

ROZDZIAŁ VI

FUNKCJE ANALITYCZNE

§ 1. Uwagi wstępne. Już w Rozdz. I (§§ 9, 10, 11) wprowadziliśmy pewne wyrażenia wieloznaczne, jak np. $\arg z$, $\log z$, $\sqrt{z}$, a w Rozdz. IV (§§ 3, 10) rozważane były własności topologiczne obszarów, w których istnieją jednoznaczne i ciągłe (holomorficzne) „gałęzie” tych wyrażen. Analogiczne badania byłyby banalne w dziedzinie rzeczywistej. Jeżeli x przebiega tylko wartości rzeczywiste, to przyjmując np. $f(x) = +\sqrt{x}$ dla $x \geq 0$ i $f(x) = +i\sqrt{|x|}$ dla $x < 0$, otrzymujemy gałąź ciągłą $\sqrt{x}$ na całej osi rzeczywistej; oczywiście, moglibyśmy również określić jeszcze inne gałęzie ciągłe $\sqrt{x}$ na osi rzeczywistej i zbyteczne by było wyróżniać specjalne obszary liniowe, na których gałęzie takie dają się określić. Różnicę istotną między płaszczyzną zespoloną a osią rzeczywistą wyjaśnia fakt, że na płaszczyźnie od jednej wartości rozważanych wyrażen wieloznacznych do innej możemy na ogół przejść w sposób „ciągły”, wychodząc z jakiegoś punktu z jedną wartością i powracając doń z inną po pewnej krzywej zamkniętej. Jeżeli np. poruszamy się po okręgu $z = e^{it}$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$, wychodząc z punktu $z = 1$ przy $t = 0$ z wartością 1 pierwiastka $\sqrt{z}$, wówczas, zmieniając wartość tego pierwiastka w sposób ciągły, wrócilibyśmy do punktu $z = 1$ dla $t = 2\pi$ z wartością $\sqrt{z}$ równą -1 . Przykład ten pokazuje, że na rozważanym okręgu nie można określić jednoznacznej i ciągłej gałęzi $\sqrt{z}$, a zarazem prowadzi w sposób naturalny do pojęcia funkcji wieloznacznej. Definicja takiej funkcji nie może oczywiście polegać tylko na formalnym uogólnieniu pojęcia funkcji jednoznacznej przez przyjęcie, że każdej wartości „zmiennej niezależnej” przyporządkowana jest na ogół nie jedna, lecz kilka wartości „zmiennej zależnej”. W ogólnej definicji funkcji analitycznej wieloznacznej idzie nam przede wszystkim o powiązanie z sobą w sposób naturalny rozmaitych wartości funkcji, o ustalenie sposobów przechodzenia „ciągłego” od jednej wartości do drugiej. Definicję taką zawdzięczamy Weierstrassowi, który oparł ją na pojęciach elementu analitycznego i przedłużenia analitycznego. Pojęciom tym poświęcone będą pierwsze §§ tego rozdziału.

§ 2. Element analityczny. Nazywać będziemy *elementem analitycznym* parę $\{F, a\}$, złożoną z punktu a oraz funkcji $F(z)$ meromorficznej w tym punkcie; punkt a nazywać się będzie *środkiem* elementu $\{F, a\}$. Mówić będziemy także, iż funkcja $F(z)$ *wyznacza* w punkcie a element analityczny $\{F, a\}$.

Weźmy pod uwagę koła K o środku a , na które funkcja $F(z)$, meromorficzna w punkcie a , daje się rozszerzyć z zachowaniem meromorficzności, t. zn. takie koła, w których istnieje funkcja meromorficzna, identyczna z $F(z)$ w otoczeniu punktu a . Wśród kół tych istnieje jedno największe; nazwiemy je *kołem elementu* $\{F, a\}$, a promień jego *promieniem* tego elementu. Funkcję meromorficzną w kole elementu $\{F, a\}$, identyczną z F w otoczeniu punktu a , oznaczać będziemy przez F_a .

Rozróżnienie funkcji F i funkcji F_a jest niekiedy niezbędne. Gdy np. funkcja $F(z)$ dana jest w obszarze G , wówczas w każdym punkcie $a \in G$ wyznacza ona element $\{F, a\}$ o pewnym kole K_a . Funkcja $F(z)$ pokrywa się wówczas z $F_a(z)$ w tej składowej zbioru otwartego $K_a \cdot G$, która zawiera punkt a . Zbiór $K_a \cdot G$ może jednak nie być obszarem i posiadać inne jeszcze składowe, w których funkcje $F_a(z)$ i $F(z)$ mogą się różnić.

Dwa elementy $\{F, a\}$ i $\{G, b\}$ uważamy za *identyczne* i piszemy $\{F, a\} = \{G, b\}$, jeżeli $a = b$ i jeżeli funkcje F i G są identyczne w pewnym otoczeniu punktu $a = b$; elementy te mają wówczas wspólnie koło, przy czym $F_a = G_a$. W szczególności zawsze $\{F, a\} = \{F_a, a\}$.

Kołem elementu $\{F, a\}$ może być cała płaszczyzna; jak wynika z tw. 7.3 Rozdz. III, zachodzi to wtedy (i tylko wtedy), gdy F jest funkcją wymierną.

Przedłużeniem bezpośrednim elementu $\{F, a\}$ będziemy nazywali każdy element analityczny $\{F_a, b\}$, gdzie b jest dowolnym punktem koła K elementu $\{F, a\}$. Funkcja $F_a(z)$ określona jest w całym kole K , a więc element $\{F_a, b\}$ określony jest w każdym punkcie $b \in K$. Jeżeli $a \neq \infty$, wówczas promień elementu $\{F_a, b\}$ jest co najmniej równy liczbie dodatniej $r - |b - a|$, gdzie r oznacza promień koła K , gdyż koło o środku b i promieniu $r - |b - a|$ zawiera się w kole K .

Punkt z leżący wewnątrz lub na brzegu koła elementu $\{F, a\}$ nazywać będziemy *punktem przedłużalności* tego elementu, jeżeli zawiera się wewnątrz koła przynajmniej jednego elementu, który jest bezpośrednim przedłużeniem elementu $\{F, a\}$; w przeciwnym razie punkt z nazywać się będzie *punktem nieprzedłużalności* rozważanego elementu. Oczywiście wszystkie punkty wewnątrz koła elementu są punktami przedłużalności.

(2.1) Zbiór punktów nieprzedłużalności elementu analitycznego jest domknięty i, wyjąwszy przypadek gdy koło elementu jest całą płaszczyzną, niepusty.

Dowód. Niech $\{F, a\}$ będzie elementem analitycznym o kole $K=K(a; R)$. Możemy założyć oczywiście, iż funkcja $F(z)$ jest meromorficzna w całym kole K . Jasne jest, iż jeżeli jakiś punkt z okręgu koła K jest punktem przedłużalności elementu, wówczas wszystkie punkty tego okręgu, położone dostatecznie blisko punktu z , są również punktami przedłużalności. Zbiór Z punktów nieprzedłużalności jest więc zbiorem domkniętym.

Ażeby pokazać, iż zbiór Z jest niepusty, oznaczmy dla każdego punktu $b \in K$ przez K_b koło elementu $\{F, b\} = \{F_b, b\}$, a przez G sumę wszystkich kół K_b dla $b \in K$. Funkcje $F_b(z)$ łącznie wyznaczają jedną funkcję $H(z)$ w całym zbiorze otwartym G , t.j. jeśli jakiś punkt z_0 należy do dwu kół K_{b_1} i K_{b_2} , gdzie $b_1 \in K$ i $b_2 \in K$, to $F_{b_1}(z_0) = F_{b_2}(z_0)$. Istotnie, skoro $K_{b_1} \cdot K_{b_2} \neq \emptyset$, wówczas, jak spostrzegamy od razu (p. rysunek), również $K \cdot K_{b_1} \cdot K_{b_2} \neq \emptyset$. W obszarach

$K \cdot K_{b_1}$ i $K \cdot K_{b_2}$ mamy jednak odpowiednio $F(z) = F_{b_1}(z)$ i $F(z) = F_{b_2}(z)$, a więc $F_{b_1}(z) = F_{b_2}(z)$ w zbiorze $K \cdot K_{b_1} \cdot K_{b_2}$. Stąd jednak wynika (Rozdz. III, tw. 8.6), że funkcje $F_{b_1}(z)$ i $F_{b_2}(z)$ są identyczne w całym obszarze $K_{b_1} \cdot K_{b_2}$ i że, w szczególności, $F_{b_1}(z_0) = F_{b_2}(z_0)$.

Funkcja $H(z)$ jest oczywiście meromorficzna w G i identyczna z $F(z)$ w K . Gdyby teraz okrąg koła K nie zawierał punktów nieprzedłużalności, wówczas mielibyśmy $\bar{K} \subset G$. Istniałoby więc koło K^* takie, iż $\bar{K} \subset K^* \subset G$, a w nim funkcja meromorficzna $H(z)$, identyczna z $F(z)$ w kole K . Koło K nie byłoby tedy kołem elementu $\{F, a\}$, wyjąwszy przypadek, gdy $K = \bar{K}$, t.j. gdy K jest całą płaszczyzną, a więc gdy funkcja $F(z)$ jest funkcją wymierną.

Natomiast zbiór punktów przedłużalności elementu na okręgu koła zbieżności może być pusty również i wtedy, gdy promień koła elementu jest skończony. Najprostszym przykładem jest element $\{F, 0\}$, gdzie

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Mamy mianowicie dla każdej pary liczb całkowitych dodatnich k, p oraz $r < 1$

$$\begin{aligned} \left| F \left(r \exp \frac{k\pi i}{2^p} \right) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} \exp 2^{n-p} k\pi i \right| \geq -(p+1) + \sum_{n=p+1}^{\infty} r^{2^n}, \\ \lim_{r \rightarrow 1-} \left| F \left(r \exp \frac{k\pi i}{2^p} \right) \right| &= \infty. \end{aligned}$$

skąd

(2.2)

Punkty postaci $z = \exp(k\pi i/2^p)$, gdzie k i p są liczbami całkowitymi dodatnimi, tworzą zbiór wszędzie gęsty na okręgu $C(0; 1)$; ponieważ zaś funkcja meromorficzna może przyjmować wartość ∞ co najwyżej tylko w zbiorze odosobnionym, zatem z (2.2) wynika, iż $K(0; 1)$ jest kołem rozważanego elementu, a zarazem iż żaden z punktów okręgu tego koła nie jest punktem przedłużalności tego elementu.

Definicje powyższe odbiegają nieco od tradycyjnych. Oryginalna definicja Weierstrassa elementu analitycznego (oraz pojęć pochodnych) tym się mianowicie różni od definicji przyjętej w tym §, iż zamiast warunku meromorficzności rozważanych funkcji występuje w niej warunek holomorficzności, który jest bardziej ograniczający. Ponieważ zaś każda funkcja holomorficzna w pewnym punkcie rozwija się w otoczeniu tego punktu na szereg potęgowy, a koło zbieżności tego szeregu jest największym kołem o środku w danym punkcie, na jakie funkcja dana może być rozszerzona z zachowaniem holomorficzności, przeto przez element analityczny o środku a , w sensie Weierstrassa, można rozumieć wprost szereg potęgowy o środku a i dodatnim promieniu zbieżności. Odpowiednikami środka, koła i promienia elementu analitycznego są środek, koło zbieżności i promień zbieżności szeregu potęgowego. Zmieniając analogicznie definicje bezpośredniego przedłużenia elementu analitycznego oraz punktów przedłużalności i nieprzedłużalności, otrzymujemy definicje bezpośredniego przedłużenia szeregu potęgowego (którym jest znowu pewien szereg potęgowy) oraz punktów przedłużalności i nieprzedłużalności szeregu potęgowego. Dalsze rozważania tego rozdziału (w szczególności tw. 2.1) przenoszą się formalnie na teorię przedłużenia analitycznego szeregu potęgowego. Rozważony wyżej przykład (str. 232) elementu analitycznego bez punktów przedłużalności jest zarazem przykładem szeregu potęgowego, który nie ma punktów przedłużalności na okręgu swego koła zbieżności.

Punkty nieprzedłużalności szeregu nazywa się często punktami osobliwymi szeregu.

Następujące przykłady ilustrują powyższe związki. Funkcja wymierna wyznacza w każdym punkcie płaszczyzny element analityczny, którego kołem jest cała płaszczyzna, w każdym zaś punkcie z_0 , nie będącym biegunem funkcji — szereg potęgowy o promieniu równym odległości punktu z_0 od najbliższego bieguna w skończoności. Funkcja holomorficzna w całej płaszczyźnie otwartej wyznacza w każdym jej punkcie zarówno element analityczny, jak i szereg potęgowy, o promieniu nieskończonym. Funkcja $\exp 1/(z-a)$ wyznacza w każdym punkcie $z_0 \neq a$ zarówno element analityczny, jak i szereg potęgowy, o promieniu równym $\varrho(a, z_0)$ (również i wtedy, gdy $z_0 = \infty$). Jedynym punktem nieprzedłużalności dla tego elementu (jak również dla szeregu potęgowego) jest punkt a .

ĆWICZENIA. 1. Funkcje rozważane w ćw. 5–8, § 2, Rozdz. IV, wyznaczają elementy analityczne o kole $K(0;1)$, nieprzedłużalne w żadnym punkcie okręgu tego koła.

2. Niech C będzie łukiem zwykłym regularnym, zaś $f(z)$ funkcją ciągłą na C . Funkcja

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

jest wówczas holomorficzna w całej płaszczyźnie poza C . Pokazać, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest określona i holomorficzna w otoczeniu pewnego punktu a krzywej C , który nie jest końcem tej krzywej, to dla każdego punktu b , nie leżącego na C i dostatecznie bliskiego punktu a , koło elementu $\{F, b\}$ zawiera punkt a .

3. Na to, aby szereg potęgowy $\sum_n a_n z^n$ o kole zbieżności $K(0;1)$ miał okręgu tego koła dokładnie jeden punkt nieprzedłużalności, a mianowicie biegun jednokrotny w punkcie 1, konieczne jest i wystarcza, aby $\limsup_n |a_{n+1} - a_n|^{1/n} < 1$ (Pringsheim).

(Punkt a na okręgu zbieżności szeregu potęgowego nazywa się biegunem k -krotnym tego szeregu, jeżeli funkcja równa sumie danego szeregu w jego kole zbieżności rozszerza się jako funkcja meromorficzna z biegunem k -krotnym w punkcie a na obszar zawierający punkt a .)

4. Jeżeli

$$(*) \quad F(z) = \sum_n a_n z^n$$

jest szeregiem potęgowym zbieżnym w kole $K(0;R)$ o promieniu skończonym, wówczas, dla każdego punktu $z_0 = re^{i\alpha} \in K(0;R)$, szereg

$$(\#) \quad \sum_n \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

jest bezpośrednim przedłużeniem szeregu $(*)$ i posiada promień zbieżności $\geq R - r$. Jeżeli $z_0 \neq 0$, wówczas na to, by punkt $Re^{i\alpha}$ był punktem nieprzedłużalności szeregu $(*)$, konieczne jest i wystarcza, by promień zbieżności szeregu $(\#)$ był równy $R - r$.

5. Jeżeli szereg $\sum_n a_n z^n$ o współczynnikach rzeczywistych nieujemnych posiada promień zbieżności 1, wówczas punkt 1 jest punktem nieprzedłużalności tego szeregu (Pringsheim, Vivanti, Dienes).

6. Niech $\sum_n a_n z^n$ i $\sum_n \beta_n z^n$ będą szeregami o współczynnikach rzeczywistych i o promieniu zbieżności ≥ 1 . Wówczas, jeżeli punkt 1 jest punktem przedłużalności dla szeregu $\sum_n (a_n + i\beta_n) z^n$, to jest on również punktem przedłużalności dla obydwu szeregów danych.

Wynioskować stąd, że w ćw. 5 warunek, iż współczynniki a_n są rzeczywiste nieujemne, zastąpić można przez warunek nieco ogólniejszy, iż $|\Re a_n| \leq C \Im a_n$ dla $n = 1, 2, \dots$, gdzie C jest stałą dodatnią skończoną, a także przez warunek, że $\Re a_n \geq 0$ dla $n = 1, 2, \dots$ i że szereg $\sum_n (\Re a_n) z^n$ ma promień zbieżności 1.

7. Niech $\{n_k\}_{k=0,1,\dots}$ będzie ciągiem rosnącym liczb całkowitych dodatnich takim, że

$$n_{k+1} - n_k \geq \alpha n_k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ gdzie } \alpha > 0.$$

Wówczas każdy szereg potęgowy postaci

$$(*) \quad \sum_k a_k z^{n_k},$$

o ile posiada skończony promień zbieżności, jest nieprzedłużalny w każdym punkcie okręgu swego koła zbieżności (Hadamard: *twierdzenie o szeregach potęgowych „łukowych”*).

[Wsk. Zakładając, że szereg $(*)$ ma promień zbieżności 1 i że jest np. przedłużalny w punkcie 1, oznaczmy przez $F(z)$ funkcję holomorficzną w obszarze obejmującym koło $K(0;1)$ oraz pewne otoczenie punktu 1 i określoną w $K(0;1)$ przez szereg $(*)$. Funkcja $G(\zeta) = F(\frac{1}{\zeta} \zeta^p (\zeta + 1))$, gdzie $p > 1/\alpha$ jest liczbą całkowitą dodatnią, jest wówczas holomorficzna w pewnym kole $|\zeta| < r$, gdzie $r > 1$. Otrzymujemy szereg potęgowy funkcji $G(\zeta)$ w kole $|\zeta| < 1$, zastępując w szeregu $(*)$ wyrazy $a_k z^{n_k}$ rozwinięciami wyrażen $a_n [\frac{1}{\zeta} \zeta^p (\zeta + 1)]^{n_k}$ wedle potęg zmiennej ζ (p. Rozdz. IV, § 9, ćw. 5); ponieważ zaś szereg funkcji $G(\zeta)$ jest zbieżny w całym kole $|\zeta| < r$, przeto, wracając znów do zmiennej z , otrzymalibyśmy, że szereg $(*)$ byłby zbieżny we wszystkich punktach pewnego otoczenia punktu 1, a więc w pewnych punktach poza swym kołem zbieżności (Faber, Mordell).]

