ROZDZIAŁ VII

FUNKCJE CAŁKOWITE. FUNKCJE MEROMORFICZNE NA CAŁEJ PŁASZCZYŹNIE OTWARTEJ.

§ 1. Iloczyny nieskończone. Niech będzie dany ciąg liczb zespolonych $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Tworzymy nowy ciąg liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, gdzie

$$p_n = a_1 a_2 \ldots a_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Liczbę p_n nazywamy n-tym *iloczynem częściowym* iloczynu nieskończonego

$$a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.1}$$

Liczbę a_k nazywamy k-tym *czynnikiem*, albo k-tym *wyrazem*, iloczynu (1.1).

Gdybyśmy się chcieli ściśle wzorować na definicjach z teorii szeregów, to powiedzielibyśmy, że iloczyn (1.1) jest zbieżny do wartości p, jeżeli $p_n \to p$ gdy $n \to \infty$. Definicja taka, jakkolwiek zasadniczo poprawna, byłaby z wielu względów niedogodna. Tak np. każdy iloczyn mający choć jeden czynnik równy zeru byłby zbieżny, podczas gdy skreślenie tego czynnika mogłoby wywołać rozbieżność (np. w iloczynie $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots$). Wobec tego powyższa definicja musi być zmieniona.

Przypuśćmy najpierw, że wszystkie czynniki a_i są różne od 0. Jeżeli wówczas $p_n \to p$, gdzie p jest liczbą skończoną różną od 0, to powiemy, że *iloczyn* (1.1) *jest zbieżny do* p, a p nazwiemy *wartością* iloczynu. W ogólnym przypadku mówimy, że iloczyn (1.1) jest *zbieżny*, jeżeli są spełnione następujące dwa warunki:

(a) istnieje taki wskaźnik ν, że dla $n > \nu$ mamy $a_n \neq 0$,

(b) iloczyn $a_{\nu+1} a_{\nu+2} a_{\nu+3} \ldots$ jest zbieżny w sensie poprzedniej definicji.

Oznaczając przez q wartość iloczynu $a_{\nu+1}a_{\nu+2}a_{\nu+3}\dots$, przyjmujemy wówczas za *wartość* iloczynu (1.1) liczbę

$$p=a_1a_2\dots a_\nu q.$$

Zatem wartość iloczynu nieskończonego zbieżnego jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy choć jeden z czynników jest równy 0.

Łatwo widzieć, że dodanie, ewentualnie skreślenie, pewnej ilości czynników w iloczynie zbieżnym nie wpływa na zbieżność. Wobec tego przy badaniu iloczynu zbieżnego możemy założyć, gdy nam to dogodnie, że wszystkie czynniki tego iloczynu są od zera różne.

Przykłady. Oba iloczyny

$$\text{(1.2)}\qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

są rozbieżne, gdyż na iloczyny częściowe mamy odpowiednio wzory

$$p_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\dots\frac{n+1}{n}=n+1, \qquad p_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\dots\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

Pierwszy iloczyn jest więc rozbieżny do $+\infty$; o drugim możemy powiedzieć, że jest *rozbieżny* do 0, gdyż iloczyny częściowe dążą do 0. Natomiast np. iloczyn nieskończony $0\cdot1\cdot1\cdot1\dots$ jest *zbieżny* do 0.

(1.3) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności iloczynu* (1.1) *jest, aby dla dowolnego* $\varepsilon>0$ *istniało takie* n_0, *że przy każdym* $n>n_0$ *i przy każdym* $k>0$

$$\text{(1.4)}\qquad |a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+k}-1|<\varepsilon.$$

Twierdzenie to jest odpowiednikiem warunku Cauchy'ego na zbieżność szeregu (lub ciągu). Mówi ono, że jeżeli się dostatecznie daleko posuniemy w iloczynie nieskończonym zbieżnym, to każda grupa kolejnych czynników będzie miała iloczyn dowolnie bliski 1.

Dla dowodu konieczności warunku przypuśćmy, odrzucając ewentualnie kilka pierwszych wyrazów, że wszystkie czynniki a_n są różne od 0. Zatem $p_n=a_1a_2\dots a_n\to p\neq0$, a więc istnieje taka liczba dodatnia ω, że $|p_n|>\omega$ dla $n=1,2,\dots$ Ze względu na wspomniane twierdzenie Cauchy'ego istnieje taka liczba n_0, że $|p_{n+k}-p_n|<\omega\varepsilon$ dla $n>n_0$. Dzieląc tę nierówność przez $|p_n|$ i pamiętając, że $\omega<|p_n|$, dostajemy (1.4).

Dla dowodu wystarczalności, połóżmy najpierw we wzorze (1.4) $\varepsilon=\frac{1}{2}$ i niech $p'_n=a_{n_0+1}a_{n_0+2}\dots a_n$ dla $n>n_0$. Z nierówności (1.4) dostajemy $\frac{1}{2}<|p'_n|<\frac{3}{2}$, a więc, jeżeli ciąg $\{p'_n\}$ jest w ogóle zbieżny, to na pewno nie do 0. Rozważając teraz ε dowolne, widzimy, że (1.4) może być napisane w postaci $|p'_{n+k}/p'_n-1|<\varepsilon$, a więc

$$|p'_{n+k}-p'_n|<\varepsilon|p'_n|<\tfrac{3}{2}\varepsilon.$$

W myśl twierdzenia Cauchy'ego ciąg $\{p'_n\}$ jest zbieżny. Ponieważ ma on granicę różną od 0, więc zbieżny jest też iloczyn (1.1).

Przyjmując $k=1$ w nierówności (1.4), otrzymamy $|a_{n+1}-1|<\varepsilon$ dla $n>n_0$. A więc:

(1.5) *Warunkiem koniecznym zbieżności iloczynu* (1.1) *jest, by jego wyrazy* a_n *dążyły do* 1.

Że warunek ten jest jedynie warunkiem koniecznym, a nie wystarczającym, widać chociażby na przykładzie iloczynów (1.2), które są rozbieżne, pomimo że ich wyrazy dążą do 1.

Wobec tw. 1.5, dogodnie jest nieraz pisać iloczyn (1.1) w postaci

$$\text{(1.6)}\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n).$$

Warunkiem koniecznym zbieżności iloczynu (1.6) jest, by $u_n\to0$.

W dalszych rozważaniach korzystać będziemy z następującego lemmatu:

(1.7) *Dla każdego* x *rzeczywistego zachodzi nierówność*

$$\text{(1.8)}\qquad 1+x\leqslant e^x.$$

Dowód. Dla $x\geqslant0$ nierówność (1.8) jest oczywista (p. wzór (7.1), Rozdz. I). Ażeby udowodnić ją dla $x<0$, wystarczy zauważyć, że różnica $e^x-(1+x)$ ma pochodną ujemną dla $x<0$, a więc jest funkcją malejącą w przedziale $[-\infty,0]$. Różnica ta znika dla $x=0$, jest więc dodatnia dla $x<0$.

(1.9) *Jeżeli wszystkie liczby* u_n *są nieujemne, to warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności iloczynu* (1.6) *jest zbieżność szeregu* $u_1+u_2+\dots$

Dowód oprzemy na następujących dwu nierównościach:

$$\text{(1.10)}\qquad (1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\geqslant1+u_1+u_2+\dots+u_n,$$

$$\text{(1.11)}\qquad 1+u_k\leqslant e^{u_k}.$$

Nierówność (1.10) jest oczywista, jeżeli uwzględnimy, że prawa jej strona zawiera tylko część wyrazów powstałych po wymnożeniu strony lewej i że liczby $u_1, u_2, \ldots$ są z założenia nieujemne. Nierówność (1.11) jest konsekwencją nierówności (1.8).

Oznaczmy teraz n-tą sumę częściową szeregu $u_1+u_2+\ldots$ przez s_n, zaś n-ty iloczyn częściowy iloczynu (1.6) przez p_n. Ponieważ liczby $u_1, u_2, \ldots$ są nieujemne, ciąg $p_1, p_2, \ldots$ jest niemalejący. Jest on więc zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony. Rozważmy teraz nierówności:

$$p_n \geqslant 1+s_n, \qquad p_n \leqslant e^{s_n}. \tag{1.12}$$

Pierwsza z nich jest identyczna z (1.10). Druga powstaje przez przemnożenie nierówności (1.11) dla $k=1,2,\ldots,n$. Ze wzorów (1.12) widzimy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym ograniczoności ciągu $\{p_n\}$ jest ograniczoność ciągu $\{s_n\}$, co dowodzi naszego twierdzenia.

Iloczyn (1.6) nazywa się *zbieżnym bezwzględnie*, jeżeli zbieżny jest iloczyn

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|), \tag{1.13}$$

albo — co w myśl tw. 1.9 na jedno wychodzi — jeżeli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Jeżeli iloczyn (1.6) jest zbieżny, zaś (1.13) rozbieżny, to mówimy, że iloczyn (1.6) jest *zbieżny warunkowo*.

Iloczyn (1.1) jest więc zbieżny bezwzględnie, jeżeli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-1|$.

Udowodnimy obecnie, że własności iloczynów bezwzględnie zbieżnych są analogiczne do własności szeregów bezwzględnie zbieżnych.

(1.14) *Jeżeli iloczyn* (1.6) *jest zbieżny bezwzględnie, to:*

(a) *jest zbieżny w sensie zwykłym,*

(b) *pozostaje zbieżny po dowolnej zmianie porządku czynników,*

(c) *wartość iloczynu nie zależy od uporządkowania czynników.*

Dowód. (a) wynika z tw. 1.3 oraz nierówności

$$\begin{aligned}|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})-1| \leqslant \\ \leqslant (1+|u_{n+1}|)(1+|u_{n+2}|)\ldots(1+|u_{n+k}|)-1.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Dla otrzymania tej nierówności wymnóżmy lewą stronę i skróćmy składniki $+1$ i -1. Jeżeli teraz zastąpimy wszystkie wyrazy przez ich wartości bezwzględne, a następnie znów wprowadzimy wyrazy $+1$ i -1, to otrzymamy stronę prawą.

(b) wynika z (a) oraz z tego, że zbieżność szeregu $|u_1|+|u_2|+\ldots$ nie zależy od porządku wyrazów.

Dla dowodu (c) możemy przypuścić, że żaden z czynników iloczynu (1.6) nie znika. W przeciwnym bowiem razie jest oczywiste, że, jakikolwiek byłby porządek czynników, wartość iloczynu będzie zawsze ta sama, a mianowicie równa zeru.

Niech p_n i p'_n oznaczają odpowiednio n-te iloczyny częściowe iloczynu (1.6) oraz iloczynu powstałego z (1.6) przez dowolną zmianę porządku wyrazów. Po skróceniu czynników wspólnych w liczniku i mianowniku możemy napisać

$$\frac{p_n}{p'_n}=\frac{(1+u_{k_1})(1+u_{k_2})\ldots(1+u_{k_m})}{(1+u_{k'_1})(1+u_{k'_2})\ldots(1+u_{k'_m})}. \tag{1.16}$$

Mamy tu $k_1<k_2<\ldots<k_m$ oraz $k'_1<k'_2<\ldots<k'_m$, przy czym wskaźniki te zależą od n. Ponieważ każdy wyraz iloczynu (1.6) występuje, dla n dostatecznie dużego, zarówno w p_n jak i w p'_n, przeto wskaźniki początkowe k_1 i k'_1 rosną nieograniczenie, gdy $n\to\infty$. Zauważmy teraz (por. (1.15) oraz nierówność (1.11), w której możemy zastąpić u_k przez $|u_k|$), że

$$\begin{aligned}|(1+u_{k_1})(1+u_{k_2})\ldots(1+u_{k_m})-1| \leqslant (1+|u_{k_1}|)(1+|u_{k_2}|)\ldots(1+|u_{k_m}|)-1 \leqslant \\ \leqslant \exp\Big(\sum_{i=1}^{m}|u_{k_i}|\Big)-1 \leqslant \exp\Big(\sum_{j=k_1}^{\infty}|u_j|\Big)-1\end{aligned}$$

i że ostatnie wyrażenie dąży do 0, gdy $n\to\infty$. Zatem licznik ułamka (1.16) dąży do 1, gdy n rośnie nieograniczenie. To samo, przez symetrię, można powiedzieć o mianowniku. Zatem $p_n/p'_n\to 1$ i część (c) twierdzenia jest udowodniona.

W przypadku, gdy wszystkie liczby u_n są niedodatnie, mamy twierdzenie analogiczne do (1.9), a mianowicie:

(1.17) *Jeżeli* $v_n \geqslant 0$ *dla* $n=1,2,\ldots$, *to iloczyn*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-v_n) \tag{1.18}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $v_1+v_2+\ldots$

Dowód. Jeżeli szereg $v_1+v_2+\ldots$ jest zbieżny, to w myśl twierdzeń 1.9 i 1.14 (a) iloczyn (1.18) jest zbieżny.

Załóżmy teraz zbieżność iloczynu (1.18) i niech p oznacza wartość tego iloczynu. Odrzucając ewentualnie kilka pierwszych czynników, możemy przypuścić, że $1-v_n>0$ dla $n=1,2,\ldots$ Jeżeli więc położymy $p_n=(1-v_1)(1-v_2)\ldots(1-v_n)$ oraz $s_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$, to podstawiając do (1.8) $x=-v_k$, gdzie $k=1,2,\ldots,n$, i przemnażając stronami otrzymane nierówności, dostaniemy, że $p_n\leqslant e^{-s_n}$.

Z założenia zbieżności iloczynu (1.18) oraz z tego, że wszystkie jego czynniki są dodatnie i nie większe od jedności, wynika, że $p_n\geqslant p>0$ dla $n=1,2,\ldots$ Z nierówności $p_n\leqslant e^{-s_n}$ otrzymujemy $e^{-s_n}\geqslant p$, a więc ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony z góry. Ponieważ liczby v_k są nieujemne, szereg $v_1+v_2+\ldots$ jest zbieżny i twierdzenie jest całkowicie udowodnione.

Zajmiemy się obecnie *iloczynami funkcyjnymi*, t. j. iloczynami postaci

$$\prod_{n=1}^{\infty}\bigl(1+u_n(z)\bigr), \tag{1.19}$$

gdzie $u_1(z), u_2(z),\ldots$ są funkcjami zmiennej zespolonej z. Jeżeli iloczyn (1.19) jest zbieżny w każdym punkcie pewnego zbioru Z i jeżeli ciąg iloczynów częściowych $p_n(z)$ tego iloczynu jest na Z zbieżny jednostajnie, wówczas mówimy, że iloczyn (1.19) jest *zbieżny jednostajnie* na Z. W przypadku, gdy iloczyn jest zbieżny jednostajnie w każdym podzbiorze domkniętym Z zbioru otwartego G, będziemy mówić, że iloczyn jest *zbieżny niemal jednostajnie* w G.

(1.20) *Jeżeli* $u_1(z), u_2(z),\ldots, u_n(z),\ldots$ *jest ciągiem funkcyj holomorficznych w obszarze* G, *a szereg*

$$|u_1(z)|+|u_2(z)|+\ldots+|u_n(z)|+\ldots \tag{1.21}$$

jest jednostajnie zbieżny i ograniczony w G, *wówczas iloczyn* (1.19) *jest dla* $z\in G$ *zbieżny bezwzględnie i jednostajnie do pewnej funkcji* $F(z)$ *holomorficznej w* G, *przy czym* $F(z)$ *znika w* G *tam i tylko tam, gdzie znika choć jeden czynnik iloczynu.*

Dowód. Zbieżność bezwzględna iloczynu (1.19) wynika natychmiast z założeń twierdzenia. Oznaczmy następnie przez M kres górny sumy szeregu (1.21) dla $z\in G$. Jeżeli $p_n(z)$ jest n-tym iloczynem częściowym dla (1.19), to

$$|p_n(z)|\leqslant\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k(z)|)\leqslant\exp\Bigl(\sum_{k=1}^{n}|u_k(z)|\Bigr)\leqslant\exp M.$$

Sprawdzamy natychmiast, że $p_k(z)-p_{k-1}(z)=p_{k-1}(z)\,u_k(z)$ dla $k=2,3,\ldots$ Zatem

$$p_n(z)=p_1(z)+\sum_{k=2}^{n}[p_k(z)-p_{k-1}(z)]=p_1(z)+\sum_{k=2}^{n}p_{k-1}(z)\,u_k(z).$$

Prawa strona jest tu n-tą sumą częściową szeregu jednostajnie zbieżnego w G, gdyż $|p_{k-1}(z)\,u_k(z)|\leqslant|u_k(z)|\exp M$, zaś szereg $|u_1(z)|+|u_2(z)|+\ldots$ jest z założenia jednostajnie zbieżny. Zatem iloczyn (1.19) jest jednostajnie zbieżny w G, a funkcja $F(z)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(z)$ jest holomorficzna w G.

Pozostała część twierdzenia, dotycząca pierwiastków funkcji $F(z)$, jest konsekwencją samej definicji iloczynu zbieżnego.

Udowodnimy obecnie twierdzenie o różniczkowaniu logarytmicznym iloczynu funkcyjnego:

(1.22) *Jeżeli obszar* G *nie zawiera punktu* ∞, *to, przy założeniach twierdzenia* 1.20, *w każdym punkcie* $z\in G$, *w którym* $F(z)\neq 0$, *mamy wzór*

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu'(z)}{1+u_\nu(z)}, \tag{1.23}$$

t. zn. pochodna logarytmiczna iloczynu (1.19) *jest równa sumie pochodnych logarytmicznych czynników. Szereg po prawej stronie wzoru* (1.23) *zawiera co najwyżej skończoną ilość wyrazów mających punkty osobliwe (bieguny) w* G. *Jeżeli wyrazy te odrzucimy, to pozostały szereg będzie zbieżny niemal jednostajnie w* G.

Dowód. Z założenia wynika, że $u_n(z)$ dąży jednostajnie do zera w G, gdy $n\to\infty$. Można więc dobrać tak duży wskaźnik n_0, że $1+u_\nu(z)\neq 0$ na zbiorze G, gdy $\nu>n_0$. W szczególności dla $\nu>n_0$ wyrazy szeregu (1.23) są holomorficzne w G. Położymy

$$\Phi_n(z)=\bigl(1+u_{n_0+1}(z)\bigr)\bigl(1+u_{n_0+2}(z)\bigr)\ldots\bigl(1+u_n(z)\bigr)\qquad dla\quad n>n_0$$

i niech $\Phi(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(z)$. W myśl tw. 1.20, ciąg $\{\Phi_n(z)\}$ dąży jednostajnie do $\Phi(z)$ na zbiorze G i funkcja $\Phi(z)$ jest w tym zbiorze holomorficzna.

Niech teraz Z będzie dowolnym zbiorem domkniętym, zawartym w G. Wartość bezwzględna funkcji $\Phi(z)$, jako ciągłej i różnej od 0 w G, jest w zbiorze Z ograniczona z dołu przez liczbę dodatnią η. Ze względu na zbieżność jednostajną ciągu $\{\Phi_n(z)\}$, będziemy mieli $|\Phi_n(z)|>\frac{1}{2}\eta$ dla $n>n_1$. Z drugiej strony, na zbiorze Z ciąg pochodnych $\{\Phi_n'(z)\}$ zmierza jednostajnie do $\Phi'(z)$ (por. tw. 6.1, Rozdz. II).

Otóż, jeżeli $\Phi_n(z)\to\Phi(z)$ oraz $\Phi_n'(z)\to\Phi'(z)$ jednostajnie na zbiorze Z i jeżeli $|\Phi_n(z)|>\frac{1}{2}\eta$ dla $n>n_1$ i $z\in Z$, wówczas

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi_n'(z)}{\Phi_n(z)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n_0+1}^{n}\frac{u_\nu'(z)}{1+u_\nu(z)}=\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty}\frac{u_\nu'(z)}{1+u_\nu(z)},$$

przy czym ostatni szereg jest zbieżny jednostajnie na Z.

Dla dokończenia dowodu twierdzenia wystarczy zauważyć, że $F(z)=\Phi(z)\prod_{\nu=1}^{n_0}\bigl(1+u_\nu(z)\bigr)$ i że dla skończonej liczby czynników pochodna logarytmiczna iloczynu równa się sumie pochodnych logarytmicznych czynników.

ĆWICZENIA. 1. Dla $|z|<1$ mamy wzór $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})=1/(1-z)$, przy czym iloczyn po lewej stronie jest zbieżny niemal jednostajnie w kole $K(0;1)$.

2. Jeżeli $a_n\neq 0$ dla $n=1,2,\ldots$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności iloczynu

(*) $$a_1a_2a_3\ldots$$

jest zbieżność szeregu

(**) $$\operatorname{Log}a_1+\operatorname{Log}a_2+\operatorname{Log}a_3+\ldots$$

Jeżeli p oznacza wartość iloczynu (*), zaś s sumę szeregu (**), to $p=\exp s$.

3. W ćwiczeniu poprzednim warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności bezwzględnej iloczynu (*) jest zbieżność bezwzględna szeregu (**).

4. Twierdzenia 1.9 i 1.17 nie są prawdziwe dla dowolnych iloczynów (por. np. dalej ćw. 6). Wykazać jednak, że jeżeli szereg $\sum_n|u_n|^2$ jest zbieżny, to warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności iloczynu $\prod_n(1+u_n)$ jest zbieżność szeregu $\sum_n u_n$.

[*Wsk.* Dla $|z|\leqslant\frac{1}{2}$ mamy $|\operatorname{Log}(1+z)-z|\leqslant A|z|^2$, gdzie A jest stałą.]

5. Ogólniej, jeżeli dla pewnego naturalnego k szereg $\sum_n|u_n|^{k+1}$ jest zbieżny, to warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności iloczynu $\prod_n(1+u_n)$ jest zbieżność szeregu $\sum_n v_n$, gdzie $v_n=u_n-u_n^2/2+u_n^3/3-\ldots+(-1)^{k-1}u_n^k/k$.

6. Weźmy pod uwagę dwa iloczyny $\prod_n(1+u_n)$, gdzie odpowiednio

(a) $$u_n=(-1)^n/\sqrt{n} \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

(b) $$u_{2n-1}=-1/\sqrt{n},\quad u_{2n}=1/\sqrt{n}+1/n \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

Wykazać, że w przypadku (a) szereg $\sum_n u_n$ jest zbieżny, zaś iloczyn $\prod_n(1+u_n)$ rozbieżny (do 0), a w przypadku (b), na odwrót, iloczyn $\prod_n(1+u_n)$ jest zbieżny, zaś szereg $\sum_n u_n$ rozbieżny.

7. Niech G będzie dowolnym obszarem, $\{c_i\}$ ciągiem punktów wszędzie gęstym na brzegu B obszaru G, zaś $\{b_k\}$ ciągiem punktów, w którym każdy punkt c_i występuje nieskończenie wiele razy. Załóżmy dla prostoty, że B nie zawiera punktu ∞. Niech $\{a_k\}$ będzie dowolnym ciągiem punktów należących do G i takich, że szereg $\sum_k|a_k-b_k|$ jest zbieżny. Wykazać, że iloczyn

(***) $$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-a_k}{z-b_k}$$

jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie w G oraz że przedstawia funkcję $F(z)$, dla której G jest obszarem naturalnym (p. Rozdz. VI, §4) (Osgood).

[*Uwaga.* Konstrukcja innych funkcyj o analogicznych własnościach była podana na str. 243. Gdyby brzeg B nie zawierał punktów odosobnionych, to możnaby nie rozważać ciągu $\{b_i\}$ i w iloczynie (***) zastąpić b_k przez c_k. Założenie, że B nie zawiera punktu ∞, nie jest ograniczeniem istotnym, gdyż stosując inwersję, możemy przyjąć, że punkt ∞ należy do G.]

8. Niech $a_1,a_2,a_3,\ldots$ będzie dowolnym ciągiem punktów należących do koła $K=K(0;1)$ i takich, że szereg $\sum_n(1-|a_n|)$ jest zbieżny. Dowieść, że wówczas w K istnieje funkcja $F(z)$ holomorficzna i ograniczona, posiadająca pierwiastki w punktach $a_1,a_2,\ldots$, a poza tym różna od 0. Jeżeli liczba 0 występuje w ciągu $\{a_i\}$ dokładnie k razy i jeżeli $\{b_i\}$ jest ciągiem tych wszystkich liczb a_i, które są różne od 0, to własności te posiada np. funkcja

$$F(z)=z^k\prod_{i=1}^{\infty}\frac{z-b_i}{z-b_i^*},$$

gdzie $b_i^*=1/\bar{b}_i$, przy czym iloczyn po prawej stronie jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie w K. Pierwiastek z_0 funkcji $F(z)$ ma krotność l, jeżeli punkt z_0 występuje l razy w ciągu $\{a_i\}$ (Blaschke).

[*Wsk.* Por. Rozdz. IV, § 4, ćw. 1, oraz Rozdz. V, § 4.]

§ 2. Twierdzenie Weierstrassa o rozkładzie funkcyj całkowitych na iloczyny.

