tau>0.$$

ĆWICZENIA. 1. Dana jest rodzina $\mathfrak{R}$ przekształceń należących do grupy modułowej (choć niekoniecznie tworzących grupę) oraz funkcja $F(z)$, meromorficzna w półpłaszczyźnie $\Im z>0$ i taka, że $F(T(z))=F(z)$, gdy $\Im z>0$ i $T\in\mathfrak{R}$. Istnieje wówczas podgrupa $\mathfrak{T}$ grupy modułowej, zawierająca $\mathfrak{R}$ i taka, że funkcja $F(z)$ jest automorficzna względem grupy $\mathfrak{T}$.

2. Przekształcenia $z'=(\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$ grupy modułowej, gdzie $\beta$ i $\gamma$ są podzielne przez liczbę całkowitą $n$, tworzą grupę (a więc podgrupę grupy modułowej). W przypadku $n=2$ otrzymujemy t. zw. *podgrupę parzystą* grupy modułowej (liczby $\alpha$ i $\delta$ są wtedy nieparzyste).

3. Niech $\lambda(\tau)=(e_3-e_2)/(e_1-e_2)$, gdzie liczby $e_1,e_2,e_3$ określone są przez wzory (4.6). Jeżeli $\tau'$ przystaje do $\tau$ względem grupy modułowej, to $\lambda(\tau')$ przyjmuje jedną z 6 wartości:

(*) $$\lambda(\tau),\quad 1-\lambda(\tau),\quad \frac{1}{\lambda(\tau)},\quad \frac{1}{1-\lambda(\tau)},\quad \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\quad 1-\frac{1}{\lambda(\tau)}.$$

Zbadać, kiedy $\lambda(\tau')=\lambda(\tau)$.

[*Wsk.* Jeżeli pary $\omega,\omega'$ i $w,w'$ okresów pierwotnych związane są wzorem (11.4), to trójki liczb

$$\wp(\tfrac12\omega),\ \wp(\tfrac12\omega'),\ \wp(\tfrac12\omega+\tfrac12\omega'),\qquad \wp(\tfrac12 w),\ \wp(\tfrac12 w'),\ \wp(\tfrac12 w+\tfrac12 w')$$

różnią się co najwyżej porządkiem.]

4. Funkcja $\lambda(\tau)$ z ćw. 3 jest holomorficzna w półpłaszczyźnie $\Im\tau>0$, nie przyjmuje tam nigdzie wartości $0,1$ i jest automorficzna względem podgrupy parzystej grupy modułowej. (Funkcja $\lambda(\tau)$ jest obok $J(\tau)$ najważniejszą eliptyczną funkcją modułową.)

5. Niech $\lambda=\lambda(\tau)$. Funkcja

$$F(\tau)=(\lambda+1)\,(1-\lambda+1)\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\left(\frac{1}{1-\lambda}+1\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}+1\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}+1\right)=$$
$$=-\frac{(\lambda+1)^2\,(2-\lambda)^2\,(2\lambda-1)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

jest eliptyczną funkcją modułową, automorficzną względem grupy modułowej. (Gdybyśmy zamiast $F(\tau)$ wzięli po prostu iloczyn funkcyj (*) z ćw. 3, otrzymalibyśmy 1.)



6. Wykazać, że funkcja $F(\tau)$ z ćw. 5 spełnia równanie

(**) $$F(\tau)=27(1-J(\tau)),$$

a więc że

$$J(\tau)=\frac{4}{27}\,\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

[*Wsk.* Wyrazić $\lambda$ we wzorze (**) przez wielkości $e_1,e_2,e_3$ i zastosować wzory (5.8), (5.10), (11.7).]

**§ 12. Dalsze własności funkcji $J(\tau)$.** Pierwszy ze wzorów (11.11) wskazuje, że funkcja $J(\tau)$ ma okres 1. Wobec tego (p. § 2), $J(\tau)$ jest funkcją holomorficzną zmiennej $\zeta=e^{2\pi i\tau}$ w pierścieniu $\mathrm{P}(0;0,1)$. Udowodnimy, że

(12.1) *$J(\tau)$ jako funkcja zmiennej $\zeta=\exp 2\pi i\tau$ ma w punkcie $\zeta=0$ biegun jednokrotny.*

D o w ó d. Wyjdziemy w tym celu z rozwinięcia funkcji $\operatorname{ctg}\pi\tau$ na ułamki proste (p. Rozdz. VII, wzór (5.2)):

(12.2) $$\pi\operatorname{ctg}\pi\tau=\frac{1}{\tau}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{\tau-n}+\frac{1}{n}\right)$$

i skorzystamy z następującego wzoru, prawdziwego dla $\Im\tau>0$:

$$\pi\operatorname{ctg}\pi\tau=-\pi i\,(1+2\zeta+2\zeta^2+\ldots),\qquad \textit{gdzie}\quad \zeta=e^{2\pi i\tau}$$

(por. (2.5)). Zastąpmy w tym wzorze $\pi\operatorname{ctg}\pi\tau$ przez rozwinięcie (12.2) i zróżniczkujmy otrzymaną równość trzykrotnie i pięciokrotnie względem $\tau$, pamiętając o tym, że $d\zeta/d\tau=2\pi i\zeta$. Dostaniemy równości:

(12.3) $$\begin{aligned}-6\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m+\tau)^4}&=-16\pi^4(\zeta+8\zeta^2+\ldots),\\ -120\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m+\tau)^6}&=64\pi^6(\zeta+32\zeta^2+\ldots),\end{aligned}$$

które wyzyskamy przy badaniu niezmienników $g_2$ i $g_3$. Potrzebne nam będą w tym celu jeszcze równości:

(12.4) $$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{45},\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^6}=\frac{2\pi^6}{945},$$

które możemy otrzymać np. różniczkując równość (12.2) odpowiednio trzy i pięć razy i kładąc $\tau=0$ (por. także Rozdz. VII, wzory (5.4) i (5.6)).

Zastąpmy teraz w pierwszej z równości (12.3) $\tau$ przez $n\tau$, a więc $\zeta$ przez $\zeta^n$, gdzie $n=1,2,\ldots$ Ponieważ $(m-n\tau)^4=(-m+n\tau)^4$, przeto

$$g_2(1,\tau)=60\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\right)=$$
$$=60\left(\frac{\pi^4}{45}+\frac{16\pi^4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta^n+8\zeta^{2n}+\dots)\right).$$

Oznaczmy przez $G_n(\zeta)$ sumę szeregu potęgowego $\zeta^n+8\zeta^{2n}+\dots$, stojącego pod znakiem ostatniej sumy. Szereg $G_1(\zeta)+G_2(\zeta)+\dots$ jest zbieżny niemal jednostajnie w kole $K=\mathrm{K}(0;1)$ do sumy $G(\zeta)$ holomorficznej w $K$. Zatem rozwinięcie funkcji $G(\zeta)$ na szereg potęgowy otrzymamy przez dodanie formalne szeregów potęgowych określających funkcje $G_1(\zeta)$, $G_2(\zeta),\dots$ (Rozdz. III, tw. 5.9). Stąd wynika, że

$$g_2(1,\tau)=\pi^4(\tfrac{4}{3}+320\zeta+\dots).$$

Rozumując podobnie, otrzymujemy:

$$g_3(1,\tau)=140\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^6}\right)=$$
$$=140\left(\frac{2\pi^6}{945}-\frac{16\pi^6}{15}\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta^n+32\zeta^{2n}+\dots)\right)=\pi^6\left(\frac{8}{27}-\frac{448}{3}\zeta+\dots\right).$$

Ze wzorów na $g_2(1,\tau)$ i $g_3(1,\tau)$ wynika, że

$$\Delta(1,\tau)=g_2^3(1,\tau)-27g_3^2(1,\tau)=\pi^{12}(4096\zeta+\dots),$$

co daje na $J(\tau)=g_2^3(1,\tau)/\Delta(1,\tau)$ wyrażenie

$$(\tfrac{4}{3}+320\zeta+\dots)^3\Big/(4096\zeta+\dots)=\frac{1}{1728\,\zeta}+c_0+c_1\zeta+\dots$$

Tw. 12.1 jest więc udowodnione. Wynika zeń w szczególności, że $J(\tau)\to\infty$, *gdy* $\mathfrak{I}\tau\to+\infty$. Możemy wobec tego rozszerzyć definicję funkcji $J$ na punkt $\infty$, przyjmując $J(\infty)=\infty$.