8. Przykłady szeregów spełniających warunek tw. Hadamarda z ćw. 7: szeregi $\sum_k z^{2^k}/2^k$, $\sum_k z^{k!}/2^k$ o promieniu zbieżności 1 (zbieżne jednostajnie na całym kole domkniętym $\bar{K}(0;1)$); ogólniej: każdy szereg postaci $\sum_k a_k z^{n_k}$ o skończonym promieniu zbieżności, gdzie $\{n_k\}$ oznacza ciąg rosnący liczb całkowitych dodatnich, w którym każda liczba następna jest wielokrotnością całkowitą poprzedniej. Udowodnić bezpośrednio, nie opierając się na tw. Hadamarda, że każdy taki szereg jest nieprzedłużalny we wszystkich punktach okręgu koła zbieżności.

9. Uogólnić tw. Hadamarda z ćw. 7, jak następuje. Niech $\{n_k\}_{k=0,1,\dots}$ będzie ciągiem rosnącym liczb całkowitych dodatnich i niech

$$(**) \quad \sum_n a_n z^n$$

będzie szeregiem potęgowym o skończonym promieniu zbieżności takim, że $a_n = 0$ dla $n_k < n < (1+\alpha)n_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $\alpha > 0$.

Wówczas, jeżeli $\{s_n(z)\}_{n=0,1,\dots}$ oznacza ciąg sum cząstkowych szeregu $(**)$, to podciąg $\{s_{n_k}(z)\}_{k=0,1,\dots}$ tego ciągu jest zbieżny jednostajnie w otoczeniu każdego punktu przedłużalności szeregu $(**)$ (Ostrowski: *twierdzenie o szeregach potęgowych z „łukami”*).

[Wsk. Metoda analogiczna do metody wskazanej w ćw. 7 dla dowodu tw. Hadamarda (Estermann).]

10. Szereg potęgowy nazywa się *nadzbieżnym* w pewnym obszarze G zawierającym koło zbieżności szeregu, jeżeli z ciągu jego sum cząstkowych wybrać można podciąg niemal jednostajnie zbieżny w G . Jeżeli obszar ten wykracza poza koło zbieżności, wówczas wszystkie punkty okręgu tego koła, które zawarte są w G , są punktami przedłużalności rozważanego szeregu.

Przykład szeregu potęgowego, który jest nadzbieżny w obszarze wykraczającym poza koło zbieżności. Dany jest szereg

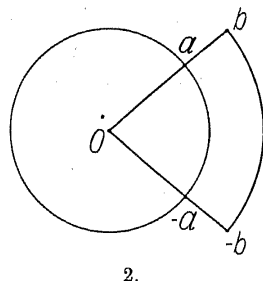
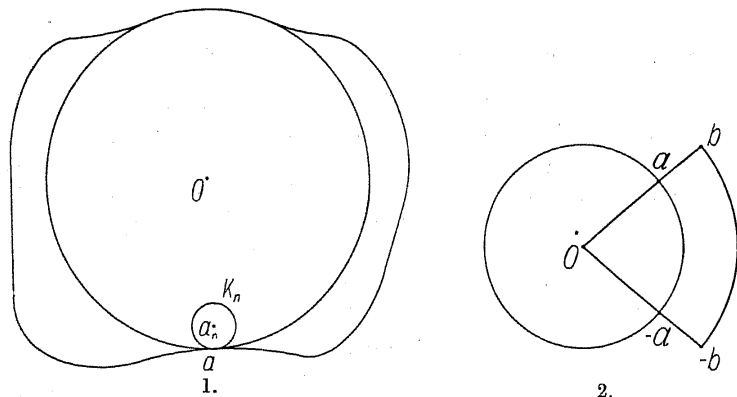
$$(\times) \quad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[z(1-z)]^{4^n}}{2^{4^n}}.$$

Udowodnić, że: 1° szereg ten jest niemal jednostajnie zbieżny w obszarze $K(0;1) + K(1;1)$ i określona przezeń funkcja $F(z)$ jest przeto holomorficzna w tym obszarze; 2° rozwinięcie funkcji $F(z)$ na szereg potęgowy o środku 0 otrzymuje się przez formalne otworzenie nawiasów w szeregu $(\times)$ i uporządkowanie wedle potęg zmiennej z (p. Rozdz. IV, § 9, ćw. 5); 3° kołem zbieżności tego rozwinięcia jest koło $K(0;1)$.

Ponieważ zaś ciąg sum cząstkowych szeregu $(\times)$ jest pewnym podciągiem ciągu sum cząstkowych rozwinięcia funkcji $F(z)$, zatem szereg potęgowy funkcji $F(z)$ jest nadzbieżny w obszarze $K(0;1) + K(1;1)$, wykraczającym poza koło zbieżności $K(0;1)$ tego szeregu.

[Wsk. Mamy $|z(1-z)| < 2$ dla $z \in K(0;1) + K(1;1)$, zaś $|z(1-z)| = 2$ dla $z = -1$.]

11. Niech G będzie obszarem ograniczonym jednospójnym, zawierającym wewnątrz koło $K(0;1)$, a na brzegu przynajmniej jeden punkt okręgu tego koła. Zbudować szereg potęgowy o środku 0 i promieniu zbieżności 1, nadzbieżny w obszarze G (p. ćw. 10).



[Wsk. Niech a będzie punktem wspólnym okręgu $C(0;1)$ i brzegu obszaru G (rys. 1). Niech $a_n = \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)a$, $K_n = K(a_n; 1 - |a_n|)$. Przedstawiamy G jako sumę ciągu wstępującego $\{F_n\}$ zbiorów domkniętych, przyjmując jako F_n zbiór wszystkich punktów $z \in G$ takich, że $\varrho(z, \partial G) \geq 2/3^n$ (wówczas $a_k \in F_n$ dla $k=1, 2, \dots, n-1$, natomiast $F_n \cdot K_n = 0$ dla $n=1, 2, \dots$). Korzystając z tw. Rungego (Rozdz. IV, tw. 2.2), określamy przez indukcję ciąg wielomianów $\{P_n(z)\}_{n=1, 2, \dots}$ oraz ciąg rosnący $\{m_n\}_{n=1, 2, \dots}$ liczb całkowitych tak, że: (a) liczba m_n jest większa od stopnia wielomianu $z^{m_n-1}P_{n-1}(z)$, (b) $|z^{m_n}P_n(z)| \leq 1/2^n$ dla $z \in F_n$, (c) $|z^{m_n}P_n(z)| \geq n$ dla $z = a_n$.

Szereg $\sum_n z^{m_n}P_n(z)$ porządkuje się w szereg potęgowy (p. Rozdz. IV, § 9, ćw. 5) o żądanej własności.]

12. Szereg potęgowy może być rozbieżny nawet i w tych punktach okręgu zbieżności, w których jest przedłużalny (przykład: szereg geometryczny $1+z+z^2+\dots$ jest przedłużalny we wszystkich punktach swego okręgu zbieżności z wyjątkiem punktu 1, a w żadnym z nich nie jest zbieżny). Jednak:

Jeżeli szereg potęgowy $\sum_n a_n z^n$ ma promień zbieżności 1, zaś $a_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$, wówczas szereg ten jest zbieżny w każdym punkcie okręgu $C(0;1)$, w którym jest przedłużalny (Fatou, M. Riesz).

[Wsk. Niech 1 będzie punktem przedłużalności rozważanego szeregu; wyznaczyć możemy wycinek kołowy domknięty W (str. 236, rys. 2), wykraczający poza koło $K(0;1)$ i zawierający wewnątrz punkt 1, tak by istniała funkcja holomorficzna $F(z)$ na W , równa sumie danego szeregu w części wycinka zawartej w kole $K(0;1)$. Przyjmując $s_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, rozważamy funkcję

$$R_n(z) = \frac{F(z) - s_n(z)}{z^{n+1}}(z+a)(z-a)$$

(por. rysunek). Udowodnić należy, że $R_n(z)$ dąży jednostajnie do zera na obwodzie wycinka W , a więc tym samym (Rozdz. III, tw. 12.7) na całym tym wycinku; w tym celu szacujemy $|R_n(z)|$ na obwodzie wycinka, rozważając kolejno odcinek $[0, -a]$ z wyłączeniem punktu $-a$, odcinek $[-a, -b]$, łuk $[-b, b]$ i pozostałe, analogiczne części obwodu.]

§ 3. Przedłużenie analityczne wzdłuż krzywej. Mówimy, że rodzina elementów analitycznych $\{P(t)\}_{a \leq t \leq b}$, zależnych od parametru rzeczywistego t przebiegającego przedział $[a, b]$, jest łańcuchem elementów wzdłuż krzywej C , danej przez równanie $z = z(t)$, gdzie $a \leq t \leq b$, jeżeli:

1° dla każdego $t \in [a, b]$ punkt $z(t)$ jest środkiem elementu $P(t)$,

2° każdemu $t \in [a, b]$ odpowiada taka liczba $\varepsilon > 0$, iż, gdy $|h| < \varepsilon$ oraz $t+h \in [a, b]$, wówczas element $P(t+h)$ jest przedłużeniem bezpośrednim elementu $P(t)$.

Element analityczny P_2 nazywamy przedłużeniem elementu P_1 wzdłuż krzywej $z = z(t)$, gdzie $a \leq t \leq b$, jeżeli istnieje łańcuch elementów $\{P(t)\}_{a \leq t \leq b}$ wzdłuż tej krzywej taki, że $P_1 = P(a)$ i $P_2 = P(b)$; wówczas mówimy także, że łańcuch $\{P(t)\}$ łączy element P_2 z P_1 . Widoczne jest, iż jeżeli element P_2 jest przedłużeniem elementu P_1 wzdłuż krzywej C , to element P_1 jest przedłużeniem elementu P_2 wzdłuż krzywej $-C$.

Z definicji powyższych wynika natychmiast tw. następujące:

(3.1) Jeżeli $F(z)$ jest funkcją meromorficzną w zbiorze otwartym G , wówczas dla każdej krzywej $z = z(t)$, gdzie $a \leq t \leq b$, przebiegającej w G rodzina elementów analitycznych $P(t) = \{F, z(t)\}$ jest łańcuchem elementów wzdłuż tej krzywej.

Element analityczny P_2 nazywa się *przedłużeniem* elementu P_1 , jeżeli jest jego przedłużeniem wzdłuż jakiegokolwiek krzywej. Jeżeli, w szczególności, P_2 jest przedłużeniem elementu P_1 wzdłuż krzywej przebiegającej w jakimś zbiorze otwartym G , wówczas P_2 nazywa się *przedłużeniem* elementu P_1 w zbiorze G .

(3.2) *Każdy element posiada co najwyżej jedno przedłużenie wzdłuż krzywej wychodzącej z jego środka.*

Dowód. Załóżmy, iż $\{P(t)\}$ oraz $\{R(t)\}$ są dwoma łańcuchami elementów wzdłuż krzywej $z=z(t)$, gdzie $a \leq t \leq b$, oraz iż $P(a)=R(a)$. Niech T_1 oznacza zbiór tych punktów t przedziału $[a, b]$, dla których $P(t)=R(t)$, zaś T_2 niech będzie zbiorem pozostałych punktów tego przedziału. Jeżeli t_1 jest punktem skupienia zbioru T_1 , wówczas dla wartości t zbioru T_1 dostatecznie bliskich punktu t_1 elementy $P(t)=R(t)$ są bezpośrednimi przedłużeniami zarówno elementu $P(t_1)$ jak i $R(t_1)$; ponieważ zaś elementy $P(t_1)$ i $R(t_1)$ mają wspólny środek, zatem $P(t_1)=R(t_1)$ i $t_1 \in T_1$. Podobnie, jeżeli t_2 jest punktem skupienia zbioru T_2 , to $P(t_2) \neq R(t_2)$, a więc $t_2 \in T_2$: istotnie, gdyby $P(t_2)=R(t_2)$, wówczas dla każdej wartości t dostatecznie bliskiej punktu t_2 elementy $P(t)$ i $R(t)$ byłyby przedłużeniami bezpośrednimi, o wspólnym środku, tego samego elementu i mielibyśmy przeto $P(t)=R(t)$, a więc $t \in T_1$, co sprzeczne jest z tym, że $t_2 \in T_2$. Obydwa zbiory T_1 i T_2 są tedy domknięte; jeden z nich jest więc na pewno pusty. Ponieważ zaś $P(a)=R(a)$, t. j. $a \in T_1$, zatem $T_2=0$ i przeto $P(t)=R(t)$ dla każdego t przedziału $[a, b]$. W szczególności $P(b)=R(b)$.

§ 4. Funkcja analityczna. Nazywać będziemy *funkcją analityczną w obszarze G* każdą (nie pustą) rodzinę $\mathfrak{P}$ elementów analitycznych o środkach w punktach obszaru G taką, iż:

1° z każdych dwu elementów rodziny $\mathfrak{P}$ jeden jest przedłużeniem drugiego w obszarze G ,

2° każdy element analityczny, który jest przedłużeniem w obszarze G elementu analitycznego, należącego do $\mathfrak{P}$, należy również do $\mathfrak{P}$.

W przypadku, gdy G jest całą płaszczyzną, funkcję analityczną w G nazywamy wprost *funkcją analityczną*.

Jeżeli P jest dowolnym elementem analitycznym o środku w obszarze G , wówczas zbiór wszystkich przedłużeń tego elementu w obszarze G jest pewną funkcją analityczną w tym obszarze, zawierającą P . Jest to jedyna funkcja analityczna w G , która zawiera P . Każdy zatem element analityczny (o środku w obszarze G) *wyznacza* funkcję analityczną w tym obszarze.

Jeżeli $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną w obszarze G , a H jest obszarem zawartym w G , wówczas każdy element funkcji $\mathfrak{P}$ o środku w obszarze H wyznacza w H pewną funkcję analityczną. Każda taka funkcja nazywa się *gałęzią* funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$ w *podobszarze* H obszaru G ; wszystkie jej elementy należą oczywiście także do funkcji $\mathfrak{P}$.

Odwrotnie, gdy $\mathfrak{R}$ jest funkcją analityczną w pewnym obszarze H , a G dowolnym obszarem zawierającym H , wówczas funkcję $\mathfrak{R}$ uważać możemy za gałąź pewnej funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$ w G . Funkcję tę — którą nazywamy *przedłużeniem funkcji* $\mathfrak{R}$ na obszar G — otrzymujemy jako zbiór wszystkich przedłużeń w obszarze G dowolnie obranego elementu funkcji $\mathfrak{R}$.

(4.1) *Jeżeli $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną w obszarze G , zaś $P=\{F, a\}$ jest elementem tej funkcji, wówczas wszystkie przedłużenia bezpośrednie tego elementu, o środkach należących do pewnego otoczenia K punktu a , są również elementami funkcji $\mathfrak{P}$; jeżeli G jest całą płaszczyzną, wówczas otoczeniem takim jest koło elementu P .*

Dowód. Niech K będzie kołem o środku a , które zawarte jest jednocześnie w G i w kole elementu P . Dla każdego punktu $b \in K$ element $\{F, b\}$ jest wtedy (na mocy tw. 3.1) przedłużeniem elementu P wzdłuż odcinka $[a, b]$ zawartego w G i należy przeto do $\mathfrak{P}$.

Jeżeli $\{F, a\}$ jest elementem funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$, wówczas $F(a)$ nazywa się *wartością* funkcji $\mathfrak{P}$ w punkcie a . Wartości funkcji $\mathfrak{P}$ w punkcie a oznaczamy ogólnie przez $\mathfrak{P}(a)$. Piszemy także często — tradycyjnie, choć nie całkiem konsekwentnie — $\mathfrak{P}(z)$ zamiast $\mathfrak{P}$, oznaczając przez z punkt zmienny obszaru, w którym funkcja $\mathfrak{P}$ jest określona.

Wartości funkcji $\mathfrak{P}$ określone są tylko w tych punktach, które są środkami elementów tej funkcji. Ze względu na tw. 4.1 zbiór tych punktów dla funkcji $\mathfrak{P}$ analitycznej w obszarze G jest pewnym podzbiorem otwartym G_1 obszaru G . Ponieważ przy tym każde dwa elementy funkcji $\mathfrak{P}$ są nawzajem swymi przedłużeniami wzdłuż pewnej krzywej łączącej ich środki, przeto widoczne jest natychmiast, iż G_1 jest zbiorem otwartym spójnym, t. j. pewnym podobszarem obszaru G . Nazywać go będziemy *podobszarem naturalnym* funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$ w obszarze G , a w przypadku gdy G jest całą płaszczyzną — wprost *obszarem naturalnym* tej funkcji.