Funkcjami *całkowitymi* nazywają się funkcje holomorficzne na całej płaszczyźnie otwartej. Punkt w nieskończoności jest dla funkcji całkowitej punktem osobliwym, jeżeli pominiemy przypadek funkcji stałej (por. tw. 5.11, Rozdz. II).

Każda funkcja całkowita $F(z)$ da się przedstawić przez szereg potęgowy

(2.1) $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

o nieskończonym promieniu zbieżności. Szereg ten wyznacza wartość funkcji $F(z)$ dla każdego skończonego z. Z tego punktu widzenia możnaby uważać, że ze wszystkich funkcyj analitycznych funkcje całkowite mają najprostszą budowę.

Specjalną klasę funkcyj całkowitych tworzą wielomiany. Można je określić jako takie funkcje całkowite, które jako osobliwość w nieskończoności mają co najwyżej biegun. Funkcje całkowite, które nie są wielomianami, noszą nazwę funkcyj całkowitych *przestępnych*. Można je scharakteryzować przez własność, że ich rozwinięcia Taylorowskie (2.1) mają nieskończenie wiele spółczynników różnych od zera. Inaczej mówiąc, funkcje całkowite przestępne mają w nieskończoności punkt istotnie osobliwy.

Niech $P(z)$ oznacza wielomian stopnia n. Przypuśćmy dla prostoty, że wszystkie pierwiastki $z_1, z_2, \ldots, z_n$ równania $P(z)=0$ są różne od zera. Mamy wówczas rozkład

$$P(z)=C\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{z_n}\right),$$

gdzie C oznacza pewną stałą (łatwo widzieć, że $C=P(0)$). Rozkład ten jest jednoznaczny. Ponieważ funkcje całkowite przestępne są uogólnieniem wielomianów, nasuwa się pytanie, w jakim stopniu jest to prawdziwe dla funkcyj całkowitych przestępnych. Zagadnieniu temu jest poświęcony § niniejszy. Rozpoczniemy od uwag ogólnych o pierwiastkach funkcyj całkowitych.

Niech $F(z)$ będzie funkcją całkowitą. Liczba jej pierwiastków może być skończona lub nieskończona. W tym drugim przypadku nie mogą się one skupiać do żadnego punktu w skończoności, chyba że funkcja jest tożsamościowo równa 0. Zatem, *jeżeli funkcja całkowita posiada nieskończenie wiele pierwiastków, a nie jest tożsamościowo równa zeru* (przypadek ten wyłączamy raz na zawsze spod rozważań niniejszego rozdziału), *pierwiastki te dadzą się ustawić w ciąg* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *dążący do nieskończoności*. Można np. uporządkować je według wartości bezwzględnych rosnących, t. zn. założyć, iż $|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant|z_3|\leqslant\ldots$ Że nic ponadto o pierwiastkach ogólnej funkcji całkowitej nie da się powiedzieć, wynika z następującego twierdzenia:

(2.2) *Jeżeli* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *jest dowolnym ciągiem liczb zespolonych i* $z_n\to\infty$, *to istnieje funkcja całkowita* $F(z)$ *znikająca w punktach* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *i tylko w tych punktach.*

(Należy pamiętać, że nie wszystkie wyrazy ciągu $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ muszą być od siebie różne. Jeżeli jakaś liczba ζ występuje w ciągu dokładnie l razy, znaczy to, iż $F(z)$ ma posiadać w punkcie $z=\zeta$ pierwiastek l-krotny.)

Załóżmy początkowo, że wszystkie liczby z_n są różne od zera. Jeżeli $|z_n|$ zmierza do ∞ tak szybko, iż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}1/|z_n|$ jest zbieżny (np. gdy $z_n=n^2$), to łatwo znaleźć szukaną funkcję. Wystarczy położyć

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right), \tag{2.3}$$

gdyż ze względu na tw. 1.20 iloczyn (2.3), który jest niemal jednostajnie zbieżny w całej płaszczyźnie otwartej, przedstawia funkcję całkowitą, mającą pierwiastki w punktach $z_1, z_2, \ldots$ i tylko w nich.

Jeżeli jednak szereg $\sum_{n=1}^{\infty}1/|z_n|$ nie jest zbieżny, to iloczyn (2.3) może być rozbieżny i nie przedstawiać żadnej funkcji.

Istotny pomysł w tej dziedzinie zawdzięczamy Weierstrassowi. Pomysł polega na tym, żeby każdy wyraz iloczynu (2.3) zaopatrzyć w dodatkowy czynnik, któryby z jednej strony uzbieżnił iloczyn, a z drugiej nie wprowadził nowych pierwiastków. Ponieważ funkcja wykładnicza e^z nigdzie nie znika, naturalne będzie wyzyskanie jej dla zbudowania czynników uzbieżniających. W tym celu wprowadzimy funkcje

$$\mathcal{E}_\lambda(z)=(1-z)\,e^{z+z^2/2+\ldots+z^\lambda/\lambda},$$

gdzie $\lambda=1,2,\ldots$ Połóżmy ponadto $\mathcal{E}_0(z)=1-z$. Funkcje $\mathcal{E}_\lambda(z)$ mają tylko jeden pierwiastek: w punkcie $z=1$. Dla $z=0$ mamy $\mathcal{E}_\lambda(z)=1$. W dowodzie tw. 2.2 istotną rolę odgrywać będzie nierówność:

$$|\mathcal{E}_\lambda(z)-1|\leqslant 3|z|^{\lambda+1} \qquad \text{dla} \quad |z|\leqslant\tfrac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Dla $\lambda=0$ nierówność ta jest oczywista. W przypadku, gdy $\lambda\geqslant 1$ oraz $|z|<1$, mamy $1-z=\exp\operatorname{Log}(1-z)=\exp(-z-z^2/2-z^3/3-\ldots)$. Zatem

$$\mathcal{E}_\lambda(z)=\exp g_\lambda(z), \qquad \text{gdzie} \qquad g_\lambda(z)=-\sum_{\nu=\lambda+1}^{\infty}\frac{z_\nu}{\nu}. \tag{2.5}$$

Jeżeli więc założymy dodatkowo, że $|z|\leqslant\frac{1}{2}$, to

$$|g_\lambda(z)|\leqslant\sum_{\nu=\lambda+1}^{\infty}\frac{|z|^\nu}{\nu}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\nu=\lambda+1}^{\infty}|z|^\nu=\frac{1}{2}\,\frac{|z|^{\lambda+1}}{1-|z|}\leqslant|z|^{\lambda+1}. \tag{2.6}$$

Dla dowodu (2.4) potrzebne nam będą jeszcze dwie nierówności następujące:

$$|e^\zeta-1|\leqslant e^{|\zeta|}-1, \qquad e^x-1\leqslant xe^x, \tag{2.7}$$

gdzie ζ oznacza dowolną liczbę zespoloną, a x rzeczywistą. Pierwszą z tych nierówności otrzymamy, zastępując w rozwinięciu $e^{\xi}-1$ na szereg potęgowy każdy wyraz przez jego wartość bezwzględną. Druga nierówność wynika z (1.8), jeżeli zastąpimy tam x przez $-x$.

By zakończyć dowód nierówności (2.4), wystarczy zauważyć, iż

$$|\mathcal{E}_\lambda(z)-1|=|e^{g_\lambda(z)}-1|\leqslant e^{|g_\lambda(z)|}-1\leqslant|g_\lambda(z)|\,e^{|g_\lambda(z)|}\leqslant|z|^{\lambda+1}\,e^{|z|^{\lambda+1}}\leqslant 3|z|^{\lambda+1},$$

gdyż $\exp|z|^{\lambda+1}<e<3$ dla $|z|\leqslant\frac{1}{2}$.

Do dowodu tw. 2.2 potrzebny nam będzie jeszcze lemmat następujący:

(2.8) *Jeżeli ciąg liczb $\{z_n\}$ dąży do nieskończoności, przy czym $z_n\neq 0$ dla $n=1,2,\ldots$, wówczas istnieje ciąg liczb naturalnych $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ takich, że szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|^{\lambda_n+1} \tag{2.9}$$

jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $\mathrm{K}(0;R)$ przy $R<\infty$.

Wystarczy położyć np. $\lambda_n=n-1$. Istotnie, ponieważ dla wszystkich n dostatecznie dużych $|z_n|\geqslant 2R$, zatem, jeżeli $|z|\leqslant R$, to dla wszystkich tych n będzie

$$\left|\frac{z}{z_n}\right|^{\lambda_n+1}=\left|\frac{z}{z_n}\right|^{n}\leqslant\left(\frac{R}{2R}\right)^{n}=\frac{1}{2^n},$$

co właśnie dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu (2.9) w kole $\mathrm{K}(0;R)$.

Udowodnimy teraz tw. 2.2 w następującej bardziej sprecyzowanej postaci:

(2.10) *Jeżeli $z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots$ jest dowolnym ciągiem liczb różnych od 0 i zmierzających do ∞, to istnieje funkcja całkowita $F(z)$, mająca pierwiastki w punktach $z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots$, oraz pierwiastek o krotności $k\geqslant 0$ w punkcie 0, a poza tym wszędzie różna od 0.*

Jeżeli $\{\lambda_n\}$ jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych takim, że szereg (2.9) jest zbieżny niemal jednostajnie w całej płaszczyźnie otwartej, to funkcja taka może być określona przez iloczyn bezwzględnie zbieżny

$$z^k\prod_{n=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)=z^k\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n}\right\}. \tag{2.11}$$

Dowód. Stosując tw. 1.20 i pisząc $\mathcal{E}_{\lambda_n}(z/z_n)=1+[\mathcal{E}_{\lambda_n}(z/z_n)-1]$, widzimy, że iloczyn (2.11) jest niemal jednostajnie zbieżny w płaszczyźnie otwartej do funkcji całkowitej, jeżeli tylko szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mathcal{E}_{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)-1\right| \tag{2.12}$$

jest jednostajnie zbieżny w każdym kole $\mathrm{K}(0;R)$ o promieniu skończonym. Otóż, jeżeli $|z|\leqslant R$, to dla wszystkich n większych od pewnego n_0 będziemy mieli $|z/z_n|\leqslant\frac{1}{2}$ i stosując nierówność (2.4), widzimy, że dla $n>n_0$ wyrazy szeregu (2.12) nie przekraczają $3|z/z_n|^{\lambda_n+1}$. Wystarczy teraz zauważyć, że szereg (2.9) jest w myśl założenia zbieżny jednostajnie dla $|z|\leqslant R$.

Że funkcja $F(z)$, określona przez iloczyn (2.11), ma przepisane pierwiastki, jest oczywiste. Tw. 2.10 jest więc udowodnione.

Rozumowanie powyższe zachowuje swą moc, gdy ciąg $z_1,z_2,\ldots$ jest skończony. Możemy wtedy położyć $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=0$ i iloczyn (2.11) redukuje się do wielomianu.

Przypuśćmy teraz, że dwie funkcje całkowite $F(z)$ i $G(z)$ mają te same pierwiastki, odpowiednio z tymi samymi krotnościami. Iloraz ich $H(z)=G(z)/F(z)$ jest funkcją całkowitą nigdzie nie znikającą. Odwrotnie, jeżeli $H(z)$ jest dowolną funkcją całkowitą nigdzie nie znikającą, funkcja $G(z)=F(z)H(z)$ ma te same pierwiastki co $F(z)$. Zatem, *najogólniejszą funkcję całkowitą, mającą te same pierwiastki co funkcja całkowita $F(z)$, można przedstawić w postaci $F(z)\,H(z)$, gdzie $H(z)$ jest dowolną funkcją całkowitą nigdzie nie znikającą.*

Z drugiej strony wiemy już (por. tw. 3.1, Rozdz. IV), że *każda funkcja całkowita $H(z)$, wszędzie różna od 0, daje się wyrazić wzorem*

$$H(z)=e^{h(z)},$$

gdzie $h(z)=\log H(z)$ jest również funkcją całkowitą. Biorąc to pod uwagę i opierając się na tw. 2.10, otrzymujemy wniosek następujący:

(2.13) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją całkowitą, mającą pierwiastek k-krotny w punkcie 0, zaś $z_1,z_2,\ldots$ jest ciągiem różnych od 0 pierwiastków funkcji $F(z)$, wówczas*

$$F(z)=e^{h(z)}z^k\prod_{n}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n}}, \tag{2.14}$$

gdzie $h(z)$ jest funkcją całkowitą, zaś liczby naturalne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mają tę własność, że szereg (2.9) *jest niemal jednostajnie zbieżny w płaszczyźnie otwartej.*

Iloczyn (2.14) *jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie w płaszczyźnie otwartej. W szczególności wartość iloczynu* (2.14) *nie zależy od porządku czynników.*

Twierdzenie to, udowodnione przez Weierstrassa, gra podstawową rolę w teorii funkcyj całkowitych. Jest ono odpowiednikiem twierdzenia o rozkładzie wielomianu na czynniki liniowe. Rozkład (2.14) nie jest jednak jednoznaczny, gdyż ciąg $\{\lambda_n\}$ może być wybrany na różne sposoby. Szczególnie ważny jest przypadek, gdy na $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ możemy wziąć jedną i tę samą liczbę λ. Będzie tak zawsze, gdy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}} \tag{2.15}$$

jest zbieżny.

Funkcje $\mathcal{E}_{\lambda_n}(z/z_n)$ noszą nazwę *czynników pierwszych Weierstrassa*, a sam rozkład (2.14) nazywa się zazwyczaj *rozkładem funkcji całkowitej na czynniki pierwsze*. Wyrażenie $\mathcal{E}_{\lambda_n}(z/z_n)$ różni się od wyrażenia liniowego $(1-z/z_n)$ obecnością czynnika wykładniczego. Czynnik ten nie posiada pierwiastków i wprowadzenie go miało na celu uzbieżnienie iloczynu (2.3).

Zastosowanie wzoru (2.14) w poszczególnych przypadkach może nastręczać trudności. Główną z nich jest znalezienie funkcji $h(z)$. W dalszych §§ niniejszego rozdziału poznamy twierdzenia, które oddają duże usługi przy stosowaniu tego wzoru. Kilka konkretnych przykładów znajdzie czytelnik niżej w § 5.

ĆWICZENIA. 1. Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie dowolnym ciągiem punktów różnych od 0, należących do koła $K=\mathrm{K}(0;1)$ i zmierzających do okręgu tego koła. Wykazać, że istnieje funkcja $F(z)$ holomorficzna w K, mająca pierwiastki w punktach a_n, pierwiastek k-krotny w punkcie 0, a poza tym różna od 0. Jeżeli położymy $a_n=|a_n|e^{i\varphi_n}$ i $b_n=e^{i\varphi_n}$, to funkcja $F(z)$ dana jest przez wzór

$$F(z)=e^{h(z)}z^k\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{z-b_n}\mathcal{E}_{\lambda_n}\left(\frac{a_n-b_n}{z-b_n}\right),$$

gdzie $h(z)$ jest funkcją holomorficzną w K, λ_n są liczbami naturalnymi stosownie dobranymi, zaś $\mathcal{E}_{\lambda_n}$ czynnikami pierwszymi Weierstrassa (Picard).

[*Wsk.* Dowód analogiczny do dowodu tw. 2.13.]

2. Niech $\{z_k\}$ będzie ciągiem różnych liczb zespolonych dążących do ∞, $\{\eta_k\}$ dowolnym ciągiem liczb zespolonych, zaś $\omega(z)$ funkcją całkowitą o pierwiastkach jednokrotnych w punktach z_k. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k/z_k\omega'(z_k)|$ jest zbieżny, to wzór

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k}{\omega'(z_k)}\frac{\omega(z)}{z-z_k}$$

przedstawia funkcję całkowitą, przyjmującą wartości η_k w punktach z_k (por. Rozdz. IV, § 7, ćw. 2).

3. Niech $\{z_k\}$ będzie ciągiem różnych liczb zespolonych, odmiennych od 0 i dążących do ∞, a $\{\eta_k\}$ dowolnym ciągiem liczb zespolonych. Wykazać, że zawsze istnieje funkcja całkowita przyjmująca dla $z=z_k$ wartości η_k. Funkcję taką określić można np. wzorem

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k}{\omega'(z_k)}\frac{\omega(z)}{z-z_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{q_k},$$

gdzie $\omega(z)$ jest dowolną funkcją o pierwiastkach jednokrotnych w punktach z_k, zaś q_k są liczbami całkowitymi nieujemnymi. (Czynniki $(z/z_k)^{q_k}$ grają tu tę samą rolę co czynniki $\mathcal{E}_\lambda$ w iloczynie Weierstrassowskim. Wprowadzenie ich ma na celu uzbieżnienie szeregu, określającego $F(z)$.) Gdybyśmy chcieli uwzględnić jeszcze punkt $z_0=0$, to do szeregu określającego $F(z)$ należałoby dorzucić wyraz $\eta_0\omega(z)/z\omega'(0)$, zakładając, że $\omega(0)=0$, a $\omega'(0)\neq 0$ (Pringsheim).

§ 3. Twierdzenie Mittag-Lefflera o rozkładzie funkcyj meromorficznych na ułamki proste.

Funkcję $F(z)$, meromorficzną w płaszczyźnie otwartej, będziemy nazywali w niniejszym rozdziale po prostu *funkcją meromorficzną*. Jedynymi osobliwościami funkcji meromorficznej, położonymi w skończoności, są bieguny. Biegunów tych może być ilość skończona lub nieskończona. W tym drugim przypadku, ponieważ nie mogą się one skupiać do żadnego punktu w skończoności, można je wszystkie ustawić w ciąg nieskończony $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, gdzie $z_n \to \infty$.

Wiemy już (por. tw. 7.3, Rozdz. III), że funkcja meromorficzna $F(z)$, mająca tylko skończoną ilość biegunów na płaszczyźnie domkniętej, jest funkcją wymierną Oznaczając przez $z_1, z_2, \ldots, z_n$ te punkty w skończoności, w których $F(z)$ posiada bieguny, mamy wzór (p. tw. 7.5, Rozdz. III)

$$F(z)=\sum_{i=1}^{k}G_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right)+P(z), \tag{3.1}$$

gdzie funkcje $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_k(z)$ i $P(z)$ są wielomianami, przy czym $G_i\left(1/(z-z_i)\right)$ jest częścią główną funkcji $F(z)$ w biegunie z_i. Bio-

rząc za $G_1, G_2, \ldots, G_k$ i P dowolne wielomiany, otrzymamy najogólniejszą funkcję wymierną. Wzór (3.1) — rozkład funkcji wymiernej $F(z)$ na ułamki proste — uwidocznia zachowanie się funkcji $F(z)$ w otoczeniu jej punktów osobliwych.

W § niniejszym zajmiemy się wyprowadzeniem analogicznego wzoru dla ogólnej funkcji meromorficznej. Udowodnimy w tym celu przede wszystkim, że poza warunkiem $z_n \to \infty$ bieguny funkcji meromorficznej (w przypadku gdy jest ich nieskończenie wiele) nie podlegają żadnym innym ograniczeniom. Podobnie, części główne dla punktów położonych w skończoności mogą być przepisane z góry. Dokładniej:

(3.2) *Niech* $z_0=0, z_1, z_2, \ldots$ *będzie dowolnym ciągiem różnych liczb skończonych zmierzających do* ∞ *i niech* $\{G_n(z)\}$, *gdzie* $n=0,1,2,\ldots$, *będzie dowolnym ciągiem wielomianów, o wyrazach stałych równych* 0. *Istnieje wówczas funkcja meromorficzna* $F(z)$, *holomorficzna w skończoności poza co najwyżej punktami* $z_0, z_1, z_2, \ldots$, *przy czym częścią główną funkcji* $F(z)$ *w punkcie* z_n *jest* $G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, *gdzie* $n=0,1,2,\ldots$

Zastrzeżenie, któreśmy zrobili w tym twierdzeniu co do wielomianów $G_n(z)$, jest naturalne, gdyż w myśl definicji część główna rozwinięcia funkcji w otoczeniu punktu osobliwego nie zawiera wyrazu stałego (p. str. 132). Nie wyłączamy poza tym możliwości, że niektóre z wielomianów G_n są tożsamościowo równe zeru, a więc że odpowiednie punkty z_n są punktami holomorficzności funkcji $F(z)$.

W pewnym szczególnym przypadku dowód twierdzenia 3.2 jest natychmiastowy. Przypuśćmy mianowicie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ jest jednostajnie zbieżny w każdym kole skończonym $\mathrm{K}(0;R)$, jeżeli tylko odrzucimy wyrazy mające bieguny w tym kole lub na jego brzegu (jest tak, w szczególności, zawsze, gdy liczba biegunów jest skończona). Wówczas możemy położyć

$$F(z)=\sum_{n} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right). \tag{3.3}$$

Że funkcja $F(z)$ może mieć osobliwości wyłącznie w punktach $z_0, z_1, \ldots$, jest jasne. Z tego też powodu, odrzucając w szeregu (3.3) wyraz odpowiadający $n=m$, otrzymamy funkcję holomorficzną w punkcie $z=z_m$. Dodając odrzucony wyraz z powrotem, widzimy, że $F(z)$ ma w z_m biegun o części głównej $G_m\left(1/(z-z_m)\right)$.

Na ogół jednak założenie zbieżności szeregu (3.3) nie jest spełnione. Dla przezwyciężenia tej trudności zastosujemy sposób analogiczny do użytego przez nas przy rozwijaniu funkcji całkowitej na iloczyn nieskończony: od każdego składnika szeregu (3.3) odejmiemy pewien wyraz, któryby z jednej strony nie wpływał na charakter osobliwości, a z drugiej strony czynił szereg zbieżnym.

Dowód tw. 3.2 oprzemy na następującym lemmacie:

(3.4) *Niech* $H_1(z), H_2(z), \ldots$ *będzie ciągiem wielomianów takich, że szereg*

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-H_n(z)\right] \tag{3.5}$$

jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w każdym kole $\mathrm{K}(0;R)$ *o promieniu skończonym po odrzuceniu skończonej liczby wyrazów mających osobliwości w tym kole lub na jego brzegu. Wówczas suma* $F(z)$ *szeregu* (3.5) *jest funkcją czyniącą zadość twierdzeniu* 3.2.

Dowód. Rozumujemy tak jak przy szeregu (3.3). Funkcja $F(z)$ może mieć osobliwości wyłącznie w punktach $z_0, z_1, z_2, \ldots$, a odrzucając w szeregu (3.5) m-ty wyraz, otrzymamy funkcję holomorficzną w punkcie z_m. Dodając ten wyraz z powrotem, widzimy, że część główna funkcji $F(z)$ w punkcie z_m jest ta sama co część główna funkcji $G_m\left(1/(z-z_m)\right)-H_m(z)$ (ewentualnie funkcji $G_0(1/z)$, jeżeli $m=0$), a więc jest równa $G_m\left(1/(z-z_m)\right)$. Lemmat 3.4 jest więc udowodniony.

Dla znalezienia wielomianów $H_m(z)$, posiadających własności wymagane w tym lemmacie, przypuśćmy, że $m>0$, i rozważmy rozwinięcie funkcji $G_m\left(1/(z-z_m)\right)$ na szereg potęgowy w otoczeniu punktu 0:

$$G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)=c_0^{(m)}+c_1^{(m)}z+c_2^{(m)}z^2+\ldots \tag{3.6}$$

Szereg ten jest zbieżny w kole $\mathrm{K}(0;|z_m|)$, a w kole $\mathrm{K}(0;\frac{1}{2}|z_m|)$ zbieżność jego jest jednostajna. Niech $H_m(z)$ oznacza sumę częściową szeregu (3.6), taką, by

$$\left|G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)-H_m(z)\right|\leqslant 2^{-m} \qquad \text{dla} \quad z\in\mathrm{K}(0;\tfrac{1}{2}|z_m|). \tag{3.7}$$

Wykażemy, że wówczas szereg (3.5) będzie spełniał założenia lemmatu 3.4. Ustalmy w tym celu $R>0$ i przypuśćmy, że $R<\frac{1}{2}|z_m|$ dla $m\geqslant m_0$. Nierówność (3.7) będzie więc spełniona dla $z\in\mathrm{K}(0;R)$, jeżeli tylko wskaźnik m nie będzie mniejszy od m_0.

Stąd wynika, że odrzucając w szeregu (3.5) pierwszych m_0 wyrazów, otrzymamy szereg jednostajnie zbieżny w $K(0;R)$. Oczywiście szereg (3.5) będzie również jednostajnie zbieżny w $K(0;R)$, jeżeli tylko odrzucimy w nim wyrazy mające w tym kole osobliwości. Udowodniliśmy więc istnienie wielomianów $H_m(z)$ spełniających założenia lemmatu 3.4. Tym samym zostało udowodnione tw. 3.2.

Jeżeli $F(z)$ i $F_1(z)$ są dwiema funkcjami spełniającymi warunki tw. 3.2, to różnica $F_1(z)-F(z)=H(z)$ jest funkcją całkowitą. Odwrotnie, jeżeli $H(z)$ jest funkcją całkowitą, zaś $F(z)$ spełnia warunki tw. 3.2, to i $F_1(z)=H(z)+F(z)$ spełnia te warunki. A więc:

(3.8) *Najogólniejsza funkcja $F(z)$ spełniająca warunki tw. 3.2 dana jest przez wzór*

$$F(z)=H(z)+G_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)-H_m(z)\right\}, \tag{3.9}$$

gdzie $H(z)$ jest dowolną funkcją całkowitą, zaś $\{H_m(z)\}$ ciągiem wielomianów takich, że szereg po prawej stronie wzoru (3.9) jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w każdym kole $K(0;R)$ o promieniu skończonym po odrzuceniu skończonej liczby wyrazów mających osobliwości w tym kole. Za $H_m(z)$ można wziąć każdą dostatecznie daleką sumę częściową szeregu (3.6).