Rozważmy dowolną parę liczb $\omega,\omega'$ różnych od zera, o ilorazie nierzeczywistym. Jeżeli liczby całkowite $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ spełniają warunek $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, to parę liczb $w,w'$ określoną wzorami (11.4) nazywać będziemy parą *równoważną* parze $\omega,\omega'$. Oczywiście pary $\omega,\omega'$ i $w,w'$ grają w tej definicji rolę symetryczną. Udowodnimy lemmat następujący:

(12.5) *Do dowolnej pary liczb $\omega,\omega'$ różnych od zera i o ilorazie nierzeczywistym można dobrać parę równoważną $w,w'$ taką, że*

(12.6) $$|w'|\geqslant|w|,\qquad |w'\pm w|\geqslant|w'|.$$



Dowód. Rozważmy zbiór $\Omega$ punktów $m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są dowolnymi liczbami całkowitymi. Zbiór ten można tu uważać za zbiór okresów funkcji dwuokresowej $\wp(z)$. Niech $w$ będzie dowolnym elementem zbioru $\Omega$ różnym od 0, o najmniejszej wartości bezwzględnej. Rozważmy podzbiór $\Omega_1$ złożony z wszystkich elementów zbioru $\Omega$, nie leżących na prostej $0w$, i przyjmijmy za $w'$ ten punkt zbioru $\Omega_1$, który ma najmniejszą wartość bezwzględną. Zmieniając ewentualnie znak przy $w'$ (bo wraz z $w'$ również $-w'$ należy do $\Omega_1$), możemy przyjąć, że liczby $\mathfrak{I}(\omega'/\omega)$ oraz $\mathfrak{I}(w'/w)$ są tego samego znaku. Oczywiście mamy $|w'|\geqslant|w|$. Z definicji liczby $w'$ wynika, że liczby $w'\pm w$ nie leżą na prostej $0w$, a więc spełniony jest i drugi z warunków (12.6). Rozumowanie takie jak na str. 342-3 wskazuje, że para $w,w'$ jest parą okresów pierwotnych funkcji $\wp(z)$, a więc, na zasadzie tw. 11.3, jest równoważna parze $\omega,\omega'$. Lemmat 12.5 jest więc udowodniony.

Niech $G_0$ oznacza zbiór tych wszystkich punktów $\tau$ półpłaszczyzny górnej, dla których:

$$-\tfrac{1}{2}\leqslant\mathfrak{R}\tau\leqslant 0,\quad |\tau|\geqslant 1\qquad lub\qquad 0<\mathfrak{R}\tau<\tfrac{1}{2},\quad |\tau|>1.$$

Punkt $\infty$ również zaliczamy do $G_0$. Zatem $G_0$ jest trójkątem krzywoliniowym, ograniczonym przez dwie półproste równoległe do osi urojonej i przez łuk okręgu $\mathrm{C}(0;1)$ (p. rysunek na str. 378). Z punktów brzegowych zaliczamy jednak do $G_0$ tylko bok $A\infty$ oraz łuk $AB$, natomiast wyłączamy bok $A'\infty$ oraz wnętrze łuku $A'B$. Zbiór $G_0$ nazywać będziemy *obszarem podstawowym*, zaś punkty $A$, $B$ i $\infty$ *wierzchołkami* obszaru podstawowego.

(12.7) *Dla każdego punktu $\tau$ półpłaszczyzny górnej istnieje punkt przystający doń względem grupy modułowej i leżący w obszarze podstawowym.*

Dowód. Rozważmy parę liczb $1,\tau$. W myśl lemmatu 12.5 znajdziemy parę równoważną $w,w'$, spełniającą warunki (12.6). Mamy więc $w'=\alpha\tau+\beta$, $w=\gamma\tau+\delta$, gdzie liczby $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ są całkowite i $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Jeżeli położymy $w'/w=\tau^*$, to $\tau^*=(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$, zaś z (12.6) wynika, że $|\tau^*|\geqslant 1$ i $|\tau^*\pm 1|\geqslant|\tau^*|$. Zatem $\tau^*$ leży bądź w $G_0$, bądź na boku $A'\infty$, bądź wreszcie jest punktem wewnętrznym łuku $A'B$. W pierwszym przypadku lemmat jest udowodniony. Możemy więc przyjąć, że zachodzi jeden z dwu pozostałych przypadków.

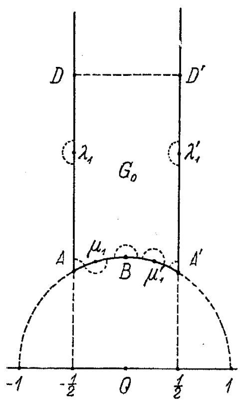
Otóż bok $A\infty$ otrzymuje się z boku $A'\infty$ przez przekształcenie $\tau'=\tau-1$. Podobnie łuk $AB$ otrzymujemy z łuku $A'B$ przez przekształcenie $\tau'=-1/\tau$. Oba te przekształcenia należą do grupy modułowej. Stosując odpowiednio jedno z nich do punktu $\tau^*$, otrzymamy punkt przystający do $\tau$ względem grupy modułowej i leżący w $G_0$.

Z tw. 11.8 i 12.7 wynika, że aby zbadać, jakie wartości funkcja $J(\tau)$ przyjmuje dla $\mathfrak{J}\tau>0$, wystarczy się ograniczyć do obszaru podstawowego.

(12.8) *Równanie*

(12.9) $$J(\tau)=c,$$

*gdzie $c$ jest dowolną liczbą (skończoną lub nieskończoną), posiada w obszarze podstawowym $G_0$ dokładnie jedno rozwiązanie.*




Dowód. Ponieważ $J(\tau)=\infty$ w wierzchołku $\infty$ obszaru podstawowego $G_0$ (por. str. 376), twierdzenie jest prawdziwe dla $c=\infty$. Możemy więc założyć, że $c$ jest liczbą skończoną.

Niech $s$ będzie liczbą dodatnią tak dużą, że $|J(\tau)|>|c|$ dla $\mathfrak{J}\tau\geqslant s$. Jeżeli więc przez $H_1$ oznaczymy tę część zbioru $G_0$ gdzie $\mathfrak{J}\tau\leqslant s$, to wszystkie ewentualne pierwiastki równania (12.9) należące do $G_0$ będą musiały leżeć w $H_1$.

Oznaczmy punkty $-\frac{1}{2}+is$ oraz $\frac{1}{2}+is$ odpowiednio przez $D$ oraz $D'$, zaś przez $\Gamma_1$ krzywą zamkniętą $ABA'D'DA$, ograniczającą zbiór $H_1$ (p. rysunek).

$1^0$ Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy równanie (12.9) nie ma pierwiastków na $\Gamma_1$. Na zasadzie tw. 7.5 i 5.4, Rozdz. IV, pomnożona przez $2\pi$ liczba $N$ pierwiastków tego równania wewnątrz $\Gamma_1$ (licząc każdy pierwiastek tyle razy, ile wynosi jego krotność) równa jest przyrostowi argumentu funkcji $J(\tau)-c$ wzdłuż krzywej $\Gamma_1$. Przyrost ten jest równy sumie przyrostów wzdłuż łuków $DA$, $AB$, $BA'$, $A'D'$, $D'D$. Ale ze względu na związek $J(\tau+1)=J(\tau)$ przyrosty wzdłuż odcinków $DA$ i $D'A'$ są równe, t. zn. że suma przyrostów argumentów wzdłuż odcinków $DA$ i $A'D'$ jest równa zeru. Podobnie, ze względu na związek $J(-1/\tau)=J(\tau)$ suma przyrostów argumentów wzdłuż łuków $AB$ i $BA'$ jest równa zeru. Zatem $2\pi N$ jest równe przyrostowi $\arg\{J(\tau)-c\}$ wzdłuż odcinka $D'D=[\frac{1}{2}+is, -\frac{1}{2}+is]$.