Jeżeli $\{F, a\}$ jest elementem funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$, wówczas w myśl tw. 4.1 wartości funkcji $F(z)$ w punktach pewnego otoczenia punktu a są zarazem wartościami funkcji $\mathfrak{P}$ w tych punktach; innymi słowy:

(4.2) *W dostatecznie małym otoczeniu każdego punktu podobszaru naturalnego funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$ istnieje funkcja meromorficzna, której wartości w punktach tego otoczenia są w nich zarazem wartościami funkcji $\mathfrak{P}$.*

Niech $\mathfrak{P}$ będzie funkcją analityczną w obszarze G . Jeżeli istnieje liczba skończona p taka, że każdy punkt tego obszaru jest środkiem co najwyżej p elementów funkcji $\mathfrak{P}$, wówczas funkcja ta nazywa się *skończenie wartościową* w G , w przeciwnym zaś razie *nieskończenie wartościową*. Jeżeli każdy punkt obszaru G jest środkiem co najwyżej p elementów funkcji $\mathfrak{P}$, a istnieją przy tym punkty $z \in G$, które są środkami dokładnie p elementów, wówczas funkcja $\mathfrak{P}$ nazywa się *p-wartościową* w G . Wreszcie, jeżeli każdy punkt podobszaru naturalnego funkcji $\mathfrak{P}$ jest środkiem tej samej ilości p elementów funkcji, to o funkcji $\mathfrak{P}$ mówimy, że jest w obszarze G *ściśle p-wartościową* lub *p-wartościową w znaczeniu ściślejszym*.

Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną *p-wartościową* ($p \neq \infty$) w obszarze G , wówczas zbiór tych punktów $z \in G$, które są środkami p różnych elementów funkcji, jest zbiorem otwartym.

W punkcie, który jest środkiem p elementów funkcji analitycznej, funkcja przyjmować może mniej niż p wartości różnych. Zbiór jednak takich punktów jest co najwyżej przeliczalny. Dokładniej: jeżeli przy $p \neq \infty$ każdy punkt zbioru Z jest środkiem przynajmniej p różnych elementów funkcji $\mathfrak{P}$, to zbiór tych punktów $z \in Z$, w których funkcja przyjmuje mniej niż p wartości różnych, jest *osobniony i domknięty* w Z . Istotnie, jeżeli punkt a jest środkiem p różnych elementów $\{W^{(1)}, a\}, \{W^{(2)}, a\}, \dots, \{W^{(p)}, a\}$ funkcji $\mathfrak{P}$, wówczas (Rozdz. III; tw. 8.6) w żadnym punkcie $z \neq a$ dostatecznie małego otoczenia punktu a żadne dwie z funkcji $W^{(j)}$, dla $j = 1, 2, \dots, p$, nie przyjmują tej samej wartości. W szczególności więc każda funkcja analityczna *ściśle p-wartościowa* w obszarze G przyjmuje *dokładnie p-wartości* różnych w każdym punkcie swego podobszaru naturalnego, z wyjątkiem co najwyżej punktów pewnego zbioru *osobnionego, domkniętego* w tym podobszarze.

Jeżeli $W(z)$ jest funkcją meromorficzną w obszarze G , wówczas zbiór elementów analitycznych, jakie funkcja ta wyznacza w punktach obszaru G , jest, z uwagi na twierdzenia 3.1 i 3.2, pewną funkcją analityczną jednowartościową w G . Wartości jej są oczywiście w każdym punkcie obszaru G identyczne z odpowiednimi wartościami danej funkcji meromorficznej W .

Odwrotnie, jeżeli $\mathfrak{W}$ jest funkcją analityczną w pewnym obszarze G , mającą w każdym punkcie swego podobszaru naturalnego G_1 dokładnie jedną wartość, wówczas, przyjmując $W(z) = \mathfrak{W}(z)$ dla $z \in G_1$, otrzymujemy na mocy tw. 4.2 funkcję W meromorficzną w G_1 , przy czym widzimy natychmiast, że funkcja $\mathfrak{W}$ jest zbiorem elementów analitycznych, jakie funkcja W wyznacza w punktach obszaru G_1 .

Pojęcia funkcji meromorficznej i funkcji analitycznej jednowartościowej w swym obszarze (lub podobszarze) naturalnym są tedy równoważne, dzięki czemu w dalszym ciągu będziemy mogli wprost utożsamiać, bez obawy nieporozumienia, funkcję analityczną jednowartościową z odpowiadającą jej funkcją meromorficzną. Z drugiej strony, z rozważań powyższych wynika zarazem, że *na to, aby funkcja analityczna była jednowartościową, konieczne jest i wystarcza, aby przyjmowała dokładnie jedną wartość w każdym punkcie swego obszaru (lub podobszaru) naturalnego*.

Funckję analityczną w obszarze G nazywamy *różnowartościową* lub *jednookazową*¹⁾, jeżeli nie przyjmuje jednej tej samej wartości w żadnych dwu punktach tego obszaru. Należy odróżniać termin „funkcja różnowartościowa” od terminu „funkcja wielowartościowa”; przez funkcję *wielowartościową* rozumiemy bowiem każdą funkcję, która nie jest jednowartościową.

Jako przykład funkcji analitycznej wielowartościowej, która jest zarazem różnowartościową, określimy logarytm. Oznaczmy dla każdego punktu a różnego od 0 i ∞ przez $L_a^{(0)}(z)$ gałąź jednoznaczna²⁾ $\log z$ w kole $K(a; |a|)$, przyjmującą w punkcie a wartość

¹⁾ Pierwszy z tych terminów używany jest przez prof. Sierpińskiego, drugi przez prof. Dicksteina. Odpowiadają one nazwom: ang. univalent function, franc. fonction univalente, niem. schlichte Funktion. Mówimy także ogólniej, że funkcja analityczna jest *p-okazowa* (franc. fonction *p*-valente (Montel)), jeżeli każdą swą wartość przyjmuje co najwyżej w p punktach i jeżeli istnieją wartości, które przyjmuje dokładnie w p różnych punktach.

²⁾ Rozumiemy tu gałąź w sensie ustalonym w Rozdz. I, § 11. Jak się okaże z dalszego ciągu, gałąź logarytmu w tym sensie może być uważana za gałąź $\log z$ również i w sensie przyjętym obecnie ogólnie dla funkcji analitycznych.

$\log a$, i niech $L_a^{(k)}(z) = L_a(z) + 2k\pi i$. Otrzymujemy w ten sposób, gdy k przebiega wszystkie liczby całkowite, wszystkie gałęzie jednoznaczne $\log z$ w kole $K(a; |a|)$ (por. Rozdz. I, § 11). Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich elementów analitycznych $\{L_a^{(k)}, a\}$, gdzie $a \neq 0$, $a \neq \infty$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Udowodnimy, iż zbiór ten jest pewną funkcją analityczną.

Weźmy w tym celu pod uwagę jeden z tych elementów, np. $\{L_1^{(0)}, 1\}$, i niech Ω_0 będzie funkcją analityczną przezeń wyznaczoną. Ponieważ $\exp L_1^{(0)}(z) = z$, więc przedłużając element $\{L_1^{(0)}, 1\}$ do jakiegokolwiek punktu b wzdłuż jakiegokolwiek krzywej nie przechodzącej przez 0 ani ∞ , otrzymamy zawsze element $\{F, b\}$ taki, iż $\exp F(z) = z$, a więc element postaci $\{L_b^{(k)}, b\}$. Zatem $\Omega_0 \subset \Omega$. Z drugiej strony, jeżeli b jest dowolnym punktem różnym od 0 i ∞ , to oznaczając przez C_b okrąg $z = b \exp it$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$, przechodzący przez b , stwierdzamy natychmiast, iż przedłużając wzdłuż C_b dowolny element $\{L_b^{(k)}, b\}$ od punktu b do tego samego punktu, otrzymujemy element $\{L_b^{(k)} + 2\pi i, b\}$ i, ogólniej, przedłużając ten element wzdłuż krzywych nC_b otrzymujemy wszystkie elementy $\{L_b^{(k)} + 2n\pi i, b\}$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, t. j. wszystkie elementy rodziny Ω o środku b . Wynika stąd, iż $\Omega \subset \Omega_0$, a więc ostatecznie $\Omega = \Omega_0$.

Rodzina Ω jest zatem funkcją analityczną i określamy ją jako *funkcję analityczną* $\log z$. Analogicznie określamy *funkcję analityczną* $\sqrt{z}$, która jest przykładem funkcji dwuwartościowej, *funkcję analityczną* $\sqrt[n]{z}$ (gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą różną od zera), która jest przykładem funkcji n -wartościowej (w znaczeniu ściślejszym), i t. p. Obszarem naturalnym dla każdej z tych funkcji jest płaszczyzna pozbawiona punktów 0 i ∞ .

ĆWICZENIA. 1. Gałąź jednoznaczna $\arctg z$ istnieje w otoczeniu każdego punktu $a \neq \pm i$ i wyznacza w tym punkcie element analityczny. Określić promień tego elementu. Sprawdzić, że wszystkie elementy wyznaczone w ten sposób przez gałęzie jednoznaczne $\arctg$ tworzą jedną funkcję analityczną nieskończenie wartościową. Funkcję tę nazywamy *funkcją analityczną* $\arctg$. Określić jej obszar naturalny.

Analogiczne ćwiczenie dla $\arccos$ oraz $\arcsin$.

2. Obszarem naturalnym funkcji $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ jest cała płaszczyzna z pominięciem punktów 0 i ∞ . Funkcja ta jest dwuwartościowa, jednak nie ściśle dwuwartościowa: każdy punkt $z \neq 1$ jej obszaru naturalnego jest środkiem dwu elementów, natomiast punkt $z = 1$ jest środkiem tylko jednego elementu funkcji.

3. Jeżeli każdy punkt zbioru Z jest środkiem nieskończenie wielu elementów funkcji analitycznej $\mathfrak{F}$, a jednocześnie w każdym z punktów tego zbioru funkcja $\mathfrak{F}$ przyjmuje tylko skończoną ilość wartości różnych, wówczas zbiór Z jest co najwyżej przeliczalny.

4. Jeżeli $\mathfrak{F}$ jest funkcją analityczną jednookazową w obszarze G , wówczas ilość wartości, jakie funkcja ta przyjmuje w punkcie $a \in G$, jest równa ilości elementów funkcji $\mathfrak{F}$ o środku w tym punkcie. Na to więc, aby funkcja analityczna jednookazowa w obszarze G była ściśle p -wartościowa, konieczne jest i wystarcza, aby w każdym punkcie obszaru przyjmowała dokładnie p wartości różnych.

5. Niech $\sum_k \lambda_k$ będzie szeregiem bezwzględnie zbieżnym o wyrazach różnych od zera i niech $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ będzie ciągiem punktów (różnych) na okręgu $C(0; 1)$. Szereg

$$(*) \quad \sum_k \frac{\lambda_k}{z - a_k}$$

jest wówczas niemal jednostajnie zbieżny zarówno w kole $K(0; 1)$, jak i zewnątrz tego koła, t. zn. w kole $K(\infty; 1)$. Niech $F_1(z)$ i $F_2(z)$ oznaczają funkcje holomorficzne dane przez szereg (*) odpowiednio w kołach $K(0; 1)$ i $K(\infty; 1)$.

Dowieść, że jeżeli zbiór A jest wszędzie gęsty na okręgu $C(0; 1)$, to koła te są odpowiednio obszarami naturalnymi funkcji $F_1(z)$ i $F_2(z)$; jeżeli natomiast zbiór A nie jest wszędzie gęsty na $C(0; 1)$, to zbiór CA' (gdzie A' oznacza zbiór punktów skupienia zbioru A) jest obszarem obejmującym $K(0; 1)$ i $K(\infty; 1)$, a szereg (*) przedstawia w obszarze CA' funkcję meromorficzną, dla której obszar ten jest obszarem naturalnym.

6. Dany jest dowolny obszar G . Zbudować funkcję holomorficzną w G , dla której obszar G jest obszarem naturalnym.

(a) Metoda I. Niech R będzie brzegiem obszaru G . Można przyjąć, że R nie zawiera punktu ∞ . Niech $A = \{a_n\}$ będzie ciągiem punktów odosobnionych brzegu (o ile punkty takie istnieją), zaś $B = \{b_n\}$ ciągiem wszędzie gęstym w $R - A$. Każdemu punktowi b_n przyporządkowujemy ciąg $\{b_n^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ punktów obszaru G zbieżny do b_n .

Niech r_n oznacza kres dolny liczb $|b_n^{(k)} - b_n|$, a ϱ_n kres dolny liczb $\exp[-1/|b_n^{(k)} - a_n|]$, gdzie $m = 1, 2, \dots, n-1$ oraz $k = 1, 2, \dots$. Funkcja

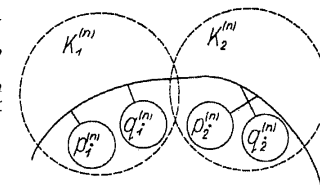
$$F(z) = \sum_n \frac{\varrho_n \exp[1/(z - a_n)]}{2^n} + \sum_n \frac{r_n}{2^n(z - b_n)}$$

posiada wówczas żadaną własność.

(b) Metoda II, oparta na twierdzeniu Rungego (Rozdz. IV, tw. 2.1). Dla każdego n możemy pokryć brzeg R obszaru G skończonym układem kół $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}, \dots, K_{m_n}^{(n)}$ o promieniach $\leq 1/n$ i środkach na R . W każdym z kół $K_j^{(n)}$, gdzie $j = 1, 2, \dots, m_n$, wybieramy dwa różne punkty $p_j^{(n)} \in G$ oraz $q_j^{(n)} \in G$ (jak na rysunku dla $j=1$ i $j=2$). Oznaczając przez $H^{(n)}$ sumę tych kół, możemy dla $n = 1, 2, \dots$ układy $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}, \dots, K_{m_n}^{(n)}$ wyznaczyć w ten sposób, by ciąg $\{H_n\}$ był zstępujący oraz by

$$p_j^{(n)} \in G - H^{(n+1)}, \quad q_j^{(n)} \in G - H^{(n+1)}$$

dla $j = 1, 2, \dots, m_n$.



Określamy teraz przez indukcję, korzystając z twierdzenia Rungego, ciąg funkcji $W_n(z)$ holomorficznych w obszarze G w ten sposób, by

$$1^\circ |W_n(z)| \leq 1/2^n \text{ dla } z \in G - H^{(n)},$$

2° $|W_1(z) + W_2(z) + \dots + W_n(z)|$ było $< 1/2^n$ dla $z = p_j^{(n)}$, zaś $> 2^n$ dla $z = q_j^{(n)}$, gdzie $j = 1, 2, \dots, m_n$.

Szereg $\sum_n W_n(z)$ jest wówczas niemal jednostajnie zbieżny w G , a suma jego jest funkcją holomorficzną o żądanej własności (funkcja ta nie posiada granicy, skończonej ani nieskończonej, w żadnym punkcie brzegu R obszaru G przy zbliżaniu się z wnętrza tego obszaru).

7. Niech H oznacza przestrzeń, której elementami są funkcje holomorficzne w dowolnie ustalonym obszarze G (Rozdz. II, § 7, ćw. 3).

Niech $K_1, K_2, \dots, K_n$ będzie dowolnym układem kół o środkach na brzegu obszaru G , zaś ε dowolną liczbą dodatnią. Niech $\mathfrak{P}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji $P(z)$ holomorficznych w G i takich, że dla każdego $j = 1, 2, \dots, n$ zbiór $K_j \cap G$ zawiera punkty, w których $|P(z)| < \varepsilon$, jak również punkty, w których $|P(z)| > 1/\varepsilon$. Dowieść, że funkcje holomorficzne w G , które nie należą do $\mathfrak{P}$, tworzą w przestrzeni H zbiór domknięty nigdzie gęsty.

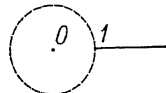
Wynioskować stąd (nie opierając się na wyniku ćw. 6), że istnieją funkcje holomorficzne w obszarze G , dla których G jest obszarem naturalnym, i że własność tę posiadają nawet wszystkie funkcje holomorficzne w G z wyjątkiem co najwyżej funkcji tworzących w H zbiór pierwszej kategorii (Mazurkiewicz). (Por. analogiczne ćwiczenia 6-8, Rozdz. IV, § 2.)

8. Przykład funkcji analitycznej dwuwartościowej takiej, że każdy punkt pewnego obszaru jest środkiem tylko jednego elementu funkcji (por. ćw. 2).

Niech H oznacza sumę półpłaszczyzny $\Im z < 0$ oraz koła $|z| < 1$ (rys. 1) i niech $\Phi(z)$ będzie funkcją holomorficzną, dla której H jest obszarem naturalnym (por. ćw. 6). Niech, z drugiej strony, G oznacza obszar dwuspójny, jaki otrzymujemy usuwając z płaszczyzny punkt 0 oraz przedział $[1, +\infty]$ osi rzeczywistej (rys. 2). Obszar G jest wówczas obszarem naturalnym funkcji $\Phi(\sqrt{z})$. Nadto każdy punkt obszaru G należący do koła $K(0; 1)$ jest środkiem dwu różnych elementów tej funkcji, podczas gdy każdy z pozostałych punktów obszaru G jest środkiem tylko jednego elementu.



1.



2.

§ 5. Odwrocenie funkcji analitycznej. Element analityczny $R = \{F, z_0\}$ nazywać będziemy *odwracalnym*, jeżeli funkcja $F(z)$ przyjmuje w punkcie z_0 wartość $w_0 = F(z_0)$ jednokrotnie (Rozdz. III, § 8). Funkcja $F(z)$ posiada wówczas w otoczeniu punktu z_0 funkcję odwrotną $F^{-1}(w)$ (Rozdz. III, tw. 12.4); element $\{F^{-1}, w_0\}$ nazywać będziemy *elementem odwrotnym* albo *odwroceniem* elementu $R = \{F, z_0\}$ i oznaczać przez R^{-1} .

Łatwo zauważyć, że każda funkcja analityczna $\mathfrak{R}$, która nie jest stałą, posiada elementy odwracalne. W samej rzeczy, jeżeli $\{F, z_0\}$

jest dowolnym elementem funkcji $\mathfrak{R}$, wówczas (por. Rozdz. III, tw. 12.1) w każdym punkcie $z_1 \neq z_0$ dostatecznie bliskim punktu z_0 funkcja $F(z)$ przyjmuje swą wartość $F(z_1)$ jednokrotnie, a przeto odpowiedni element $\{F, z_1\}$, który — jako przedłużenie bezpośrednie elementu $\{F, z_0\}$ — należy również do $\mathfrak{R}$, jest elementem odwracalnym.