Twierdzenia 3.2 i 3.8 zawdzięczamy Mittag-Lefflerowi. Rozwinięcie (3.9), które nazywa się zazwyczaj *rozkładem funkcji meromorficznej na ułamki proste*, odgrywa w teorii funkcyj meromorficznych rolę analogiczną do rozkładu Weierstrassowskiego w teorii funkcyj całkowitych. Oczywiście rozkład (3.9) nie jest jednoznaczny.

Uzupełniając tw. 3.8, rozpatrzymy nieco szczegółowiej przypadek, gdy punkty $z_0, z_1, z_2, \ldots$ są biegunami jednokrotnymi. Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oznaczają odpowiednie residua. Wówczas dla $m>0$ mamy wzór

$$G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)=\frac{a_m}{z-z_m}=-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_m\frac{z^\nu}{z_m^{\nu+1}} \qquad \text{przy } |z|<|z_m|. \tag{3.10}$$

Oznaczając przez H_m sumę pierwszych λ_m+1 wyrazów szeregu (3.10), otrzymujemy po prostym rachunku

$$G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)-H_m(z)=a_m\left(\frac{z}{z_m}\right)^{\lambda_m+1}\frac{1}{z-z_m}. \tag{3.11}$$

Możemy tu wziąć za $\{\lambda_m\}$ dowolny ciąg liczb całkowitych nieujemnych, byleby szereg o wyrazach (3.11) był zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w każdym kole $K(0;R)$ po odrzuceniu ewentualnie kilku pierwszych wyrazów. Wystarczy np., by spełnione były nierówności (3.7).

W zastosowaniach spotykamy często przypadek, że wszystkie residua a_m są ograniczone co do wartości bezwzględnej przez pewną liczbę dodatnią C. Wówczas wystarczy na λ_m wybrać liczby takie, by szereg $\sum_m\left|\frac{z}{z_m}\right|^{\lambda_m+1}$ był jednostajnie zbieżny w każdym kole $K(0;R)$ przy $R<+\infty$ (por. lemmat 2.8). Istotnie, jeżeli $|z_m|\geqslant R+1$, co zachodzi dla wszystkich dostatecznie dużych m, to dla $z\in K(0;R)$ wartość bezwzględna prawej strony równości (3.11) nie przekracza $C|z/z_m|^{\lambda_m+1}$.

W szczególności, jeżeli szereg $\sum_m\frac{1}{|z_m|^{\lambda+1}}$ jest zbieżny dla pewnego całkowitego $\lambda\geqslant 0$, możemy przyjąć $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda$.

Udowodnimy obecnie twierdzenie następujące:

(3.12) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja $F(z)$ była meromorficzna, jest aby była ilorazem dwu funkcyj całkowitych $G_1(z)$ i $G_2(z)$, z których $G_2(z)$ nie znika tożsamościowo.*

Dowód. Wystarczalność warunku jest oczywista, gdyż jeżeli $G_1(z)$ i $G_2(z)$ są całkowite, to iloraz $F=G_1/G_2$ jest holomorficzny w każdym punkcie, gdzie mianownik nie znika, i może mieć co najwyżej bieguny w punktach, gdzie $G_2(z)=0$. Dla dowodu konieczności, oznaczmy przez $G_2(z)$ funkcję całkowitą, której pierwiastkami są bieguny $F(z)$, przy tym krotność pierwiastków $G_2(z)$ ma być ta sama co krotność odpowiednich biegunów $F(z)$. Wobec tego iloczyn $F(z)G_2(z)$ będzie pewną funkcją całkowitą $G_1(z)$.

Zauważmy, że — jak wynika z samej konstrukcji — pierwiastki funkcyj $G_1(z)$ i $G_2(z)$, rozważanych w dowodzie konieczności warunku, są rozłączne, t.zn. że pierwiastki funkcji $F(z)$ są identyczne z pierwiastkami funkcji $G_1(z)$, zaś bieguny $F(z)$ z pierwiastkami $G_2(z)$.

ĆWICZENIE. Wyprowadzić tw. 2.2 Weierstrassa z tw. 3.2 Mittag-Lefflera.

[*Wsk.* Jeżeli $z_1, z_2, \ldots$ jest ciągiem różnych punktów dążącym do ∞, $n_1, n_2, \ldots$ dowolnym ciągiem liczb naturalnych, zaś $F(z)$ funkcją całkowitą mającą dla $z=z_k$ pierwiastek n_k-krotny, to pochodna logarytmiczna $F'(z)/F(z)$ ma w punkcie z_k część główną $n_k/(z-z_k)$ dla $k=1,2,\ldots$.]

§ 4. Metoda Cauchy'ego rozwijania funkcyj meromorficznych na ułamki proste. Główną trudność w stosowaniu twierdzenia Mittag-Lefflera do przypadków konkretnych stanowi (analogicznie jak w twierdzeniu Weierstrassa) wyznaczenie funkcji całkowitej $H(z)$, występującej we wzorze (3.9). Z tego względu zasługuje na uwagę pewna metoda, podana jeszcze przed Mittag-Lefflerem przez Cauchy'ego, która pozwala otrzymać rozwinięcia na ułamki proste dla dość obszernej klasy funkcyj meromorficznych.

Niechaj $F(z)$ będzie funkcją meromorficzną o biegunach $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ i niech $G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)$ będzie częścią główną funkcji $F(z)$, odpowiadającą biegunowi z_m. Dogodnie będzie założyć, że $z=0$ jest punktem holomorficzności. Gdyby tak nie było i gdyby $G_0(1/z)$ było częścią główną funkcji w punkcie $z=0$, stosowalibyśmy dalsze rozważania do funkcji $F(z)-G_0(1/z)$.

Niech $C=\mathrm{C}(0;R)$, gdzie $0<R<+\infty$, będzie dowolnym okręgiem, nie przechodzącym przez żaden z biegunów funkcji $F(z)$. Rozważmy całkę

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

gdzie z jest dowolnym punktem leżącym w kole $K=\mathrm{K}(0;R)$ i odmiennym od $z_1, z_2, \ldots$ Całka ta różni się od $F(z)$ o sumę residuów funkcji $F(\zeta)/(\zeta-z)$, rozciągniętą na te spośród punktów $z_1, z_2, \ldots$, które leżą w kole K. Niech z_m będzie jednym z takich punktów, zaś $G_m(1/(\zeta-z_m))$ odpowiadającą mu częścią główną funkcji $F(\zeta)$. Wykażemy, że residuum ϱ_m funkcji $F(\zeta)/(\zeta-z)$ w tym punkcie wynosi $-G_m\left(1/(z-z_m)\right)$. Residuum to jest równe residuum funkcji $\Phi_m(\zeta)=G_m\left(1/(\zeta-z_m)\right)/(\zeta-z)$ w punkcie z_m. Funkcja $\Phi_m(\zeta)$ jest holomorficzna w każdym różnym od z_m i z punkcie płaszczyzny domkniętej. Niech ϱ'_m oznacza residuum funkcji $\Phi_m(\zeta)$ w punkcie z. Łatwo widzieć, że $\varrho'_m=G_m\left(1/(z-z_m)\right)$. Ponieważ z i z_m leżą w K, więc $2\pi i(\varrho_m+\varrho'_m)$ jest równe całce funkcji $\Phi_m(\zeta)$ wzdłuż C. Zauważmy teraz, że $\Phi_m(\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w dopełnieniu koła K i że rozwinięcie jej na szereg Laurenta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/\zeta^n$ o środku ∞ jest zbieżne jednostajnie na okręgu C. Całkę funkcji $\Phi_m(\zeta)$ wzdłuż C otrzymamy więc, całkując wzdłuż C szereg Laurenta wyraz po wyrazie. Ponieważ jednak $\Phi_m(\zeta)$ posiada w punkcie ∞ pierwiastek co najmniej dwukrotny, przeto $a_0=a_1=0$ i całka funkcji $\Phi_m(\zeta)$ wzdłuż C jest równa 0. Zatem $\varrho_m=-G_m\left(1/(z-z_m)\right)$.

W związku z poprzednimi uwagami daje to nam wzór

$$F(z)=\sum_C{}' G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{4.1}$$

gdzie wskaźnik C pod znakiem sumy oznacza, że uwzględniamy wyłącznie bieguny z_m leżące wewnątrz K.

Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Ponieważ

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta(1-z/\zeta)}=\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\ldots+\frac{z^{k-1}}{\zeta^k}+\frac{z^k}{\zeta^k(\zeta-z)},$$

przeto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta= \tag{4.2}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\ldots+\frac{z^{k-1}}{\zeta^k}\right)d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^k F(\zeta)}{\zeta^k(\zeta-z)}\,d\zeta.$$

Pierwsza całka po prawej stronie jest równa sumie residuów funkcji podcałkowej w punkcie $\zeta=0$ oraz w punktach z_m leżących wewnątrz C. Przyjmijmy $z_0=0$ i niech $C_m=\mathrm{C}(z_m;\varepsilon)$, gdzie ε jest tak małe, by wszystkie koła $\mathrm{K}(z_m;\varepsilon)$ (o środkach wewnątrz K) leżały na zewnątrz siebie. Rozważane residua są równe

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} F(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\ldots+\frac{z^{k-1}}{\zeta^k}\right)d\zeta, \tag{4.3}$$

a więc są wielomianami stopnia $<k$ względem z. Oznaczmy je dla $m=0$ przez $H_0(z)$, zaś dla $m>0$ przez $-H_m(z)$. Ponieważ $\zeta=0$ jest punktem holomorficzności funkcji $F(\zeta)$, więc $H_0(z)$ jest sumą pierwszych k wyrazów rozwinięcia $F(z)$ na szereg potęgowy w otoczeniu punktu 0. Biorąc to pod uwagę, otrzymamy z (4.1) i (4.2):

$$F(z)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}z+\frac{F''(0)}{2!}z^2+\ldots+\frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}z^{k-1}+ \tag{4.4}$$

$$+\sum_C{}'\left\{G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)-H_m(z)\right\}+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^k F(\zeta)}{\zeta^k(\zeta-z)}\,d\zeta.$$

Żeby wyznaczyć wielomian $H_m(z)$ dla $m>0$, zauważmy, że w całce (4.3), równej $-H_m(z)$, możemy zastąpić funkcję $F(\zeta)$ przez jej część główną $G_m\left(1/(\zeta-z_m)\right)$ w punkcie z_m. Niech $\Psi_m(\zeta)$ oznacza nową funkcję podcałkową. Zatem $-H_m(z)$ jest residuum funkcji $\Psi_m(\zeta)$ dla $\zeta=z_m$. Funkcja ta posiada tylko dwa punkty osobliwe: $\zeta=z_m$ i $\zeta=0$, a ponieważ $\Psi_m(\zeta)$ ma w nieskończoności pierwiastek

przynajmniej dwukrotny, więc suma residuów w tych dwu punktach jest równa 0. Ale residuum funkcji $\Psi_m(\zeta)$ w punkcie $\zeta=0$ jest równe sumie k pierwszych wyrazów w rozwinięciu funkcji $G_m\left(1/(z-z_m)\right)$ na szereg Taylora w otoczeniu punktu $z=0$. A więc *wielomiany* $H_m(z)$ *we wzorze* (4.4) *są, dla* $m>0$, *równe sumie* k *pierwszych wyrazów w rozwinięciu funkcji* $G_m\left(1/(z-z_m)\right)$ *na szereg potęgowy w otoczeniu punktu* $z=0$.

Przypuśćmy teraz, że istnieje ciąg okręgów $C^{(n)}=C(0;R_n)$ o promieniach nieograniczenie rosnących i takich, że

$$|F(\zeta)|\leqslant\varepsilon_n|\zeta|^k \quad dla \quad \zeta\in C^{(n)}, \quad gdzie \quad \varepsilon_n\to 0, \quad gdy \quad n\to\infty. \tag{4.5}$$

Zastąpmy C przez $C^{(n)}$ we wzorze (4.4). Całka tam występująca będzie zmierzać do 0, gdy $n\to\infty$. Jeżeli bowiem R_n przekroczy $|z|$, to wartość bezwzględna całki nie będzie większa od liczby

$$\frac{|z|^k}{2\pi}\cdot 2\pi R_n\cdot\frac{\varepsilon_n R_n^k}{R_n^k(R_n-|z|)}=|z|^k\,\varepsilon_n\frac{R_n}{R_n-|z|},$$

zmierzającej do 0 wraz z $1/n$.

Tak więc otrzymujemy z (4.4) następujący wzór:

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{k-1}F^{(\nu)}(0)\frac{z^\nu}{\nu!}+\sum_m\left[G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)-H_m(z)\right], \tag{4.6}$$

w którym ostatni szereg rozciągnięty jest na wszystkie bieguny funkcji $F(z)$ położone w skończoności.

Należy jednak pamiętać, iż szereg ten otrzymaliśmy jako granicę sum $\sum_{C^{(n)}}$ dla $n\to\infty$, tak, że musimy tu na ogół zwracać uwagę na porządek wyrazów oraz łączyć pewne wyrazy w grupy. Jeżeli jednak, jak nieraz się zdarza, szereg w (4.6) jest zbieżny bezwzględnie, to zarówno porządek jak grupowanie wyrazów nie grają roli. Oczywiście rozkład (4.6) podpada pod ogólne twierdzenie Mittag-Lefflera.

Streszczając, otrzymujemy następujące *twierdzenie Cauchy'ego*:

(4.7) *Niech* $F(z)$ *będzie funkcją meromorficzną, mającą bieguny w punktach* $z_1,z_2,\ldots$ *różnych od* ∞, *holomorficzną dla* $z=0$ *i taką, że dla ciągu okręgów* $C^{(n)}=C(0;R_n)$ *o promieniach nieograniczenie rosnących spełniony jest warunek* (4.5), *gdzie* k *jest liczbą naturalną. Zachodzi wówczas wzór* (4.6), *gdzie* $G_m\left(1/(z-z_m)\right)$ *oznacza część główną funkcji* $F(z)$ *w punkcie* z_m, *zaś* $H_m(z)$ *sumę* k *pierwszych wyrazów rozwinięcia* $G_m\left(1/(z-z_m)\right)$ *na szereg potęgowy w otoczeniu punktu* 0. *Drugą sumę po prawej stronie* (4.6) *należy rozumieć jako* $\lim_{n\to\infty}\sum_{C^{(n)}}$.

Tw. 4.7 pozostaje prawdziwe (a dowód nie ulega zmianie), jeżeli $C^{(n)}$ oznacza np. obwód kwadratu o środku w punkcie 0 i bokach nieograniczenie rosnących. Nieznaczne — przynajmniej, jeżeli idzie o stronę rachunkową — zmiany w dowodzie pozwalają uogólnić to twierdzenie na krzywe $C^{(n)}$ znacznie ogólniejsze. W zastosowaniach jednak rozważanie kół i kwadratów zupełnie wystarcza.

Wzór (4.6) upraszcza się w przypadku, gdy bieguny z_m są jednokrotne. Niech odpowiednie części główne równe będą $a_m/(z-z_m)$. Jeżeli spełniony jest warunek (4.5), to, jak wykazuje łatwy rachunek, możemy przyjąć

$$H_m(z)=-\frac{a_m}{z_m}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{z}{z_m}\right)^\nu. \tag{4.8}$$

W szczególności, jeżeli funkcja $F(z)$ jest jednostajnie ograniczona na okręgach $C^{(n)}$, to mamy (4.5) dla $k=1$. Możemy więc wtedy przyjąć $H_m(z)=-a_m/z_m$.

§ 5. Przykłady rozwinięć funkcyj całkowitych i meromorficznych.

a) Rozwinąć funkcję ctg$z$ na ułamki proste.

Funkcja ctg$z$ jest meromorficzna na płaszczyźnie otwartej. Osobliwościami jej są punkty $z_m=m\pi$, gdzie $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Są to wszystko bieguny jednokrotne o residuach równych jedności. Aby otrzymać szukane rozwinięcie, najdogodniej będzie skorzystać z tw. 4.7, rozważając zamiast ctg$z$ funkcję $F(z)=\operatorname{ctg}z-1/z$, holomorficzną w punkcie 0.

Niech $C^{(n)}=C(0;(n+\frac{1}{2})\pi)$ dla $n=0,1,2,\ldots$ W myśl tw. 9.12, Rozdz. I, funkcja $F(z)$ jest ograniczona na okręgach $C^{(n)}$. Możemy więc zastosować wzór (4.6) z $k=1$. W naszym przypadku (por. uwagi przy końcu § 4):

$$F(0)=0, \qquad G_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)=\frac{1}{z-m\pi}, \qquad H_m(z)=-\frac{1}{m\pi},$$

gdzie m przebiega wartości $\pm1,\pm2,\ldots$ Ze względu na tw. 4.7 mamy więc

$$F(z)=\operatorname{ctg}z-\frac{1}{z}=\lim_{n\to\infty}{\sum_{\nu=-n}^{n}}'\left(\frac{1}{z-\nu\pi}+\frac{1}{\nu\pi}\right), \tag{5.1}$$

przy czym znak $'$ wskazuje, że wyraz odpowiadający $\nu=0$ jest opuszczony przy sumowaniu.

Przypuśćmy, że $|z|\leqslant R$ i niech $|\nu|$ będzie tak duże, by $|\nu|\pi\geqslant 2R$. Wartość bezwzględna ν-tego wyrazu w sumie (5.1) wynosi

$$\left|\frac{z}{\nu\pi(z-\nu\pi)}\right|\leqslant\frac{R}{|\nu|\pi(|\nu|\pi-R)}\leqslant\frac{R}{|\nu|\pi(|\nu|\pi-\frac{1}{2}|\nu|\pi)}=\frac{2R}{\nu^2\pi^2}.$$

Możemy więc wzór (5.1) przepisać jak następuje:

$$\operatorname{ctg}z=\frac{1}{z}+\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-\nu\pi}+\frac{1}{\nu\pi}\right), \tag{5.2}$$

przy czym szereg po prawej stronie jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w każdym kole ograniczonym $K(0;R)$, jeżeli tylko odrzucimy wyrazy mające osobliwości w tym kole lub na jego brzegu. Jest to szukany rozkład $\operatorname{ctg}z$ na ułamki proste. Łącząc wyrazy odpowiadające wskaźnikom $\pm\nu$, możemy przepisać (5.2) w postaci

$$\operatorname{ctg}z=\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\nu^2\pi^2}. \tag{5.3}$$

Do tego wzoru stosują się te same uwagi co do (5.2).

Przy sposobności wyprowadzimy tu pewne wzory, z których korzystać będziemy w Rozdz. IX.

Funkcja $\operatorname{ctg}z-1/z$ jest holomorficzna dla $|z|<\pi$. Możemy więc napisać

$$\operatorname{ctg}z-\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad gdzie\quad |z|<\pi. \tag{5.4}$$

Ciekawa jest budowa arytmetyczna spółczynników a_n. Zauważmy przede wszystkim, że dla $|z|<\pi$

$$\frac{2z}{z^2-\nu^2\pi^2}=-\frac{2z}{\nu^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1-z^2/\nu^2\pi^2}=-\frac{2z}{\nu^2\pi^2}\left(1+\frac{z^2}{\nu^2\pi^2}+\frac{z^4}{\nu^4\pi^4}+\ldots\right). \tag{5.5}$$

Ze względu na (5.3) oraz na tw. 5.9, Rozdz. III, otrzymamy szereg potęgowy (5.4), dodając do siebie formalnie szeregi (5.5) dla $\nu=1,2,\ldots$ Zatem:

$$a_{2k}=0,\qquad a_{2k+1}=-\frac{2}{\pi^{2k+2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2k+2}},\quad gdzie\quad k=0,1,2,\ldots \tag{5.6}$$

Liczby

$$B_k=\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2k}},\qquad gdzie\quad k=1,2,\ldots \tag{5.7}$$

noszą nazwę *liczb Bernoulli'ego*. Występują one w niektórych rozwinięciach funkcyjnych. Ponieważ, jak nietrudno widzieć, kolejne pochodne funkcji $\operatorname{ctg}z-1/z$ w punkcie 0 są liczbami wymiernymi, przeto, ze względu na drugi ze wzorów (5.6), liczby Bernoulli'ego są też wymierne.

Z równości

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}iz=-i\frac{e^z+1}{e^z-1}=-i-\frac{2i}{e^z-1},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}iz-\frac{2}{iz}=i\sum_{k=0}^{\infty}{}'a_{2k+1}(-1)^k\left(\tfrac{1}{2}z\right)^{2k+1}=-2i\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^kB_{k+1}}{(2k+2)!}z^{2k+1}$$

otrzymamy po łatwych przeróbkach wzór

$$\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{\nu-1}B_\nu}{(2\nu)!}z^{2\nu-1}. \tag{5.8}$$

b) Rozwinąć funkcję $\sin z$ na iloczyn nieskończony.

Zastosujemy tw. 2.13. Pierwiastkami funkcji całkowitej $\sin z$ są punkty $0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots$ Są to pierwiastki jednokrotne. Jeżeli ciąg ich napiszemy w postaci $z_0=0,\ z_1,z_2,\ldots$, to łatwo spostrzec, że szereg (2.15) jest zbieżny dla $\lambda=1$ i rozbieżny dla $\lambda=0$. Pozwala nam to przyjąć w (2.14) $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=1$. Otrzymany iloczyn będzie, jak wiemy, bezwzględnie zbieżny, a więc możemy go napisać w postaci

$$\sin z=e^{h(z)}z\prod_{m=1}^{\infty}{}''\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}{}''\left(1+\frac{z}{m\pi}\right)e^{-\frac{z}{m\pi}}=e^{h(z)}z\prod_{m=1}^{\infty}{}''\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right).$$

Wykażemy obecnie, że $h(z)=0$ tożsamościowo, t. j. że

$$\sin z=z\prod_{m=1}^{\infty}{}''\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right). \tag{5.9}$$

Możnaby dowodzić tego wzoru wprost, ale krócej będzie wyprowadzić go ze wzoru (5.3). Przerzućmy w tym ostatnim wzorze wyraz $1/z$ ze strony prawej na lewą i rozważmy pozostały szereg, ograniczając się chociażby do wartości rzeczywistych z. Rozważany szereg będzie zbieżny jednostajnie w przedziale $0\leqslant z\leqslant\zeta$, jeżeli $\zeta<\pi$. Przecałkujmy ten szereg wyraz po wyrazie na odcinku $[0,\zeta]$. Ponieważ funkcja $(\sin z)/z$ przyjmuje wartość 1 dla $z=0$, otrzymujemy równość

$$\operatorname{Log}\frac{\sin\zeta}{\zeta}=\sum_{m=1}^{\infty}{}''\operatorname{Log}\left(1-\frac{\zeta^2}{m^2\pi^2}\right).$$

Usuwając tu logarytmy i zastępując ζ przez z, dostaniemy wzór (5.9). Ten ostatni został więc udowodniony dla $0 \leqslant z < \pi$. Ponieważ obie strony wzoru (5.9) są funkcjami całkowitymi, jest on prawdziwy ogólnie.

Podstawmy $z=\frac{1}{2}\pi$ do (5.9). Po prostych przeróbkach dostaniemy

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\cdots.$$

Równość ta nosi nazwę *wzoru Wallisa*.

c) Zbudować funkcję całkowitą $F(z)$, mającą pierwiastki jednokrotne w punktach $0, -1, -2, \ldots$ i nie znikającą poza tymi punktami.

Możemy znów zastosować tw. 2.13, przyjmując $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=1$. Dostaniemy wówczas

$$F(z)=e^{h(z)}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}. \tag{5.10}$$

Pewien szczególny przypadek zasługuje tu na specjalną uwagę. Przyjmijmy we wzorze (5.10) $h(z)=\gamma z$, gdzie γ oznacza liczbę zwaną *stałą Eulera*, określoną przez wzór

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\operatorname{Log} n\right). \tag{5.11}$$ [1]

Otrzymujemy w ten sposób funkcję całkowitą, której odwrotność oznacza się przez $\Gamma(z)$ i nazywa *funkcją gamma Eulera* albo wprost *funkcją gamma*. Tak więc

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Funkcja $\Gamma(z)$ jest meromorficzną i posiada bieguny jednokrotne w punktach $z=0, -1, -2, \ldots$ Jest ona wszędzie różna od 0 i przyjmuje wartości rzeczywiste dla z rzeczywistych. Odgrywa ona ważną rolę w Analizie.