Ale gdy punkt $\tau$ przebiega ten odcinek, punkt $\zeta=e^{2\pi i\tau}$ przebiega okrąg $C_s=\mathrm{C}(0;e^{-2\pi s})$ zorientowany ujemnie. Ze względu na tw. 7.5 i 5.4, Rozdz. IV, $2\pi N$ jest więc równe pomnożonej przez $2\pi$ różnicy między liczbą biegunów a liczbą pierwiastków wyrażenia $J(\tau)-c$, uważanego za funkcję zmiennej $\zeta$, wewnątrz okręgu $C_s$. Z definicji odcinka $DD'$ wynika, że $J(\tau)-c$ nie ma wcale pierwiastków wewnątrz $C_s$, podczas gdy na mocy tw. 12.1 ma wewnątrz $C_s$ dokładnie jeden biegun, mianowicie biegun jednokrotny w punkcie $\zeta=0$. Stąd wynika, że $N=1$, i twierdzenie jest udowodnione w rozważanym przypadku szczególnym.

$2^0$ Rozpatrzmy drugi z kolei przypadek szczególny, gdy równanie (12.9) ma pierwiastki również na krzywej $\Gamma_1$, ale w punktach różnych od $A$ oraz $B$ (a więc i od $A'$), mianowicie w punktach $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ leżących wewnątrz odcinka $AD$ oraz w punktach $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ wewnątrz łuku $AB$ (oczywiście może być $k=0$ lub $l=0$. Na rysunku (str. 378) przyjęliśmy dla prostoty $k=l=1$). Wobec tego równanie (12.9) będzie miało również pierwiastki w punktach $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \mu_1', \mu_2', \dots$ odpowiednio symetrycznych do poprzednich względem osi urojonej. Niech liczba $\eta$, dodatnia i mniejsza od $\frac{1}{2}$, będzie tak mała, by wszystkie koła $K_p=\mathrm{K}(\lambda_p;\eta)$ oraz $\widetilde{K}_q=\mathrm{K}(\mu_q;\eta)$ były rozłączne i nie zawierały punktów $D, A, B$ ani żadnych innych pierwiastków równania (12.9) po za środkami $\lambda_p$ oraz $\mu_q$. Niech przekształcenie $\tau'=\tau+1$ przeprowadza koła $K_p$ na koła $K_p'$, zaś przekształcenie $\tau'=-1/\tau$ koła $\widetilde{K}_q$ na koła $\widetilde{K}_q'$ (środek koła $\widetilde{K}_q$ nie musi przechodzić na środek koła $\widetilde{K}_q'$). Rozważmy zbiór

$$H_2=H_1+\sum_r K_r+\sum_s \widetilde{K}_s-\sum_r K_r'-\sum_s \widetilde{K}_s'.$$

Oznaczmy przez $\Gamma_2$ krzywą, będącą brzegiem zbioru $H_2$, zorientowaną dodatnio. Na krzywej $\Gamma_2$ równanie (12.9) nie posiada pierwiastków, zaś wewnątrz $\Gamma_2$ liczba $N$ tych pierwiastków jest taka sama jak w $G_0$. Zatem $2\pi N$ będzie równe przyrostowi $\arg\{J(\tau)-c\}$ wzdłuż $\Gamma_2$. Przyrosty argumentów na łukach krzywej $\Gamma_2$, odpowiadających sobie ze względu na przekształcenia $\tau'=\tau+1$ lub $\tau'=-1/\tau$, są równe i — rozumując jak poprzednio — znajdziemy, że $2\pi N$ jest równe przyrostowi $\arg\{J(\tau)-c\}$ wzdłuż odcinka $D'D$. Daje to znów $N=1$.

$3^0$ Pozostaje jeszcze rozważyć przypadek, gdy równanie (12.9) ma pierwiastki w wierzchołkach $A$ lub $B$. Punkty te mają odpowiednio spółrzędne $\varrho=e^{2\pi i/3}$ oraz $i$. Zauważmy teraz, że ze względu na tożsamość $m-in=-i(n+im)$ mamy:

$$\frac{1}{140}\, g_3(1,i) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m-in)^6} = -\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(n+im)^6} = -\frac{1}{140}\, g_3(1,i).$$

Zatem $g_3(1,i)=0$. Podobnie, jeżeli uwzględnimy, że $\varrho^3=1$ i że $\varrho^2+\varrho+1=0$, otrzymamy

$$\frac{g_2(1,\varrho)}{60} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m+\varrho n)^4} = \frac{1}{\varrho} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m\varrho^2+n)^4} = \frac{1}{\varrho} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{[(m-n)+m\varrho]^4}.$$

Gdy układ $m,n$ przebiega wszystkie możliwe pary liczb całkowitych z wyjątkiem pary $0,0$, to samo czyni układ $m-n,m$. Zatem ostatnie wyrażenie wynosi $g_2(1,\varrho)/60\varrho$, co daje $g_2(1,\varrho)=0$. Zestawiając otrzymane równości i biorąc pod uwagę wzory (11.7), możemy zatem napisać

(12.10) $\quad g_2(1,\varrho)=0, \quad g_3(1,i)=0, \quad J(\varrho)=0, \quad J(i)=1.$

Pozostały więc jedynie przypadki $c=1$ oraz $c=0$. Przy rozważaniu tych przypadków skorzystamy z następującej prostej uwagi. Niech $F(\tau)$ będzie funkcją holomorficzną w kole $K=\mathrm{K}(\tau_0;R)$ o pierwiastku $m$-krotnym w środku tego koła. Niech $L_\varepsilon$ oznacza dowolny łuk okręgu $\mathrm{C}(\tau_0;\varepsilon)$, a $l_\varepsilon$ miarę kątową łuku $L_\varepsilon$, gdzie $\varepsilon<R$. Jeżeli dla $\varepsilon\to 0$ mamy $l_\varepsilon\to a$, to przyrost argumentu funkcji $F(\tau)$ wzdłuż łuku $L_\varepsilon$ zmierza do $ma$. Dla dowodu zauważmy, że gdy np. $\tau_0=0$, to $F(\tau)=\tau^m\, G(\tau)$, gdzie $G(\tau)$ jest funkcją holomorficzną w $K$, przy czym $G(0)\neq 0$. Przy $\varepsilon\to 0$ przyrost $\arg G(\tau)$ wzdłuż łuku $L_\varepsilon$ dąży do zera, zaś przyrost $\arg\tau^m$ wynosi $ml_\varepsilon$ i dąży do $ma$.

Przypuśćmy teraz, że $c=1$. Do pierwiastków $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\mu_1,\mu_2,\dots$, rozważanych w przypadku $2^0$, dochodzi teraz jeszcze pierwiastek $i$ równania $J(\tau)-1=0$. Niech $m$ będzie krotnością tego pierwiastka. Niech $H_3=H_2-\mathrm{K}(i;\varepsilon)$, gdzie $H_2$ jest zbiorem rozważanym w przypadku $2^0$ (przy $c=1$), zaś $\varepsilon$ jest dostatecznie małe. Niech wreszcie $L_\varepsilon$ oznacza ten łuk okręgu $\mathrm{C}(i;\varepsilon)$, który leży w domknięciu zbioru $H_2$, zaś $N$ liczbę pierwiastków równania $J(\tau)-1$ w $H_3$. Rozumując jak poprzednio, znajdziemy, że $2\pi N$ jest równe sumie przyrostów $\arg\{J(\tau)-1\}$ wzdłuż odcinka $D'D$ oraz wzdłuż łuku $-L_\varepsilon$. Gdy $\varepsilon\to 0$, to stosując wspomnianą wyżej własność przyrostu, znajdziemy, że $N=1-\frac{1}{2}m$. Liczba $m$ jest całkowita i dodatnia, zaś liczba $N$ całkowita i nieujemna. Stąd wynika, że $m=2$ i $N=0$. Innymi słowy, równanie $J(\tau)-1=0$ ma w $G_0$ dokładnie jeden pierwiastek (dwukrotny) w punkcie $\tau=i$.



Podobnie rozstrzygamy przypadek równania $J(\tau)=0$, rozważając przyrost $\arg J(\tau)$ wzdłuż zorientowanego dodatnio brzegu zbioru

$$H_2-\mathrm{K}(e^{2\pi i/3};\varepsilon)-\mathrm{K}(e^{\pi i/3};\varepsilon),$$

gdzie $\varepsilon\to 0$. Ponieważ łuki $AB$ i $AD$ tworzą w punkcie $\varrho=e^{2\pi i/3}$ kąt $\pi/3$, znajdziemy, że równanie $J(\tau)=0$ posiada w obszarze podstawowym $G_0$ dokładnie jeden pierwiastek (trzykrotny), mianowicie $\tau=\varrho$. Tw. 12.8 jest więc całkowicie udowodnione.