(5.1) Jeżeli $R_1 = \{F, z_1\}$ oraz $R_2 = \{\Phi, z_2\}$ są elementami odwracalnymi funkcji $\mathfrak{R}$, wówczas połączyć je można przy pomocy łańcucha złożonego wyłącznie z elementami odwracalnymi.

Dowód. Niech $R(t) = \{F^{(t)}, z(t)\}$, gdzie $a \leq t \leq b$, będzie łańcuchem elementów, łączącym element R_2 z R_1 . Oznaczmy przez T zbiór tych wartości t przedziału $[a, b]$, dla których element $R(t)$ daje się połączyć z $R_1 = R(a)$ łańcuchem elementów odwracalnych. Niech t_0 będzie górnym kresem zbioru T i niech K_0 oznacza otoczenie punktu $z(t_0)$ dostatecznie małe na to, by funkcja $F^{(t_0)}(z)$ przyjmowała wszędzie w K_0 , z pominięciem co najwyżej punktu $z(t_0)$, każdą swą wartość jednokrotnie. Niech dalej t_1 będzie punktem zbioru T , dla którego $z(t_1) \in K_0$ i dla którego $R(t_1)$ jest bezpośrednim przedłużeniem elementu $R(t_0)$; wreszcie niech C_1 oznacza krzywą, wzdłuż której łańcuch elementów odwracalnych łączy element $R(t_1)$ z elementem $R(a)$.

Zauważmy teraz, iż $t_0 = b$. Istotnie, przypuszczając, iż $t_0 < b$, moglibyśmy wyznaczyć pewien punkt t_2 tak, by $t_0 < t_2 < b$, $z(t_2) \in K_0$, $z(t_2) \neq z(t_0)$ oraz by element $R(t_2)$ był bezpośrednim przedłużeniem elementu $R(t_0)$. Niech C_2 oznacza dowolną krzywą przebiegającą w K_0 i łączącą punkty $z(t_1)$, $z(t_2)$. Ponadto, jeżeli $z(t_1) \neq z(t_0)$, moglibyśmy założyć, że krzywa ta nie zawiera punktu $z(t_0)$. Przedłużając wówczas element $R(a)$ wzdłuż krzywej $C_1 + C_2$, otrzymalibyśmy łańcuch elementów odwracalnych, łączący element $R(t_2)$ z $R(a)$. Mielibyśmy więc $t_2 \in T$, co jest niemożliwe z uwagi na $t_0 < t_2$.

Zatem $t_0 = b$. Funkcja $F^{(b)}(z) = \Phi(z)$ we wszystkich punktach odcinka $[z(t_1), z(b)] \subset K_0$ przyjmuje więc wartości swe tylko jednokrotnie i przedłużenia bezpośrednie elementu $R_2 = R(b)$ o środkach na tym odcinku są wszystkie odwracalne. Przedłużając tedy element $R(a)$ wzdłuż krzywej $C_1 + [z(t_1), z(b)]$, otrzymujemy łańcuch elementów odwracalnych, łączący element $R_2 = R(b)$ z elementem $R_1 = R(a)$.

(5.2) Jeżeli P_1 i P_2 są dwoma elementami analitycznymi odwracalnymi funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$, wówczas elementy P_1^{-1} oraz P_2^{-1} należą również do jednej funkcji analitycznej.

Dowód. W myśl tw. 5.1 elementy P_1 i P_2 połączyć możemy łańcuchem elementów odwracalnych $P(t) = \{F^{(t)}, z(t)\}$, gdzie $a \leq t \leq b$. Niech $\zeta(t) = F^{(t)}(z(t))$ i niech $H^{(t)}(\zeta)$ oznacza odwrócenie funkcji $F^{(t)}(z)$ w otoczeniu punktu $z(t)$. Elementy $P^{-1}(t) = \{H^{(t)}, \zeta(t)\}$, gdzie $a \leq t \leq b$, tworzą wówczas łańcuch wzdłuż krzywej $\zeta = \zeta(t)$, łączący elementy $P^{-1}(a) = P_1^{-1}$ oraz $P^{-1}(b) = P_2^{-1}$. Elementy te należą więc do jednej funkcji analitycznej.

Z tw. 5.2 wynika, że wszystkie odwrócenia elementów odwracalnych funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$ wyznaczają jedną i tę samą funkcję analityczną. Funkcję tę nazywamy *odwróceniem funkcji* $\mathfrak{P}$ i oznaczamy przez $\mathfrak{P}^{-1}$. Spostrzegamy od razu, iż funkcja $\mathfrak{P}$ jest z kolei odwróceniem funkcji $\mathfrak{P}^{-1}$. Poza odwróceniami elementów funkcji $\mathfrak{P}$ funkcja $\mathfrak{P}^{-1}$ może zawierać jeszcze i inne elementy, elementy te jednak, jak łatwo zauważyć, nie mogą być odwracalne. Np. odwróceniem funkcji $\sqrt{z}$ (której wszystkie elementy są odwracalne) jest funkcja ζ^2 , której elementy o środku 0 i ∞ nie są odwróceniami żadnego elementu funkcji $\sqrt{z}$ i zresztą w ogóle nie są odwracalne.

ĆWICZENIA. 1. Wyróżnić elementy nieodwracalne funkcji $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$, $\tanh z$. Sprawdzić, że funkcje $\log z$ (§ 4, str. 242), $\operatorname{arccos} z$, $\operatorname{arcsin} z$, $\operatorname{arctg} z$ (§ 4, ów. 1) są odpowiednio odwróceniami funkcji $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$, $\tanh z$.

2. Na to, aby odwrócenie funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$ było funkcją jednowartościową (t. j. meromorficzną, p. § 4, str. 241), konieczne jest i wystarcza, aby funkcja $\mathfrak{P}$ była jednoznaczowa.

§ 6. Funkcje analityczne dowolnie przedłużalne w obszarze. Jeżeli każdy element funkcji analitycznej w obszarze G posiada przedłużenie wzdłuż każdej krzywej, wychodzącej z jego środka i przebiegającej w G , wówczas mówimy, iż funkcja jest *dowolnie przedłużalna* w G ; podobnie naturalny takiej funkcji pokrywa się oczywiście z całym obszarem G , zaś każdy punkt tego obszaru jest środkiem tej samej (skończonej lub nieskończonej) ilości elementów funkcji.

Najprostszym przykładem funkcji analitycznych dowolnie przedłużalnych w obszarze G są funkcje meromorficzne w G (por. § 4). Przykładem funkcji analitycznych wielowartościowych dowolnie przedłużalnych w obszarze są funkcje $\log z$, $\sqrt{z}$ i t. p. (§ 4, str. 242) w obszarze, który otrzymujemy usuwając z płaszczyzny punkty 0 i ∞ . Dwuspójność tego obszaru gra tu rolę istotną, gdyż, jak wynika z twierdzenia o monodromii (p. dalej, tw. 6.3), każda funkcja analityczna dowolnie przedłużalna w obszarze jednospójnym jest w tym obszarze jednowartościowa.

(6.1) *Jeżeli funkcja analityczna $\mathfrak{P}$ w obszarze G jest dowolnie przedłużalna w tym obszarze, wówczas, wyjąwszy przypadek, gdy G jest płaszczyzną, koło każdego elementu funkcji $\mathfrak{P}$ posiada, wewnątrz lub na brzegu, punkty dopełnienia obszaru G .*

Jeżeli G jest płaszczyzną, t. j. $OG=0$, wówczas kołem każdego elementu funkcji $\mathfrak{P}$ jest cała płaszczyzna.

Dowód. Niech $P_0 = \{F, a\}$ będzie dowolnym elementem funkcji $\mathfrak{P}$ i niech K będzie kołem tego elementu. Przypuśćmy, iż K nie jest całą płaszczyzną oraz iż $\bar{K} \subset G$. Niech b będzie dowolnym punktem okręgu koła K , zaś $z = g(t)$, gdzie $0 \leq t \leq 1$, $g(0) = a$, $g(1) = b$, dowolną krzywą, łączącą punkty a i b oraz przebiegającą dla $0 \leq t < 1$ wewnątrz koła K . Przedłużając wzdłuż tej krzywej element P_0 , otrzymujemy łańcuch elementów $P(t)$ taki, iż (por. tw. 3.1 i 3.2) $P(t) = \{F_a, g(t)\}$ dla $0 \leq t < 1$; w szczególności $P(0) = P_0$. Elementy $P(t)$ są więc dla $t \neq 1$ bezpośrednimi przedłużeniami elementu P_0 . Z drugiej strony, dla wartości t dostatecznie bliskich 1 element $P(t)$ jest bezpośrednim przedłużeniem elementu $P(1)$ o środku b , a koło elementu $P(t)$ zawiera punkt b . Każdy zatem punkt b na okręgu koła elementu P_0 byłby punktem przedłużalności tego elementu, co sprzeczne jest z tw. 2.1.

Wynika stąd natychmiast twierdzenie o monodromii dla koła:

(6.2) *Jeżeli funkcja analityczna $\mathfrak{P}$ w kole K jest w tym kole dowolnie przedłużalna, wówczas jest funkcją jednowartościową, t. j. meromorficzną. Jeżeli więc K jest całą płaszczyzną, wówczas $\mathfrak{P}$ jest funkcją wymierną.*

Dowód. Niech a będzie środkiem koła K i niech $P_0 = \{F, a\}$ będzie elementem funkcji $\mathfrak{P}$. Z tw. 6.1 wynika, że koło K zawiera się w kole elementu P_0 , a więc że funkcja $F_a(z)$ jest określona w całym kole K i meromorficzna w K . Tym samym (por. tw. 3.1 i 3.2) funkcja $\mathfrak{P}$ posiada dla każdego punktu $b \in K$ dokładnie jeden element o środku w tym punkcie, mianowicie $\{F_a, b\}$, i jest przeto funkcją jednowartościową, co należało udowodnić.

Niech $W(z)$ będzie funkcją meromorficzną jednoznacznie odwracalną w obszarze G i niech $H = W(G)$. Każdemu elementowi $P = \{F, w_0\}$, gdzie $w_0 \in H$, przyporządkować wówczas możemy jednoznacznie element $\{FW, z_0\}$, gdzie $z_0 = W^{-1}(w_0) \in G$; oznaczmy ten element przez PW . Mamy oczywiście $P = PW \cdot W^{-1}$ i ustalona odpowiedniość między elementami o środkach w obszarach H i G jest jedno-jednoznaczna.

Jeżeli $\{P(t)\}$ jest łańcuchem elementów wzdłuż pewnej krzywej $w=g(t)$ ($a \leq t \leq b$) przebiegającej w obszarze H , wówczas elementy $P(t)W$ tworzą łańcuch elementów w G wzdłuż krzywej $z=W^{-1}(g(t))$, gdzie $a \leq t \leq b$. Jeżeli więc element P_2 jest przedłużeniem w H elementu P_1 , wówczas element P_2W jest przedłużeniem w G elementu P_1W ; to samo zachodzi, gdy przestawimy obszary H i G , zastępując jednocześnie W przez W^{-1} . Jeżeli przeto $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną w obszarze H , wówczas zbiór wszystkich elementów postaci PW , gdzie $P \in \mathfrak{P}$, jest pewną funkcją analityczną w G . Oznaczmy tę funkcję przez $\mathfrak{P}W$. Jeżeli funkcja $\mathfrak{P}$ jest dowolnie przedłużalna w H , wówczas funkcja $\mathfrak{P}W$ jest dowolnie przedłużalna w G ; jeżeli funkcja $\mathfrak{P}$ jest jednowartościowa w H , wówczas funkcja $\mathfrak{P}W$ jest jednowartościowa w G . Twierdzenia odwrotne są oczywiście prawdziwe, ponieważ $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}W \cdot W^{-1}$.

Niech teraz H będzie obszarem jednospójnym, a $\mathfrak{P}$ funkcją analityczną dowolnie przedłużalną w H . Za obszar G przyjmujemy koło otwarte, a za $W(z)$ funkcję meromorficzną przekształcającą wiernie (p. Rozdz. V, tw. 6.14) koło G na obszar H . (Gdyby obszar H był całą płaszczyzną lub płaszczyzną bez jednego punktu, wówczas za G należałoby przyjąć również całą płaszczyznę lub płaszczyznę otwartą.) Funkcja $\mathfrak{P}W$ przedłuża się wówczas dowolnie w kole G i, w myśl tw. 6.2, jest jednowartościowa w G . Tym samym funkcja $\mathfrak{P}$ jest jednowartościowa w H . Otrzymujemy w ten sposób ogólne twierdzenie o monodromii:

(6.3) *Funkcja analityczna w obszarze jednospójnym H , dowolnie przedłużalna w tym obszarze, jest w obszarze H jednowartościowa.*

Twierdzenie 6.3 uważać można za uogólnienie twierdzeń 3.1 i 3.2, Rozdz. IV, o istnieniu gałęzi jednoznacznych logarytmu w obszarach jednospójnych. Zarazem twierdzenie o monodromii zawiera pewną definicję analitycznej jednospójności obszaru. Mianowicie: *Na to, aby obszar G był jednospójny, konieczne jest i dostateczne, aby każda funkcja analityczna w obszarze G , dowolnie przedłużalna w G , była w obszarze tym jednowartościowa (kryterium Radó)*. Konieczność warunku zawarta jest bezpośrednio w tw. 6.3. W celu udowodnienia dostateczności założmy, iż obszar G spełniający powyższy warunek nie jest jednospójny. Stosując ewentualnie inwersję i przesunięcie, założymy, iż punkty 0 i ∞ należą do różnych składowych dopełnienia obszaru G . Każdy element funkcji logz przedłuża się wówczas dowolnie w obszarze G , a jednak wyznacza w tym obszarze funkcję wielowartościową (por. Rozdz. IV, tw. 10.3).

ĆWICZENIE. 1. Niech G będzie płaszczyzną pozbawioną punktów 0 i ∞ , a $Z \subset G$ dowolnym zbiorem przeliczalnym. Zbudować funkcję analityczną $\mathfrak{P}$ dowolnie przedłużalną w G i taką, że: 1° każdy punkt zbioru Z jest środkiem nieskończenie wielu elementów funkcji $\mathfrak{P}$, 2° w każdym punkcie zbioru Z funkcja $\mathfrak{P}$ przyjmuje tylko skończoną ilość wartości różnych (por. § 4, ćw. 3).

§ 7. Twierdzenie Poincarégo-Volterry. Twierdzenie to orzeka, iż

(7.1) *Jeżeli $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną, wówczas każdy punkt płaszczyzny jest środkiem co najwyżej przeliczalnej ilości elementów funkcji $\mathfrak{P}$. Funkcja analityczna przyjmować przeto może w każdym punkcie co najwyżej przeliczalną ilość wartości różnych.*

Dowód opiera się na paru prostych rozumowaniach pomocniczych. Mówimy, iż ciąg skończony elementów $P_1, P_2, \dots, P_n$ łączy elementy analityczne A i B , jeżeli w ciągu tym każdy następny element jest bezpośrednim przedłużeniem poprzedniego i jeżeli elementy skrajne P_1 i P_n są odpowiednio bezpośrednimi przedłużeniami elementów A i B .

(7.2) *Jeżeli jeden z dwu elementów B i C jest bezpośrednim przedłużeniem drugiego i jeżeli element B można połączyć z pewnym elementem A przez ciąg skończony elementów o środkach wymiennych, wówczas element C można również połączyć z A przez ciąg skończony elementów o środkach wymiennych.*

Dowód. Niech $P_1, P_2, \dots, P_n$ będzie ciągiem elementów o środkach wymiennych, łączącym elementy A i B . Niech $p_1, p_2, \dots, p_n$ będą środkami elementów $P_1, P_2, \dots, P_n$, a $K_1, K_2, \dots, K_n, K_B, K_C$ odpowiednio kołami elementów $P_1, P_2, \dots, P_n, B, C$. Niech wreszcie $B = \{F, b\}$. Możemy przyjąć, iż $F(z)$ jest funkcją meromorficzną w całym kole K_B .

Założmy, iż C jest bezpośrednim przedłużeniem elementu B . Zatem $C = \{F, c\}$, gdzie $c \in K_B$. Ponadto również $P_n = \{F, p_n\}$, przy czym $p_n \in K_B$. Możemy więc określić w kole K_B ciąg skończony kół $K_{n+1}, K_{n+2}, \dots, K_{n+m}$ o środkach wymiennych $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_{n+m}$, w ten sposób by $p_{n+j} \in K_{n+j-1}$ dla $j=1, 2, \dots, m$ oraz by $p_{n+m} \in K_C$. Przyjmując $P_{n+j} = \{F, p_{n+j}\}$ dla $j=1, 2, \dots, m$, widzimy natychmiast, iż ciąg $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, P_{n+m}$ jest żądanym ciągiem elementów o środkach wymiennych, łączącym elementy A i C .

Ten sam rezultat, przy pomocy podobnego rozumowania, otrzymujemy, zakładając, iż element B jest bezpośrednim przedłużeniem elementu C .