Zauważmy, że na mocy wzoru (5.11) $1/\Gamma(z)$ jest dla $n\to\infty$ granicą wyrażenia

$$\exp\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\operatorname{Log} n\right)z\right\}\cdot z\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{z+\nu}{\nu}\right)\cdot\exp\left\{-z\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\right\},$$

[1]) Dowód, że granica występująca w (5.11) istnieje, podajemy dalej na str. 301.

skąd natychmiast wynika, iż

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.$$

Wzór ten na funkcję $\Gamma(z)$ zawdzięczamy Gaussowi.

Istnienie granicy we wzorze (5.11) jest konsekwencją następującego ogólnego twierdzenia, które—zazwyczaj w postaci nieco słabszej—nosi nazwę *kryterium całkowego* na zbieżność szeregów.

(5.12) *Niech $f(u)$ będzie funkcją określoną dla $u\geqslant 1$, ograniczoną, dodatnią, a ponadto monotonicznie malejącą do 0, gdy $u\to+\infty$. Niech*

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}f(\nu), \qquad I_n=\int_1^n f(u)\,du.$$

Wówczas dla n nieograniczenie rosnącego różnica S_n-I_n dąży do granicy skończonej g. W szczególności, szereg $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int_1^{+\infty}f(u)\,du$ jest skończona.

Dowód. Ponieważ $f(u)\to 0$, gdy $u\to\infty$, więc wystarczy pokazać, że $S_n-I_{n+1}\to g$. Jeżeli położymy

$$\delta_\nu=f(\nu)-\int_\nu^{\nu+1}f(u)\,du=\int_\nu^{\nu+1}\{f(\nu)-f(u)\}\,du,$$

to

$$0\leqslant\delta_\nu\leqslant f(\nu)-f(\nu+1).$$

Ponieważ szereg o wyrazach $f(\nu)-f(\nu+1)$, gdzie $\nu=1,2,\ldots$, jest zbieżny (jego n-ta suma częściowa wynosi $f(1)-f(n+1)$, a więc zmierza do $f(1)$), przeto ze względu na nierówności spełnione przez liczby δ_ν zbieżny jest także szereg $\delta_1+\delta_2+\ldots$ Oznaczmy przez g jego sumę. Z definicji liczb δ_ν wynika, że $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n=S_n-I_{n+1}$. Zatem $S_n-I_{n+1}\to g$ i twierdzenie jest udowodnione.

Ze wzoru Gaussa wynika łatwo, że

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

Ponieważ ze wzoru Gaussa wynika również, że $\Gamma(1)=1$, więc przez indukcję otrzymujemy, że

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad dla \quad n=1,2,\ldots$$

Innymi słowy, funkcja $\Gamma(z)$ jest uogólnieniem silni.

Bardziej szczegółowo omówimy zachowanie się funkcji $\Gamma(z)$, gdy $z\to\infty$, w Rozdz. IX. Obecnie udowodnimy tylko wzór

$$\sqrt[n]{n!}\cong n/e, \tag{5.13}$$

który wystarcza do wielu zastosowań. Znak $\cong$, którego tu używamy,

nosi nazwę znaku *równości asymptotycznej* i może być określony jak następuje. Jeżeli dane są dwa ciągi liczbowe $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, to mówimy, że a_n jest *asymptotycznie równe* b_n, i piszemy

$$a_n \cong b_n,$$

gdy iloraz a_n/b_n dąży do 1, wraz z $n \to \infty$.

Dla dowodu wzoru (5.13) zauważmy, że

$$e^n = 1+\frac{n}{1!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}\left(1+\frac{n}{n+1}+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right) <$$

$$< n\frac{n^n}{n!}+\frac{n^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\nu} = (2n+1)\frac{n^n}{n!}.$$

Z drugiej strony jest oczywiste, że $e^n > n^n/n!$. Zatem

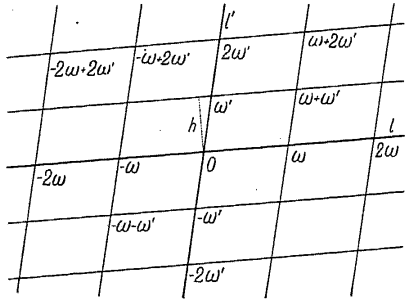
$$n^n/e^n < n! < (2n+1)\,n^n/e^n.$$

Wzór (5.13) otrzymujemy stąd, wyciągając tu pierwiastek n-tego stopnia i uwzględniając, że $\sqrt[n]{2n+1} \to 1$, gdy $n \to \infty$.

d) Niech ω i ω' będą dwiema liczbami zespolonymi, różnymi od 0, o ilorazie nierzeczywistym. Zbudować funkcję całkowitą $F(z)$, mającą wyłącznie pierwiastki jednokrotne położone w punktach

$$m\omega + n\omega', \tag{5.14}$$

gdzie m i n przebiegają niezależnie od siebie wszystkie wartości całkowite (dodatnie ujemne i zero).



Żeby zorientować się w rozkładzie punktów (5.14) na płaszczyźnie, przeprowadźmy przez początek układu 0 i przez punkt ω prostą l; podobnie niech l' oznacza prostą $0\omega'$. Przez punkty $m\omega$, leżące na l, prowadzimy proste równoległe do l'; przez punkty $n\omega'$ na l' proste równoległe do l. Otrzymane dwie rodziny prostych równoległych podzielą nam płaszczyznę na siatkę równoległoboków (jak na rysunku). Wierzchołki tych równoległoboków mają być właśnie pierwiastkami szukanej funkcji.

Niech $z_0 = 0, z_1, z_2, \ldots$ oznacza zbiór liczb (5.14) ustawionych w ciąg. Udowodnimy przede wszystkim, że *szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/|z_n|^3 \tag{5.15}$$

ma sumę skończoną.

Oznaczmy w tym celu dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ przez G_k zbiór wszystkich punktów $m\omega + n\omega'$, dla których bądź $m = \pm k$ oraz $-k \leqslant n \leqslant k$, bądź $n = \pm k$ oraz $-k \leqslant m \leqslant k$. Punktów tych jest oczywiście $8k$ i leżą one na obwodzie równoległoboku o środku w punkcie 0 i o bokach równoległych do prostych 0ω i $0\omega'$. Każdy wierzchołek różny od 0 należy dokładnie do jednego zbioru G_n.

Niech S_k oznacza sumę wyrazów $1/|z_n|^3$, rozciągniętą na wszystkie wierzchołki z_n należące do G_k. Oznaczmy przez h mniejszą z dwu wysokości naszych równoległoboków (p. rysunek). Łatwo widzieć, że gdy $z_\varrho \in G_k$, to $|z_n| \geqslant kh$, a więc

$$S_k \leqslant 8k \cdot \frac{1}{(hk)^3} = \frac{8}{h^3}\cdot\frac{1}{k^2}.$$

Ponieważ suma szeregu (5.15) jest równa $S_1+S_2+S_3+\ldots$, przeto ze względu na ostatnią nierówność suma ta nie przekracza $\frac{8}{h^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, a więc jest skończona.

Jeżeli przez h' oznaczymy większą z dwu przekątnych naszych równoległoboków, to otrzymamy $|z_n| \leqslant kh'$ dla $z_n \in G_k$. Powtarzając rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego wyżej i opierając się na rozbieżności szeregu harmonicznego, wnioskujemy łatwo, że szereg (5.15) stanie się rozbieżny, jeżeli zastąpić w nim wykładnik 3 przez 2.

Żeby otrzymać szukaną funkcję, możemy więc zastosować tw. 2.13, przyjmując $k=1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 2$. Położymy jeszcze $h(z) = 0$. Dostajemy iloczyn

$$z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_\nu}\right)e^{\frac{z}{z_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2} = z\prod_{m,n}{}'\left(1-\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)e^{\frac{z}{m\omega+n\omega'}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)^2}, \tag{5.16}$$

gdzie znak $'$ oznacza, że opuszczamy czynnik odpowiadający $m = n = 0$.

Funkcję określoną przez iloczyn (5.16) oznacza się przez $\sigma(z)$. Nosi ona nazwę *funkcji sigma Weierstrassa*. Funkcja $\sigma(z)$ posiada pierwiastki (jednokrotne) w punktach (5.14) i tylko w nich.

e) Zbudować funkcję meromorficzną, mającą w punktach (5.14) bieguny jednokrotne, o residuach równych 1, a poza tym wszędzie holomorficzną.

Liczby ω, ω', m i n mają tu te same znaczenia co w przykładzie d).

Zastosujmy wzór Mittag-Lefflera (3.9), przyjmując $H(z)=0$. W rozważanym przypadku część główna $G_m\big(1/(z-z_m)\big)$ szukanej funkcji w punkcie z_m wynosi $1/(z-z_m)$. Ponieważ szereg (5.15) jest zbieżny, przeto za $H_m(z)$, gdy $m>0$, możemy wziąć sumę pierwszych dwu wyrazów w rozwinięciu $1/(z-z_m)$ na szereg Taylora w otoczeniu punktu $z=0$ (por. str. 293). Zatem $H_m(z)=-1/z_m-z/z_m^2$. Warunki żądane spełnia więc funkcja

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-z_\nu}+\frac{1}{z_\nu}+\frac{z}{z_\nu^2}\right), \tag{5.17}$$

gdzie $z_1, z_2, \ldots$ jest ciągiem wszystkich punktów (5.14) różnych od 0.

Funkcja $\zeta(z)$, określona przez wzór (5.17), nazywa się *funkcją $\zeta(z)$ Weierstrassa* (w odróżnieniu od funkcji ζ Riemanna, którą poznamy w Rozdz. IX). Porównując (5.16) z (5.17) i stosując tw. 1.22, otrzymujemy natychmiast wzór

$$\zeta(z)=\frac{d}{dz}\log\sigma(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \tag{5.18}$$

dla punktów nie będących pierwiastkami funkcji $\sigma(z)$ ($\log\sigma(z)$ jest funkcją wielowartościową, ale ponieważ jej gałęzie jednoznaczne różnią się o stałe, więc różniczkowanie usuwa wielowartościowość).

Szereg (5.17) jest zbieżny jednostajnie w każdym kole o promieniu skończonym, jeżeli odrzucimy kilka pierwszych wyrazów. To samo można więc powiedzieć o szeregu, jaki otrzymamy z (5.17) przez zróżniczkowanie formalne. Oznaczmy przez $-\wp(z)$ sumę szeregu zróżniczkowanego. Zatem

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{(z-z_\nu)^2}-\frac{1}{z_\nu^2}\right),$$

gdzie liczby z_ν mają te same znaczenia co w wyrażeniach (5.16) i (5.17). Funkcja $\wp$ (czyta się: *pe*) nosi zazwyczaj nazwę *funkcji $\wp$ Weierstrassa*. Jest ona meromorficzna i posiada biegu-

guny drugiego rzędu w punktach postaci $m\omega+n\omega'$, a poza tym jest holomorficzna. Z definicji funkcji $\wp(z)$ oraz ze wzoru (5.18) wynika, że

$$\wp(z)=-\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z)=\frac{\sigma'^2(z)-\sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}.$$

Dla uwidocznienia zależności funkcyj $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$ od ω i ω' używa się nieraz znakowania $\sigma(z;\omega,\omega')$, $\zeta(z;\omega,\omega')$, $\wp(z;\omega,\omega')$.

Funkcje te odgrywają podstawową rolę w teorii funkcyj eliptycznych. Omówimy je szczegółowiej w Rozdz. VIII.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić wzory:

(a) $$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}$$

(b) $$\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2},$$

(c) $$\frac{\sin\alpha z}{\sin\pi z}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}'(-1)^n\frac{n\sin n\alpha}{z^2-n^2}, \qquad \frac{\cos\alpha z}{\sin\pi z}=\frac{1}{\pi z}+\frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}'(-1)^n\frac{\cos n\alpha}{z^2-n^2}.$$

Znak $'$ w (a) wskazuje, że wyraz odpowiadający $n=0$ jest opuszczony przy sumowaniu. We wzorze (c) mamy $-\pi<\alpha<\pi$.

2. Udowodnić wzór $e^z-1=e^{\frac{1}{2}z}z\prod_{n=1}^{\infty}{}'\left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$.

3. Udowodnić bezpośrednio, nie posługując się wzorem (5.3), że za funkcję $h(z)$ we wzorze

$$\sin z=e^{h(z)}z\prod_{m=1}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right) \tag{*}$$

(p. str. 299) możemy przyjąć 0.

[*Wsk.* Utworzyć pochodną logarytmiczną obu stron wzoru (*), wynik jeszcze raz zróżniczkować; skorzystać z tw. 9.12, Rozdz. I, i 5.8, Rozdz. II.]

4. Niech dla dowolnego zespolonego α oraz dla $|z|<1$

$$\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}=A_0^{(\alpha)}+A_1^{(\alpha)}z+A_2^{(\alpha)}z^2+\ldots,$$

gdzie lewą stronę rozumiemy jako $\exp\big(-(\alpha+1)\operatorname{Log}(1-z)\big)$. Pokazać, że

a) $$A_n^{(\alpha)}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}=\binom{n+\alpha}{n}, \qquad \text{b)} \quad A_n^{(\alpha)}\cong n^\alpha/\Gamma(\alpha+1),$$

przy czym wzór b) zachodzi dla $\alpha\neq -1,-2,\ldots$

5. Sumy częściowe szeregu Taylora funkcji $F(z)=(1-z)^{-i}$, gdzie i jest jednostką urojoną, są wspólnie ograniczone w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$. (Przez $(1-z)^{-i}$ rozumiemy funkcję $\exp\big(-i\operatorname{Log}(1-z)\big)$.)

[*Wsk.* Zastosować poprzednie ćw. 4, oraz ćw. 4, Rozdz. III, § 2.]

6. Niech $c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ będzie szeregiem Taylora funkcji rozważanej w ćw. poprzednim. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{\operatorname{Log} n}z^n$$

jest zbieżny jednostajnie, ale nie bezwzględnie, na okręgu $C(0;1)$ (Bohr).

[*Wsk.* Zastosować ćw. poprzednie oraz tw. 2.6 (b), Rozdz. III.]

7. Warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności bezwzględnej szeregu

$$(*)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

w jakimkolwiek punkcie $z\neq 0,-1,-2,\ldots$ jest zbieżność bezwzględna szeregu

$$(**)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_n/n^z$$

w tym punkcie. (Szeregi (*) noszą nazwę *szeregów fakultetowych*; szeregi postaci (**) nazywa się *szeregami Dirichleta*. Tymi ostatnimi zajmować się będziemy w Rozdz. IX.)

§ 6. Rząd funkcji całkowitej. Pozostałą część rozdziału poświęcimy szczegółowszemu nieco zbadaniu własności funkcyj całkowitych. Zaczniemy od omówienia t. zw. r z ę d u funkcji całkowitej.

Niech $F(z)$ będzie funkcją holomorficzną w kole $K(0;R)$. Rozważmy wyrażenie

$$M(r;F)=\operatorname*{Max}_{|z|=r}|F(z)|.$$

Jest ono określone dla wszystkich wartości r spełniających nierówność $0\leqslant r<R$, przy czym $M(0;F)=|F(0)|$. Gdy nie będzie obawy dwuznaczności, będziemy wprost pisać $M(r)$ zamiast $M(r;F)$. Ze względu na zasadę maximum (p. str. 158), wielkość $M(r)$ możemy również określić jako maximum $|F(z)|$ dla $|z|\leqslant r$. Stąd wynika, że $M(r)$ jest funkcją nie malejącą zmiennej r. Co więcej, pomijając przypadek, gdy $F(z)$ jest stałą, możemy powiedzieć, że $M(r)$ jest funkcją rosnącą r.

W przypadku, gdy $F(z)$ jest funkcją całkowitą, $M(r)$ jest określone dla wszystkich r nieujemnych. Tw. 5.11, Rozdz. II, mówi, że o ile $F(z)$ nie jest stałą, to $M(r)$ wzrasta nieograniczenie wraz z r. Szybkość wzrostu funkcji $M(r)$, gdy $r\to\infty$, daje nam pewne wiadomości o zachowaniu się funkcji $F(z)$. Nasuwa się myśl, aby scharakteryzować funkcję $M(r)$ przez porównanie jej z jakimiś prostymi funkcjami zmiennej r, dążącymi do nieskończoności wraz z r.

Najprostszą funkcją tego rodzaju mogłaby się wydawać np. funkcja r^k. Tw. 5.8, Rozdz. II, powiada jednak, że jeżeli dla wszystkich r dostatecznie dużych mamy

$$M(r)\leqslant Cr^k,$$

gdzie C jest pewną stałą, to $F(z)$ jest wielomianem stopnia nie przekraczającego k. Jeżeli więc usuniemy z rozważań przypadek wielomianu, to musimy porównywać $M(r)$ z funkcjami rosnącymi szybciej niż każda potęga r.

Najwłaściwsze z wielu względów jest wybranie za funkcję „wzorcową" funkcji wykładniczej $\exp r^A$. Dla danej funkcji całkowitej $F(z)$ może zajść jedna z dwu ewentualności:

1^0 istnieje liczba skończona A taka, że dla wszystkich r dostatecznie dużych spełniona jest nierówność

$$(6.1)\qquad M(r;F)\leqslant e^{r^A},$$

2^0 takiej liczby A nie ma.

W przypadku 1^0 mówimy, że $F(z)$ jest funkcją *rzędu skończonego*; w przypadku 2^0, że jest *rzędu nieskończonego*.

Jeżeli więc $F(z)$ jest rzędu nieskończonego, to, jakkolwiek wielka byłaby liczba A, nierówność (6.1) będzie fałszywa dla pewnego nieograniczenie rosnącego ciągu wartości r. Jeżeli zaś $F(z)$ jest rzędu skończonego, to możemy rozważać kres dolny liczb dodatnich A, dla których nierówność (6.1) jest spełniona, przynajmniej poczynając od pewnej wartości r. Oznaczmy ten kres dolny, który jest liczbą nieujemną, przez ϱ. Liczba ϱ nosi nazwę *rzędu wzrastania*, albo po prostu *rzędu* funkcji całkowitej $F(z)$. Zatem dla każdego $\varepsilon>0$ nierówność

$$(6.2)\qquad M(r)\leqslant e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

jest spełniona, jeżeli tylko r jest większe od pewnego $r_0=r_0(\varepsilon)$. Jeżeli natomiast $\varepsilon<0$, to nierówność (6.2) nie jest spełniona dla pewnych dowolnie wielkich wartości r. O przypadku $\varepsilon=0$ nic się nie da powiedzieć. Gdy $F(z)$ jest rzędu nieskończonego, to przyjmujemy $\varrho=\infty$.

Logarytmując nierówność (6.2) dwukrotnie, łatwo sprawdzamy, że rząd ϱ można określić przez wzór

$$(6.3)\qquad \varrho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log}M(r)}{\operatorname{Log} r}.$$

Następująca uwaga dogodna jest w wielu przypadkach. Jeżeli zachodzi nierówność (6.1), to oczywiście $\varrho\leqslant A$. Otóż, jeżeli zamiast (6.1) zachodzi jedna z nierówności

$$M(r)\leqslant Be^{r^A} \qquad lub \qquad M(r)\leqslant e^{Br^A} \qquad dla\ r\geqslant r_0,$$

gdzie B jest stałą, to i wtedy $\varrho\leqslant A$. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ każda z tych nierówności pociąga za sobą $M(r)\leqslant\exp r^{A+\varepsilon}$, jeżeli tylko r jest dostatecznie duże. Zatem rząd ϱ nie przekracza liczby $A+\varepsilon$, a ponieważ ε może być dowolnie małe, więc $\varrho\leqslant A$.

Przykłady. 1. Niech $F(z)=e^z$. Dla $z=re^{i\theta}$ otrzymujemy równość: $|F(z)|=\exp(r\cos\theta)$. Stąd wynika, że $M(r)=e^r$, a więc $\varrho=1$.

2. Niech $F(z)=\exp(\exp z)$. Wówczas $M(r)=\exp(\exp r)$, a więc funkcja $F(z)$ jest rzędu nieskończonego.

3. Jeżeli $F(z)$ jest wielomianem, to $\varrho=0$.

4. Niech $F(z)=\exp P(z)$, gdzie $P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_kz^k$ jest wielomianem stopnia k. Położmy $c_s=a_s-ib_s$, gdzie a_s i b_s są liczbami rzeczywistymi, zaś $s=0,1,\ldots,k$. Wówczas łatwo sprawdzić, że

$$|F(re^{i\theta})|=\exp\Re P(re^{i\theta})=\exp\left(\sum_{s=0}^{k}(a_s\cos s\theta+b_s\sin s\theta)\,r^s\right).$$

Spółczynniki przy r^s są funkcjami ograniczonymi zmiennej θ. Oznaczając przez B pewną stałą, mamy $M(r)\leqslant\exp Br^k$, gdy $r\geqslant1$. Stąd wynika, że $\varrho\leqslant k$.

Oznaczmy teraz przez θ_0 liczbę, dla której dwumian $a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta$ osiąga swe maximum $\sqrt{a_k^2+b_k^2}=|c_k|$. Dla wszystkich r dostatecznie dużych będziemy więc mieli

$$\sum_{s=0}^{k}(a_s\cos s\theta_0+b_s\sin s\theta_0)\,r^s\geqslant\frac{1}{2}|c_k|\,r^k, \quad \text{a więc} \quad M(r)\geqslant\exp\left(\frac{1}{2}|c_k|\,r^k\right).$$

Zatem $\varrho\geqslant k$, co w związku z nierównością przeciwną daje $\varrho=k$.

5. Funkcja $\cos\sqrt{z}=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{4!}-\ldots$ jest rzędu $\frac{1}{2}$. Istotnie, z jednej strony, dla $z=re^{i\theta}$ mamy zawsze

$$|\cos\sqrt{z}|=\frac{1}{2}|e^{i\sqrt{z}}+e^{-i\sqrt{z}}|\leqslant e^{\sqrt{r}},$$

a z drugiej, dla $z=-r$ mamy $\cos\sqrt{z}=\frac{1}{2}(e^{\sqrt{r}}+e^{-\sqrt{r}})>\frac{1}{2}e^{\sqrt{r}}$.

Udowodnimy obecnie kilka twierdzeń o rzędzie funkcyj całkowitych.

(6.4) *Jeżeli $F_1(z)$ i $F_2(z)$ są funkcjami całkowitymi odpowiednio rzędów ϱ_1 i ϱ_2 i jeżeli $\varrho_1<\varrho_2$, to rząd ϱ sumy $F(z)=F_1(z)+F_2(z)$ jest równy ϱ_2.*

Dowód. Przypuśćmy, że ϱ_2 jest liczbą skończoną. Wówczas dla $\varepsilon>0$ mamy

$$(6.5)\qquad M(r;F_1+F_2)\leqslant M(r;F_1)+M(r;F_2)<e^{r^{\varrho_1+\varepsilon}}+e^{r^{\varrho_2+\varepsilon}}<2e^{r^{\varrho_2+\varepsilon}},$$

jeżeli tylko r jest dostatecznie duże. Stąd wynika, że ϱ nie przekracza $\varrho_2+\varepsilon$, jakiekolwiek byłoby $\varepsilon>0$, a więc nie przekracza i ϱ_2. Z drugiej strony, jak wynika z definicji rzędu funkcji, dla pewnego ciągu liczb $r_n\to\infty$ mamy $M(r_n;F_2)>\exp(r_n^{\varrho_2-\varepsilon})$, a więc

$$M(r_n;F_1+F_2)\geqslant e^{r_n^{\varrho_2-\varepsilon}}-e^{r_n^{\varrho_1+\varepsilon}}=e^{r_n^{\varrho_2-\varepsilon}}(1-e^{r_n^{\varrho_1+\varepsilon}-r_n^{\varrho_2-\varepsilon}})>\frac{1}{2}e^{r_n^{\varrho_2-\varepsilon}},$$

jeżeli tylko ε jest tak małe, że $\varrho_1+\varepsilon<\varrho_2-\varepsilon$, zaś wskaźnik n jest dostatecznie duży. Zatem $\varrho\geqslant\varrho_2$. W konkluzji: rząd sumy $F_1(z)+F_2(z)$ jest równy ϱ_2. Dowód stosuje się, bez istotnych zmian, również do przypadku, gdy $\varrho_2=\infty$.

W przypadku $\varrho_1=\varrho_2$ tw. 6.4 jest fałszywe. Wystarczy rozważyć następujący przykład: $F_1(z)=e^z$, $F_2(z)=-e^z$, gdzie $\varrho_1=\varrho_2=1$, zaś rząd ϱ sumy $F_1(z)+F_2(z)$ jest równy 0. Oszacowanie (6.5) wskazuje jednak, że gdy $\varrho_1\leqslant\varrho_2$, to $\varrho\leqslant\varrho_2$.

Analogiczne twierdzenie mamy dla iloczynu:

(6.6) *Jeżeli funkcje całkowite $F_1(z)$ i $F_2(z)$ mają odpowiednio rzędy ϱ_1 i ϱ_2, przy czym $\varrho_1\leqslant\varrho_2$, to rząd ϱ iloczynu $F_1(z)F_2(z)$ nie przekracza ϱ_2.*

Dowód. Dla każdego $\varepsilon>0$ i dostatecznie dużego r mamy

$$M(r;F_1F_2)\leqslant M(r;F_1)M(r;F_2)\leqslant e^{r^{\varrho_1+\varepsilon}}\cdot e^{r^{\varrho_2+\varepsilon}}\leqslant e^{2r^{\varrho_2+\varepsilon}}.$$

Daje to nierówność $\varrho\leqslant\varrho_2+\varepsilon$, a więc $\varrho\leqslant\varrho_2$.