Niech $G_0'$ i $G_0''$ oznaczają odpowiednio części obszaru podstawowego $G_0$, gdzie $\mathfrak{R}\tau\leqslant 0$ oraz $\mathfrak{R}\tau\geqslant 0$. Uzupełniając tw. 12.8, wykażemy, że

(12.11) *Funkcja* $w=J(\tau)$ *przekształca zbiór* $G_0'$ *jedno-jednoznacznie na półpłaszczyznę* $\mathfrak{I}w\geqslant 0$, *zaś domknięcie zbioru* $G_0''$ *jedno-jednoznacznie na półpłaszczyznę* $\mathfrak{I}w\leqslant 0$.

D o w ó d. Wykażemy przede wszystkim, że $J(\tau)$ przyjmuje w punktach położonych symetrycznie względem osi urojonej wartości sprzężone, t. j. że $J(-\bar\tau)=\overline{J(\tau)}$. Istotnie,

$$g_2(1,-\bar\tau)=60\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m+n\bar\tau)^4} = 60\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \overline{\frac{1}{(m+n\tau)^4}} = \overline{g_2(1,\tau)}.$$

Zatem $g_2(1,-\bar\tau)=\overline{g_2(1,\tau)}$ i podobnie $g_3(1,-\bar\tau)=\overline{g_3(1,\tau)}$. Stąd otrzymujemy $J(-\bar\tau)=\overline{J(\tau)}$. Z równości tej wynika, że $J(\tau)$ przyjmuje wartości rzeczywiste na osi urojonej. Jeżeli punkt $\tau$ znajduje się na brzegu obszaru podstawowego $G_0$, to ze względu na wzory (11.11) mamy $J(-\bar\tau)=J(\tau)$. Z tej oraz poprzedniej równości wynika, że $J(\tau)$ jest rzeczywiste. Zatem *funkcja* $J(\tau)$ *przyjmuje wartości rzeczywiste na brzegach zbiorów* $G_0'$ i $G_0''$.

Gdy punkt $\tau$ przebiega brzeg obszaru $G_0'$, a mianowicie półprostą $[\infty,\varrho]$, łuk $[\varrho,i]$ koła $\mathrm{C}(0;1)$ oraz półprostą $[i,\infty]$, punkt $w=J(\tau)$ przebiega oś rzeczywistą od $-\infty$ poprzez punkty 0 i 1 do punktu $+\infty$.

Ze względu na ciągłość funkcji $J(\tau)$ oraz na tw. 12.8 funkcja ta przyjmuje każdą wartość rzeczywistą $w$ na brzegu zbioru $G_0'$ dokładnie w jednym punkcie. Stąd wynika, że wewnątrz $G_0'$ funkcja $J(\tau)$ nie przyjmuje wartości rzeczywistych. Okażemy, że *wewnątrz* $G_0'$ *część urojona funkcji* $J(\tau)$ *jest bądź stale dodatnia, bądź stale ujemna.* Gdyby bowiem wewnątrz $G_0'$ istniały dwa punkty, gdzie część urojona funkcji $J$ ma znaki różne, to w pewnym punkcie łuku łączącego te dwa punkty wewnątrz $G_0''$ funkcja $J(\tau)$ byłaby rzeczywista, co jest niemożliwe. Stosując twierdzenie o zachowaniu kątów (Rozdz. I, tw. 15.8), widzimy łatwo, że dla $\tau$ należącego do wnętrza $G_0''$ mamy $\mathfrak{I}J(\tau)>0$. Zatem funkcja $w=J(\tau)$ przekształca jedno-jednoznacznie zbiór $G_0''$ na półpłaszczyznę domkniętą $\mathfrak{I}w\geqslant 0$. Stąd i z równości $J(-\bar{\tau})=\overline{J(\tau)}$ wynika, że funkcja ta przekształca jedno-jednoznacznie domknięcie zbioru $G_0'''$ na półpłaszczyznę $\mathfrak{I}w\leqslant 0$.

Niech $T_0, T_1, T_2, \ldots$ będzie ciągiem wszystkich przekształceń grupy modułowej, przy czym $T_0$ niech oznacza przekształcenie tożsamościowe. Niech $G_k=T_k(G_0)$ dla $k=0,1,\ldots$ Punkty zbioru $G_k$, na które przekształcenie $T_k$ przeprowadza wierzchołki zbioru $G_0$, będziemy nazywać *wierzchołkami* zbioru $G_k$. Zbiory $G_k$ są trójkątami krzywoliniowymi leżącymi w półpłaszczyźnie $\mathfrak{I}\tau\geqslant 0$ (niektóre wierzchołki mogą leżeć na osi rzeczywistej), przy czym w myśl tw. 12.8 funkcja $J(\tau)$ przyjmuje w $G_k$ każdą wartość dokładnie w jednym punkcie. Z tw. 12.7 wynika, że *zbiór* $G_0+G_1+\ldots$ *pokrywa całą półpłaszczyznę* $\mathfrak{I}\tau>0$. Obecnie wykażemy, że

(12.12) *Dwa różne zbiory $G_k$ i $G_l$ mogą mieć jako punkt wspólny co najwyżej jeden wierzchołek.*

Udowodnimy przede wszystkim lemmat następujący:

(12.13) *W obszarze podstawowym $G_0$ istnieją dokładnie trzy punkty, które mogą być przeprowadzone przez pewne przekształcenia nie tożsamościowe grupy modułowej na punkty należące do $G_0$. Są to wierzchołki $\infty, \varrho, i$, przy czym każdy z nich może być przeprowadzony tylko w siebie.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\tau$ i $\tau'$ są dwoma punktami obszaru $G_0$ i że przekształcenie $\tau'=(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są liczbami całkowitymi spełniającymi warunek $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, nie jest tożsamościowe. Jeżeli jeden z punktów $\tau, \tau'$ leży w nieskończoności, to to samo można powiedzieć i o drugim, gdyż przekształcenia grupy modułowej bądź zachowują punkt $\infty$, bądź też przeprowadzają go na punkt skończony osi rzeczywistej (a więc nie należący do $G_0$). Możemy więc się ograniczyć do przypadku, gdy $\tau$ i $\tau'$ są liczbami skończonymi. Możemy przyjąć, że $\mathfrak{I}\tau'\geqslant\mathfrak{I}\tau$. Prosty rachunek wykazuje, że $\mathfrak{I}\tau'=\mathfrak{I}\tau/|\gamma\tau+\delta|^2$, a więc że

$$|\gamma\tau+\delta|^2=\gamma^2|\tau|^2+2\gamma\delta\mathfrak{R}\tau+\delta^2\leqslant 1.$$

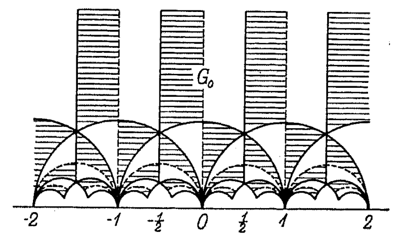
Przypuśćmy najpierw, że $\gamma\neq 0$ i $\delta\neq 0$. Jeżeli więc jest spełniona przynajmniej jedna z nierówności $|\tau|^2>1$, $|\mathfrak{R}\tau|<\frac{1}{2}$, to liczba $|\gamma\tau+\delta|^2$ przekracza $\gamma^2-|\gamma\delta|+\delta^2=(|\gamma|-|\delta|)^2+|\gamma\delta|\geqslant 1$, co jest niemożliwe. Jeżeli zaś mamy jednocześnie $|\tau|^2=1$ i $|\mathfrak{R}\tau|=\frac{1}{2}$, to musi być $\tau=\varrho=e^{2\pi i/3}$. Otóż $|\gamma\varrho+\delta|^2=(\delta-\gamma)^2+\gamma\delta$ i, aby to ostatnie wyrażenie było nie większe od 1, musi być $\delta=\gamma=\pm 1$, skąd wynika, że $\tau'=\pm\alpha-1/(\tau+1)$. Skoro więc $\tau=\varrho$ i $\tau'\in G_0$, to musi być $\alpha=0$, a wówczas $\tau'=\varrho$.