(7.3) *Każde dwa elementy funkcji analitycznej połączyć można ciągiem skończonym elementów o środkach wymiennych.*

Dowód. Niech A i B będą dwoma elementami funkcji analitycznej $\mathfrak{P}$. Istnieje tedy (por. §§ 4, 3) łańcuch elementów $P(t)$, gdzie $a \leq t \leq b$, taki, iż $P(a)=A$ oraz $P(b)=B$. Niech T oznacza zbiór tych wartości t przedziału $[a, b]$, dla których element $P(t)$ daje się połączyć z $A=P(a)$ przez ciąg skończony elementów o środkach wymiernych. Niech t_0 będzie kresem górnym zbioru T . Ponieważ dla wszystkich wartości t przedziału $[a, b]$ dostatecznie bliskich punktu t_0 wszystkie elementy $P(t)$ są bezpośrednimi przedłużeniami elementu $P(t_0)$, przeto z tw. 7.2 wynika przede wszystkim, iż $t_0 \in T$, a następnie, iż wszystkie punkty t przedziału $[a, b]$ dostatecznie bliskie punktu t_0 należą również do T . Ponieważ t_0 jest górnym kresem zbioru T , zatem $t_0=b$, a tym samym $b \in T$, co należało udowodnić.

Przechodząc teraz do dowodu tw. 7.1, weźmy pod uwagę dowolną funkcję analityczną $\mathfrak{P}$ i ustalmy pewien jej element P_0 . Każdemu elementowi P funkcji $\mathfrak{P}$ możemy w myśl tw. 7.3 przyporządkować ciąg skończony punktów wymiernych taki, iż istnieje ciąg elementów o środkach w tych punktach, łączący elementy P_0 i P . Widoczne jest, iż różnym elementom P funkcji $\mathfrak{P}$ o wspólnym środku odpowiadać będą w ten sposób różne ciągi punktów wymiernych. Ponieważ zaś zbiór wszystkich skończonych ciągów punktów wymiernych jest przeliczalny, zatem zbiór wszystkich elementów funkcji $\mathfrak{P}$ o wspólnym środku jest również co najwyżej przeliczalny.

*§ 8. Funkcja analityczna jako przestrzeń abstrakcyjna.

Niech E oznacza zbiór wszystkich elementów analitycznych. Zbiór ten uważać możemy za pewną przestrzeń abstrakcyjną, rozumiejąc przez *otoczenie* (p. Wstęp, § 3) zbiór elementów, wyznaczonych w punktach dowolnego koła $K(a; r)$ przez dowolną funkcję meromorficzną w tym kole. Innymi słowy, otoczeniem w przestrzeni E jest każda funkcja analityczna, dowolnie przedłużalna w jakimkolwiek kole. Koło to nazywamy *kołem* rozważanego *otoczenia*. Otoczenie o kole wymiernym (Wstęp, § 8, str. 21) nazywać będziemy, dla krótkości, *otoczeniem wymiernym*.

Łatwo zauważyć, iż określona w powyższy sposób rodzina otoczeń dla przestrzeni E spełnia warunki postulatów I i II Wstępu, § 3.

Funkcje analityczne (rozumiane jako zbiory elementów analitycznych) pokrywają się ze składowymi przestrzeni E , a funkcje analityczne w obszarze G (§ 4) — ze składowymi zbioru w przestrzeni E , utworzonego z elementów o środkach należących do G . Dowód nie przedstawia trudności i może być pozostawiony czytelnikowi.

Każda funkcja analityczna $\mathfrak{P}$ może być sama także uważana za przestrzeń abstrakcyjną. Rodzinę otoczeń dla $\mathfrak{P}$ tworzą te wszystkie otoczenia przestrzeni E , które składają się z elementów funkcji $\mathfrak{P}$. Na mocy twierdzenia Poincarégo-Volterry (tw. 7.1) w rodzinie tej otoczenia wymierne stanowią mnogość przeliczalną, która zarazem, jak stwierdzamy łatwo, jest ośrodkiem przeliczalnym rodziny otoczeń (Wstęp, § 3). Zatem:

(8.1) *Funkcja analityczna, uważana za przestrzeń abstrakcyjną, jest przestrzenią ośrodkową. Elementy tej funkcji o środkach wymiernych tworzą w niej zbiór przeliczalny wszędzie gęsty.*

Jeżeli $F(z)$ jest funkcją meromorficzną w kole $K(a; r)$, wówczas, przyporządkowując każdemu elementowi $\{F, z\}$, gdzie $z \in K(a; r)$, punkt $(z-a)/r$, gdy $a \neq \infty$, a punkt $1/rz$, gdy $a = \infty$, otrzymujemy odwzorowanie homeomorficzne zbioru tych elementów na koło $K(0; 1)$. Innymi słowy:

(8.2) *Każda funkcja analityczna jednowartościowa $\mathfrak{P}$ w kole $K(a; r)$, uważana za przestrzeń abstrakcyjną, jest homeomorficzna z kołem $K(0; 1)$; otrzymujemy mianowicie odpowiedniość homeomorficzną, przyporządkowując elementowi funkcji $\mathfrak{P}$ o środku $z \in K(a; r)$ punkt $(z-a)/r$ lub punkt $1/rz$ koła $K(0; 1)$ zależnie od tego, czy $a \neq \infty$, czy $a = \infty$.*

Odpowiedniość tę między elementami funkcji $\mathfrak{P}$ a punktami koła $K(0; 1)$ nazywać będziemy *kanoniczną*.

Tw. 8.2 możemy również tak sformułować: *każde otoczenie w przestrzeni elementów analitycznych jest homeomorficzne z kołem*.

ĆWICZENIE. 1. Każda funkcja analityczna posiadać może co najwyżej przeliczalną ilość elementów nieodwracalnych (§ 5, str. 244) i, jeżeli funkcję analityczną uważać za przestrzeń abstrakcyjną, to zbiór tych elementów jest zbiorem odosobnionym domkniętym.

§ 9. Funkcje analityczne w otoczeniu pierścieniowym punktu. Niech $W(z)$ będzie funkcją meromorficzną w obszarze G , nie redukującą się do stałej, i niech $H=W(G)$. Jeżeli z_0 jest punktem obszaru G , a $P=\{F, w_0\}$ dowolnym elementem analitycznym o środku $w_0=W(z_0) \in H$, wówczas element $\{FW, z_0\}$ nazywać będziemy *elementem PW* . Znakowanie to wprowadzone już było w § 6 dla funkcji $W(z)$ jednoznacznie odwracalnej. Jeżeli funkcja $W(z)$ nie jest jednoznacznie odwracalna, to istnieje na ogół wiele punktów $z_0 \in G$, spełniających warunek $w_0=W(z_0)$ dla ustalonego punktu $w_0 \in H$, i przeto dla danego elementu $P=\{F, w_0\}$ istnieje na ogół wiele elementów PW .

Jeżeli $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną w H , wówczas każdy element PW , gdzie $P \in \mathfrak{P}$, wyznacza pewną funkcję analityczną w G . Otrzymane w ten sposób funkcje nazywamy *funkcjami* $\mathfrak{P}W$.

Jeżeli funkcja $W(z)$ jest jednoznacznie odwrotna, to istnieje dla danej funkcji $\mathfrak{P}$ tylko jedna (por. §6, str. 247) funkcja $\mathfrak{P}W$ i funkcja ta jest zbiorem wszystkich elementów postaci PW , gdzie $P \in \mathfrak{P}$. Jeżeli jednak funkcja $W(z)$ nie jest jednoznacznie odwrotna, wówczas funkcji $\mathfrak{P}W$ może być wiele i funkcje te mogą zawierać elementy niekoniecznie postaci PW . Przyjmując np. za H i G płaszczyznę, $W(z) = z^2$ oraz $\mathfrak{P}(z) = \sqrt{z}$, otrzymujemy jako $\mathfrak{P}W$ funkcje liniowe z oraz $-z$.

(9.1) Jeżeli $W(z)$ jest funkcją meromorficzną, nie redukującą się do stałej w obszarze G , i jeżeli $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną, dowolnie przedłużalną w obszarze $H = W(G)$, wówczas każda z funkcji $\mathfrak{P}W$ jest dowolnie przedłużalna w obszarze G i utworzona jest wyłącznie z elementów PW , gdzie $P \in \mathfrak{P}$.

Dowód. Wystarczy dowieść, iż każdy element postaci P_0W , gdzie $P_0 \in \mathfrak{P}$, przedłuża się wzdłuż każdej krzywej, wychodzącej z jego środka i przebiegającej w G , oraz iż otrzymane przedłużenie wzdłuż tej krzywej jest również elementem postaci P_0W . Niech w tym celu $P_0 = \{F, w_0\}$, gdzie $w_0 = W(z_0)$ i $z_0 \in G$, będzie elementem funkcji $\mathfrak{P}$ i niech $R_0 = \{F^0W, z_0\}$. Niech $z = g(t)$ ($a \leq t \leq b$) będzie krzywą w G , wychodzącą z punktu z_0 . Krzywa $w = W(g(t))$ ($a \leq t \leq b$) przebiega w H , wychodząc z punktu w_0 . Istnieje więc łańcuch elementów $P(t) = \{F^{(t)}, W(g(t))\}$ funkcji $\mathfrak{P}$ wzdłuż krzywej $w = W(g(t))$ taki, że $P(a) = P_0$. Elementy $R(t) = \{F^{(t)}W, g(t)\}$ tworzą wówczas łańcuch wzdłuż krzywej $z = g(t)$, przy czym $R(a) = \{F^{(a)}W, g(a)\} = \{F^0W, z_0\} = R_0$; z drugiej strony $R(b) = \{F^{(b)}W, g(b)\}$ jest elementem $P(b)W$, gdzie $P(b) \in \mathfrak{P}$, co należało udowodnić.

Jeżeli $W(z)$ jest funkcją meromorficzną w obszarze H , wówczas każdemu elementowi analitycznemu $P = \{F, a\}$ takiemu, iż $F(a) \in H$, przyporządkować możemy element $\{WF, a\}$, który będziemy oznaczali przez WP . Jeżeli $\mathfrak{P}$ jest funkcją analityczną w obszarze G , której wszystkie wartości należą do obszaru H , wówczas każdemu elementowi $P \in \mathfrak{P}$ odpowiada element WP . Widoczne jest, iż, jeżeli P_1 i P_2 są elementami funkcji $\mathfrak{P}$, przy czym P_2 jest przedłużeniem elementu P_1 wzdłuż pewnej krzywej przebiegającej w G , wówczas WP_2 jest przedłużeniem elementu WP_1 wzdłuż tej samej krzywej.

Wszystkie więc elementy WP , gdzie $P \in \mathfrak{P}$, wyznaczają w G tę samą funkcję analityczną, oznaczając ją będziemy przez $W\mathfrak{P}$. Widoczne jest, iż, jeżeli funkcja $\mathfrak{P}$ jest dowolnie przedłużalna w obszarze G , wówczas funkcja $W\mathfrak{P}$ jest także dowolnie przedłużalna w G i jest zbiorem wszystkich elementów postaci WP , gdzie $P \in \mathfrak{P}$.

Wreszcie, jeżeli $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{R}$ są dwiema funkcjami analitycznymi, zaś $P = \{F, a\}$, $R = \{\Phi, b\}$ odpowiednio elementami tych dwu funkcji takimi, że $\Phi(b) = a$, wówczas funkcja $F\Phi(z)$ jest meromorficzna w otoczeniu punktu b i element $\{F\Phi, b\}$ wyznacza pewną funkcję analityczną. Otrzymane w ten sposób z funkcji $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{R}$ funkcje analityczne nazywamy będziemy *funkcjami* $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$. Oczywiście może się zdarzyć, że funkcje $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{R}$ nie posiadają w ogóle elementów P i R , spełniających wyżej podany warunek; wtedy nie istnieje żadna funkcja $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$.

(9.2) Jeżeli funkcja $\mathfrak{R}$, analityczna w otoczeniu pierścieniowym $P = P(a; 0, r)$ pewnego punktu a , jest dowolnie przedłużalna w tym otoczeniu i jeżeli pewien element R funkcji $\mathfrak{R}$ jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż krzywej $p \cdot C$, gdzie p jest liczbą całkowitą, zaś C oznacza okrąg o środku a , wychodzący ze środka elementu R , wówczas funkcja $\mathfrak{R}$ jest co najwyżej p -wartościowa i jest postaci $\Phi(\sqrt[p]{z-a})$ (lub postaci $\Phi(1/\sqrt[p]{z})$ jeżeli $a = \infty$), gdzie $\Phi(z)$ jest funkcją meromorficzną w pierścieniu $P(0; 0, r^{1/p})$.

Dowód. Możemy założyć oczywiście, iż $a = 0$ (stosując przesunięcie lub, jeżeli $a = \infty$, inwersję). Możemy przyjąć także (stosując ewentualnie obrót), iż $R = \{F, r_0\}$, gdzie $0 < r_0 < r$, a więc, iż $C = C(0; r_0)$.

1° Rozważymy najpierw przypadek $p = 1$. Niech C_1 oraz C_2 oznaczają odpowiednio górny i dolny półokrąg okręgu C . Ponieważ element R jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż C , przeto posiada to samo przedłużenie wzdłuż każdego z półokręgów C_1 i C_2 ; niech $R^* = \{F^*, -r_0\}$ będzie tym przedłużeniem.

Oznaczmy teraz przez G_1 oraz G_2 obszary jednospójne, jakie otrzymujemy z otoczenia pierścieniowego P , usuwając zeń odpowiednio odcinki $[-r_0, 0]$ i $[0, r_0]$ osi urojonej; przez H i H^* oznaczmy części pierścienia P położone na prawo i na lewo od tej osi.

W myśl twierdzenia o monodromii (tw. 6.3) element R wyznacza w obszarach G_1 i G_2 funkcje meromorficzne; oznaczmy je odpowiednio przez $F_1(z)$ i $F_2(z)$. Mamy więc $F_1(z) = F_2(z) = F(z)$ w otoczeniu punktu r_0 i $F_1(z) = F_2(z) = F^*(z)$ w otoczeniu punktu $-r_0$.

Ponieważ $r_0 \in H \subset G_1 \cdot G_2$ i $-r_0 \in H^* \subset G_1 \cdot G_2$, przeto $F_1(z) = F_2(z)$ zarówno w obszarze H jak i w obszarze H^* , a więc w całym zbiorze otwartym $G_1 \cdot G_2$. Funkcje $F_1(z)$ i $F_2(z)$ wyznaczają tedy łącznie w całym obszarze $P = G_1 + G_2$ jedną funkcję meromorficzną. Funkcja ta, jako identyczna z $F(z)$ w otoczeniu punktu r_0 , pokrywa się z funkcją $\mathfrak{R}$, jako wyznaczoną w obszarze P przez element $R = \{F, r_0\}$.

²⁰ Niech teraz p będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią i niech $W(z) = z^p$. Funkcja $W(z)$ przekształca pierścien $P_1 = P(0; 0, r^{1/p})$ na pierścien $P = P(0; 0, r)$, a w szczególności okrąg $C_1 = C(0; r_0^{1/p})$ na pC . Element $\{FW, r_0^{1/p}\}$ przechodzi tedy w siebie przy przedłużeniu wzdłuż okręgu C_1 , a z drugiej strony (por. tw. 9.1) wyznacza w pierścieniu P_1 funkcję analityczną dowolnie przedłużalną. Na mocy ¹⁰ (dla przypadku $p = 1$) funkcja ta jest pewną funkcją meromorficzną $\Phi(z)$ w pierścieniu P_1 . Mamy zatem w otoczeniu punktu $r_0^{1/p}$ tożsamościowo $F(z^p) = FW(z) = \Phi(z)$, a więc $F(z) = \Phi[G(z)]$ w otoczeniu punktu r_0 , gdzie $G(z)$ oznacza tę gałąź jednoznaczna $\sqrt[p]{z}$ w otoczeniu punktu r_0 , która przyjmuje wartość $r_0^{1/p}$ w tym punkcie. Tym samym funkcja analityczna $\mathfrak{R}$, wyznaczona przez element $R = \{F, r_0\}$, jest identyczna z funkcją $\Phi(\sqrt[p]{z})$, wyznaczoną przez element $\{\Phi G, r_0\}$.

(9.3) Każda funkcja $\mathfrak{R}$ analityczna, dowolnie przedłużalna i n -wartościowa (gdzie n jest liczbą skończoną) w pierścieniu $P = P(a; 0, r)$, jest postaci $\Phi(\sqrt[n]{z-a})$ jeżeli $a \neq \infty$, lub postaci $\Phi(1/\sqrt[n]{z})$ jeżeli $a = \infty$, gdzie $\Phi(z)$ jest funkcją meromorficzną w pierścieniu $P(0; 0, r^{1/n})$.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia poprzedniego przyjąć można, iż $a = 0$. Niech $R = \{F, r_0\}$ będzie dowolnym elementem funkcji $\mathfrak{R}$ o środku w punkcie $r_0 > 0$ i niech $C = C(0; r_0)$. Ponieważ funkcja $\mathfrak{R}$ posiada tylko n elementów różnych o środku r_0 , przeto istnieje taka liczba $p \leq n$, iż element R przechodzi w siebie przy przedłużeniu wzdłuż krzywej $p \cdot C$. Funkcja $\mathfrak{R}$ jest więc postaci $\Phi(\sqrt[p]{z})$, gdzie $\Phi(z)$ jest pewną funkcją meromorficzną w pierścieniu $P(0; 0, r^{1/p})$. Otrzymujemy zarazem, iż $p = n$: istotnie, mamy z jednej strony $p \leq n$, a z drugiej $p \geq n$, ponieważ funkcja $\Phi(\sqrt[p]{z})$ jest co najwyżej p -wartościowa.

ĆWICZENIE. 1. Każda funkcja analityczna dowolnie przedłużalna w otoczeniu pierścieniowym $P(0; 0, r)$ punktu 0 jest postaci $\Phi(\log z)$, gdzie $\Phi(w)$ jest funkcją meromorficzną w półpłaszczyźnie $\Re w < \text{Log } r$.