Tw. 6.6 będzie uzupełnione dalej (por. tw. 10.19). Obecnie wykażemy tylko, że

(6.7) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją całkowitą rzędu ϱ, zaś $P(z)$ jest wielomianem stopnia dodatniego, to iloczyn $F(z)P(z)$ ma rząd ϱ. Jeżeli iloraz $F(z)/P(z)$ jest funkcją całkowitą, to jest również rzędu ϱ.*

Dowód. Z tw. 6.6 wynika, że rząd iloczynu $F(z)P(z)$ jest $\leqslant\varrho$, gdyż rząd wielomianu $P(z)$ jest zerem. Z drugiej strony, ponieważ $|P(z)|>1$, jeżeli tylko $|z|$ jest dostatecznie duże, przeto dla tych wartości z mamy nierówność $|F(z)P(z)|\geqslant|F(z)|$. Stąd wynika, że rząd iloczynu $F(z)P(z)$ jest $\geqslant\varrho$. Zatem pierwsza część twierdzenia jest udowodniona. W szczególności, jeżeli iloraz $F(z)/P(z)$ jest funkcją całkowitą, to rząd jej jest ten sam co rząd funkcji $\{F(z)/P(z)\}P(z)=F(z)$. Daje to drugą część twierdzenia.

(6.8) *Funkcja całkowita $F(z)$ i jej pochodna $F'(z)$ są tego samego rzędu.*

Dowód. Niech ϱ będzie rzędem funkcji $F(z)$, a ϱ_1 rzędem pochodnej $F'(z)$. Połóżmy $M(r)=M(r;F)$ i $M_1(r)=M(r;F')$. Ponieważ $F(z)-F(0)$ jest całką pochodnej $F'(z)$ wzdłuż odcinka $[0,z]$, przeto

$$M(r)\leqslant|F(0)|+\int_0^r M_1(u)\,du\leqslant|F(0)|+rM_1(r),$$

co bez trudności daje $\varrho\leqslant\varrho_1$.

Rozważmy teraz okrąg $C_z=C(z;1)$, gdzie $|z|=r$. Mamy

$$|F'(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|\leqslant M(r+1),$$

gdyż maximum $|F(\zeta)|$ na okręgu C_z nie przekracza $M(r+1)$. Zatem $M_1(r)\leqslant M(r+1)$. Jeżeli więc r jest dostatecznie duże, to

$$M_1(r)\leqslant M(r+1)\leqslant M(2r)\leqslant\exp(2r)^{\varrho+\varepsilon}.$$

Z nierówności tej wynika, że $\varrho_1\leqslant\varrho$, co w związku z udowodnioną już nierównością przeciwną daje równość $\varrho_1=\varrho$.

Definicję rzędu funkcji całkowitej otrzymujemy, porównując funkcję $M(r)$ z funkcją $\exp r^A$. W niektórych zagadnieniach pożądana jest nieco większa dokładność w oszacowaniu funkcji $M(r)$. Możemy ją osiągnąć przez rozważanie t. zw. typu funkcji całkowitej.

Przypuśćmy, że funkcja całkowita $F(z)$ jest rzędu skończonego i dodatniego ϱ. Dla każdego więc $\varepsilon>0$ i dostatecznie dużego r mamy nierówność (6.2). Są teraz dwie możliwości: albo istnieje taka liczba dodatnia B, że

$$M(r)\leqslant e^{Br^\varrho} \tag{6.9}$$

dla wszystkich dostatecznie dużych r, albo też takiej liczby B nie ma. W pierwszym przypadku kres dolny rozważanych liczb B jest pewną liczbą nieujemną; oznaczamy ją przez τ i nazywamy *typem* funkcji $F(z)$. Zatem dla każdego $\varepsilon>0$

$$M(r)\leqslant e^{(\tau+\varepsilon)r^\varrho}, \tag{6.10}$$

jeżeli tylko r jest dostatecznie duże. Natomiast jeżeli $\varepsilon<0$, to nierówność (6.10) jest fałszywa dla pewnych dowolnie dużych wartości r. Pojęcie typu funkcji rozszerzamy i na drugi z rozważanych przypadków, gdy nierówność (6.9) nie jest spełniona, jakkolwiek wielkie byłoby B. Przyjmujemy wówczas $\tau=\infty$.

Jeżeli $\tau=0$, względnie $\tau=\infty$, to mówi się, że $F(z)$ jest rzędu ϱ i *typu minimalnego*, względnie *maksymalnego*. Jeżeli $0<\tau<\infty$, mówimy, że $F(z)$ jest rzędu ϱ i *typu pośredniego*.

Jeżeli $F(z)$ jest rzędu ϱ, gdzie $0<\varrho<\infty$, to z definicji liczby τ wynika, że

$$\tau=\limsup_{r\to\infty}\frac{\operatorname{Log}M(r)}{r^\varrho}. \tag{6.11}$$

Funkcje całkowite $F(z)$, spełniające dla r dostatecznie dużego warunek $M(r)\leqslant\exp Ar$, gdzie A jest stałą, nazywa się często funkcjami *typu wykładniczego*.

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że funkcja $F(z)$ z przykładu 4, str. 308, ma typ $|c_k|$.

2. Funkcja całkowita $F(z)$ i jej pochodna $F'(z)$ mają nie tylko ten sam rząd (por. tw. 6.8), ale i ten sam typ.

3. Rozważając szereg potęgowy wszędzie zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_n}$, gdzie $\{\lambda_n\}$ jest dostatecznie szybko rosnącym ciągiem liczb naturalnych, wykazać, że dla dowolnej funkcji rzeczywistej $\varphi(r)$, określonej dla $r\geqslant0$, ograniczonej w każdym przedziale skończonym i dążącej do nieskończoności wraz z r, istnieje funkcja całkowita $F(z)$ taka, że $M(r;F)\geqslant\varphi(r)$ dla $r\geqslant0$. Innymi słowy, funkcja $M(r;F)$ może rosnąć dowolnie szybko (Poincaré).

§ 7. Zależność rzędu funkcji całkowitej od spółczynników jej rozwinięcia na szereg Taylora.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, by szereg

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \tag{7.1}$$

przedstawiał funkcję całkowitą, jest, by jego promień zbieżności był nieskończony. Korzystając ze wzoru na promień zbieżności szeregu potęgowego (tw. 1.1, Rozdz. III), widzimy, że warunek ten jest równoważny następującemu: $\sqrt[n]{|c_n|}$ ma zmierzać do 0, gdy $n\to\infty$. Celem niniejszego § jest wykazanie, że szybkość tego zmierzania do 0 jest ściśle związana z rzędem funkcji (7.1).

(7.2) *Jeżeli istnieje taka liczba nieujemna ξ oraz taki wskaźnik n_0, że*

$$\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant n^{-\xi}\qquad dla\quad n>n_0, \tag{7.3}$$

to rząd ϱ funkcji całkowitej $F(z)$ danej przez szereg (7.1) nie przekracza $1/\xi$.

Dowód. Dla $\xi=0$ jest to oczywiste, możemy więc założyć, że ξ jest dodatnie. Możemy również przyjąć, że $n_0>1/\xi$, czyli że $n_0\xi>1$. Niech $P(z)$ oznacza sumę pierwszych n_0+1 wyrazów szeregu (7.1) i niech $F_1(z)=F(z)-P(z)$. Wówczas

$$M(r;F_1)\leqslant\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|c_n|\,r^n\leqslant\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{r^n}{n^{\xi n}}=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{(\xi r^{1/\xi})^{\xi n}}{(\xi n)^{\xi n}}. \tag{7.4}$$

Oznaczmy przez m_n część całkowitą liczby $n\xi$. Liczby m_n tworzą ciąg niemalejący, przy czym każda liczba naturalna k występuje w tym ciągu co najwyżej (skończoną ilość) A razy, gdzie A jest pewną stałą zależną wyłącznie od ξ. Przyjmijmy $\xi r^{1/\xi}=r_1$. Wówczas dla $r_1\geqslant1$ ostatnia suma w (7.4) nie przekracza

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{r_1^{m_n+1}}{m_n^{m_n}}=r_1\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{r_1^{m_n}}{m_n^{m_n}}\leqslant r_1 A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_1^k}{k^k}\leqslant A e^{r_1}r_1,$$

gdyż $k^k\geqslant k!$ dla $k=1,2,\ldots$ Innymi słowy $M(r;F_1)\leqslant A\xi r^{1/\xi}\exp\xi r^{1/\xi}$. Wynika stąd, że dla każdego $\varepsilon>0$ i dostatecznie dużego r mamy

$$M(r,F_1)\leqslant\exp r^{\frac{1}{\xi}+\varepsilon}.$$

Zatem rząd funkcji $F_1(z)$ nie przekracza $1/\xi$. Ponieważ $P(z)$ jest wielomianem, przeto rząd ϱ funkcji $F(z)$ jest również $\leqslant 1/\xi$.

Udowodnimy teraz twierdzenie w pewnym sensie odwrotne do poprzedniego:

(7.5) *Jeżeli dla funkcji całkowitej $F(z)$ oraz pewnych $\alpha>0$ i $r_0>0$ zachodzi nierówność*

$$M(r;F)\leqslant\exp r^{\alpha},\quad gdy\quad r>r_0,$$

wówczas przy n dostatecznie dużym spółczynniki c_n funkcji $F(z)$ spełniają nierówność

$$\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant A\,n^{-1/\alpha},\tag{7.6}$$

gdzie A jest stałą, zależną tylko od α.

Dowód. Dla $r>r_0$ mamy (por. Rozdz. III, § 4, str. 135)

$$|c_n|\leqslant M(r)/r^n\leqslant r^{-n}e^{r^{\alpha}}.\tag{7.7}$$

Żeby otrzymać najlepsze oszacowanie na $|c_n|$, weźmiemy takie r, przy którym prawa strona jest tu najmniejsza. Rachunek, który pozostawiamy czytelnikowi, wykazuje, że wyrażenie $r^{-n}\exp r^{\alpha}$ osiąga swe minimum dla $r=n^{1/\alpha}\alpha^{-1/\alpha}$, a samo minimum wynosi $e^{n/\alpha}(\alpha/n)^{n/\alpha}$. Podstawmy $r=n^{1/\alpha}\alpha^{-1/\alpha}$ do prawej strony wzoru (7.7). Ponieważ dla n dostatecznie dużego mamy $n^{1/\alpha}\alpha^{-1/\alpha}>r_0$, zatem dla dostatecznie dużych n mamy również $\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant(e\alpha)^{1/\alpha}n^{-1/\alpha}$, t.zn. wzór (7.6).

Jeżeli rząd funkcji $F(z)$ wynosi ϱ, to w nierówności (7.6) możemy za α wziąć każdą liczbę większą niż ϱ. Co więcej, liczbę A możemy wtedy zastąpić przez 1. Stąd oraz z tw. 7.2 wynika, że, gdy $0<\varrho<\infty$, to liczbę $1/\varrho$ można określić jako kres górny liczb ξ spełniających warunek (7.3). Z tw. 7.5 wynika, że twierdzenie to zachowuje się dla $\varrho=0$, zaś z tw. 7.2 wynika jego prawdziwość i dla $\varrho=\infty$. Zatem ogólnie:

(7.8) *Odwrotność $1/\varrho$ rzędu funkcji $F(z)$, danej przez rozwinięcie* (7.1), *można określić jako kres górny liczb ξ spełniających warunek* (7.3).

Warunek (7.3) można przepisać w postaci $n^{\xi}\leqslant|c_n|^{-1/n}$, a więc kres górny liczb ξ spełniających ten warunek jest równy granicy dolnej ilorazu $\operatorname{Log}|c_n|^{-1}/n\operatorname{Log}n$ dla $n\to\infty$. Zatem:

(7.9) *Rząd ϱ funkcji całkowitej* (7.1) *dany jest przez wzór*

$$\frac{1}{\varrho}=\liminf_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Log}1/|c_n|}{n\operatorname{Log}n}.$$

ĆWICZENIA. 1. Niech α będzie liczbą rzeczywistą dodatnią. Wszystkie trzy funkcje całkowite:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n\alpha}},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^{\alpha}},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$$

są rzędu $1/\alpha$.

2. Niech $\Phi(t)$ oznacza funkcję ciągłą i skończoną w przedziale skończonym $a\leqslant t\leqslant b$. Funkcja $F(z)=\int_a^b e^{zt}\Phi(t)\,dt$ jest funkcją całkowitą typu wykładniczego.

3. Jeżeli szereg (7.1) przedstawia funkcję całkowitą $F(z)$ rzędu ϱ, to typ τ funkcji $F(z)$ określony jest przez wzór

$$(\tau e\varrho)^{1/\varrho}=\limsup_{n\to\infty}n^{1/\varrho}\sqrt[n]{|c_n|}.$$

W szczególności $F(z)$ jest typu minimalnego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\,n^{1/\varrho}=0.$$

[*Wsk.* Dowód jest analogiczny do dowodów tw. 7.2 i 7.5 (p. wzór (5.13)).]

4. Typy funkcyj rozważanych w ćw. 1 są odpowiednio: α/e, α, 1.

5. Z każdym szeregiem potęgowym

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots\tag{$*$}$$

skojarzyć możemy szereg potęgowy

$$c_0+1!\,c_1z+2!\,c_2z^2+\ldots+n!\,c_nz^n+\ldots\tag{$**$}$$

Udowodnić, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby szereg $(*)$ przedstawiał funkcję typu wykładniczego, jest by szereg $(**)$ miał promień zbieżności dodatni. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, by szereg $(*)$ przedstawiał funkcję co najwyżej rzędu 1 typu minimalnego, jest by funkcja $(**)$ była całkowita.

6. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, by $F(z)$ była funkcją całkowitą typu wykładniczego, jest by

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z\zeta}G(\zeta)\,d\zeta,$$

gdzie $G(\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w punkcie ∞, zaś $C=C(0;R)$, przy czym R jest dostatecznie duże. Jeżeli $F(z)$ jest co najwyżej rzędu 1 typu minimalnego, to $G(\zeta)$ jest funkcją całkowitą zmiennej $1/\zeta$.

[*Wsk.* Zastosować ćw. 5.]

§ 8. Wykładnik zbieżności pierwiastków funkcji całkowitej. Niech $z_1,z_2,\ldots$ będzie ciągiem wszystkich różnych od 0 pierwiastków (z uwzględnieniem ich krotności) funkcji całkowitej $F(z)$ nie znikającej tożsamościowo. Rozważmy szereg

$$\sum_n \frac{1}{|z_n|^\alpha}, \tag{8.1}$$

gdzie α jest liczbą dodatnią. Jeżeli jest on zbieżny dla pewnej wartości α, to tym bardziej będzie zbieżny dla każdego $\alpha'>\alpha$. Kres dolny μ liczb dodatnich $\alpha>0$, dla których szereg (8.1) jest zbieżny, nazywać będziemy *wykładnikiem zbieżności* pierwiastków $z_1,z_2,\ldots$ Zatem szereg $\sum_n \frac{1}{|z_n|^{\mu+\varepsilon}}$ jest zbieżny dla $\varepsilon>0$ i (o ile ciąg $\{z_n\}$ jest nieskończony) rozbieżny dla $\varepsilon<0$; dla $\varepsilon=0$ szereg ten może być bądź zbieżny, bądź rozbieżny. Jeżeli ciąg $z_1,z_2,\ldots$ jest skończony, to oczywiście $\mu=0$. W przypadku, gdy funkcja $F(z)$ nie posiada pierwiastków, przyjmujemy również $\mu=0$. Odwrotnie, nierówność $\mu>0$ wskazuje, że ciąg $z_1,z_2,\ldots$ jest nieskończony. Jeżeli szereg (8.1) jest rozbieżny dla każdego $\alpha>0$, przyjmujemy $\mu=\infty$.

Liczba μ daje pewne wyobrażenie o rozkładzie pierwiastków funkcji $F(z)$ na płaszczyźnie. Jeżeli μ jest małe (albo równe zeru), pierwiastki $z_1,z_2,\ldots$ są „rzadkie". Sytuacja jest odwrotna, gdy μ jest duże.

Przykłady. 1. Jeżeli $z_n=n^\lambda$, gdzie $n=1,2,\ldots$ i $\lambda>0$, to $\mu=1/\lambda$.

2. Gdy $z_n=2^n$ dla $n=1,2,\ldots$, to $\mu=0$.

3. Jeżeli $z_n=\operatorname{Log} n$ dla $n=2,3,\ldots$, to $\mu=\infty$.

(8.2) *Rząd ϱ funkcji całkowitej $F(z)$ oraz wykładnik zbieżności μ pierwiastków tej funkcji są związane zależnością $\mu\leqslant\varrho$.*

Twierdzenie to mówi, że im wyższy jest rząd funkcji całkowitej, tym więcej pierwiastków może ona posiadać w danym obszarze.

W dowodzie możemy przypuścić, że $\varrho<\infty$, gdyż w przeciwnym razie twierdzenie jest oczywiste. Jeżeli $F(z)$ ma pierwiastek k-krotny w początku układu, to rozważając zamiast $F(z)$ funkcję $F(z)z^{-k}$, która ma ten sam rząd co $F(z)$, możemy przyjąć, że $F(0)\neq 0$. Dzieląc przez stałą, możemy nadto przyjąć, że $F(0)=1$.

Niech $n(r)$ oznacza liczbę pierwiastków funkcji $F(z)$ w kole domkniętym $\overline{K}(0;r)$. Funkcja $n(r)$ jest niemalejąca. Szybkość jej wzrostu mówi o gęstości rozkładu pierwiastków funkcji $F(z)$ na płaszczyźnie. Funkcja $n(r)$ jest związana z $F(z)$ wzorem Jensena (Rozdz. IV, tw. 4.1), który, ze względu na $F(0)=1$, przyjmuje postać

$$\int_0^r \frac{n(u)}{u}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Dowód tw. 8.2 oprzemy na następującym lemmacie:

(8.3) *Jeżeli funkcja całkowita $F(z)$ jest rzędu ϱ, a ε jest liczbą dodatnią, to $n(r)\leqslant r^{\varrho+\varepsilon}$ dla $r>r_0(\varepsilon)$.*

Dowód. Zastępując we wzorze Jensena r przez $2r$, otrzymamy

$$\int_0^{2r}\frac{n(u)}{u}\,du\leqslant\operatorname{Log}M(2r). \tag{8.4}$$

Z drugiej strony $n(u)$ jest funkcją niemalejącą, a więc

$$\int_0^{2r}\frac{n(u)}{u}\,du\geqslant\int_r^{2r}\frac{n(u)}{u}\,du\geqslant n(r)\int_r^{2r}\frac{du}{u}=n(r)\operatorname{Log}2. \tag{8.5}$$

Uwzględniając (8.4) i (8.5), dostajemy

$$n(r)\leqslant\operatorname{Log}M(2r)/\operatorname{Log}2\leqslant r^{\varrho+\varepsilon}\qquad dla\quad r>r_0(\varepsilon). \tag{8.6}$$

Przechodząc do dowodu tw. 8.2, połóżmy $|z_n|=r_n$. Podstawmy r_n za r w nierówności $n(r)\leqslant r^{\varrho+\varepsilon}$. Otrzymamy wówczas na mocy lemmatu 8.3:

$$n\leqslant r_n^{\varrho+\varepsilon}\quad dla\quad n>n_0,$$

gdzie n_0 oznacza liczbę naturalną taką, że $r_n>r_0(\varepsilon)$.

Stąd wnosimy, że szereg (8.1) jest zbieżny dla $\alpha=\varrho+2\varepsilon$, bowiem gdy $n>n_0$, wyrazy jego są mniejsze odpowiednio od liczb $n^{-(\varrho+2\varepsilon)/(\varrho+\varepsilon)}$ tworzących szereg zbieżny. Zatem $\mu\leqslant\varrho$.

Zauważmy jeszcze, że w ostatniej nierówności znak $\leqslant$ na ogół nie da się zastąpić przez znak $=$. Widać to chociażby na przykładzie funkcji e^z, dla której $\varrho=1$ i $\mu=0$.

ĆWICZENIA. 1. Zachowując poprzednie oznaczenia, udowodnić twierdzenie następujące, które jest nieco precyzyjniejszym wysłowieniem tw. 8.2:

Jeżeli całka $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{r^{k+1}}\,dr$ jest skończona przy $k>0$, to szereg $\sum_n |z_n|^{-k}$ jest zbieżny (Valiron).

[*Wsk.* Oszacować przy pomocy pierwszej z nierówności (8.6) liczbę pierwiastków funkcji $F(z)$ w pierścieniach $\overline{P}(0;2^N,2^{N+1})$, gdzie $N=0,1,2,\ldots$]

2. Jeżeli funkcja całkowita $F(z)$ posiada pierwiastki na każdym okręgu $C(0;n)$, gdzie $n=1,2,\ldots$, a nie znika tożsamościowo, to $F(z)$ nie może spełniać nierówności $M(r;F)\leqslant \exp kr$, przy $k<1$, dla wszystkich dostatecznie dużych r (Estermann).

[*Wsk.* Zastosować tw. 4.1, Rozdz. IV i wzór (5.13).]

§ 9. Iloczyn kanoniczny. Niech $F(z)$ będzie funkcją całkowitą rzędu skończonego, nie znikającą tożsamościowo, $z_1,z_2,\ldots$ ciągiem jej pierwiastków różnych od zera i $k\geqslant 0$ krotnością jej pierwiastka w punkcie 0. Niech λ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nieujemną, dla której szereg

$$\sum_n \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}} \tag{9.1}$$

jest zbieżny. Istnienie takiej liczby wynika z tw. 8.2. Iloczyn Weierstrassowski (2.11) daje nam funkcję całkowitą o pierwiastkach $z_1,z_2,\ldots$ oraz k-krotnym pierwiastku w początku układu. Wobec zbieżności szeregu (9.1), możemy przyjąć $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda$ i rozważany iloczyn przyjmie postać

$$z^k \prod_n \left(1-\frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{z}{z_n}\right)^\lambda}. \tag{9.2}$$

Widzimy więc, że z każdą funkcją całkowitą rzędu skończonego, nie znikającą tożsamościowo i posiadającą pierwiastki, możemy skojarzyć pewien ściśle określony iloczyn Weierstrassowski (9.2). Iloczyn ten nosi nazwę *iloczynu kanonicznego* funkcji $F(z)$. Jeżeli funkcja nie posiada pierwiastków, to za jej iloczyn kanoniczny przyjmujemy 1. Funkcja $F(z)$ różni się od swego iloczynu kanonicznego czynnikiem wykładniczym $\exp h(z)$. Czynnik ten może mieć istotny wpływ na zachowanie się funkcji $F(z)$ i dlatego jej własności mogą być inne niż własności jej iloczynu kanonicznego.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli wykładnik zbieżności μ dla ciągu $z_1,z_2,\ldots$ jest liczbą nie całkowitą, to λ jest równe części całkowitej liczby μ. Jeżeli μ jest całkowite, to $\lambda=\mu-1$ albo $\lambda=\mu$, w zależności od tego, czy szereg $\sum_n r_n^{-\mu}$ jest zbieżny, czy nie.

W każdym razie zachodzi nierówność

$$\lambda\leqslant\mu\leqslant\lambda+1. \tag{9.3}$$

(9.4) *Dla iloczynu kanonicznego mamy zawsze* $\mu=\varrho$, *t. j. rząd iloczynu kanonicznego jest równy wykładnikowi zbieżności jego pierwiastków.*

Ponieważ $\mu\leqslant\varrho$ dla każdej funkcji, wystarczy wykazać, że $\mu\geqslant\varrho$. Poza tym, możemy założyć, że iloczyn kanoniczny posiada pierwiastki, gdyż w przeciwnym razie tw. 9.4 jest oczywiste. Rozpoczniemy od oszacowania czynników pierwszych $\mathcal{E}_\lambda(z)$, wprowadzonych na str. 285. Udowodnimy mianowicie lemmat następujący:

(9.5) *Dla każdego* $\lambda=1,2,\ldots$ *mamy nierówność*

$$|\mathcal{E}_\lambda(z)|\leqslant\exp A|z|^\alpha \quad \textit{dla} \quad \lambda\leqslant\alpha\leqslant\lambda+1, \tag{9.6}$$

gdzie A *jest stałą zależną wyłącznie od* α. *Nierówność* (9.6) *zachodzi i dla* $\lambda=0$, *jeżeli tylko* $\lambda<\alpha\leqslant\lambda+1$.