Przypuśćmy z kolei, że $\gamma=0$ lub $\delta=0$. Związek między $\tau$ a $\tau'$ może być wówczas napisany odpowiednio w postaciach $\tau'=\tau+\beta_1$, $\tau'=\alpha_1-1/\tau$, gdzie $\beta_1=\pm\beta$, $\alpha_1=\pm\alpha$. W pierwszym przypadku wierzchołek $\infty$ jest jedynym punktem zbioru $G_0$, który po przekształceniu będzie należał do $G_0$, przy czym punkt ten przechodzi na siebie. W drugim przypadku jedynie wierzchołki $i, \varrho$ będą posiadały analogiczną własność, i to tylko wtedy gdy odpowiednio $\alpha_1=0$ oraz $\alpha_1=-1$. Lemmat 12.13 jest więc udowodniony.

Przechodząc do dowodu tw. 12.12, przypuśćmy, że $\tau_0$ jest punktem wspólnym zbiorów $G_k$ i $G_l$, gdzie $k\neq l$. Niech $\tau_1=T_k^{-1}(\tau_0)$ i $\tau_2=T_l^{-1}(\tau_0)$. Punkty $\tau_1$ i $\tau_2$ należą do $G_0$, przy czym $\tau_2=T(\tau_1)$, gdzie $T=T_l^{-1}T_k\neq T_0$. Zatem $\tau_1=\tau_2$ i punkt ten jest wierzchołkiem zbioru $G_0$. Stąd wynika, że $\tau_0$ jest wierzchołkiem każdego ze zbiorów $G_k$ i $G_l$, i tw. 12.12 jest dowiedzione.

Na rysunku podane jest rozmieszczenie pewnej liczby trójkątów $G_k$. Zakreskowane są te części trójkątów, gdzie część urojona funkcji $J(\tau)$ jest dodatnia.




ĆWICZENIA. 1. W dowolnym otoczeniu każdego punktu $\tau_0$ osi rzeczywistej zawiera się nieskończenie wiele zbiorów $G_n$.

[*Wsk.* Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\tau_0=\alpha/\gamma$, gdzie $\alpha$ i $\gamma$ są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi. Jak wiadomo, można wtedy znaleźć liczby całkowite $\beta$ i $\delta$ takie, że $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Niech $T(\tau)=(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$ i niech $\Gamma_n$ oznacza zbiór $G_0$ przesunięty równolegle o $n$. Rozważyć zbiory $T(\Gamma_n)$.]

2. Każdy zbiór domknięty i ograniczony, zawarty w półpłaszczyźnie $\mathfrak{I}\tau>0$, pokryty jest przez skończoną liczbę zbiorów $G_n$.

3. Półpłaszczyzna $\mathfrak{I}\tau>0$ jest dla funkcji $J(\tau)$ obszarem naturalnym (por. Rozdz. VI, §4).

4. Funkcja $J(\tau)$ dąży do $\infty$, gdy $\tau\to 0$ pozostając w kącie $\varepsilon\leqslant\operatorname{Arg}\tau\leqslant\pi-\varepsilon$, jakiekolwiek byłoby $\varepsilon>0$.

5. Funkcja odwrotna $J^{-1}$ względem funkcji modułowej $J$ jest funkcją analityczną nieskończenie wartościową o jedynych punktach krytycznych w punktach $0, 1, \infty$ (Rozdz. VI, § 11); wszystkie jej wartości należą do półpłaszczyzny $\Im\tau>0$. Jeżeli $F(z)$ jest funkcją całkowitą nie przyjmującą wartości 0 ani 1, wówczas każda z funkcyj $J^{-1}F$ (por. Rozdz. VI, §§ 5, 9) redukuje się do stałej. Wyprowadzić stąd „małe twierdzenie Picarda" (Rozdz. VII, tw. 12.1).

[*Wsk.* Por. tw. 12.8 oraz Rozdz. VI, tw. 11.1. Na mocy twierdzenia o monodromii (Rozdz. VI, tw. 6.3) funkcja $J^{-1}F$ jest jednowartościowa, a więc holomorficzna; zastosować twierdzenie z ćw. 6, Rozdz. II, § 5.]

6. Poza własnościami wymienionymi w ćw. 5 funkcja $J^{-1}$ posiada jeszcze własność następującą: jeżeli $P$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, zawartym w półpłaszczyźnie $\Im\tau>0$, to zbiór tych punktów płaszczyzny, w których funkcja $J^{-1}$ przyjmuje przynajmniej jedną wartość $\tau\in P$, jest też ograniczony.

[*Wsk.* Por. ćw. 2.]

7. Opierając się na własnościach funkcji $J^{-1}$, udowodnić tw. Montela: Jeżeli $\{F_k(z)\}$ jest ciągiem funkcyj holomorficznych w obszarze $G$ i żadna z funkcyj tego ciągu nie przyjmuje w $G$ wartości 0 ani 1, wówczas ciąg $\{F_k(z)\}$ jest normalny (Rozdz. VII, tw. 13.12; twierdzenie to zawiera „wielkie twierdzenie Picarda").

[*Wsk.* Można przyjąć, że $G$ jest kołem, i wystarczy pokazać, że ciąg $\{F_k(z)\}$ zawiera podciąg niemal jednostajnie zbieżny w $G$ lub niemal jednostajnie rozbieżny w $G$ do $\infty$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieje wtedy w $G$ ciąg punktów $\{z_n\}$, taki, że $z_n\to z_0\in G$, $F_{k_n}(z_n)\to c_0$, gdzie $k_n\to\infty$, $c_0\neq 0,1,\infty$. Niech $J(\tau_0)=c_0$; wówczas $\tau_0\neq\infty$, $\Im\tau_0>0$ (p. tw. 12.8). Ustalmy teraz dla każdego $n$ jedną z funkcyj $J^{-1}F_{k_n}$ (Rozdz. VI, § 5, 9), oznaczając ją przez $\Phi_n$. Na zasadzie twierdzenia o monodromii dla koła (Rozdz. VI, tw. 6.2) funkcje $\Phi_n$ są holomorficzne w $G$, przy czym mogą być tak dobrane, że $\Phi_n(z_n)\to\tau_0$. Wreszcie z ciągu $\{\Phi_n\}$ (por. Rozdz. III, tw. 11.4) można wybrać podciąg $\{\Phi_{n_j}\}$ niemal jednostajnie zbieżny w $G$ do pewnej funkcji $\Phi$. Jeżeli funkcja $\Phi$ nie jest stałą, wówczas obszar $\Phi(G)$ zawiera się wraz z obszarami $\Phi_n(G)$ (por. Rozdz. III, tw. 11.2) w półpłaszczyźnie otwartej $\Im\tau>0$, $\tau\neq\infty$. Jeżeli natomiast $\Phi$ jest stałą, wówczas $\Phi(G)$ redukuje się do punktu $\tau_0=\lim\limits_n\Phi_n(z_n)$. W obydwu więc przypadkach, oznaczając przez $K$ dowolne koło domknięte zawarte w $G$, stwierdzamy, że $\Phi(K)$ jest pewnym zbiorem domkniętym i ograniczonym w półpłaszczyźnie $\Im\tau>0$. Tym samym, wszystkie zbiory $\Phi_{n_j}(K)$, począwszy od pewnego $j$, zawierają się w pewnym zbiorze $P$ domkniętym i ograniczonym, zawartym w półpłaszczyźnie $\Im\tau>0$. Funkcje $F_{k_{n_j}}(z)$ są więc wspólnie ograniczone na $K$ (p. ćw. 6), a przeto tworzą ciąg normalny. Sprzeczność!]

## § 13. Rozwiązanie układu równań $g_2(\omega,\omega')=a$, $g_3(\omega,\omega')=b$.

Z tw. 12.8 wynika pozytywne rozwiązanie zagadnienia sformułowanego na początku § 11, a mianowicie:

(13.1) *Jeżeli $a, b$ są dowolnymi liczbami skończonymi, spełniającymi warunek $a^3-27b^2\neq 0$, to zawsze istnieje para okresów $\omega,\omega'$ o ilorazie nierzeczywistym, taka że*

$$g_2(\omega,\omega')=a,\qquad g_3(\omega,\omega')=b. \tag{13.2}$$



Przypuśćmy najpierw, że $a\neq 0$ oraz $b\neq 0$. Jeżeli są spełnione równania (13.2), to mamy:

$$\frac{g_2^3(\omega,\omega')}{g_2^3(\omega,\omega')-27g_3^2(\omega,\omega')}=\frac{a^3}{a^3-27b^2},\qquad \frac{g_2(\omega,\omega')}{g_3(\omega,\omega')}=\frac{a}{b}; \tag{13.3}$$

odwrotnie, jeżeli wyrażenia $g_2$ i $g_3$ spełniają równania (13.3), to zachodzą też równości (13.2). Układy (13.2) i (13.3) są więc równoważne. Kładąc $\omega'/\omega=\tau$, piszemy pierwsze z równań (13.3) w postaci $J(\tau)=a^3/(a^3-27b^2)$. Na mocy tw. 12.8 równanie to zawsze posiada rozwiązanie w półpłaszczyźnie górnej. Gdy znamy już $\tau$, drugie z równań (13.3), które może być napisane w postaci

$$\omega^2 g_2(1,\tau)/g_3(1,\tau)=a/b,$$

daje nam $\omega$, a więc i $\omega'=\omega\tau$.