*** § 10. Funkcja analityczna w otoczeniu pierścieniowym jako przestrzeń abstrakcyjna.** W § 8 ustaliliśmy pewną (kanoniczną) odpowiedniość homeomorficzną między punktami koła jednostkowego a elementami funkcji analitycznej dowolnie przedłużalnej (a więc jednowartościowej) w pewnym kole. Analogiczny wynik otrzymać możemy dla funkcji analitycznej skończenie wartościowej i dowolnie przedłużalnej w otoczeniu pierścieniowym $P(a; 0, r)$.

Przyjmijmy dla prostoty $a = 0$ i weźmy pod uwagę funkcję $\sqrt[n]{z}$ w pierścieniu $P(0; 0, r)$. Przyporządkowując elementowi $\{G, z\}$ tej funkcji punkt $G(z)/r_0^{1/n}$, otrzymujemy, jak spostrzega się natychmiast, odpowiedniość homeomorficzną między elementami funkcji analitycznej $\sqrt[n]{z}$ w $P(0; 0, r)$ a punktami pierścienia $P(0; 0, 1)$. W odpowiedzi tej punktowi $z \in P(0; 0, 1)$ przyporządkowany jest element funkcji $\sqrt[n]{z}$ o środku $z = r_0^{1/n}$.

Weźmy teraz pod uwagę jakąkolwiek funkcję $\mathfrak{R}$ analityczną dowolnie przedłużalną i n -wartościową w pierścieniu $P(0; 0, r)$. Funkcja $\mathfrak{R}$ jest w myśl tw. 9.3 zbiorem elementów postaci $\{\Phi G, z\}$, gdzie Φ jest pewną funkcją meromorficzną w pierścieniu $P(0; 0, r^{1/n})$, a $\{G, z\}$ dowolnym elementem funkcji $\sqrt[n]{z}$. Przyporządkujemy każdemu elementowi $\{G, z\}$ funkcji $\sqrt[n]{z}$ element $\{\Phi G, z\}$ i pokażemy, że odpowiedniość ta jest jedno-jednoznaczna, t. j. że jeżeli elementy $\{G_1, z_1\}$ i $\{G_2, z_2\}$ funkcji $\sqrt[n]{z}$ w kole $K(0; r)$ są różne, wówczas różne są także elementy $\{\Phi G_1, z_1\}$, $\{\Phi G_2, z_2\}$. Jest to oczywiste, gdy $z_1 \neq z_2$. Jeżeli natomiast $z_1 = z_2$, wówczas, jak widzimy natychmiast, w otoczeniu punktu z_1 mamy tożsamościowo $G_2(z) = G_1(z) \cdot \exp(2\pi k i/n)$, gdzie $0 < k < n$ ze względu na $G_1(z) \neq G_2(z)$. Tym samym element $\{G_1, z_1\}$ przechodzi w element $\{G_2, z_1\}$, a element $\{\Phi G_1, z_1\}$ w element $\{\Phi G_2, z_1\}$ przy przedłużeniu wzdłuż krzywej $k \cdot C$, gdzie $C = C(0; |z_1|)$. Gdyby więc elementy $\{\Phi G_2, z_1\}$ i $\{\Phi G_1, z_1\}$ były identyczne, wówczas na mocy tw. 9.2 funkcja $\mathfrak{R}$ byłaby co najwyżej k -wartościowa, co sprzeczne jest z tym, iż $k < n$.

Ustalona więc odpowiedniość między elementami funkcji $\mathfrak{R}(z)$ oraz $\sqrt[n]{z}$ jest jedno-jednoznaczna i co więcej, jak sprawdzamy łatwo, odwracalnie ciągła (Wstęp, § 7). Z drugiej strony ustaliliśmy już wyżej pewną odpowiedniość homeomorficzną między elementami funkcji

analitycznej $\sqrt[n]{z}$ w pierścieniu $P(0;0,r)$ a punktami pierścienia $P(0;0,1)$. Otrzymujemy w ten sposób homeomorfizm między funkcją $\Re$ a pierścieniem $P(0;0,1)$. W rezultacie:

(10.1) *Miedzy punktami pierścienia $P(0;0,1)$ a elementami funkcji analitycznej $\Re$, dowolnie przedłużalnej i n -wartościowej w pierścieniu $P(a;0,r)$, gdzie $r \neq \infty$, ustalić można odpowiedniość homeomorficzną w ten sposób, iż punktowi z odpowiada element funkcji o środku $z = a + r_3^n$ jeżeli $a \neq \infty$, lub o środku $1/r_3^n$ jeżeli $a = \infty$.*

§ 11. Punkty krytyczne. Jeżeli $\Re$ jest funkcją analityczną w obszarze G , zaś a dowolnym punktem tego obszaru, wówczas na to, aby w każdym otoczeniu tego punktu istniała gałąź (p. § 4, str. 239) funkcji $\Re$, konieczne jest i wystarcza, aby punkt ten leżał wewnątrz lub na brzegu podobszaru naturalnego. Punkt $a \in G$, leżący wewnątrz lub na brzegu tego podobszaru, nazywać się będzie *punktem zwyczajnym* funkcji $\Re$, jeżeli posiada takie otoczenie, w którym każda gałąź funkcji $\Re$ jest dowolnie przedłużalna i przeto w myśl twierdzenia o monodromii (tw. 6.2) jest funkcją meromorficzną; w przeciwnym razie punkt a nazywać się będzie *punktem krytycznym* funkcji $\Re$. Jak wynika natychmiast z tej definicji, każdy punkt zwyczajny funkcji analitycznej leży w jej podobszarze naturalnym, a więc tym samym każdy punkt brzegu tego podobszaru, należący do obszaru G funkcji, jest jej punktem krytycznym. Punkt zwyczajny funkcji analitycznej $\Re$ nazywa się jej *biegunem*, jeżeli jedna przynajmniej gałąź tej funkcji, dowolnie przedłużalna (a więc meromorficzna) w pewnym otoczeniu tego punktu, posiada w tym punkcie biegun.

Zbiór punktów krytycznych funkcji analitycznej w obszarze G jest, oczywiście, domknięty w tym obszarze. Punkty odosobnione tego zbioru nazywają się *punktami krytycznymi odosobnionymi*.

(11.1) *Jeżeli $\Re$ jest funkcją analityczną w obszarze G , wówczas każdy element R tej funkcji przedłuża się wzdłuż każdej krzywej C , wychodzącej z jego środka, przebiegającej w G i nie zawierającej punktów krytycznych funkcji.*

Na to więc, aby funkcja $\Re$ była w obszarze swym dowolnie przedłużalna, konieczne jest i wystarcza, aby nie posiadała punktów krytycznych.

Dowód. Niech krzywa C dana będzie przez równanie $z=z(t)$, gdzie $a \leq t \leq b$. Oznaczmy przez T zbiór wszystkich punktów τ przedziału $[a,b]$ takich, iż element R jest przedłużalny wzdłuż łuku $[a,\tau]$ krzywej C (t. zn. wzdłuż krzywej $z=z(t)$, gdzie $a \leq t \leq \tau$). Niech t_0 będzie kresem górnym zbioru T . Punkt $z(t_0)$ leży więc na pewno wewnątrz lub na brzegu podobszaru naturalnego funkcji; a że krzywa C nie zawiera punktów krytycznych, przeto punkt $z(t_0)$ posiada otoczenie K , w którym każdy element funkcji $\Re$ jest dowolnie przedłużalny. Niech t_1 będzie dowolnym punktem zbioru T takim, by łuk $[t_1,t_0]$ krzywej C zawierał się całkowicie w K , i niech R_1 będzie przedłużeniem elementu R wzdłuż łuku $[a,t_1]$ tej krzywej. Przedłużając element R_1 wzdłuż łuku $[t_1,t_0]$, otrzymujemy więc przedłużenie elementu R wzdłuż całego łuku $[a,t_0]$, skąd wynika, iż $t_0 \in T$. Mamy przy tym $t_0 = b$; w przeciwnym bowiem razie moglibyśmy w ten sam sposób otrzymać przedłużenie elementu R wzdłuż pewnego łuku $[a,t_2]$ krzywej C , obierając punkt t_2 tak, by $t_0 < t_2 < b$ oraz by łuk $[t_0,t_2]$ krzywej C zawierał się w kole K ; mielibyśmy więc $t_0 < t_2 \in T$, co sprzeczne jest z definicją punktu t_0 . Zatem $b = t_0 \in T$, a więc element R jest przedłużalny wzdłuż całej krzywej C .

Z twierdzenia 11.1 wynika natychmiast, iż:

(11.2) *Na to, aby punkt krytyczny funkcji analitycznej był punktem krytycznym odosobnionym, konieczne jest i wystarcza, aby posiadał otoczenie pierścieniowe, w którym każda gałąź funkcji jest dowolnie przedłużalna.*

(11.3) *Na to, aby zbiór punktów krytycznych funkcji $\Re$ analitycznej w obszarze G był odosobniony, konieczne jest i wystarcza, aby każdy element tej funkcji przedłużał się wzdłuż każdej krzywej, wychodzącej z jego środka, zawartej w G i nie zawierającej punktów pewnego zbioru E odosobnionego i domkniętego w obszarze G .*

Jeżeli warunek ten jest spełniony, wówczas funkcja $\Re$ nie zawiera punktów krytycznych poza zbiorem E .

ĆWICZENIA. 1. Funkcja analityczna w obszarze G posiadać może w tym obszarze co najwyżej przeliczalną mnogość biegunów.

2. Niech G oznacza płaszczyznę pozbawioną punktów 0 i ∞ , i niech $B \subset G$ będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym. Zbudować funkcję analityczną dowolnie przedłużalną w G , która posiada biegun w każdym punkcie zbioru B .

(Funkcję taką zbudować można dla dowolnego obszaru G o stopniu spójności ≥ 2 .)

§ 12. Punkty krytyczne algebraiczne. Niech a będzie punktem leżącym wewnątrz lub na brzegu obszaru naturalnego funkcji analitycznej $\mathfrak{R}$. Liczbę A (skończoną lub nieskończoną) nazywamy *granicą* funkcji $\mathfrak{R}$ w punkcie a , jeżeli każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\eta > 0$, iż wszystkie wartości funkcji $\mathfrak{R}$ w kole $K(a; \eta)$ należą do koła $K(A; \varepsilon)$.

Punkt krytyczny odosobniony a funkcji analitycznej $\mathfrak{R}$ nazywa się *punktem krytycznym algebraicznym*, jeżeli w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu a każda gałąź funkcji $\mathfrak{R}$ jest skończenie wartościowa i posiada granicę w tym punkcie. Punkty krytyczne odosobnione, które nie są algebraiczne, nazywają się *przestępnymi*.

(12.1) *Na to, aby punkt krytyczny a funkcji analitycznej $\mathfrak{R}$ był algebraiczny, konieczne jest i wystarcza, aby w pewnym otoczeniu pierścieniowym $P(a; 0, r)$ tego punktu każda gałąź funkcji $\mathfrak{R}$ była postaci $\Phi(\sqrt[n]{z-a})$ jeżeli $a \neq \infty$, lub postaci $\Phi(1/\sqrt[n]{z})$ jeżeli $a = \infty$, gdzie Φ jest funkcją meromorficzną w kole $K(0; r^{1/n})$.*

Dowód. Dostateczność warunku jest widoczna. W celu udowodnienia konieczności przyjmijmy, dla prostoty, $a=0$ i zauważmy, iż gdy punkt 0 jest punktem krytycznym algebraicznym funkcji $\mathfrak{R}$, to w myśl tw. 9.3 istnieje takie jego otoczenie pierścieniowe $P(0; 0, r)$, w którym każda gałąź funkcji $\mathfrak{R}$ jest postaci $\Phi(\sqrt[n]{z})$, gdzie $\Phi(z)$ jest funkcją meromorficzną w $P(0; 0, r^{1/n})$. Skoro gałąź $\Phi(\sqrt[n]{z})$ posiada granicę w punkcie 0, przeto funkcja $\Phi(z)$ posiada także granicę (skończoną lub nieskończoną) dla $z \rightarrow 0$ i po stosownym określeniu jej wartości w punkcie 0 jest meromorficzna również w tym punkcie (por. Rozdz. III, § 6, str. 140).

Funkcja analityczna w całej płaszczyźnie, skończenie wartościowa i nie posiadająca punktów krytycznych poza algebraicznymi, nazywa się *algebraiczną*. Ponieważ zbiór odosobniony i domknięty w całej płaszczyźnie jest skończony, przeto funkcja algebraiczna mieć może tylko skończoną ilość punktów krytycznych. Funkcja analityczna (w całej płaszczyźnie), która nie jest algebraiczna, nazywa się *przestępną*.

Funkcja $\sqrt[n]{z}$ posiada tylko dwa punkty krytyczne: 0 i ∞ , obydwa algebraiczne. Funkcja $\log z$ posiada również tylko dwa punkty krytyczne: 0 i ∞ , ale obydwa przestępne. Funkcja $1/\log z$ posiada trzy punkty krytyczne: algebraiczny w punkcie 1 oraz przestępne w punktach 0 i ∞ .

ĆWICZENIA. 1. Wyróżnić bieguny i punkty krytyczne (algebraiczne, przestępne) funkcji analitycznych $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\log(\operatorname{arctg} z)$, $\sqrt[n]{\log(\operatorname{arctg} z)}$.

2. Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji analitycznej, którą otrzymujemy z przedłużenia funkcji holomorficznej

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

gdzie $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w całej płaszczyźnie otwartej, nie znikającą tożsamościowo (por. § 2, ćw. 2).

§ 13. Twierdzenia pomocnicze algebry. W dalszym ciągu korzystać będziemy z paru podstawowych twierdzeń algebry, dotyczących rozkładania wielomianów na czynniki. Rozważać będziemy wielomiany względem w postaci

$$(13.1) \quad T(z, w) = A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \dots + A_n(z)$$

o współczynnikach $A_j(z)$ meromorficznych względem z w pewnym ustalonym obszarze G . Jeżeli $A_0(z)$ nie znika tożsamościowo, wówczas wielomian (13.1) nazywa się *wielomianem n -tego stopnia*. Jeżeli $T(z, w) = Q(z, w) \cdot P(z, w)$, gdzie $Q(z, w)$ i $P(z, w)$ są również wielomianami rozważanej postaci, wówczas każdy z wielomianów $Q(z, w)$ i $P(z, w)$ nazywać się będzie *podzielnikiem* wielomianu $T(z, w)$. Jeżeli wielomian stopnia n posiada podzielnik stopnia dodatniego, mniejszego od n , wówczas wielomian ten nazywa się *rozkładalnym*. Wielomiany mające wspólny podzielnik stopnia dodatniego nazywają się *spółdzielniymi*.

(13.2) *Jeżeli dla $z \in G$ mamy tożsamościowo*

$$(13.3) \quad w^n + A_1(z)w^{n-1} + \dots + A_n(z) = \\ = [w^m + B_1(z)w^{m-1} + \dots + B_m(z)][w^p + C_1(z)w^{p-1} + \dots + C_p(z)],$$

gdzie $A_j(z)$, $B_j(z)$ i $C_j(z)$ są funkcjami meromorficznymi w obszarze G , wówczas współczynniki $B_j(z)$ i $C_j(z)$ nie posiadają biegunów poza biegunami współczynników $A_j(z)$.

Dowód. Założmy, iż punkt $a \neq \infty$ jest biegunem jednej z funkcji $B_j(z)$ lub $C_j(z)$, lecz nie jest biegunem żadnego ze współczynników $A_j(z)$. Niech k i h oznaczają odpowiednio najwyższe krotności¹⁾ punktu a jako bieguna funkcji $B_j(z)$ i funkcji $C_j(z)$. Niech

$$B_j = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k B_j(z), \quad C_j = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^h C_j(z),$$

¹⁾ Jeżeli funkcja jest holomorficzna w pewnym punkcie, wówczas przez jego krotność jako bieguna tej funkcji rozumiemy liczbę 0.

gdzie dla symetrii przyjęliśmy $B_0(z) = C_0(z) = 1$. Mnożąc obydwie strony równości (13.3) przez $(z-a)^{h+k}$, otrzymujemy tożsamościowo

$$(B_0 w^m + B_1 w^{m-1} + \dots + B_m) (C_0 w^p + C_1 w^{p-1} + \dots + C_p) = 0,$$

co jest jednak niemożliwe, ponieważ nie wszystkie współczynniki B_j , ani nie wszystkie współczynniki C_j , znikają jednocześnie. Analogicznie rozumiemy, jeżeli $a = \infty$.

Weźmy teraz pod uwagę dwa wielomiany:

$$T_1(z, w) = A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \dots + A_n(z),$$

$$T_2(z, w) = B_0(z)w^m + B_1(z)w^{m-1} + \dots + B_m(z),$$

o współczynnikach meromorficznych w obszarze G . Załóżmy, że $n \geq m > 0$. Stosując do wielomianów tych algorytm Euklidesa (kolejne dzielenie), wyznaczamy dwa ciągi skończone wielomianów, $Q_1, Q_2, \dots, Q_{p-2}$ oraz $T_3, T_4, \dots, T_p$, spełniające warunki następujące:

$$(13.4) \quad T_1 = Q_1 T_2 + T_3, \quad T_2 = Q_2 T_3 + T_4, \quad \dots, \quad T_{p-2} = Q_{p-2} T_{p-1} + T_p,$$

(13.5) stopnie wielomianów $T_2, T_3, \dots, T_p$ tworzą ciąg malejący i T_p jest stopnia 0 względem w , a więc jest funkcją jednej tylko zmiennej z .

Widoczne jest, iż wielomiany Q_j i T_j są określone jednoznacznie przez te warunki; współczynniki ich wyrażają się wymiennie przez współczynniki wielomianów $T_1(z, w)$ i $T_2(z, w)$, a więc są również meromorficzne względem z w obszarze G ; w szczególności funkcją meromorficzną w G jest „ostatnia reszta“ $T_p = T_p(z)$. Oznaczmy przez E zbiór (odosobniony i domknięty w G) punktów, w których współczynniki wielomianów $T_j(z, w)$ i $Q_j(z, w)$ posiadają bieguny.