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że $\lambda>0$. Ze wzorów (2.5) i (2.6) wynika, że gdy $|z|\leqslant\frac{1}{2}$, to $|\mathcal{E}_\lambda(z)|$ nie przekracza $\exp|z|^{\lambda+1}$, a więc i $\exp|z|^\alpha$. Gdy $|z|\geqslant 1$, to pamiętając, że $1+|z|\leqslant\exp|z|$, otrzymamy:

$$|\mathcal{E}_\lambda(z)|\leqslant\exp\left(2|z|+\frac{1}{2}|z|^2+\ldots+\frac{1}{\lambda}|z|^\lambda\right)\leqslant\exp(\lambda+1)|z|^\lambda\leqslant\exp(\lambda+1)|z|^\alpha.$$

Wreszcie, gdy $\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 1$, funkcja $\exp A|z|^\alpha$ zmierza jednostajnie do nieskończoności wraz z A. Zatem nierówność (9.6) będzie spełniona w pierścieniu $\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 1$, a więc i na całej płaszczyźnie, jeżeli weźmiemy A dostatecznie duże.

Przypuśćmy teraz, że $\lambda=0$, t. j. że $\mathcal{E}_\lambda(z)=1-z$. Dla $|z|\leqslant\frac{1}{2}$ otrzymamy dokładnie to samo oszacowanie co w przypadku $\lambda>0$. Dla $|z|\geqslant\frac{1}{2}$ iloraz $\operatorname{Log}(1+|z|)/|z|^\alpha$ nie przekracza pewnej stałej B; zatem $|\mathcal{E}_0(z)|$ nie przekracza $\exp B|z|^\alpha$. Lemmat 9.5 jest więc udowodniony.

Przechodząc do dowodu tw. 9.4, przypuśćmy najpierw, że $\lambda\leqslant\mu<\lambda+1$, i niech μ_1 będzie dowolną liczbą spełniającą nierówność $\lambda\leqslant\mu<\mu_1<\lambda+1$. Z definicji liczby μ_1 wynika, że szereg $\sum_n |z_n|^{-\mu_1}$ jest zbieżny. Załóżmy, że w wyrażeniu (9.2) mamy $k=0$ (dzieląc przez z^k nie zmieniamy rzędu iloczynu kanonicznego), i zastosujmy wzór (9.6), pisząc μ_1 zamiast α. Widzimy, że iloczyn (9.2) nie przekracza co do wartości bezwzględnej

(9.7) $$\prod_n \exp A\left|\frac{z}{z_n}\right|^{\mu_1} = \exp\left(A|z|^{\mu_1}\sum_n |z_n|^{-\mu_1}\right) = \exp A_1|z|^{\mu_1},$$

gdzie A_1 oznacza pewną stałą. Ponieważ μ_1 może być dowolnie bliskie μ, więc w rozważanym przypadku $\varrho \leqslant \mu$.

Pozostaje jeszcze przypadek $\mu = \lambda+1$. Położymy $\mu_1 = \lambda+1$. Pamiętając, że szereg (9.1) jest zbieżny, znów znajdziemy, że wartość bezwzględna iloczynu (9.2) nie przekracza (9.7), a więc $\varrho \leqslant \lambda+1 = \mu$.

ĆWICZENIA. 1. Niech $\varrho > 1$. Z dwu funkcyj całkowitych:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^{\varrho}}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\varrho^n}\right)$$

pierwsza jest rzędu $1/\varrho$, druga rzędu 0.

2. Niech $P(z)$ będzie iloczynem kanonicznym utworzonym z pierwiastków $z_1, z_2, \ldots$ Jeżeli α jest wykładnikiem zbieżności ciągu $\{z_n\}$ i jeżeli szereg $\sum_n |z_n|^{-\alpha}$ jest zbieżny, to $P(z)$ jest funkcją rzędu α typu minimalnego, t. zn. że dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

(*) $$M(r;P) \leqslant \exp \varepsilon r^{\alpha},$$

jeżeli tylko r jest dostatecznie duże.

[*Wsk.* Rozumowanie podobne do dowodu tw. 9.4.]

3. Warunek zbieżności szeregu $\sum_n |z_n|^{-\alpha}$ jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym, by zachodziła nierówność (*), ćw. 2. Ograniczając się do przypadku $\alpha = 1$, wykazać, że jeżeli $\{a_k\}$ jest dowolnym ciągiem liczb zespolonych, różnych od 0, dążących do ∞, i takich że $k/|a_k|$ zmierza do 0, to funkcja

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_n^2}\right)$$

jest co najwyżej rzędu 1 typu minimalnego, t.j. mamy (*) z $\alpha = 1$.

Ostatni iloczyn jest kanoniczny, gdyż może być napisany w postaci $\prod_n \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \left(1+\frac{z}{a_n}\right) e^{-\frac{z}{a_n}}$ (Pringsheim).

[*Wsk.* Przy oszacowaniu $|P(z)|$ wykorzystać wzór (5.9).]

§ 10. Twierdzenie Hadamarda.

Następujące twierdzenie, które zawdzięczamy Hadamardowi, odgrywa ważną rolę w teorii funkcyj całkowitych rzędu skończonego.

(10.1) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją całkowitą rzędu skończonego ϱ, to*

(10.2) $$F(z) = e^{h(z)}P(z),$$

gdzie $P(z)$ jest iloczynem kanonicznym funkcji, zaś $h(z)$ wielomianem stopnia nie przekraczającego ϱ.

Dowód oprzemy na innym twierdzeniu (a właściwie na jego szczególnym przypadku), dotyczącym oszacowania funkcji całkowitej z dołu. Niech

$$m(r) = m(r;F) = \operatorname*{Min}_{|z|=r}|F(z)|.$$

Funkcja $m(r)$ zachowuje się na ogół w sposób mniej prosty niż $M(r)$, gdyż jeżeli $F(z)$ ma pierwiastek na okręgu $C(0;r)$, to $m(r) = 0$. Zobaczymy jednak, że jeżeli pominiemy te — i sąsiednie — wartości na r, to możemy dać na $m(r)$ pewne oszacowanie z dołu, przy czym, zgrubsza mówiąc, $m(r)$ jest tego samego rzędu co $1/M(r)$.

Rozpoczniemy od dowodu następującego lemmatu:

(10.3) *Niech $P(z)$ będzie iloczynem kanonicznym rzędu skończonego ϱ, zaś l dowolną liczbą dodatnią. Niech $z_1, z_2, \ldots$ będą pierwiastkami funkcji $P(z)$ różnymi od 0 i niech $|z_n| = r_n$, $|z| = r$. Jeżeli z płaszczyzny usuniemy koła otwarte $K_n = K(z_n; r_n^{-l})$, to dla pozostałych punktów będziemy mieli przy dowolnym $\varepsilon > 0$ oszacowanie*

(10.4) $$|P(z)| \geqslant \exp(-r^{\varrho+\varepsilon}),$$

jeżeli tylko $r > r_0(\varepsilon)$.

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że rozumowanie, które dało nam nierówność $|\mathcal{E}_\lambda(z)| \leqslant \exp|z|^{\lambda+1}$ dla $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ (por. (2.5) i (2.6)), daje też nierówność $|\mathcal{E}_\lambda(z)| \geqslant \exp(-|z|^{\lambda+1})$ dla $|z| \leqslant \frac{1}{2}$. Poza tym nie trudno widzieć, że

$$|z+z^2/2+\ldots+z^{\lambda}/\lambda| \leqslant B|z|^{\lambda} \quad dla \quad |z| \geqslant \tfrac{1}{2},$$

gdzie B, podobnie jak niżej B_1 i B_2, oznacza stałą niezależną od z. Ustalmy $|z| = r$. Wówczas przyjmując, że $P(z)$ jest postaci (9.2), mamy

$$|P(z)| = r^k \prod_n \left|\mathcal{E}_\lambda\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \geqslant \prod_{r_n<2r}\left|\mathcal{E}_\lambda\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \cdot \prod_{r_n\geqslant 2r}\left|\mathcal{E}_\lambda\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|,$$

jeżeli $r \geqslant 1$. Stosując rozważane przed chwilą nierówności i uwzględniając, że jeżeli $r_n \geqslant 2r$, to $|z/z_n| \leqslant \frac{1}{2}$, dostaniemy dla $r \geqslant 1$:

(10.5) $$\operatorname{Log}|P(z)| \geqslant \sum_{r_n<2r}{}' \operatorname{Log}\left|1-\frac{z}{z_n}\right| - B\sum_{r_n<2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\lambda} - \sum_{r_n\geqslant 2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\lambda+1}.$$

Skorzystamy teraz z uwagi, że wykładnik zbieżności μ ciągu piewiastków iloczynu kanonicznego $P(z)$ spełnia nierówność (9.3).

Przypuśćmy najpierw, że $\mu<\lambda+1$. Niech $\mu<\mu'<\lambda+1$. Jeżeli $r_n\geqslant 2r$, to $(r/r_n)^{\lambda+1}\leqslant(r/r_n)^{\mu'}$; jeżeli zaś $r_n<2r$, to

$$(r/r_n)^{\lambda}=2^{-\lambda}(2r/r_n)^{\lambda}\leqslant 2^{-\lambda}(2r/r_n)^{\mu'}.$$

Stosując to do (10.5) i pamiętając, że szereg $\sum_n r_n^{-\mu'}$ jest zbieżny, znajdziemy:

$$\text{(10.6)}\qquad \operatorname{Log}|P(z)|\geqslant\sum_{r_n<2r}\operatorname{Log}\left|1-\frac{z}{z_n}\right|-B_1r^{\mu'}\quad dla\quad r\geqslant 1.$$

Gdyby $\mu=\lambda+1$, to kładąc $\mu'=\mu$ i uwzględniając zbieżność szeregu $\sum_n r_n^{-\lambda-1}$, znów otrzymamy nierówność (10.6). Będzie więc ona tym bardziej prawdziwa dla $\mu'>\mu$.

Jeżeli z nie należy do żadnego z kół K_n, wówczas $|1-z/z_n|\geqslant r_n^{-l-1}$, a więc pierwszy wyraz po prawej stronie (10.6) jest nie mniejszy niż $n(2r)\operatorname{Log}(2r)^{-l-1}$, gdzie $n(r)$ oznacza liczbę pierwiastków funkcji $P(z)$ dla $|z|\leqslant r$. Biorąc pod uwagę tw. 8.3 oraz 9.4, otrzymujemy $n(2r)\leqslant B_2r^{\mu'}$ dla $r>r_0$. Zatem dla r dostatecznie dużych

$$\text{(10.7)}\qquad \operatorname{Log}|P(z)|\geqslant-(1+l)B_2r^{\mu'}\operatorname{Log}2r-B_1r^{\mu'}>-r^{\mu''},$$

gdzie $\mu''>\mu'>\mu$. Ponieważ μ'' może być dowolnie bliskie μ, zaś $\mu=\varrho$, przeto z (10.7) wynika lemmat 10.3.

Czytelnik zapewne zauważył, że w powyższym rozumowaniu wielkość liczby l nie odgrywała roli. Jeżeli jednak założymy, że $l>\varrho=\mu$, wówczas szereg $\sum_n r_n^{-l}$ będzie zbieżny, a więc suma średnic wszystkich kół K_n będzie skończona. Istnieje więc ciąg liczb $R_j\to+\infty$ taki, że okręgi $C(0;R_j)$ nie mają punktów wspólnych z kołami K_n. Inaczej mówiąc, dla pewnego ciągu $R_j\to+\infty$

$$\text{(10.8)}\qquad m(R_j;P)\geqslant\exp(-R_j^{\varrho+\varepsilon}),\quad gdy\quad j>j_0(\varepsilon).$$

Do dowodu tw. 10.1 będą nam potrzebne jeszcze wzory, wyrażające spółczynniki szeregu potęgowego przez część rzeczywistą funkcji. Niech $F(z)=U(z)+iV(z)$ będzie sumą szeregu potęgowego $c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$, gdzie $z=re^{i\theta}$, a U i V są funkcjami rzeczywistymi.

Wzór $2\pi ic_n=\int_{C(0;r)}F(z)z^{-n-1}dz$ napisać można w postaci

$$\text{(10.9)}\qquad c_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Ponieważ $F(z)z^{n-1}$ jest funkcją holomorficzną, gdy $n\geqslant 1$, więc jej całka wzdłuż okręgu $C(0;r)$ znika, t. j.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(re^{i\theta})e^{in\theta}d\theta=0.$$

Zastąpmy funkcję podcałkową przez wyrażenie sprzężone. Otrzymamy równość

$$\text{(10.10)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F(re^{i\theta})}e^{-in\theta}d\theta=0\quad dla\quad n\geqslant 1,$$

gdzie $\overline{F(z)}=U(z)-iV(z)$. Z (10.9) i (10.10) otrzymujemy przez dodanie

$$\text{(10.11)}\qquad c_nr^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\quad dla\quad n\geqslant 1,$$

t. j. wzór, o który nam chodziło. Dla $n=0$ nie jest on prawdziwy, ale biorąc części rzeczywiste po obu stronach (10.9) dla $n=0$, dostajemy

$$\text{(10.12)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(re^{i\theta})d\theta=2\Re c_0,$$

Udowodnimy teraz jeszcze jeden lemmat, będący uzupełnieniem tw. 5.8, Rozdz. II.

(10.13) *Jeżeli część rzeczywista $U(z)$ funkcji całkowitej $F(z)$ spełnia dla pewnego nieograniczenie rosnącego ciągu wartości r nierówność*

$$\text{(10.14)}\qquad U(re^{i\theta})\leqslant Cr^k,\quad gdzie\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

przy czym C i k są stałymi dodatnimi, niezależnymi od r i θ, to $F(z)$ jest wielomianem stopnia nie większego od k.

Dowód. Ponieważ całka funkcji $e^{-in\theta}$ rozciągnięta na przedział $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ znika, przeto wzór (10.11) może być przepisany w postaci

$$\text{(10.15)}\qquad c_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\{U(re^{i\theta})-Cr^k\}e^{-in\theta}d\theta\quad dla\quad n\geqslant 1.$$

Zatem ze względu na (10.12) dla wartości r, dla których jest prawdziwa nierówność (10.14), mamy

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}[Cr^k-U(re^{i\theta})]d\theta=2Cr^{k-n}-2\Re c_0r^{-n}.$$

Biorąc r dowolnie duże, otrzymamy, że $c_n=0$ dla $n>k$, co dowodzi prawdziwości lemmatu 10.13.

Powróćmy teraz do dowodu twierdzenia Hadamarda. Przypuśćmy dla ustalenia uwagi, że funkcja $F(z)$ ma pierwiastki. Jeżeli $F(z)$ jest rzędu ϱ, to wykładnik zbieżności μ dla ciągu $z_1, z_2, \ldots$ jej pierwiastków będzie $\leqslant\varrho$. W myśl tw. 9.4 iloczyn kanoniczny $P(z)$ funkcji $F(z)$ jest rzędu μ. Zauważmy, że $P(z)$ spełnia nierówność (10.8) dla pewnego ciągu liczb R_j, dążącego do nieskończoności, a ponieważ $\exp h(z)=F(z)/P(z)$, więc kładąc $h(z)=U(z)+iV(z)$, otrzymamy:

$$\exp U(R_j e^{i\theta})=|\exp h(R_j e^{i\theta})|\leqslant M(R_j;F)/m(R_j;P)\leqslant\exp R_j^{\varrho+\varepsilon}\cdot\exp R_j^{\mu+\varepsilon}.$$

Zatem $U(R_j e^{i\theta})\leqslant 2R_j^{\varrho+\varepsilon}$, co ze względu na (10.13) wskazuje, że $h(z)$ jest wielomianem stopnia $\leqslant\varrho+\varepsilon$. Ale ε może być dowolnie małe, więc stopień $h(z)$ nie przekracza ϱ i tw. 10.1 jest udowodnione.

Twierdzenie 10.1 pozwala nam z kolei otrzymać z lemmatu 10.3 następujące twierdzenie ogólne:

(10.16) *Niech $F(z)$ będzie funkcją rzędu skończonego ϱ, zaś $z_1, z_2, \ldots$ jej pierwiastkami różnymi od 0. Wówczas dla z spełniających te same warunki co w lemmacie* 10.3 *i dla dowolnego $\varepsilon>0$ mamy*

$$|F(z)|\geqslant\exp(-r^{\varrho+\varepsilon}); \qquad gdy \qquad r>r_0(\varepsilon). \tag{10.17}$$

Dowód. Zauważmy, że $F(z)=e^{h(z)}P(z)$, gdzie $P(z)$ jest iloczynem kanonicznym dla $F(z)$, a więc jest rzędu $\leqslant\varrho$. Wyrażenie $h(z)$ jest wielomianem stopnia $\leqslant\varrho$, co daje $|h(z)|\leqslant Ar^{\varrho}$ dla $r>r_0$, gdzie A jest niezależne od r. Zatem, uwzględniając nierówność (10.4), w której zastępujemy ε przez $\frac{1}{2}\varepsilon$, dostajemy

$$|F(z)|\geqslant e^{-|h(z)|}|P(z)|\geqslant\exp(-Ar^{\varrho})\exp(-r^{\varrho+\frac{1}{2}\varepsilon})\geqslant\exp(-r^{\varrho+\varepsilon}) \tag{10.18}$$

dla z nie należących do żadnego z kół $K(z_n;r_n^{-l})$ i r dostatecznie dużych. Wzór (10.17) jest więc udowodniony.

Korzystając z twierdzenia Hadamarda, udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

(10.19) *Jeżeli $F_1(z)$ i $F_2(z)$ są funkcjami odpowiednio rzędów ϱ_1 i ϱ_2, przy czym $\varrho_1\leqslant\varrho$, $\varrho_2\leqslant\varrho$, i jeżeli iloraz $F_1(z)/F_2(z)$ jest funkcją całkowitą, to jest on rzędu $\leqslant\varrho$.*

Dowód. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że $F_1(0)\neq 0$, $F_2(0)\neq 0$. Niech $z_1', z_2', \ldots$ oraz $z_1'', z_2'', \ldots$ będą odpowiednio pierwiastkami funkcyj F_1 i F_2. Rozważmy wzory

$$F_1(z)=e^{h_1(z)}\prod_n \mathcal{E}_{\lambda_1}\left(\frac{z}{z_n'}\right), \qquad F_2(z)=e^{h_2(z)}\prod_n \mathcal{E}_{\lambda_2}\left(\frac{z}{z_n''}\right), \tag{10.20}$$

gdzie spółczynnik przy e^{h_i} jest iloczynem kanonicznym odpowiadającym funkcji F_i, zaś h_i jest wielomianem stopnia $\leqslant\varrho_i\leqslant\varrho$. Niech $\lambda=\operatorname{Max}(\lambda_1,\lambda_2)$. W iloczynach (10.20) zastąpimy λ_i przez λ. Może to wprowadzić dodatkowe czynniki wykładnicze do $\mathcal{E}_{\lambda_i}$, ale wpływ ich możemy zrównoważyć przez odpowiednią zmianę wielomianu h_i. Ze względu na (9.3) i na tw. 8.2 mamy $\lambda_i\leqslant\varrho_i$, a ponieważ $\varrho_i\leqslant\varrho$, więc nowy wielomian h_i nie będzie stopnia wyższego niż ϱ. Oczywiście, nowe iloczyny w (10.20) mogą już nie być kanoniczne.

Dzieląc równości (10.20) stronami, otrzymujemy

$$\frac{F_1(z)}{F_2(z)}=e^{h(z)}\prod_n \mathcal{E}_{\lambda}\left(\frac{z}{\zeta_n}\right), \qquad gdzie \quad h=h_1-h_2, \tag{10.21}$$

przy czym ζ_n oznaczają te pierwiastki F_1, które nie są pierwiastkami F_2. Iloczyn (10.21) nie musi być kanoniczny, ale możemy go takim uczynić, włączając zbędne czynniki wykładnicze do $e^{h(z)}$. Stopień tak zmienionego wielomianu h będzie w dalszym ciągu $\leqslant\varrho$. Niech więc rozkład (10.21), który napiszemy w postaci $e^{h(z)}P(z)$, będzie kanoniczny. Ponieważ $\{\zeta_n\}$ jest ciągiem wybranym z $\{z_n'\}$, więc rząd $P(z)$ jest $\leqslant\varrho_1\leqslant\varrho$. Rząd $e^{h(z)}$ jest też $\leqslant\varrho$, a więc to samo można powiedzieć o rzędzie ilorazu $F_1(z)/F_2(z)$.

ĆWICZENIA. 1. Niech $\{n_k\}$ będzie ciągiem rosnącym liczb naturalnych, spełniających warunek

$$\limsup_k (n_{k+1}-n_k)=\infty. \tag{*}$$

Dowieść, że jeżeli funkcja całkowita przestępna $F(z)=\sum_k a_k z^{n_k}$ jest rzędu skończonego, to przyjmuje każdą wartość skończoną a nieskończenie wiele razy (Pólya).

[*Wsk.* Gdyby $F(z)$ przyjmowała np. wartość $a=0$ co najwyżej skończoną ilość razy, to mielibyśmy $F(z)=e^{h(z)}P(z)$, gdzie $h(z)$ i $P(z)$ są wielomianami. Różniczkując otrzymujemy $(zF')\cdot P=F\cdot(zP'+zh'P)$. Porównać szeregi Taylora obu stron tej równości i uwzględnić warunek (*) oraz fakt, że szereg

$$\sum_k n_k a_k z^{n_k}=zF'(z)$$

zawiera dokładnie te same potęgi co szereg $\sum_k a_k z^{n_k}=F(z)$ (Biernacki).]

2. Jeżeli funkcja $F(z)$ jest holomorficzna w kole $K(0;R)$ i $A(r)$ oznacza maximum funkcji $\Re F(z)$ na okręgu $C(0;r)$, gdzie $0\leqslant r<R$, to pomijając przypadek, gdy $F(z)$ jest stałą, $A(r)$ jest funkcją rosnącą r.

[*Wsk.* Por. Rozdz. III, § 12, ćw. 3.]

3. Jeżeli funkcja $F(z)=\frac{1}{2}+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$ jest holomorficzna w kole $K(0;1)$ i ma w nim część rzeczywistą dodatnią, to $|c_n|\leqslant 1$ dla $n=1,2,\ldots$ (Carathéodory).

[*Wsk.* Zastosować wzory (10.11) i (10.12).]

4. Niech $F(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ będzie funkcją holomorficzną w kole domkniętym $\overline{K}(0;R)$ i niech $A(r)$ oznacza maximum funkcji $\Re F(z)$ na okręgu $C(0;r)$, gdzie $0\leqslant r\leqslant R$. Dowieść, że dla $0\leqslant r<R$ zachodzi nierówność

$$(*) \qquad M(r)\leqslant|c_0|+\frac{2r}{R-r}\{A(R)-\Re c_0\},$$

a więc tym bardziej

$$(**) \qquad M(r)\leqslant\frac{R+r}{R-r}\{A(R)+|F(0)|\} \qquad \text{(Carathéodory)}.$$

[*Wsk.* Zastosować ćw. 3 do funkcji $\Phi(z)=A(R)-F(Rz)$ holomorficznej w kole $K(0;1)$ i mającej w nim część rzeczywistą dodatnią (p. ćw. 2). Zauważyć, że $M(r)\leqslant|c_0|+|c_1|r+|c_2|r^2+\ldots$]

5. Twierdzenia podane w ćw. 2 i 3, Rozdz. III, § 11, udowodnić przy pomocy nierówności Carathéodory'ego $(*)$ z ćw. 4.

§ 11. Twierdzenie Borela o pierwiastkach funkcyj całkowitych. Omówimy teraz nieco szczegółowiej kwestię rozkładu pierwiastków równania $F(z)-a=0$, gdzie a jest dowolną liczbą zespoloną. Z tw. Hadamarda 10.1 wynika, że *jeżeli $F(z)$ jest funkcją całkowitą rzędu skończonego, nigdzie nie znikającą, to $F(z)=\exp h(z)$, gdzie $h(z)$ jest wielomianem stopnia nie przekraczającego ϱ.* Stąd wnosimy, że *funkcja całkowita $F(z)$ rzędu ułamkowego ϱ musi mieć nieskończenie wiele pierwiastków.* Jest jasne, że $F(z)$ ma pierwiastki, gdyż w przeciwnym razie będąc postaci $\exp h(z)$, gdzie $h(z)$ jest wielomianem, byłaby rzędu całkowitego (por. § 6, przykład 4). Gdyby jednak miała tylko skończoną ilość pierwiastków $z_1,z_2,\ldots,z_k$, to funkcja

$$G(z)=F(z)/(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)$$

byłaby na zasadzie tw. 6.7 funkcją rzędu ϱ bez pierwiastków i znów mielibyśmy sprzeczność.

Możemy jednak udowodnić coś więcej: *jeżeli $F(z)$ jest rzędu ułamkowego ϱ, to wykładnik zbieżności μ pierwiastków $z_1,z_2,\ldots$ funkcji $F(z)$ jest równy ϱ.* Istotnie, wiemy, że $\mu\leqslant\varrho$, i przypuśćmy, wbrew temu, co chcemy udowodnić, że $\mu<\varrho$. Ponieważ iloczyn kanoniczny $P(z)$ funkcji $F(z)$ jest rzędu μ, więc $|P(z)|\leqslant\exp r^{\mu+\varepsilon}$ dla dużych r. Z drugiej strony funkcja $h(z)$ we wzorze $F(z)=e^{h(z)}P(z)$ jest wielomianem stopnia $p\leqslant\varrho$, a ponieważ ϱ jest ułamkowe, więc $p<\varrho$. Przeto, oznaczając przez A pewną stałą, mamy

$$(11.1) \qquad |F(z)|\leqslant e^{|h(z)|}|P(z)|\leqslant e^{Ar^p}\cdot e^{r^{\mu+\varepsilon}} \quad \text{dla} \quad r>r_0.$$

Ponieważ $p<\varrho$, $\mu<\varrho$, więc jeżeli ε jest dostatecznie małe, zaś r dostatecznie duże, prawa strona nierówności (11.1) nie przekracza $\exp r^{\varrho-\varepsilon}$, co przeczy założeniu, że $F(z)$ jest rzędu ϱ.