Przypuśćmy z kolei, że np. $a=0$. Układ równań (13.2) jest wtedy równoważny układowi $g_2^3/(g_2^3-27g_3^2)=0$, $g_3=b$, albo — co na jedno wychodzi — układowi $J(\tau)=0$, $\omega^{-6}g_3(1,\tau)=b$. Na zasadzie trzeciej z równości (12.10) możemy więc przyjąć $\tau=\varrho$ i z równania $\omega^{-6}g_3(1,\varrho)=b$ wyznaczyć $\omega$. Podobnie rozważamy przypadek gdy $b=0$. Tw. 13.1 jest więc całkowicie udowodnione [1]).

ĆWICZENIE. 1. Dane są trzy różne liczby $e_1, e_2, e_3$, spełniające warunek $e_1+e_2+e_3=0$. Istnieje wówczas taka para okresów $\omega,\omega'$, że:

$$\wp(\tfrac{1}{2}\omega;\omega,\omega')=e_1,\qquad \wp(\tfrac{1}{2}\omega';\omega,\omega')=e_2,\qquad \wp(\tfrac{1}{2}\omega+\tfrac{1}{2}\omega';\omega,\omega')=e_3.$$

## § 14. Całki eliptyczne.

W § niniejszym oznaczać będziemy przez $x$ zmienną zespoloną. Niech $P(x)$ będzie dowolnym wielomianem bez pierwiastków wielokrotnych. Rozważmy równanie

$$y^2=P(x). \tag{14.1}$$

Równanie to określa $y$ jako funkcję dwuwartościową zmiennej $x$. Jeżeli koło $K=K(x_0;r)$ o środku w skończoności nie zawiera żadnego pierwiastka wielomianu $P$, to w $K$ istnieją dwie gałęzie holomorficzne funkcji $y$, różniące się od siebie znakiem. Ustalając wartość $\sqrt{P(x)}$ w jednym z punktów koła $K$, wybieramy tym samym określoną gałąź funkcji $y$. Gałąź ta przedłuża się wzdłuż każdej krzywej, jaka wychodzi z $x_0$ i nie przechodzi przez punkt $\infty$ ani przez żaden z pierwiastków wielomianu $P$.

[1]) Powyższy dowód rozwiązalności układu $g_2=a$, $g_3=b$ podany został przez Hurwitza. Por. Hurwitz-Courant, *Funktionentheorie*, Wyd. II, Berlin 1930, p. 227.

*Całką eliptyczną oznaczoną* nazywa się każda całka krzywoliniowa postaci

$$(14.2)\qquad \int\limits_{L(x_0,x_1)} W(x,y)\,dx,$$

gdzie $W(x,y)$ jest funkcją wymierną dwu zmiennych, $y$ funkcją zmiennej $x$, określoną przez równanie (14.1), w którym $P(x)$ jest wielomianem stopnia 3 lub 4 bez pierwiastków wielokrotnych, wreszcie $L(x_0,x_1)$ krzywą regularną o początku $x_0$ i końcu $x_1$, nie przechodzącą przez żaden z pierwiastków funkcji $P(x)$. Zakładamy przy tym, że funkcja podcałkowa $W(x,y)$ nie redukuje się do funkcji wymiernej samego $x$ ani też nie przyjmuje wartości $\infty$ na $L$.

(Warunki dotyczące krzywej $L(x_0,x_1)$ oraz wartości przyjmowanych przez $W(x,y)$ wzdłuż $L$ nie są konieczne i mogą być w pewnych przypadkach pominięte. Mielibyśmy wtedy do czynienia z całkami eliptycznymi *niewłaściwymi*. Nie będziemy ich jednak rozważać, by nie wprowadzać nieistotnych trudności.)

Oczywiście całka (14.2) staje się określoną dopiero wtedy, gdy ustalimy wartość funkcji $y$ w pewnym punkcie krzywej całkowania, np. w punkcie $x_0$. Wówczas wartości $y$ są wyznaczone wzdłuż całej krzywej $L(x_0,x_1)$.

Jeżeli ustalimy punkt $x_0$, a zmieniać będziemy punkt $x_1=x$, to całka (14.2) zależeć będzie od $x$ oraz od krzywej $L$. Całkę taką, do której dodamy jeszcze stałą dowolną, nazywać będziemy *całką eliptyczną nieoznaczoną*. Będziemy ją pisali w postaci

$$(14.3)\qquad \int W(x,y)\,dx.$$

Ze względu na równanie (14.1) mamy $W(x,y)=(A+By)/(C+Dy)$, gdzie $A,B,C,D$ są wielomianami względem $x$. Mnożąc licznik i mianownik przez $C-Dy$, widzimy, że $W(x,y)=R(x)+S(x)y$, gdzie $R=(AC-BDP)/(C^2-D^2P)$ i $S=(BC-AD)/(C^2-D^2P)$ są funkcjami wymiernymi zmiennej $x$.

Wykażemy teraz, że przy rozważaniu całek eliptycznych można się ograniczyć do przypadku, gdy $P$ jest wielomianem stopnia 3-go i to dość specjalnej postaci. Przypuśćmy bowiem, że

$$P(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$

gdzie $a_0\neq 0$, i niech $\hat{x}$ będzie pierwiastkiem wielomianu $P(x)$. Podstawmy $x=\hat{x}+1/\xi$. Wówczas $P(x)=Q(\xi)/\xi^4$, przy czym $Q(\xi)$ jest wielomianem stopnia 3-ego, bez pierwiastków wielokrotnych.



Całka (14.3) przyjmuje postać $\int W_1(\xi,\eta)\,d\xi$, gdzie $\eta^2=Q(\xi)$. Możemy oczywiście założyć, że $Q(\xi)=4\xi^3+b_1\xi^2+b_2\xi+b_3$. Zróbmy jeszcze jedną zamianę zmiennych, podstawiając $\xi=\xi_1-\frac{1}{12}b_1$. Wielomian $Q(\xi)$ przejdzie na wielomian stopnia 3-ego, nie zawierający wyrazu kwadratowego. Innymi słowy, możemy ograniczyć się do rozważania całek eliptycznych (14.3), w których $y$ jest funkcją określoną przez równanie

$$(14.4)\qquad y^2=4x^3-g_2x-g_3.$$

Funkcja $y$ ma 4 punkty krytyczne, a mianowicie trzy pierwiastki prawej strony równania (14.4) oraz punkt $\infty$. Spółczynniki $g_2$ i $g_3$ są tu pewnymi stałymi, zaś wielomian $4x^3-g_2x-g_3$ nie posiada pierwiastków wielokrotnych.

Ten ostatni warunek wyraża, że $g_2^3-27g_3^2\neq 0$. Na zasadzie tw. 13.1 możemy więc liczby $g_2$ i $g_3$ uważać za niezmienniki $g_2(\omega,\omega')$ i $g_3(\omega,\omega')$ pewnej pary okresów $\omega,\omega'$ o ilorazie nierzeczywistym.

(14.5) *Jeżeli* $g_2=g_2(\omega,\omega')$, $g_3=g_3(\omega,\omega')$ *oraz* $\wp(u)=\wp(u;\omega,\omega')$, *to każdej parze liczb* $x,y$, *spełniającej równanie* (14.4), *odpowiada w każdym równoległoboku okresowości* $R$ *funkcji* $\wp(u)$ *dokładnie jeden punkt* $\hat{u}$ *taki, że* $x=\wp(\hat{u})$ *oraz* $y=\wp'(\hat{u})$.