Stwierdzamy natychmiast, iż jeżeli ostatnia reszta $T_p(z)$ znika dla pewnej wartości $z = z_0 \in G - E$, wówczas oznaczając przez w_0 pierwiastek równania $T_{p-1}(z_0, w) = 0$, mamy bezpośrednio z (13.4)

$$T_1(z_0, w_0) = T_2(z_0, w_0) = \dots = T_{p-1}(z_0, w_0) = 0,$$

co znaczy, iż równania $T_1(z_0, w) = 0$ i $T_2(z_0, w) = 0$ posiadają wspólny pierwiastek $w = w_0$. Odwrotnie, jeżeli w_0 jest wspólnym pierwiastkiem tych dwu równań (przy $z_0 \in G - E$), wówczas z (13.4) otrzymujemy w analogiczny sposób, iż $T_p(z_0) = 0$. Z drugiej strony, albo 1° zbiór pierwiastków funkcji $T_p(z)$ jest odosobniony i domknięty w G , albo 2° funkcja ta tożsamościowo znika.

W przypadku 2°, jak widzimy bezpośrednio z (13.4), przedostatnia reszta $T_{p-1}(z, w)$, która jest wielomianem stopnia > 0 względem w , jest wspólnym podzielnikiem wielomianów $T_1(z, w)$ i $T_2(z, w)$.

Jeżeli więc przy tym wielomian $T_{p-1}(z, w)$ jest (względem w) stopnia $< n$, to wielomian $T_1(z, w)$ jest na pewno rozkładalny; jeżeli natomiast $T_{p-1}(z, w)$ jest stopnia n , wówczas stwierdzamy, że $p-1=2$, $n=m$, i wielomiany $T_1(z, w)$ oraz $T_2(z, w) = T_{p-1}(z, w)$ różnią się wobec tego co najwyżej czynnikiem zależnym tylko od z .

Streszczając powyższe wyniki, otrzymujemy twierdzenie:

(13.6) Jeżeli $T_1(z, w)$ i $T_2(z, w)$ są wielomianami stopni odpowiednio n i m względem w , o współczynnikach meromorficznych względem z w obszarze G , i $n \geq m > 0$, wówczas bądź 1° dla żadnej wartości z , poza pewnym zbiorem odosobnionym i domkniętym w G , wielomiany $T_1(z, w)$ i $T_2(z, w)$ nie mają wspólnych pierwiastków, bądź też 2° wielomiany te są spółdzielne i przeto albo różnią się co najwyżej czynnikiem niezależnym od w , albo wielomian $T_1(z, w)$ jest rozkładalny.

Przyjmując w twierdzeniu powyższym $T_1(z, w) = T(z, w)$ oraz $T_2(z, w) = T'_w(z, w)$ i uwzględniając banalny przypadek, gdy $T(z, w)$ jest stopnia 1 względem w , otrzymujemy wniosek następujący:

(13.7) Jeżeli $T(z, w)$ jest wielomianem stopnia dodatniego względem w , o współczynnikach meromorficznych w obszarze G względem z , wówczas albo dla żadnej wartości z , poza co najwyżej zbiorem odosobnionym i domkniętym w G , wielomian $T(z, w)$ nie posiada pierwiastków wielokrotnych, albo wielomian ten jest rozkładalny.

§ 14. Funkcje o punktach krytycznych algebraicznych.

W Rozdz. III, § 14, rozważaliśmy istnienie funkcji $w = W(z)$ wyznaczonych przez równanie postaci $F(z, w) = 0$, gdzie $F(z, w)$ jest funkcją holomorficzną zmiennych z i w . Rozważania te miały jednak charakter wyłącznie lokalny i ograniczały się do stwierdzenia istnienia, w otoczeniu pewnego punktu z_0 , funkcji holomorficznej $W(z)$ przyjmującej w tym punkcie daną z góry wartość w_0 . Pojęcie funkcji analitycznej pozwala w pewnych przypadkach połączyć te rozwiązania lokalne w jedną całość.

Weźmy pod uwagę dla dowolnego obszaru G równanie postaci

$$(14.1) \quad T(z, w) = w^n + A_1(z)w^{n-1} + \dots + A_n(z) = 0,$$

w którym współczynniki $A_j(z)$ są funkcjami meromorficznymi w G .

Powiemy, iż element analityczny $R = \{W, z_0\}$, gdzie $z_0 \in G$, spełnia to równanie, jeżeli w pewnym otoczeniu punktu z_0 mamy tożsamościowo $T(z, W(z)) = 0$. O funkcji $\Re$ analitycznej w G powiemy, iż spełnia równanie (14.1), jeżeli każdy jej element spełnia to równanie; widoczne jest, iż na to, aby funkcja $\Re$ spełniała równanie (14.1), wystarczy już, aby spełniał je jeden jakikolwiek element tej funkcji.

(14.2) Każde równanie postaci (14.1) spełnia w obszarze G przynajmniej jedna funkcja analityczna.

Każda funkcja $R(z)$ spełniająca równanie (14.1) jest co najwyżej n -wartościowa i nie posiada biegunów ani punktów krytycznych poza tymi punktami z , które są biegunami współczynników równania lub dla których równanie to posiada pierwiastki wielokrotne; wszystkie punkty krytyczne funkcji R są przy tym algebraiczne.

Dowód. Niech J oznacza zbiór tych punktów $z \in G$, które bądź są biegunami współczynników równania (14.1), bądź dla których równanie to posiada pierwiastki wielokrotne. Możemy przyjąć z uwagi na tw.13.2, iż wielomian po lewej stronie równania (14.1) jest nierozkładalny, a więc w myśl tw.13.7 iż zbiór J jest odosobniony. Niech $z_0 \in G - J$.

Na mocy tw.14.6, Rozdz.III, istnieje z uwagi na twierdzenie podstawowe algebry (tw.5.12, Rozdz.II) w otoczeniu punktu z_0 funkcja holomorphyzna $W(z)$ taka, iż tożsamościowo $T(z, W(z)) = 0$. Element $\{W, z_0\}$, a więc i wyznaczona przezeń w obszarze G funkcja analityczna, spełniają wówczas równanie (14.1).

Niech z drugiej strony R będzie funkcją analityczną w G , spełniającą to równanie. Weźmy pod uwagę dowolny punkt $a \in G - J$. Istnieje dokładnie n różnych wartości w spełniających równanie $T(a, w) = 0$. Niech $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą tymi wartościami i niech $W_1(z), W_2(z), \dots, W_n(z)$ będą funkcjami holomorphyznymi w pewnym otoczeniu $K \subset G - J$ punktu a , takimi, że $W_j(a) = w_j$ dla $j=1, 2, \dots, n$ oraz $T(z, W_j(z)) = 0$ tożsamościowo w otoczeniu punktu a (por. Rozdz.III, tw.14.6). Każdy element analityczny $R \in R$ o środku $z \in K$ jest postaci $\{W_j, z\}$, gdzie $j=1, 2, \dots, n$, i wyznacza przeto w kole K funkcję analityczną jednowartościową, identyczną z odpowiednią funkcją holomorphyzną $W_j(z)$. Wszystkie zatem punkty krytyczne i bieguny funkcji R w G zawarte są w zbiorze odosobnionym J . Nadto, ponieważ każdy element funkcji R o środku $a \in G - J$ pokrywa się z jednym z elementów $\{W_j, a\}$, więc funkcja ta jest co najwyżej n -wartościowa.

Weźmy z kolei pod uwagę dowolny punkt b obszaru G . Niech PCG będzie otoczeniem pierścieniowym tego punktu, nie zawierającym punktów krytycznych ani biegunów funkcji R . Każda zatem gałąź tej funkcji w otoczeniu P przedłuża się dowolnie w tym otoczeniu i w myśl tw.9.3 jest postaci $F(\sqrt[n]{z-b})$, gdzie $F(z)$ jest funkcją holomorphyzną w otoczeniu pierścieniowym punktu 0 (jeżeli $b=\infty$,

wówczas $z-b$ należy zastąpić oczywiście przez $1/z$). Pokażemy, iż funkcja $F(z)$ ma co najwyżej biegun w punkcie 0. Istotnie, mnożąc obydwie strony równania (14.1) przez stosowną potęgę dwumianu $z-b$, możemy napisać równanie to w postaci

$$T_1(z, w) = (z-b)^q T(z, w) = B_0(z)w^n + B_1(z)w^{n-1} + \dots + B_n(z) = 0,$$

o współczynnikach $B_j(z) = (z-b)^q A_j(z)$, holomorphyznych w otoczeniu punktu b i nie znikających jednocześnie w tym punkcie (jeżeli b nie jest biegunem żadnego ze współczynników $A_j(z)$, wówczas przyjmujemy $q=0$). W pewnym dostatecznie małym otoczeniu pierścieniowym punktu 0 mamy tożsamościowo $T(b+z^n, F(z))=0$, a więc również $T_1(b+z^n, F(z))=0$. Jeżeli tedy w oznacza dowolną skończoną wartość graniczną funkcji $F(z)$, gdy $z \rightarrow 0$, wówczas $T_1(b, w)=0$, t.j. w spełnia równanie stopnia co najwyżej n , o współczynnikach nie znikających tożsamościowo. Funkcja $F(z)$ posiada tedy tylko skończoną ilość różnych wartości granicznych w punkcie 0 i w myśl tw. Casoratiego-Weierstrassa (Rozdz.III, tw.6.1) posiada w tym punkcie osobliwość pozorną lub biegun. Tym samym każdy punkt $b \in G$ jest dla funkcji R punktem zwyczajnym lub punktem krytycznym algebraicznym.

Twierdzeniem odwrotnym względem (14.2) jest twierdzenie następujące:

(14.3) Jeżeli R jest funkcją analityczną n -wartościową w obszarze G , posiadającą tylko algebraiczne punkty krytyczne, wówczas istnieje jedno i tylko jedno równanie n -tego stopnia postaci (14.1), które funkcja ta spełnia. Lewa strona tego równania jest wielomianem nierozkładalnym, którego współczynniki nie posiadają biegunów poza biegunami i punktami krytycznymi funkcji R .

Dowód. Niech L będzie zbiorem punktów krytycznych funkcji R . Oznaczmy dla każdego punktu $a \in G - L$ przez $\{W_a^{(1)}, a\}, \{W_a^{(2)}, a\}, \dots, \{W_a^{(n)}, a\}$ elementy funkcji R o środku a ; niech K_a będzie dowolnie ustalonym kołem o środku a , zawartym w obszarze $G - L$ i jednocześnie w kołach wszystkich elementów $\{W_a^{(j)}, a\}$ dla $j=1, 2, \dots, n$.

Niech dalej $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie dowolnym wielomianem symetrycznym względem zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i niech

$$\tilde{S}_a(z) = S(W_a^{(1)}(z), W_a^{(2)}(z), \dots, W_a^{(n)}(z))$$

dla $z \in K_a$. Powiadamy, iż określone w ten sposób w kołach K_a funkcje meromorphyzne $\tilde{S}_a(z)$ wyznaczają łącznie pewną funkcję meromorphyzną w całym obszarze $G - L$.

Wystarczy w tym celu pokazać, iż jeżeli $c \in K_a \cdot K_b$, gdzie a i b są punktami obszaru $G-L$, wówczas $\tilde{S}_a(c) = \tilde{S}_b(c)$. Istotnie, skoro $c \in K_a$, przeto elementy analityczne $\{W_a^{(j)}, c\}$, gdzie $j=1, 2, \dots, n$, stanowią układ n różnych elementów funkcji $\mathfrak{R}$; podobnie, elementy $\{W_b^{(j)}, c\}$ tworzą również układ n różnych elementów funkcji $\mathfrak{R}$ o tym samym środku c . Dwa te układy mogą się więc różnić co najwyżej porządkiem i ze względu na symetrię funkcji $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mamy $\tilde{S}_a(c) = S(W_a^{(1)}(c), \dots, W_a^{(n)}(c)) = S(W_b^{(1)}(c), \dots, W_b^{(n)}(c)) = \tilde{S}_b(c)$.

Przyjmując tedy $\tilde{S}(z) = \tilde{S}_z(z)$ dla $z \in G-L$, otrzymujemy funkcję $\tilde{S}(z)$, meromorficzną w obszarze $G-L$, która w obszarze tym posiadać może bieguny w tych tylko punktach, które są biegunami funkcji $\mathfrak{R}$. Nadto, ponieważ funkcja $\mathfrak{R}$ nie posiada punktów krytycznych przestępnych, przeto każda gałąź tej funkcji w otoczeniu pierścieniowym dowolnego punktu $z_0 \in G$ posiada w tym punkcie oznaczoną granicę; tym samym, jak łatwo spostrzec, istnieje również granica funkcji $\tilde{S}(z)$, gdy $z \rightarrow z_0$. Żaden zatem z punktów $z_0 \in G$ nie jest punktem istotnie osobliwym funkcji $\tilde{S}(z)$ i funkcja ta jest meromorficzna w całym obszarze G .

Wyniki powyższe zastosujemy w szczególności do podstawowych funkcji symetrycznych $S^{(j)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, t. j. do współczynników wielomianu względem w

$$(w-x_1)(w-x_2)\dots(w-x_n) = w^n + S^{(1)}(x_1, \dots, x_n)w^{n-1} + \dots + S^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Funkcje te wyznaczają w ustalony wyżej sposób w obszarze G n funkcji meromorficznych; oznaczmy je przez $\tilde{S}^{(1)}, \tilde{S}^{(2)}, \dots, \tilde{S}^{(n)}$. Stwierdzamy natychmiast, iż funkcja $\mathfrak{R}(z)$ spełnia równanie względem w

$$(14.4) \quad w^n + \tilde{S}^{(1)}(z)w^{n-1} + \dots + \tilde{S}^{(n)}(z) = 0$$

o współczynnikach meromorficznych w obszarze G i nie posiadających punktów osobliwych w tym obszarze poza co najwyżej biegunami i punktami krytycznymi funkcji $\mathfrak{R}$.

Pozostaje okazać, iż równanie (14.4) jest jedynym równaniem postaci (14.1), jakie funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia, oraz iż wielomian po stronie lewej tego równania jest nierozkładalny. W tym celu załóżmy, iż funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia równanie stopnia n względem w , którego lewa strona jest iloczynem dwu wielomianów $T_1(z, w)$ i $T_2(z, w)$ stopni $< n$ względem w . Funkcja $\mathfrak{R}$ spełniałaby wówczas przynajmniej jedno

z równań $T_1(z, w) = 0$ lub $T_2(z, w) = 0$, co oczywiście jest niemożliwe, ponieważ funkcja ta jest z założenia n -wartościowa. Jeżeli tedy funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia równanie (14.1), wówczas lewa strona tego równania jest wielomianem względem w nierozkładalnym. Zarazem, z uwagi na tw. 13.6, wynika stąd, iż istnieć może co najwyżej jedno równanie postaci (14.1), które dana funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia.

Tw. 14.2 możemy uzupełnić jeszcze, jak następuje:

(14.5) *Jeżeli lewa strona równania (14.1) jest wielomianem nierozkładalnym, wówczas istnieje tylko jedna funkcja analityczna w obszarze G , która spełnia to równanie.*

Dowód. Przypuśćmy, iż istnieją dwie funkcje analityczne, p -wartościowa funkcja $\mathfrak{R}_1$ oraz q -wartościowa funkcja $\mathfrak{R}_2$, spełniające równanie (14.1). Na mocy tw. 14.2 i 14.3 funkcja $\mathfrak{R}_1$ spełnia pewne równanie stopnia p względem w

$$(14.6) \quad w^p + B_1(z)w^{p-1} + \dots + B_p(z) = 0$$

o współczynnikach meromorficznych w obszarze G . Lewe strony równań (14.1) i (14.6) są tedy na mocy tw. 13.6 wielomianami spółdzielnymi, a że $p < p+q \leq n$, przeto lewa strona równania (14.1) byłaby wielomianem rozkładalnym.

§ 15. Funkcje algebraiczne. W myśl tw. 14.3 każda funkcja algebraiczna (por. § 12) spełnia pewne równanie postaci (14.1) o współczynnikach $A_j(z)$, które są meromorficzne w całej płaszczyźnie, a więc (por. Rozdz. III, tw. 7.3) są funkcjami wymiernymi. Równanie to możemy tedy napisać w postaci

$$(15.1) \quad B_0(z)w^n + B_1(z)w^{n-1} + \dots + B_n(z) = 0,$$

gdzie $B_j(z)$ są wielomianami. Odwrotnie, jeżeli funkcja analityczna $\mathfrak{R}$ spełnia równanie tej postaci, wówczas na mocy tw. 14.2 funkcja ta jest skończenie wartościowa i w całej płaszczyźnie nie posiada innych punktów krytycznych aniżeli algebraiczne; poza tym, w myśl tegoż twierdzenia funkcja $\mathfrak{R}$ nie posiada punktów krytycznych ani biegunów poza tymi wartościami z , dla których bądź równanie (15.1) ma pierwiastki wielokrotne, bądź współczynnik $B_0(z)$ znika, i ewentualnie jeszcze poza punktem ∞ , o ile stopień współczynnika $B_0(z)$ względem z jest mniejszy od stopnia przynajmniej jednego z pozostałych współczynników $B_1(z), \dots, B_n(z)$.