Jeżeli a jest stałą, to rząd $F(z)-a$ jest ten sam co rząd $F(z)$. A więc otrzymany wynik może być sformułowany w następującej postaci ogólnej:

(11.2) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją rzędu ułamkowego ϱ, zaś a dowolną liczbą zespoloną, to pierwiastki funkcji $F(z)-a$ mają wykładnik zbieżności ϱ. W szczególności, jest ich nieskończenie wiele.*

Przykład funkcji $F(z)=e^z$ oraz stałej $a=0$ wskazuje, że tw. 11.2 jest fałszywe, gdy ϱ jest całkowite. Przeglądając jednak podany wyżej dowód, łatwo sprawdzamy, że tw. 11.2 pozostaje prawdziwe, gdy $F(z)$ jest funkcją całkowitą przestępną rzędu 0. Ale druga część twierdzenia nie jest już wtedy konsekwencją pierwszej.

Nieprzyjmowanie przez funkcję całkowitą pewnych wartości jest raczej czymś wyjątkowym. Dla funkcyj rzędu skończonego fakt ten ujmuje następujące *twierdzenie Borela*:

(11.3) *Niech, dla dowolnego a, ciąg $z_1(a),z_2(a),\ldots$ będzie ciągiem wszystkich różnych od 0 pierwiastków równania $F(z)-a=0$. Wówczas, jeżeli $F(z)$ jest rzędu skończonego ϱ, to dla wszystkich wartości a, z wyjątkiem co najwyżej jednej, wykładnik zbieżności ciągu $z_1(a),z_2(a),\ldots$ jest równy ϱ.*

Dowód. Z uwagi na tw. 11.2 możemy założyć, że ϱ jest liczbą naturalną. Przypuśćmy, że istnieją dwie różne wartości wyjątkowe a i b. Mamy wówczas wzory:

$$(11.4) \qquad F(z)-a=e^{h_1(z)}P_1(z), \qquad F(z)-b=e^{h_2(z)}P_2(z),$$

gdzie P_1 i P_2 są iloczynami kanonicznymi rzędu mniejszego niż ϱ, a więc h_1 i h_2 są wielomianami stopnia dokładnie ϱ. Odejmując równości (11.4) stronami, dostaniemy:

$$(11.5) \qquad b-a=e^{h_1}P_1-e^{h_2}P_2, \qquad (b-a)e^{-h_1}=P_1-e^{h_2-h_1}P_2.$$

Lewa strona ostatniej równości jest rzędu ϱ, a ponieważ P_1 jest rzędu $<\varrho$, więc $P_2\exp(h_2-h_1)$ jest rzędu ϱ. Ponieważ, z drugiej strony, P_2 jest rzędu $<\varrho$, więc $\exp(h_2-h_1)$ musi być rzędu ϱ, a zatem h_2-h_1 jest wielomianem stopnia ϱ.

Zróżniczkujmy pierwszy wzór (11.5). Otrzymamy

$$(11.6) \qquad e^{h_1}(h_1'P_1+P_1')=e^{h_2}(h_2'P_2+P_2').$$

Ze względu na tw. 6.8, P_1' i P_2' są rzędu mniejszego niż ϱ, a więc to samo można powiedzieć o funkcjach całkowitych $h_1'P_1+P_1'$ i $h_2'P_2+P_2'$.

Wzór (11.6) można napisać w postaci

$$e^{h_1-h_2}=\frac{h_2'P_2+P_2'}{h_1'P_1+P_1'},$$

przy czym iloraz po prawej stronie równości jest funkcją całkowitą rzędu mniejszego niż ϱ (por. tw. 10.19). Tu dochodzimy do sprzeczności, gdyż h_1-h_2 jest stopnia ϱ. Twierdzenie 11.3 jest zatem udowodnione.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić następujące uogólnienie tw. 11.3: Jeżeli $F(z)$ jest funkcją całkowitą przestępną rzędu $\varrho<+\infty$ to dla wszystkich wielomianów $\Phi(z)$, z wyjątkiem co najwyżej jednego, pierwiastki równania $F(z)-\Phi(z)=0$ mają wykładnik zbieżności ϱ (Borel).

2. Funkcja całkowita

$$J_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

posiada nieskończenie wiele pierwiastków, których wykładnik zbieżności jest równy 1. Funkcja $J_0(z)$ nosi nazwę *funkcji Bessela*.

[*Wsk.* $J_0(\sqrt{z})$ jest funkcją całkowitą rzędu $\frac{1}{2}$ (por. tw. 7.9 i wzór (5.13)).]

§ 12. Małe twierdzenie Picarda. Jednym z najważniejszych etapów w rozwoju historycznym teorii funkcyj całkowitych było udowodnienie przez Picarda następującego twierdzenia:

(12.1) *Każda funkcja całkowita różna od stałej przyjmuje wszystkie możliwe wartości skończone z wyjątkiem co najwyżej jednej.*

Funkcja całkowita e^z nigdzie nie jest równa zeru. Wartości wyjątkowe mogą więc rzeczywiście istnieć.

Oryginalny dowód Picarda jest krótki, ale opiera się na pewnych głębszych własnościach t. zw. funkcji modułowej, występującej w teorii funkcyj eliptycznych[1]); nie można go więc nazwać elementarnym. Później podano szereg innych dowodów, bardziej elementarnych, ale też bardziej skomplikowanych. Dopiero niedawno udało się Blochowi otrzymać dowód całkowicie zadowalający zarówno z punktu widzenia elementarności rozważań jak i ich prostoty. Dowód ten podajemy niżej.

Tw. 12.1, zwane *małym twierdzeniem Picarda*, jest przypadkiem szczególnym następującego t. zw. *wielkiego twierdzenia Picarda*:

[1]) P. Rozdz. VIII, § 11 oraz § 12, ćw. 5.

(12.2) *Jeżeli a jest punktem istotnie osobliwym funkcji $F(z)$, to w dowolnym otoczeniu pierścieniowym punktu a funkcja $F(z)$ przyjmuje nieskończenie wiele razy każdą skończoną wartość z wyjątkiem co najwyżej jednej.*

W szczególności, funkcja całkowita przestępna przyjmuje nieskończenie wiele razy każdą wartość skończoną z wyjątkiem co najwyżej jednej.

Twierdzenie to mówi znacznie więcej niż udowodnione w Rozdziale III, § 6, twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa; to ostatnie stwierdzało tylko, że wartości funkcji pokrywają wszędzie gęsto płaszczyznę. Zauważmy jeszcze, że dla funkcyj całkowitych $F(z)$ rzędu skończonego tw. 12.2 jest konsekwencją tw. 11.3.

W § niniejszym dajemy dowód tylko małego twierdzenia Picarda. Wielkie twierdzenie Picarda wymaga rozważań dodatkowych i dowód jego odkładamy do § następnego. Obecnie przejdziemy do dowodu kilku lemmatów, z których będzie wynikać tw. 12.1.

(12.3) *Jeżeli funkcja $\Phi(z)$, dana przez szereg*

$$z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots, \tag{12.4}$$

jest holomorficzna na kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$ i spełnia w nim nierówność $|\Phi(z)|\leqslant M$, wówczas zbiór wartości, jakie funkcja $\Phi(z)$ przyjmuje w $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$, wypełnia całkowicie koło $\mathrm{K}(0;1/6M)$.

Dowód. Rozważmy różnicę $\Phi(z)-w_0$. Jeżeli na okręgu $\mathrm{C}(0;\varrho)$, gdzie $\varrho<1$, stale będzie $|\Phi(z)|\geqslant a>0$, to w myśl twierdzenia Rouché (Rozdz. III, tw. 10.2) dla dowolnej liczby zespolonej w_0, spełniającej nierówność $|w_0|<a$, równanie

$$\Phi(z)-w_0=0 \tag{12.5}$$

będzie miało w kole $\mathrm{K}(0;\varrho)$ tyleż pierwiastków co równanie $\Phi(z)=0$ — a więc przynajmniej jeden, gdyż $\Phi(0)=0$. Zatem wartości, jakie przyjmuje funkcja $\Phi(z)$ w kole $\mathrm{K}(0;\varrho)$, a tym bardziej w kole $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$, wypełnią koło $\mathrm{K}(0;a)$.

Otóż z założeń wynika, że $|a_n|\leqslant M$ dla $n=1,2,\ldots$, przy czym $a_1=1$; dla $|z|=r<1$ znajdziemy więc

$$\begin{aligned}|\Phi(z)|&=|z+\{\Phi(z)-z\}|\geqslant|z|-\operatorname*{Max}_{|z|=r}|\Phi(z)-z|\geqslant\\&\geqslant r-M(r^2+r^3+\ldots)=r-Mr^2/(1-r).\end{aligned} \tag{12.6}$$

Położmy $r=1/4M$. Ponieważ $M\geqslant a_1=1$, przeto prawa strona nierówności (12.6) wynosi

$$\frac{1}{4M}-\frac{M\frac{1}{16M^2}}{1-\frac{1}{4M}}\geqslant\frac{1}{4M}-\frac{\frac{1}{16M}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6M}>0.$$

W myśl poprzednich uwag, możemy przyjąć $\varrho=1/4M$, $a=1/6M$. A więc wartości, jakie przyjmuje funkcja $\Phi(z)$ w kole $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$, wypełnią całkowicie koło $\mathrm{K}(0;1/6M)$.

Spółczynnik 1/6 w udowodnionym lemmacie 12.3 nie jest istotny; nie jest to zresztą spółczynnik możliwie najlepszy. Gdybyśmy 1/6 zastąpili przez dowolną inną stałą dodatnią, znaczenie lemmatu nie uległoby zmianie.

Lemmat 12.3 wysłowić można w następującej, nieco ogólniejszej postaci:

(12.7) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją holomorficzną w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;R)$ i spełnia w nim warunki $|F(z)|\leqslant M$, $F(0)=0$ oraz $|F'(0)|=a>0$, wówczas wartości jej wypełniają całkowicie koło $\mathrm{K}(0;R^2a^2/6M)$.*

Dowód. Funkcja $\Phi(z)=F(Rz)/RF'(0)$ spełnia dla $|z|\leqslant 1$ warunki $|\Phi(z)|\leqslant M/R|F'(0)|$ i $\Phi'(0)=1$, a więc w myśl lemmatu 12.3 zbiór wartości funkcji $\Phi(z)$ zawiera koło o promieniu $R|F'(0)|/6M$; stąd natychmiast wynika lemmat 12.7.

Warto zwrócić uwagę, iż przy stałym M promień koła wypełnionego całkowicie przez wartości funkcji $F(z)$ zależy tylko od iloczynu Ra i jest duży, gdy Ra jest duże.

(12.8) *Jeżeli funkcja $F(z)$ określona przez szereg (12.4) jest holomorficzna w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$, to wartości jej pokrywają pewne koło o promieniu B, gdzie B jest stałą dodatnią niezależną od F.*

Lemmat ten stanowi jądro dowodu twierdzenia Picarda i tym się różni od lemmatu 12.3, że nic nie zakładamy o $\operatorname{Max}|F(z)|$, ale też i nie twierdzimy, że pokryte koło będzie miało środek w początku układu. Np., ponieważ funkcja e^z nigdzie nie znika, to funkcja

$$F_n(z)=\frac{1}{n}(e^{nz}-1)=z+\tfrac{1}{2}nz^2+\ldots$$

nie przyjmuje wartości $-1/n$, która może leżeć dowolnie blisko 0.

Lemmat 12.8 będzie udowodniony, jeżeli dowiedziemy istnienia takiego $\zeta\in\mathrm{K}(0;1)$ oraz takiego koła domkniętego $K=\overline{\mathrm{K}}(\zeta;\varrho)$, zawartego w kole $\mathrm{K}(0;1)$, że:

1^0 $|F(z)-F(\zeta)|\leqslant 1$ *dla* $z\in K$;

2^0 $|F'(\zeta)|\varrho\geqslant A$, *gdzie A jest stałą dodatnią niezależną od F.*

Stosując bowiem (12.7) do funkcji $G(z)=F(z)-F(\zeta)$, rozważanej w kole K, i przyjmując $M=1$, $R=\varrho$, znajdziemy, że wartości funkcji $G(z)$, a więc i $F(z)$, pokrywają pewne koło o promieniu $A^2/6$.

Warunek 1^0 można zastąpić przez

3^0 $\varrho|F'(z)|\leqslant 1$ *dla* $z\in K$.

Istotnie, wówczas $|F(z)-F(\zeta)|=\left|\int_z^\zeta F'(u)\,du\right|\leqslant|z-\zeta|/\varrho\leqslant 1$, jeżeli $z\in K$. Wystarczy więc, by były spełnione warunki 2^0 i 3^0. Ponieważ z istoty rzeczy $\varrho\leqslant 1-|\zeta|$, przeto ze względu na 2^0 naturalne jest rozważenie funkcji

$$\omega(r)=(1-r)\operatorname*{Max}_{|z|=r}|F'(z)|,\qquad \textit{gdzie}\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

Jest ona ciągła, przy czym $\omega(0)=1$ i $\omega(1)=0$. Niech r_0 będzie największym pierwiastkiem równania $\omega(r)=1$, t. zn. że $\omega(r)<1$ dla $r_0<r\leqslant 1$. Niech ζ, gdzie $|\zeta|=r_0$, będzie tym punktem koła domkniętego $\mathrm{K}(0;r_0)$, gdzie $|F'(z)|$ osiąga swe maximum. Zatem

$$|F'(\zeta)|(1-r_0)=1. \tag{12.9}$$

Połóżmy $\varrho=\frac{1}{2}(1-r_0)$ i $r_1=r_0+\varrho$; a więc r_1 jest środkiem odcinka $r_0\leqslant r\leqslant 1$. Równość (12.9) pociąga warunek 2^0 z $A=\frac{1}{2}$. Co się tyczy warunku 3^0, to będzie on też spełniony, gdyż K jest zawarte w kole $\overline{\mathrm{K}}(0;r_1)$, a więc, ponieważ $\operatorname*{Max}_{|z|=r_1}|F'(z)|\cdot(1-r_1)=\omega(r_1)<1$, przeto $\operatorname*{Max}_{z\in K}|F'(z)|<1/(1-r_1)=1/\varrho$.

Lemmat 12.8 jest więc udowodniony, przy czym za B możemy przyjąć $A^2/6=1/24$.

Dowód małego twierdzenia Picarda będzie polegał na zastosowaniu lemmatu 12.8 do pewnej funkcji specjalnej. Przypuśćmy wbrew temu, co mamy udowodnić, że istnieje funkcja całkowita $F(z)$ różna od stałej i nie przyjmująca dwu wartości α i β. Ponieważ funkcja całkowita $(F(z)-\alpha)/(\beta-\alpha)$ nie przyjmuje wtedy wartości 0 i 1, przeto od razu możemy przypuścić, że $\alpha=0$ i $\beta=1$.

Niech więc $F(z)$ będzie funkcją całkowitą nie przyjmującą wartości 0 ani 1. Oznaczmy przez $L(z)$ gałąź jednoznaczną $\frac{1}{2\pi i}\log F(z)$, przyjmującą w punkcie $z=0$ wartość $\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}F(0)$. Ponieważ $F(z)$ nigdzie nie znika, gałąź taka istnieje i jest funkcją całkowitą.

Co więcej, ponieważ $F(z)$ jest różne od 1, $L(z)$ nie przyjmuje wartości całkowitych $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Położymy z kolei

$$G(z)=\sqrt{L(z)}-\sqrt{L(z)-1}.$$

Pod znakiem pierwiastka mamy tu funkcje całkowite różne od 0. Przez $\sqrt{L(z)}$ i $\sqrt{L(z)-1}$ rozumiemy tu którekolwiek gałęzie tych pierwiastków. Zatem $G(z)$ jest funkcją całkowitą i, jak natychmiast widać, wszędzie różną od 0. Powiadamy, że $G(z)$ nie przyjmuje również wartości $\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}$, gdzie $n=1,2,\ldots$ Istotnie, gdybyśmy dla pewnego z mieli $\sqrt{L(z)}-\sqrt{L(z)-1}=\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}$, to biorąc odwrotności, otrzymalibyśmy $\sqrt{L(z)}+\sqrt{L(z)-1}=\sqrt{n}\mp\sqrt{n-1}$. Dodając obie równości, dostalibyśmy $L(z)=n$, co jest niemożliwe.

Funkcja $G(z)$, jak już wspomnieliśmy, nigdzie nie znika. Oznaczmy przez $H(z)$ gałąź jednoznaczną $\log G(z)$ przyjmującą w punkcie $z=0$ wartość $\operatorname{Log} G(0)$. Zatem $H(z)$ jest funkcją całkowitą—jak łatwo widzieć—różną od stałej i nie przyjmującą wartości

(12.10) $\operatorname{Log}(\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1})+2m\pi i$, *gdzie* $n=1,2,\ldots$, $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Gdybyśmy chcieli wyrazić $H(z)$ bezpośrednio przez $F(z)$, otrzymalibyśmy wzór

$$H(z)=\log\left\{\sqrt{\frac{\log F(z)}{2\pi i}}-\sqrt{\frac{\log F(z)}{2\pi i}-1}\right\}. \tag{12.11}$$

Liczby rzeczywiste $\operatorname{Log}(\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1})$ dążą odpowiednio do $\pm\infty$. Kładąc $x_n=\operatorname{Log}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$, widzimy, że $x_n-x_{n-1}\to 0$, gdy $n\to\infty$. Tę samą własność mają liczby $x_n'=\operatorname{Log}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=-x_n$, a więc punkty (12.10) stanowią wierzchołki pewnej siatki prostokątów pokrywających płaszczyznę i mających boki ograniczone. Inaczej mówiąc: jeżeli tylko C jest dostatecznie duże, to wartości funkcji $H(z)$ nie wypełniają żadnego koła o promieniu C.

Tu już łatwo dojdziemy do sprzeczności. Jeżeli bowiem $H'(\xi)\neq 0$, to funkcja

$$H_1(z)=\frac{H(z)-H(\xi)}{H'(\xi)}=(z-\xi)+a_2(z-\xi)^2+\ldots \tag{12.12}$$

przyjmuje w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(\xi;1)$ wartości wypełniające koło o promieniu B (por. lemmat 12.8), a więc $H(z)$ wypełnia koło o promieniu $B|H'(\xi)|$. Jest to niemożliwe, jeżeli $B|H'(\xi)|>C$, a przecież zawsze możemy znaleźć takie ξ, aby ostatnia nierówność była spełniona, gdy tylko $H'(z)$ jest funkcją całkowitą różną od stałej.

Ale $H'(z)$ nie jest stałą, gdyż wówczas funkcja $H(z)$ byłaby liniowa, a więc przyjmowałaby wszystkie wartości, podczas gdy — jak wiemy — nie przyjmuje wartości (12.10). Zatem tw. 12.1 jest udowodnione.

Ze względu na dalsze zastosowania sformułujemy lemmat 12.8 w postaci następującej:

(12.13) *Jeżeli funkcja $\Phi(z)$ dana przez szereg* (12.4) *jest holomorficzna w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;R)$, to jej wartości wypełniają pewne koło o promieniu BR.*

Dla dowodu wystarczy zastosować lemmat 12.8 do funkcji

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{R}\Phi(\zeta R)=\zeta+a_2\zeta^2+\ldots,$$

holomorficznej dla $|\zeta|\leqslant 1$. Ponieważ wartości $\Psi(\zeta)$ wypełniają koło o promieniu B, więc wartości $\Phi(\zeta R)$, gdy $|\zeta|\leqslant 1$, wypełnią koło o promieniu BR.

ĆWICZENIA. 1. Liczba a, skończona lub ∞, nazywa się *wartością asymptotyczną* funkcji całkowitej $F(z)$, jeżeli istnieje taka krzywa ciągła C o końcu w punkcie ∞, że $F(z)$ zmierza do a, gdy z zmierza do ∞, przebiegając krzywą C.

Wykazać, że ∞ jest wartością asymptotyczną każdej funkcji całkowitej $F(z)$ (Iversen).

[*Wsk.* Każda ze składowych zbioru punktów z, w których

$$G(z)=|(F(z)-F(0))/z|>1,$$

ma punkt w nieskończoności jako punkt brzegowy.]

2. Jeżeli funkcja całkowita $F(z)$ przyjmuje wartość a co najwyżej skończoną ilość razy, to a jest wartością asymptotyczną dla $F(z)$.

[*Wsk.* Niech $P(z)$ będzie wielomianem stopnia p takim, że funkcja $\Phi(z)=P(z)/\{F(z)-a\}$ jest całkowita. Zastosować ćw. 1 do funkcji całkowitej $z^{-p}\{\Phi(z)-Q(z)\}$, gdzie $Q(z)$ jest wielomianem stopnia $\leqslant p-1$.]

§ 13. Twierdzenie Schottky'ego. Twierdzenie Montela. Wielkie twierdzenie Picarda.

Dowód wielkiego twierdzenia Picarda oprzemy na dwóch innych twierdzeniach, które są ważne i ciekawe same przez się. Pierwsze z nich nosi nazwę *twierdzenia Schottky'ego* i brzmi jak następuje:

(13.1) *Jeżeli*

$$F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots \tag{13.2}$$

jest funkcją holomorficzną w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;R)$, nie przyjmującą w nim wartości 0 *ani* 1, *to w każdym kole $\overline{\mathrm{K}}(0;\theta R)$, gdzie $0<\theta<1$, funkcja $F(z)$ spełnia nierówność*

$$|F(z)|\leqslant\Omega(a_0,\theta), \tag{13.3}$$

gdzie $\Omega(a_0,\theta)$ jest wielkością zależną wyłącznie od θ, zaś $a_0=F(0)$.

Nierówność (13.3) jest więc spełniona przez wszystkie funkcje $F(z)$ holomorficzne dla $|z|\leqslant R$ i nie przyjmujące dla tych z wartości 0 ani 1. Funkcje takie nie mogą przeto zbyt szybko rosnąć, gdy $|z|$ dąży do R, i to stanowi istotny sens twierdzenia 13.1.

Dowód. Rozważmy funkcję $H(z)$ określoną przez wzór (12.11). Funkcja $H(z)$ jest holomorficzna dla $|z|\leqslant R$ i nie przyjmuje dla tych z wartości (12.10). Rozważmy teraz funkcję $H_1(z)$ daną przez wzór (12.12), gdzie ξ jest dowolnym punktem takim, że $|\xi|<R$ oraz $H'(\xi)\neq 0$. Jest ona holomorficzna w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(\xi;R-|\xi|)$. Niech B i C mają te same znaczenia co w § 12. Ze względu na lemmat 12.13, wartości funkcji $H_1(z)$ wypełniają pewne koło o promieniu $B\cdot(R-|\xi|)$, a więc wartości funkcji $H(z)$ wypełniają koło o promieniu $B\cdot(R-|\xi|)\cdot|H'(\xi)|$. Ostatnie wyrażenie nie może więc przekraczać C, skąd

$$|H'(\xi)|\leqslant\frac{C}{B}\cdot\frac{1}{R-|\xi|}. \tag{13.4}$$

Nierówność ta jest prawdziwa również, gdy $H'(\xi)=0$, a więc dla każdego ξ o wartości bezwzględnej mniejszej od R.

Ponieważ $H(\xi)-H(0)$ jest równe całce funkcji $H'(z)$ wzdłuż odcinka $[0,\xi]$, przeto ze względu na (13.4)

$$|H(\xi)|\leqslant|H(0)|+\frac{C}{B}\int_0^{|\xi|}\frac{dr}{R-r}=|H(0)|+\frac{C}{B}\operatorname{Log}\frac{R}{R-|\xi|}.$$

Jeżeli więc $|z|\leqslant\theta R$, to

$$|H(z)|\leqslant|H(0)|+\frac{C}{B}\operatorname{Log}\frac{1}{1-\theta}. \tag{13.5}$$

Stąd wyprowadzimy oszacowanie $|F(z)|$. Wzór (12.11) daje

$$|F(z)|=|\exp\tfrac{1}{2}\pi i\{\exp 2H(z)+\exp(-2H(z))\}|\leqslant\exp\pi\{\exp 2|H(z)|\},$$

skąd, biorąc pod uwagę (13.5), otrzymujemy

$$|F(z)|\leqslant\exp\frac{A}{(1-\theta)^k}, \tag{13.6}$$

gdzie $k=2C/B$, zaś liczba $A=\pi\exp 2|H(0)|$ zależy wyłącznie od $F(0)=a_0$. Nierówność (13.3) jest oczywistą konsekwencją nierówności (13.6), a więc tw. 13.1 jest udowodnione.