Dowód. Równoległobok $R$ zawiera napewno jeden, a co najwyżej dwa punkty $u$ takie, że $\wp(u)=x$ (p. tw. 3.8). Oznaczmy je przez $u_1$ i $u_2$, przyjmując $u_1=u_2$, jeżeli istnieje jeden tylko punkt $u$, spełniający to równanie. Mamy $u_1\equiv -u_2$, a więc $\wp'(u_1)=-\wp'(u_2)$ (również wtedy, gdy $u_1=u_2$, ponieważ wówczas $\wp'(u_1)=\wp'(u_2)=0$). Z drugiej strony (por. (5.6))

$$[\wp'(u_k)]^2=4[\wp(u_k)]^3-g_2\wp(u_k)-g_3=4x^3-g_2x-g_3=y^2,$$

gdzie $k=1,2$. Wynika stąd, że $y=\wp'(u_k)$ dla jednej z wartości $k=1,2$. Oznaczając odpowiedni punkt $u_k$ przez $\hat{u}$, mamy $x=\wp(\hat{u})$, $y=\wp'(\hat{u})$.

(14.6) *Niech* $g_2=g_2(\omega,\omega')$ *oraz* $g_3=g_3(\omega,\omega')$ *i niech* $x=x(t)$, *gdzie* $a\leqslant t\leqslant b$, *będzie krzywą regularną nie przechodzącą przez żaden z pierwiastków prawej strony równania* (14.4). *Niech dalej* $y=y(t)$ *będzie funkcją ciągłą w* $[a,b]$, *związaną z* $x=x(t)$ *równaniem* (14.4).

*Istnieje wówczas krzywa regularna* $u=u(t)$, *gdzie* $a\leqslant t\leqslant b$, *taka że:*

$$(14.7)\qquad x(t)=\wp(u(t)),\qquad y(t)=\wp'(u(t))\qquad \text{dla}\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

Dowód. Niech $a \leqslant t_0 \leqslant b$, $x_0 = x(t_0)$ i $y_0 = y(t_0)$. Wówczas $y_0^2 = 4x_0^3 - g_2 x_0 - g_3 \neq 0$ i na mocy lemmatu 14.5 istnieje punkt $u_0$ taki, że $\wp(u_0) = x_0$, $\wp'(u_0) = y_0 \neq 0$. Tym samym (Rozdz. III, tw. 12.4) funkcja $\wp(u)$ jest jednoznacznie odwracalna w otoczeniu punktu $u_0$ i odwrócenie jej przekształca łuk krzywej $x = x(t)$ w pewnym dostatecznie małym przedziale $[t_0 - h, t_0 + h]$ na pewien łuk regularny $u = u(t)$ w tym samym przedziale (jeżeli $t_0 = a$ lub $t_0 = b$ rozważamy oczywiście tylko przedział $[t_0, t_0 + h]$ lub $[t_0 - h, t_0]$). Dla $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0 + h$ będziemy zatem mieli $\wp(u(t)) = x(t)$ oraz $[\wp'(u(t))]^2 = [y(t)]^2$, a że $\wp'(u_0) = y_0$ oraz $y(t) \neq 0$, więc dokładnie $\wp'(u(t)) = y(t)$.

Stosując teraz np. twierdzenie Borela-Lebesgue'a (Wstęp, tw. 6.4), możemy rozbić przedział $[a, b]$ na skończoną ilość podprzedziałów $[t_1, t_2], [t_2, t_3], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, gdzie $a = t_1$, $b = t_n$, w ten sposób, że określić w nich można odpowiednio krzywe regularne $C_k$ dane przez równania $u = u_k(t)$, spełniające warunki $\wp(u_k(t)) = x(t)$, $\wp'(u_k(t)) = y(t)$ dla $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Z uwagi na okresowość funkcyj $\wp$ i $\wp'$ przyjąć możemy przy tym, że dla $k = 2, 3, \ldots, n-1$ początek krzywej $C_k$ i koniec krzywej $C_{k-1}$ należą do tego samego równoległoboku okresowości. Wówczas z uwagi na lemmat 14.5 początek krzywej $C_k$ pokrywa się z końcem krzywej $C_{k-1}$. Możemy więc określić funkcję $u(t)$ w $[a, b]$, przyjmując $u(t) = u_k(t)$ dla $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Funkcja $u(t)$ spełnia warunki (14.7).

Oznaczmy przez $L$ i $l$ odpowiednio krzywe $x = x(t)$ i $u = u(t)$, występujące w tw. 14.6, i załóżmy, że funkcja $W(x, y)$ jest skończona wzdłuż $L$. Mamy wówczas

(14.8) $$\int_L W(x, y)\, dx = \int_l W[\wp(u), \wp'(u)]\, \wp'(u)\, du;$$

lewa strona jest tu bowiem równa

$$\int_a^b W\{x(t), y(t)\}\, x'(t)\, dt = \int_a^b W\{\wp(u(t)), \wp'(u(t))\}\, \wp'(u(t))\, u'(t)\, dt$$

(por. (14.7)), zaś ostatnia całka jest identyczna z prawą stroną wzoru (14.8).

Zauważmy teraz, że funkcja $F(u) = W\big(\wp(u), \wp'(u)\big)\, \wp'(u)$ jest eliptyczna, a więc w myśl tw. 8.6 daje się wyrazić w postaci sumy

$$A + \sum_i [C_1^{(i)} \zeta(u - \beta_i) + C_2^{(i)} \zeta'(u - \beta_i) + \ldots + C_{k_i}^{(i)} \zeta^{(k_i - 1)}(u - \beta_i)],$$



gdzie stałe mają to samo znaczenie co w tw. 8.6. Skorzystajmy ze wzoru (14.8) i zastąpmy całkę po stronie lewej przez całkę nieoznaczoną. Otrzymamy równość

$$\int W(x, y)\, dx = C + Au + \sum_i \Big[C_1^{(i)} \int \zeta(u - \beta_i)\, du + \ldots + C_{k_i}^{(i)} \int \zeta^{(k_i - 1)}(u - \beta_i)\, du\Big],$$

przy czym w całkach po stronie prawej nie uwidoczniamy krzywej całkowania, gdyż zależy ona od krzywej całkowania po stronie lewej. Innymi słowy

$$\int W(x, y)\, dx = C + Au + \sum_i C_1^{(i)} \log \sigma(u - \beta_i) + \sum_i C_2^{(i)} \zeta(u - \beta_i)$$
$$- \sum_i [C_3^{(i)} \wp(u - \beta_i) + \ldots + C_{k_i}^{(i)} \wp^{(k_i - 3)}(u - \beta_i)].$$

Ostatnia suma jest funkcją eliptyczną, a więc ze względu na tw. 8.10 jest funkcją wymierną względem $\wp(u)$ i $\wp'(u)$. Poza tym $\zeta(u - \beta_i) = \zeta(u) + [\zeta(u - \beta_i) - \zeta(u)]$, przy czym różnica $\zeta(u - \beta_i) - \zeta(u)$ ma okresy $\omega$ i $\omega'$ (por. wzór (6.6)), a więc jest eliptyczna. Zatem

$$\int W(x, y)\, dx = C + Au + A' \zeta(u) + \sum_i C_1^{(i)} \log \sigma(u - \beta_i) + R\big(\wp(u), \wp'(u)\big),$$

gdzie $C, A, A', C_1^{(i)}$ są stałymi, zaś $R\big(\wp(u), \wp'(u)\big)$ jest funkcją wymierną względem $\wp(u)$ i $\wp'(u)$. Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

(14.9) *Każda całka eliptyczna $\int W(x, y)\, dx$, gdzie $y$ jest określone przez wzór* (14.4), *daje się, przy pomocy odpowiedniego podstawienia $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$, wyrazić jako suma funkcji wymiernej względem $\wp(u)$ i $\wp'(u)$, oraz wyrażenia liniowego względem $u$, $\zeta(u)$ i skończonej liczby funkcyj* $\log \sigma(u - \beta_i)$.

Całka eliptyczna oznaczona (14.2) zależy nie tylko od krańców $x_0, x_1$ krzywej całkowania, lecz i od samej krzywej. Przy pomocy wzoru (14.8) można zbadać tę zależność. Ograniczymy się dla prostoty do całki

(14.10) $$J = \int_L \frac{dx}{y} = \int_L \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

zwanej *całką eliptyczną Weierstrassa pierwszego gatunku*. Zamiana zmiennych $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$ (por. tw. 14.6) daje wzór

$$\int_L \frac{dx}{y} = \int_l du = u_1 - u_0,$$

gdzie $u_0$ i $u_1$ oznaczają początek i koniec krzywej $l$.

Niech $x_0$ i $x_1$ oznaczają początek i koniec krzywej $L$, zaś $y_0$ i $y_1$ wartości funkcji $y$ w punktach $x_0$ i $x_1$. Zatem:

(a) $\wp(u_0)=x_0$, $\quad \wp'(u_0)=y_0$, $\qquad$ (b) $\wp(u_1)=x_1$, $\quad \wp'(u_1)=y_1$.

Zastąpmy teraz $L$ przez krzywą $\widetilde{L}$, mającą ten sam początek i ten sam koniec co $L$, i niech $\widetilde{J}$ oznacza wartość rozważanej całki wzdłuż $\widetilde{L}$. Zakładamy przy tym, iż całkując wzdłuż $\widetilde{L}$, wychodzimy z tej samej wartości $y_0$ funkcji $y$ w punkcie $x_0$.

Niech $\widetilde{u}_0$ i $\widetilde{u}_1$ oznaczają początek i koniec krzywej $\widetilde{l}$, odpowiadającej krzywej $\widetilde{L}$. Możemy przyjąć, że $\widetilde{u}_0=u_0$. Jeżeli $\widetilde{y}_1$ oznacza wartość funkcji $y$ w punkcie $x_1$ po przedłużeniu wzdłuż $\widetilde{L}$, to albo $\widetilde{y}_1=y_1$ albo $\widetilde{y}_1=-y_1$. W pierwszym przypadku z równości (b) oraz z analogicznych równości $\wp(\widetilde{u}_1)=x_1$, $\wp'(\widetilde{u}_1)=y_1$ otrzymujemy, że $\widetilde{u}_1=u_1+m\omega+n\omega'$, gdzie $m$ i $n$ są liczbami całkowitymi (p. tw. 14.5). W drugim przypadku mamy $\widetilde{u}_1=-u_1+m\omega+n\omega'$. Z równości $J=u_1-u_0$ i $\widetilde{J}=\widetilde{u}_1-u_0$ wynika więc, że:

(14.11) *Jeżeli w całce* (14.10) *zastąpimy krzywą $L$ przez krzywą $\widetilde{L}$, mającą ten sam początek $x_0$ i ten sam koniec co $L$, i jeżeli w obu przypadkach nadamy funkcji $y$ jedną i tę samą wartość $y_0$ w początku krzywej całkowania, to nowa całka $\widetilde{J}$ związana będzie z $J$ jednym z dwu wzorów:*

(14.12) $$\widetilde{J}=J+m\omega+n\omega', \qquad \widetilde{J}=-J-2u_0+m\omega+n\omega',$$

*przy czym liczby $\omega$ i $\omega'$ mają iloraz nierzeczywisty, spółczynniki $m$ i $n$ są całkowite, zaś $\wp(u_0)=x_0$.*

*Pierwszy z wzorów* (14.12) *zachodzi w przypadku, gdy funkcja $y$ przyjmuje na krańcach krzywych $L$ i $\widetilde{L}$ te same wartości, a drugi, gdy te wartości różnią się znakiem.*

Oczywiście $m$ i $n$ mogą być dowolnymi liczbami całkowitymi. Np. dla zrealizowania pierwszego ze wzorów (14.12) wystarczy wybrać dwie dowolne krzywe całkowania $l$ i $\widetilde{l}$, mające wspólny początek $u_0$, zaś końce różniące się o $m\omega+n\omega'$, a jako $L$ i $\widetilde{L}$ przyjąć odpowiednio krzywe otrzymane z $l$ i $\widetilde{l}$ przez przekształcenie $x=\wp(u)$.



Jeżeli $x_0$ jest liczbą skończoną, zaś koło $K=K(x_0;R)$ nie zawiera żadnego z pierwiastków $e_1,e_2,e_3$ prawej strony równania (14.4), przy czym $g_2^3-27g_3^2\neq 0$, to funkcja

$$F(\xi)=\int_{x_0}^{\xi}\frac{dx}{y},$$

gdzie $y^2=4x^3-g_2x-g_3$, $\xi\in K$, a całkujemy wzdłuż odcinka $[x_0,\xi]$, jest holomorficzna w kole $K$. Funkcja ta przedłuża się wzdłuż każdej krzywej, nie przechodzącej przez żaden z punktów $e_1,e_2,e_3,\infty$. Łatwo widzieć, że wszystkie wartości, jakie funkcja $F$ przyjmuje w punkcie $\xi$, są dane przez całki postaci $\int\limits_{L(x_0,\xi)}\frac{dx}{y}$, gdzie $L(x_0,\xi)$ jest dowolną krzywą regularną o początku w punkcie $x_0$ i o końcu w punkcie $\xi$, nie przechodzącą przez punkty $e_1,e_2,e_3$. Funkcję analityczną $F(x)$, którą w ten sposób otrzymujemy, nazywamy również *całką eliptyczną Weierstrassa pierwszego gatunku*. Jeżeli $J$ jest jedną z wartości funkcji $F$ w punkcie $x$, to wszystkie jej wartości są dane przez wzory (14.12). Zatem $F(x)$ jest funkcją nieskończenie-wartościową, mającą co najwyżej punkty krytyczne $e_1,e_2,e_3,\infty$.

Rozwijając funkcję $1/y$ w otoczeniu punktów $e_i$ na szereg Laurenta względem $(x-e_i)^{\frac{1}{2}}$, sprawdzamy łatwo, że punkty te są punktami krytycznymi algebraicznymi funkcji $F(x)$, o rzędzie rozgałęzienia 1. To samo, w sposób analogiczny, stwierdzamy dla punktu $\infty$.

Stosując odpowiednie podstawienie $x=\wp(u)$, $y=\wp'(u)$ dla $x\in K$, widzimy bez trudności, że *funkcja $F(x)$ jest odwróceniem* (por. Rozdz. VI, § 5) *funkcji $\wp(u+u_0)$, gdzie $u_0$ jest pewną stałą.*

W ten sposób, wychodząc z całek eliptycznych, dochodzimy w sposób naturalny do funkcyj eliptycznych. Na tej właśnie drodze Abel i Jacobi wprowadzili po raz pierwszy funkcje eliptyczne. Rozwinięta w §§ 3-10 niniejszego rozdziału teoria funkcyj eliptycznych, oparta na pojęciu dwuokresowości, jest historycznie późniejsza i zawdzięczamy ją głównie Liouville'owi oraz Weierstrassowi.

ĆWICZENIA. 1. Niech $L$ i $\widetilde{L}$ oznaczają dwie krzywe o początku $x_0$ i końcu $x_1$, nie przechodzące przez punkt $\infty$ ani przez żaden z pierwiastków $e_1,e_2,\dots,e_n$ wielomianu $P(x)$ stopnia $n$. Jeżeli funkcja analityczna $y$, określona przez wzór $y^2=P(x)$, przyjmuje w punkcie $x_0$ wartość $y_0$, zaś w punkcie $x_1$, po przedłużeniu wzdłuż krzywych $L$ i $\widetilde{L}$, odpowiednio wartości $y_1$ i $\widetilde{y}_1$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by $y_1=\widetilde{y}_1$, jest by liczba

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ind}_C e_i, \quad \text{gdzie} \quad C=L+(-\widetilde{L}),$$

była parzysta.

2. Jeżeli $P(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia o pierwiastkach jednokrotnych, zaś koło $K=\mathrm{K}(x_0; R)$ nie zawiera pierwiastków wielomianu $P$, to funkcja

$$F(\xi)=\int_{x_0}^{\xi}\frac{dx}{y},$$

gdzie $y^2=P(x)$, a całkujemy wzdłuż odcinka $[x_0, \xi]$, jest holomorficzna w kole $K$. Funkcja ta przedłuża się wzdłuż każdej krzywej nie przechodzącej przez żaden z pierwiastków wielomianu $P$. Udowodnić, że, przy odpowiednim doborze okresów $\omega, \omega'$, funkcja $F$ jest odwróceniem funkcji

$$\frac{a\wp(u+u_0;\, \omega, \omega')+b}{c\wp(u+u_0;\, \omega, \omega')+d},$$

gdzie $a, b, c, d, u_0$ są pewnymi stałymi.