Uzupełnimy otrzymany wynik kilkoma uwagami.

1° Założenie, że funkcja $F(z)$ nie przyjmuje wartości 0 i 1, zrobione było wyłącznie dla ustalenia uwagi. Istota twierdzenia 13.1 pozostanie nie zmieniona, jeżeli założymy, że $F(z)$ nie przyjmuje jakichkolwiek dwu wartości skończonych α i β. Wystarczy zastosować tw. 13.1 do funkcji $G(z)=\{F(z)-\alpha\}/(\beta-\alpha)$, nie przyjmującej wartości 0, 1 i mającej w rozwinięciu Taylora wyraz stały równy $(a_0-\alpha)/(\beta-\alpha)$. Dostaniemy wówczas

$$|F(z)|\leqslant|\alpha|+|\beta-\alpha|\Omega\left(\frac{a_0-\alpha}{\beta-\alpha},\theta\right)\qquad dla\qquad |z|\leqslant\theta R.$$

2° W tw. 13.1 możemy założyć, że funkcja $F(z)$ jest holomorficzna w kole otwartym $\mathrm{K}(0;R)$. Niech bowiem $R'<R$. Ponieważ $F(z)$ jest holomorficzna dla $|z|\leqslant R'$, więc (13.3) jest prawdziwe dla $|z|\leqslant\theta R'$. Gdy $R'\to R$, nierówność (13.3) okaże się prawdziwa ze względu na ciągłość funkcji $F(z)$ również dla $|z|\leqslant\theta R$.

3° Pokażemy teraz, że tw. 13.1 daje się uogólnić jak następuje:

(13.7) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją holomorficzną w kole $\mathrm{K}(0;R)$, nie przyjmującą w nim wartości 0 ani 1, i jeżeli*

$$|F(0)|\leqslant\beta, \tag{13.8}$$

gdzie β jest pewną liczbą skończoną, wówczas w każdym kole $\overline{\mathrm{K}}(0;\theta R)$, przy $0<\theta<1$, funkcja $F(z)$ spełnia nierówność

$$|F(z)|\leqslant\Omega^*(\beta,\theta). \tag{13.9}$$

Dowód. Wykażemy najpierw, iż jeśli poza nierównością (13.8) funkcja $F(z)$ spełnia jeszcze nierówność $|F(0)|\geqslant\alpha$, gdzie $\alpha>0$, to

$$|F(z)|\leqslant\Omega'(\alpha,\beta,\theta)\qquad dla\qquad |z|\leqslant\theta R, \tag{13.10}$$

gdzie Ω' zależy wyłącznie od α, β i θ.

Przeglądając dowód nierówności (13.6), widzimy mianowicie, że (13.10) będzie udowodnione, jeżeli wykażemy, iż $|H(0)|$ nie przekracza wyrażenia zależnego wyłącznie od α i β. Nie będzie żadnym ograniczeniem ogólności, jeżeli przypuścimy, że $0<\alpha<1<\beta$.

Określając funkcję $H(z)$ przez wzór (12.11), przyjęliśmy za $\log F(z)$ tę gałąź logarytmu, która ma dla $z=0$ część urojoną zawartą między $-\pi$ a π. Ten sam warunek nałożyliśmy na $\log G(z)$, gdzie $G(z)$ oznacza wyrażenie zawarte w nawiasach figurowych wzoru (12.11).

Połóżmy $\operatorname{Log} F(0)/2\pi i = u$. Iloczyn liczb $\sqrt{u}+\sqrt{u-1}$ jest równy 1, a więc $|\mathcal{R}H(0)| = |\operatorname{Log}|\sqrt{u}+\sqrt{u-1}||$. Przyjmijmy po prawej stronie ten ze znaków $\pm$, dla którego wyrażenie stojące pod znakiem logarytmu ma wartość bezwzględną $\geqslant 1$. Ponieważ $|H(0)| \leqslant |\mathcal{R}H(0)| + \pi$, przeto

$$|H(0)| \leqslant \operatorname{Log}\left|\sqrt{\left|\frac{\operatorname{Log}|F(0)|}{2\pi}\right| + \frac{1}{2}} + \sqrt{\left|\frac{\operatorname{Log}|F(0)|}{2\pi}\right| + \frac{3}{2}}\right| + \pi. \tag{13.11}$$

Z nierówności $\alpha \leqslant |F(0)| \leqslant \beta$ wnosimy, że $|\operatorname{Log}|F(0)||$ nie przekracza większej z dwu liczb $\operatorname{Log}\beta$ i $\operatorname{Log}1/\alpha$, a więc tym bardziej ich sumy. Na mocy (13.11), $|H(0)|$ nie przekracza wyrażenia zależnego od α i β, a więc nierówność (13.10) jest udowodniona.

Przechodząc teraz do dowodu nierówności (13.9) przy jedynym założeniu (13.10), rozważmy dwa przypadki:

$$\text{(a) } |F(0)| \geqslant \tfrac{1}{2}, \qquad \text{(b) } 0 < |F(0)| < \tfrac{1}{2}.$$

W pierwszym przypadku na zasadzie wyniku dotychczasowego mamy nierówność (13.10) z $\alpha = \frac{1}{2}$, a więc

$$|F(z)| \leqslant \Omega'(\tfrac{1}{2}, \beta, \theta) \qquad dla \quad |z| \leqslant \theta R.$$

W drugim przypadku połóżmy $\Phi(z) = 1 - F(z)$. Funkcja $\Phi(z)$ również nie przyjmuje wartości 0 i 1. Mamy wówczas nierówność $\frac{1}{2} \leqslant |\Phi(0)| \leqslant \beta + 1$, a więc $|1 - F(z)| \leqslant \Omega'(\frac{1}{2}, \beta+1, \theta)$ dla $|z| \leqslant \theta R$, skąd

$$|F(z)| \leqslant \Omega'(\tfrac{1}{2}, \beta+1, \theta) + 1 \qquad dla \quad |z| \leqslant \theta R.$$

Nierówność (13.9) będzie więc spełniona, jeżeli weźmiemy za $\Omega^*(\beta, \theta)$ większą z dwu liczb $\Omega'(\frac{1}{2}, \beta, \theta)$ i $\Omega'(\frac{1}{2}, \beta+1, \theta)+1$.

Drugie twierdzenie, na jakim się oprzemy przy dowodzie wielkiego twierdzenia Picarda, dotyczy rodzin normalnych (Rozdz. I, § 3) funkcyj. Jest to następujące *twierdzenie Montela*:

(13.12) *Niech $\mathfrak{F}$ będzie rodziną funkcyj holomorficznych w pewnym obszarze G, nie przyjmujących w nim wartości 0 i 1. Wówczas $\mathfrak{F}$ jest rodziną normalną w G.*

Dowód. Ze względu na tw. 3.3, Rozdz. I, wystarczy udowodnić, że w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in G$ rodzina $\mathfrak{F}$ jest normalna. W tym celu wykażemy, że każdy ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcyj należących do $\mathfrak{F}$ zawiera podciąg $\{F_{n_k}(z)\}$, który w pewnym ustalonym kole $K(z_0; R)$ jest bądź ograniczony, bądź niemal jednostajnie rozbieżny do ∞. Liczbę R wybierzemy tak małą, by $K(z_0; 2R) \subset G$.

Rozważmy dwa jedynie możliwe przypadki:

(a) *Istnieje ciąg wskaźników $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ taki, że ciąg liczb $|F_{n_k}(z_0)|$ jest ograniczony.* Jeżeli $|F_{n_k}(z_0)| \leqslant \beta$ dla $k = 1, 2, \ldots$, to, w myśl tw. 13.7, będzie $|F_{n_k}(z)| \leqslant \Omega^*(\beta, \frac{1}{2})$ dla $z \in K(z_0; R)$. W szczególności rodzina $\mathfrak{F}$ jest normalna w $K(z_0; R)$ (p. Rozdz. II, tw. 7.1).

(b) *Ciąg takich wskaźników nie istnieje*, t. zn. $F_n(z_0) \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Funkcje $G_n(z) = 1/F_n(z)$ są holomorficzne w G i nie przyjmują tam wartości 0, 1, przy czym $G_n(z_0) \to 0$. Na mocy więc wyniku otrzymanego w (a) istnieje podciąg $\{G_{n_k}(z)\}$ zbieżny niemal jednostajnie w $K(z_0; R)$. Ponieważ $G_{n_k}(z_0) = 1/F_{n_k}(z_0) \to 0$, więc ciąg $\{G_{n_k}(z)\}$ dąży do 0 w kole $K(z_0; R)$ (por. Rozdz. III, tw. 11.2). Zatem $\{F_{n_k}(z)\}$ dąży w nim niemal jednostajnie do ∞ i tw. 13.12 jest udowodnione.

Przechodząc do dowodu wielkiego twierdzenia Picarda, rozważmy funkcję $F(z)$ holomorficzną w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu z_0, istotnie osobliwego dla $F(z)$, i przyjmującą w tym otoczeniu każdą z dwu wartości α i β co najwyżej skończoną ilość razy. Przypuśćmy, dla ustalenia uwagi, że $z_0 = 0$. Możemy również założyć, że $\alpha = 0$ i $\beta = 1$. Niech G oznacza pierścień $P(0; \frac{1}{2}, 2)$. Rozważmy w G ciąg funkcyj

$$F_n(z) = F(z/2^n). \tag{13.13}$$

Funkcja $F_n(z)$ przyjmuje w pierścieniu G te same wartości co funkcja $F(z)$ w pierścieniu $P(0; 2^{-n-1}, 2^{-n+1})$. Zatem funkcje $F_n(z)$ są, dla n dostatecznie dużych, holomorficzne w G i nie przyjmują w G wartości 0, 1. W myśl tw. 13.12 ciąg $\{F_n(z)\}$ tworzy w G rodzinę normalną. Możemy więc znaleźć podciąg $\{F_{n_k}(z)\}$, który na okręgu $C(0; 1)$, leżącym w G, bądź jest ograniczony, bądź dąży jednostajnie do ∞.

Jeżeli zachodzi przypadek pierwszy, to funkcja $F(z)$ jest ograniczona na sumie okręgów $C(0; 2^{-n_k})$. Tym samym, ze względu na zasadę maximum (Rozdz. III, tw. 12.6), funkcja $F(z)$ jest ograniczona w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu 0, a więc $z = 0$ jest punktem holomorficzności dla $F(z)$. Jest to sprzeczne z założeniem, że $z = 0$ ma być punktem istotnie osobliwym funkcji $F(z)$.

W przypadku drugim $F(z)$ dąży do ∞ na sumie okręgów $C(0; 2^{-n_k})$, gdy $z \to \infty$. A więc funkcja $G(z) = 1/F(z)$, która też jest

holomorficzna w otoczeniu pierścieniowym punktu 0, dąży do 0 na sumie tych okręgów, gdy $z\to\infty$. Zatem, podobnie jak w przypadku poprzednim, $G(z)$ byłaby holomorficzna w punkcie 0. Stąd wynika, iż punkt 0 byłby dla funkcji $F(z)=1/G(z)$ co najwyżej biegunem, i znów dochodzimy do sprzeczności. A więc tw. 12.2 jest udowodnione.

Powyższy dowód daje nam twierdzenie nieco ogólniejsze od tw. 12.2. Niech bowiem $F(z)$ będzie dowolną funkcją holomorficzną w otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 i mającą z_0 za punkt istotnie osobliwy. Przypuśćmy znów, że $z_0=0$. W myśl poprzedniego rozumowania, ciąg funkcyj $F_n(z)$ określonych przez wzór (13.13) nie tworzy rodziny normalnej w pierścieniu $G=\mathrm{P}(0;\frac{1}{2},2)$. A więc istnieje punkt $\zeta\in G$, taki że, jakiekolwiek weźmiemy koło $K=\mathrm{K}(\zeta;\varepsilon)$ zawarte w G, ciąg $\{F_n(z)\}$ nie tworzy w K rodziny normalnej.

Wykażemy teraz, że każda liczba zespolona, z wyjątkiem co najwyżej jednej, jest w kole K wartością nieskończenie wielu funkcyj $F_n(z)$. Przypuśćmy bowiem, że istnieją dwie liczby α i β, które są w K wartościami co najwyżej skończonej ilości funkcyj $F_n(z)$. Stąd by wynikało, że funkcje $G_n(z)=\{F_n(z)-\alpha\}/(\beta-\alpha)$ nie przyjmują w K wartości 0,1, jeżeli tylko $n>n_0$. Zatem ciąg $\{G_n(z)\}$, a więc ciąg $\{F_n(z)\}$, tworzyłby w K rodzinę normalną, co — jak wiemy — nie jest możliwe.

Pamiętając o związku (13.13), możemy powiedzieć, że funkcja $F(z)$ przyjmuje każdą wartość skończoną α, z wyjątkiem co najwyżej jednej, w nieskończenie wielu kołach $K_n=\mathrm{K}(\zeta/2^n;\varepsilon/2^n)$.

W dalszych rozważaniach przez *kąt*, jako obszar utworzony przez dwie różne półproste wychodzące z punktu $z_0\neq\infty$ (wierzchołka), będziemy rozumieli każdy z dwu obszarów, na jakie te dwie półproste dzielą płaszczyznę. Kąt o wierzchołku ∞ utożsamiamy z kątem o wierzchołku 0. Stosując więc przesunięcie lub inwersję możemy zawsze sprowadzić wierzchołek kąta do punktu 0.

Rozważmy teraz półprostą wychodzącą z punktu 0 i przechodzącą przez punkt z. Niech δ będzie dowolną liczbą dodatnią. Kąt $-\delta+\mathrm{Arg}\,\zeta<\mathrm{Arg}\,z<\delta+\mathrm{Arg}\,\zeta$ zawiera wszystkie koła K_n, z wyjątkiem co najwyżej kilku, jeżeli tylko ε weźmiemy dostatecznie małe. Zatem:

(13.14) *Jeżeli z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji $F(z)$, to istnieje taka półprosta p wychodząca z punktu z_0, że w każdym kącie o wierzchołku z_0, zawierającym p, funkcja $F(z)$ przyjmuje nieskończenie wiele razy wszystkie wartości skończone, z wyjątkiem co najwyżej jednej.*

To uogólnienie wielkiego twierdzenia Picarda udowodnił Julia. Półprosta p nosi nazwę *kierunku Julii*, albo *kierunku J*.

Wartości wyjątkowe, których istnienie dopuszcza wielkie twierdzenie Picarda, są z założenia skończone. Gdybyśmy rozważali również wartość ∞, to funkcja $F(z)$ z tw. 12.2 mogłaby mieć dwie wartości wyjątkowe, przy czym jedną z nich byłaby ∞. W tym sformułowaniu twierdzenie jest prawdziwe dla obszerniejszej klasy funkcyj:

(13.15) *Jeżeli dla funkcji $F(z)$ meromorficznej w pewnym otoczeniu pierścieniowym P punktu z_0 istnieją trzy różne wartości a,b,c (skończone lub nie), z których każdą funkcja przyjmuje w P co najwyżej skończoną ilość razy, to funkcja $F(z)$ posiada w punkcie z_0 co najwyżej biegun.*

Dowód. Możemy założyć, że żadna z tych wartości a,b,c nie jest równa ∞. W przeciwnym bowiem razie, funkcja byłaby holomorficzną w otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 i twierdzenie byłoby konsekwencją tw. 13.14.

Rozważmy teraz funkcję $G(z)=\{F(z)-a\}/\{F(z)-b\}$. W każdym punkcie, gdzie $F(z)$ posiada biegun, funkcja $G(z)$ jest holomorficzna. Zatem, skoro $F(z)\neq b$, funkcja $G(z)$ jest holomorficzna w P i twierdzenie znów jest konsekwencją tw. 13.14.

ĆWICZENIA. 1. Funkcja $\exp z$ ma w punkcie $z=\infty$ dwa kierunki J, a mianowicie półosie urojone, dodatnią i ujemną. Dla funkcji $\exp\exp z$ każdy kierunek $\mathrm{Arg}\,z=\alpha$, gdzie $-\frac{1}{2}\pi\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\pi$, jest kierunkiem J.

2. Niech $\mathfrak{F}$ będzie rodziną funkcyj $F(z)$ holomorficznych w obszarze G i nie przyjmujących w G dwu wartości a i b. Wartości te mogą się zmieniać zależnie od funkcji F, ale spełniają warunki:

$$|a|\leqslant M,\qquad |b|\leqslant M,\qquad |a-b|\geqslant\varepsilon>0,$$

gdzie ε i M są niezależne od funkcji F. Wykazać, że $\mathfrak{F}$ jest rodziną normalną w G (Montel).

3. (a) Jeżeli $\mathfrak{F}$ jest rodziną funkcyj holomorficznych w obszarze G i jeżeli żadna funkcja $F(z)$ tej rodziny nie znika nigdzie w G, a wartość 1 przyjmuje co najwyżej p razy (p niezależne od F), to $\mathfrak{F}$ jest rodziną normalną w G.

(b) Nieco ogólniej: jeżeli żadna funkcja $F(z)$ należąca do $\mathfrak{F}$ nie przyjmuje w G pewnej wartości a, zaś pewną inną wartość b przyjmuje najwyżej p razy, to $\mathfrak{F}$ jest rodziną normalną w G (Montel).

[*Wsk. ad* (a). Niech $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ będą pierwiastkami stopnia $p+1$ z 1. W otoczeniu dowolnego punktu $z_0 \in G$ funkcja $\Phi(z)=\sqrt[p+1]{F(z)}$ jest różna od pewnego ε_k. Rozważyć funkcje $\Phi(z)/\varepsilon_k$.]

4. Montelowi zawdzięczamy następujące uogólnienie pojęcia rodziny normalnej: Rodzina $\mathfrak{F}$ funkcyj holomorficznych w obszarze G jest *quasi-normalna*, jeżeli każdy ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcyj należących do $\mathfrak{F}$ zawiera podciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ zbieżny niemal jednostajnie (do granicy skończonej lub do ∞) w obszarze powstającym z G przez usunięcie q punktów. Punkty, w których otoczeniu ciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ nie jest zbieżny jednostajnie (i które usuwamy z G), noszą nazwę punktów *nieregularnych* dla ciągu $\{F_n(z)\}$. Mogą one zależeć od ciągu $\{F_{n_k}(z)\}$, natomiast liczba q ma być od tego ciągu niezależna. Najmniejsza możliwa liczba q nosi nazwę *rzędu* rodziny quasi-normalnej. Szczegółowsze omówienie własności rodzin quasi-normalnych znajdzie czytelnik w książce Montela cytowanej na str. 50.

Niech $P(z)$ będzie ustalonym wielomianem, a c stałą dowolną. Wykazać, że rodzina funkcyj $cP(z)$ jest quasi-normalna na płaszczyźnie otwartej i że rząd jej równa się ilości różnych pierwiastków równania $P(z)=0$.

5. Rodzina $\mathfrak{F}$ funkcyj holomorficznych w obszarze G, przyjmujących w nim wartość 0 co najwyżej p razy, zaś wartość 1 co najwyżej q razy, jest quasi-normalna w G rzędu $r \leqslant \mathrm{Min}(p,q)$ (Montel).

[*Wsk.* Przypuśćmy, że $p \leqslant q$. Dla danego ciągu $\{F_n(z)\}$ funkcyj należących do $\mathfrak{F}$ rozważyć punkty skupienia pierwiastków funkcyj $F_n(z)$. Wykazać, że istnieje podciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ oraz układ co najwyżej p punktów $a_1, a_2, \ldots$ takich, że po usunięciu z G dowolnie małych otoczeń $K_1, K_2, \ldots$ tych punktów funkcje $F_{n_k}(z)$ nie mają pierwiastków w $G-\sum_i K_i$, jeżeli tylko k jest dostatecznie duże. Zastosować wynik ćw. 3.]

6. Niech $F(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_pz^p+\ldots+a_nz^n+\ldots$ będzie funkcją holomorficzną w kole $\mathrm{K}(0;R)$, nie przyjmującą w nim wartości 0 więcej niż p razy i wartości 1 więcej niż q razy. Wówczas w każdym kole $\mathrm{K}(0;\theta R)$, gdzie $0<\theta<1$, mamy

$$|F(z)| \leqslant C,$$

gdzie C zależy wyłącznie od θ i od $a_0, a_1, \ldots, a_p$ (Montel).

[*Wsk.* Wszystkie funkcje $F(z)$ spełniające założenia ćwiczenia i mające rozwinięcie Taylora rozpoczynające się od $a_0+a_1z+\ldots+a_pz^p$ tworzą rodzinę $\mathfrak{F}$ quasi-normalną; wystarczy wykazać, że rodzina ta jest normalna. Gdyby tak nie było, istniałby ciąg $\{F_n(z)\}$ wyjęty z $\mathfrak{F}$, dążący jednostajnie do ∞ na każdym okręgu $\mathrm{C}(0;\varepsilon)$ o promieniu dostatecznie małym. Zastosować tw. Rouché (str. 152).]

§ 14. Twierdzenie Landau'a.

Tw. 13.1 Schottky'ego mówi, że nieprzyjmowanie przez funkcję $F(z)$ holomorficzną w kole $\mathrm{K}(0;R)$ dwóch wartości, np. 0 i 1, jest już silnym ograniczeniem zachowania się funkcji. Następujący wynik, który zawdzięczamy Landau'owi, stwierdza ten sam fakt z innej strony:

(14.1) *Niech α i β będą dowolnymi liczbami zespolonymi, przy czym $\beta \neq 0$. Jeżeli funkcja*

$$F(z)=a+\beta z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots \tag{14.2}$$

jest holomorficzna w kole $\mathrm{K}(0;R)$ i nie przyjmuje w nim wartości 0 i 1, to $R \leqslant L(\alpha,\beta)$, gdzie $L(\alpha,\beta)$ zależy wyłącznie od α i β.

Dowód. W myśl tw. 13.1 oraz uwagi uzupełniającej 2^0 (str. 333), mamy nierówność $|F(z)| \leqslant \Omega(\alpha,\frac{1}{2})$ dla $z \in \mathrm{K}(0;\frac{1}{2}R)$. Wyrażając współczynnik β przez funkcję, dostaniemy

$$|\beta|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}(0;\frac{1}{2}R)}\frac{F(z)}{z^2}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\Omega(\alpha,\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}R)^2}\cdot 2\pi\frac{R}{2}=\frac{2\Omega(\alpha,\frac{1}{2})}{R}.$$

Zatem

$$R \leqslant 2\Omega(\alpha,\tfrac{1}{2})/|\beta|=L(\alpha,\beta)$$

i tw. 14.1 jest udowodnione.

Można je wysłowić jeszcze inaczej: *Dla każdego α oraz $\beta \neq 0$ istnieje taka liczba $L(\alpha,\beta)$, że jeżeli funkcja* (14.2) *jest holomorficzna dla $|z|<L(\alpha,\beta)$, to musi tam choć raz przyjąć jedną przynajmniej z wartości* 0, 1. Ponieważ na okręgu koła zbieżności funkcja posiada co najmniej jeden punkt osobliwy, więc możemy powiedzieć jeszcze nieco inaczej: *Dla każdego α oraz $\beta \neq 0$ funkcja dana przez szereg* (14.2) *musi w kole domkniętym $|z| \leqslant L(\alpha,\beta)$ bądź przyjmować wartość* 0, *bądź wartość* 1, *bądź szereg ten posiada w tym kole punkt osobliwy.*

Założenie $\beta \neq 0$ można zastąpić przez inne, ogólniejsze: *Przypuśćmy, że $\lambda \neq 0$ oraz że funkcja*

$$F(z)=a+\lambda z^l+a_{l+1}z^{l+1}+a_{l+2}z^{l+2}+\ldots \tag{14.3}$$

jest holomorficzna w kole $\mathrm{K}(0;R)$ i nie przyjmuje w nim wartości 0 *ani* 1. *Wówczas $R \leqslant L(\alpha,\lambda,l)$, gdzie wielkość L zależy wyłącznie od argumentów α, λ, l.*

Dowód jest ten sam co przedtem. Ze wzoru

$$|\lambda|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}(0;\frac{1}{2}R)}\frac{F(z)}{z^{l+1}}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Omega(\alpha,\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}R)^{l+1}}\cdot 2\pi\frac{R}{2}=\frac{\Omega(\alpha,\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}R)^l}$$

mamy $R \leqslant 2\Omega^{1/l}(\alpha,\frac{1}{2})/|\lambda|^{1/l}=L(\alpha,\lambda,l)$.

Każda funkcja całkowita $F(z)$ różna od stałej może być napisana w postaci (14.3). Ponieważ promień zbieżności R szeregu (14.3) jest wtedy nieskończony, więc nierówność $R \leqslant L(\alpha, \lambda, l)$ nie jest spełniona. Dowodzi to, że $F(z)$ musi przyjmować choć jedną z wartości $0, 1$. A więc twierdzenie Landau'a zawiera małe twierdzenie Picarda, nawet w postaci zaostrzonej. Daje bowiem oszacowanie na promień R koła $K(0;R)$, w którym $F(z)$ przyjmuje na pewno bądź wartość 0, bądź wartość 1.