Streszczając, otrzymujemy następujące twierdzenie, które zawiera w sobie nową definicję funkcji algebraicznej:

(15.2) *Na to, aby funkcja analityczna $\mathfrak{R}$ była algebraiczna, konieczne jest i wystarcza, aby spełniała równanie postaci (15.1) o współczynnikach, które są wielomianami względem zmiennej z .*

Równanie (15.1) możemy uporządkować wedle potęg zmiennej z i wówczas współczynnikami będą pewne wielomiany względem w . Z tw. 15.2 wynika więc, iż

(15.3) *Odwroćcie funkcji algebraicznej jest również funkcją algebraiczną.*

Widzimy także, że

(15.4) *Każda funkcja algebraiczna przyjmować może każdą swą wartość tylko skończoną ilość razy.*

ĆWICZENIA. 1. Niech $\mathfrak{F}$ będzie funkcją analityczną, którą otrzymujemy, przedłużając na całą płaszczyznę funkcję holomorficzną $F(z)$, daną w półpłaszczyźnie $\Im z > 0$ przez wzór (Rozdz. V, § 8, str. 225)

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\delta}{(\delta^2 - a^2)^{2/3}} \quad (a > 0).$$

Sprawdzić, że jedynymi punktami krytycznymi funkcji $\mathfrak{F}$ są: $-a$, a i ∞ ; punkty te są punktami krytycznymi algebraicznymi.

Pokazać, że funkcja odwrotna $\mathfrak{F}^{-1}$ (p. § 5) jest funkcją meromorficzną w całej płaszczyźnie otwartej (z punktem krytycznym przestępnym w nieskończoności); płaszczyznę otwartą pokryć można siatką trójkątów równobocznych nie zachodzących na siebie i takich, że: 1^o $\mathfrak{F}^{-1}$ przekształca każdy z trójkątów siatki w sposób jedno-jednoznaczny bądź na półpłaszczyznę $\Im z \geq 0$, bądź na półpłaszczyznę $\Im z \leq 0$, 2^o w wierzchołkach każdego z trójkątów siatki funkcja $\mathfrak{F}^{-1}$ przyjmuje odpowiednio wartości $-a$, a oraz ∞ .

Wywnioskować stąd, że funkcja $\mathfrak{F}^{-1}$, a więc tym samym i funkcja $\mathfrak{F}$, nie jest algebraiczna (jakkolwiek funkcja $\mathfrak{F}$ posiada tylko skończoną ilość punktów krytycznych, które wszystkie są algebraiczne).

Analogicznie zbadać funkcję analityczną $\mathfrak{B}$, którą otrzymujemy przez przedłużenie funkcji holomorficznej $W(z)$ danej w kole $K(0;1)$ przez wzór (Rozdz. V, § 8, ów. 3)

$$W(z) = \int_0^z \frac{d\delta}{(1 - \delta^6)^{1/3}}.$$

[Wsk. Przy przedłużaniu funkcji F i W zastosować zasadę odbicia Schwarza — odpowiednio względem prostej i względem okręgu.]

2. Jeżeli funkcja analityczna $\mathfrak{B}$ ma tylko dwa punkty krytyczne i punkty te są algebraiczne, wówczas funkcja $\mathfrak{B}$ jest algebraiczna (twierdzenie przestaje być prawdziwe, gdy ilość punktów krytycznych przewyższa 2; por. ów. 1).

3. Obszarem naturalnym funkcji algebraicznej $w = W(z)$ spełniającej równanie $w^3 + w + z = 0$ jest cała płaszczyzna, funkcja ta wszakże nie jest jedno-wartościowa. (Przykład ten wskazuje, iż w twierdzeniu o monodromii 6.3 nie wystarczyłoby założenie, że obszarem naturalnym funkcji jest obszar jednospójny.) (Kierst).

[Wsk. Zauważyć, że lewa strona równania jest wielomianem nierozkładalnym i że dla żadnego z równanie nie posiada pierwiastka trzykrotnego.]

***§ 16. Powierzchnie Riemanna.** Nazywać będziemy *elementem riemannowskim* o środku a i promieniu r (lub o *pierścieniu* $P(a; 0, r)$) każdą funkcję $\mathfrak{R}$ analityczną w pierścieniu $P(a; 0, r)$, która:

1^o jest dowolnie przedłużalna w $P(a; 0, r)$,

2^o w punkcie a posiada punkt zwyczajny lub co najwyżej punkt krytyczny algebraiczny,

3^o nie daje się rozszerzyć z zachowaniem warunku 1^o na żaden większy pierścień $P(a; 0, \varrho)$, t. zn. nie jest gałęzią żadnej funkcji dowolnie przedłużalnej w pierścieniu $P(a; 0, \varrho)$ dla $\varrho > r$.

Do *elementów riemannowskich* o środku a zaliczamy także funkcje analityczne dowolnie przedłużalne w obszarze, jaki otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny punkt a .

Element riemannowski nazywać się będzie *gładkim*, jeżeli jest funkcją jednowartościową, a *rozgałęzionym* w przypadku przeciwnym. Jeżeli element riemannowski jest funkcją n -wartościową, wówczas liczbę $n-1$ nazywać będziemy *rzędem rozgałęzienia tego elementu*. Z warunków 1^o i 2^o wynika, iż każdy element riemannowski jest funkcją skończenie wartościową.

Niech $\mathfrak{R}$ będzie funkcją analityczną w obszarze G . Niech $\mathfrak{S}$ będzie jakąkolwiek gałęzią tej funkcji, dowolnie przedłużalną w pewnym otoczeniu pierścieniowym $P(a; 0, r)$ i posiadającą w punkcie a co najwyżej algebraiczny punkt krytyczny; gałąź ta wyznacza pewien element riemannowski o środku a i promieniu $r_0 \geq r$. Każdy otrzymany w ten sposób element riemannowski nazywać będziemy *wyznaczonym* (w punkcie a) *przez funkcję $\mathfrak{R}$* . Oczywiście zbiór elementów wyznaczonych przez pewną funkcję $\mathfrak{R}$ w pewnym punkcie a może być zarówno nieskończony jak pusty; jest na pewno niepusty, jeżeli punkt a należy do podobszaru naturalnego funkcji (wówczas zawiera m. in. elementy gładkie), jak również wtedy, gdy punkt a jest punktem krytycznym algebraicznym funkcji (wówczas każda gałąź funkcji w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu a wyznacza w tym punkcie element riemannowski); w punktach zwyczajnych (§ 11) funkcja analityczna wyznacza tylko elementy gładkie.

Jeżeli $\mathcal{E}$ jest elementem riemannowskim o pierścieniu $P(a; 0, r)$, to dla każdej liczby dodatniej i skończonej $\varrho \leq r$ zbiór elementów wyznaczonych przez $\mathcal{E}$ w punktach koła $K(a; \varrho)$ nazywać będziemy *otoczeniem elementu $\mathcal{E}$* . Przyjąwszy tę definicję otoczenia, zbiór wszystkich elementów riemannowskich uważać możemy za pewną przestrzeń abstrakcyjną; sprawdzamy natychmiast, iż przyjęta definicja otoczenia czyni zadość podstawowym warunkom I i II z §3 Wstępu.

Ponieważ pierścień elementu riemannowskiego nie zawiera punktów krytycznych, przeto każde otoczenie elementu riemannowskiego $\mathcal{E}$ zawiera wyłącznie elementy gładkie, pomijając co najwyżej sam element $\mathcal{E}$, który może być rozgałęziony. Elementy rozgałęzione tworzą tedy w przestrzeni wszystkich elementów riemannowskich zbiór odosobniony i domknięty.

Jeżeli $\mathcal{E}$ jest elementem gładkim o pierścieniu $P(a; 0, r)$, wówczas funkcja $\mathcal{E}$ jest funkcją jednowartościową, a więc meromorficzną w tym pierścieniu; ponieważ zaś w punkcie a posiada co najwyżej punkt krytyczny algebraiczny, zatem przez stosowne określenie wartości funkcji $\mathcal{E}$ w tym punkcie otrzymujemy pewną funkcję $E(z)$, meromorficzną w całym kole $K(a; r)$. Koło to jest zarazem kołem elementu analitycznego $\{E, a\}$, który przyporządkujemy elementowi riemannowskiemu gładkiemu $\mathcal{E}$. Odwrotnie, każdemu elementowi analitycznemu $\{E, a\}$ o kole $K(a; r)$ odpowiada w tym przyporządkowaniu dokładnie jeden element riemannowski gładki $\mathcal{E}$ o pierścieniu $P(a; 0, r)$, mianowicie funkcja $E(z)$ rozumiana jako jednowartościowa funkcja analityczna w tym pierścieniu. Określona w ten sposób odpowiedniość jedno-jednoznaczna między elementami riemannowskimi gładkimi a elementami analitycznymi jest zarazem, jak sprawdzamy łatwo, odwracalnie ciągła i ustala homeomorfizm między przestrzenią elementów analitycznych a zbiorem elementów gładkich w przestrzeni elementów riemannowskich. Uwaga ta pozwala utożsamiać, dla prostoty wyśłowienia, elementy riemannowskie gładkie z odpowiadającymi im elementami analitycznymi. Wynika z niej również, ze względu na tw. 10.1, iż każde otoczenie elementu riemannowskiego jest homeomorficzne z kołem; tw. 10.1 możemy więc obecnie sformułować jak następuje:

(16.1) *Jeżeli $\mathcal{U}$ jest otoczeniem elementu riemannowskiego $\mathcal{E}_0$ o rzędzie rozgałęzienia $n-1$ i środku a , wówczas między kołem $K(0; 1)$ a otoczeniem $\mathcal{U}$ ustalić można odpowiedniość homeomorficzną w ten sposób, że punktowi $z \in K(0; 1)$ odpowiada element $\mathcal{E} \in \mathcal{U}$ o środku $z = a + r_1 z^n$ (ewentualnie o środku $z = 1/r_1^n$, jeżeli $a = \infty$), gdzie r jest stałym współczynnikiem dodatnim, zależnym od otoczenia $\mathcal{U}$.*

Odpowiedniość spełniającą warunki powyższego twierdzenia nazywać będziemy *kanoniczną*. Istnienie takiej odpowiedniości pozwala ustalić w przestrzeni elementów riemannowskich pewną metrykę kątową. Udowodnimy przede wszystkim następujący wniosek z tw. 16.1:

(16.2) *Jeżeli $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ są otoczeniami odpowiednio elementów $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ takimi, że $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2 \neq 0$, zaś Φ_1 i Φ_2 są odpowiednio odwzorowaniami kanonicznymi tych otoczeń na koło $K(0; 1)$, wówczas przyporządkowując sobie wzajemnie punkty $z_1 \in G_1 = \Phi_1(\mathcal{U})$ i $z_2 \in G_2 = \Phi_2(\mathcal{U})$, które w odwzorowaniach Φ_1 i Φ_2 przyporządkowane są jednemu i temu samemu elementowi $\mathcal{E} \in \mathcal{U}$, otrzymujemy odpowiedniość wierną między zbiorami otwartymi G_1 i G_2 w kole $K(0; 1)$.*

Dowód. Jeżeli $\mathcal{E} \in \mathcal{U}$ oraz $z_1 = \Phi_1(\mathcal{E})$ i $z_2 = \Phi_2(\mathcal{E})$, wówczas zgodnie z 16.1 środkiem elementu $\mathcal{E}$ jest punkt

$$(16.3) \quad a_2 + r_2 z_2^m = a_1 + r_1 z_1^n,$$

gdzie a_1 oraz a_2 są odpowiednio środkami elementów $\mathcal{E}_1$ oraz $\mathcal{E}_2$, $n-1$ oraz $m-1$ odpowiednio rzędami rozgałęzienia tych elementów, wreszcie r_1 oraz r_2 różnymi od zera współczynnikami stałymi. Oznaczając tedy przez $\Phi(z_1)$ punkt $z_2 \in G_2$, przyporządkowany w rozważanej odpowiedniości punktowi $z_1 \in G_1$, stwierdzamy przede wszystkim bezpośrednio, iż funkcja $\Phi(z_1)$ jest jednoznacznie odwracalna i ciągła w G_1 , a następnie, iż związek $z_2 = \Phi(z_1)$ pociąga za sobą równość (16.3). W celu udowodnienia, iż odpowiedniość ta jest wierna, a więc iż funkcja Φ jest meromorficzna w G_1 , rozróżnimy trzy przypadki:

1° $m=1$. Wówczas z (16.3) mamy bezpośrednio

$$z_2 = \Phi(z_1) = (a_1 - a_2 + r_1 z_1^n) / r_2.$$

2° $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Wówczas również $a_1 = a_2$, $m=n$, i na mocy (16.3) funkcja $\Phi(z_1)$, jako ciągła, jest postaci $z_2 = \Phi(z_1) = k \cdot z_1$, gdzie k jest współczynnikiem stałym ($|k| = (r_1/r_2)^{1/n}$).

3° $m > 1$ oraz $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$. Wówczas element $\mathcal{E}_2$ jest rozgałęziony, nie należy przeto na pewno do $\mathcal{U}_1$, a więc tym samym do $\mathcal{U}$. Zbiór G_2 nie zawiera tedy punktu $z_2 = 0$ i w równości

$$[\Phi(z_1)]^m = (a_1 - a_2 + r_1 z_1^n) / r_2$$

lewa — a więc i prawa strona — nie znikają dla żadnego punktu $z_1 \in G_1$. Funkcja $\Phi(z_1)$, jako ciągła w G_1 , jest więc gałęzią holomorficzną pierwiastka $\sqrt[m]{a_1 - a_2 + r_1 z_1^n / r_2^{1/m}}$ w zbiorze otwartym G_1 .

W rozumowaniu powyższym założyliśmy, iż punkty a_1 oraz a_2 są różne od ∞ . Przypadek, gdy punkty te leżą w nieskończoności, rozstrzyga się analogicznie.

Weźmy teraz pod uwagę w przestrzeni elementów riemannowskich dowolny element $\mathfrak{E}_0$ i wychodzącą z niego krzywą Ω (Wstęp, § 12). Niech $\mathcal{U}$ będzie otoczeniem, zawierającym element $\mathfrak{E}_0$ (niekoniecznie jednak jako środek) i niech z_0 oraz L oznaczają odpowiednio punkt oraz krzywą, na które przechodzą $\mathfrak{E}_0$ oraz Ω przy odwzorowaniu kanonicznym otoczenia $\mathcal{U}$ na koło $K(0;1)$; jeżeli krzywa Ω wychodzi poza otoczenie $\mathcal{U}$, wówczas zastępujemy ją przez dostatecznie mały jej łuk, wychodzący z $\mathfrak{E}_0$. Będziemy mówili, iż krzywa Ω wychodząca z elementu $\mathfrak{E}_0$ ma *oznaczony kierunek*, jeżeli krzywa L ma określony kierunek w punkcie z_0 (por. Rozdz. I, § 13). Ze względu na tw. 16.2 własność ta nie zależy od wyboru otoczenia $\mathcal{U}$. Jeżeli Ω_1 i Ω_2 są krzywymi, wychodzącymi z tego samego elementu $\mathfrak{E}_0$ i posiadającymi oznaczony kierunek, zaś z_0 oraz L_1 i L_2 są odpowiednio obrazami elementu $\mathfrak{E}_0$ oraz krzywych Ω_1 i Ω_2 przy odwzorowaniu kanonicznym dowolnego otoczenia $\mathcal{U}$, zawierającego $\mathfrak{E}_0$, na koło $K(0;1)$, wówczas przez *kąt* między krzywymi Ω_1 i Ω_2 w $\mathfrak{E}_0$ rozumiemy kąt między krzywymi L_1 i L_2 w punkcie z_0 . Na mocy tw. 16.2 widzimy znów, iż kąt ten zależy tylko od krzywych Ω_1 i Ω_2 , a nie zależy od wyboru otoczenia $\mathcal{U}$. Ustaliwszy w ten sposób miarę kąta w przestrzeni elementów riemannowskich, otrzymujemy z twierdzenia 16.2 podstawową własność metryczną odwzorowań kanonicznych otoczeń:

(16.4) *Odwzorowanie kanoniczne otoczenia elementu riemannowskiego na koło $K(0;1)$ odwzorowuje otoczenie to w sposób homeomorficzny i zachowujący kąt między krzywymi.*

Zbiór elementów riemannowskich wyznaczonych przez funkcję analityczną $\mathfrak{R}$ (w całej płaszczyźnie) nazywamy *powierzchnią Riemanna* tej funkcji. Zbiór ten, jak spostrzegamy natychmiast, jest jednocześnie kontynuum i obszarem (t. zn. jest otwarty, domknięty i spójny). Łatwo również dowodzimy, iż powierzchnie Riemanna funkcji analitycznych pokrywają się wprost ze składowymi przestrzeni wszystkich elementów riemannowskich.

Jeżeli $\mathfrak{E}_0$ jest elementem powierzchni Riemanna funkcji analitycznej $\mathfrak{R}$, wówczas każde jego otoczenie zawiera się całkowicie w tej powierzchni; istotnie, jeżeli element riemannowski $\mathfrak{E}$ należy do jakiegoś otoczenia elementu $\mathfrak{E}_0$, wówczas — wyjąwszy co naj-

wyżej przypadek, gdy $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0$ — element $\mathfrak{E}$ jest elementem gładkim i odpowiadający mu element analityczny należy do $\mathfrak{R}$. Powierzchnię Riemanna uważać przeto można za przestrzeń abstrakcyjną spójną z ustaloną miarą kąta i układem otoczeń, które w myśl tw. 16.4 dają się odwzorować w sposób homeomorficzny i z zachowaniem kątów na koło $K(0;1)$. Można postawić zagadnienie, czy każda przestrzeń abstrakcyjna o tych własnościach może być uważana za powierzchnię Riemanna lub za obszar na powierzchni Riemanna. Sprecyzowanie i pozytywne rozwiązanie tego zagadnienia stanowi istotną treść słynnego twierdzenia „o uniformizacji”. Zakres tej książki nie pozwala na wyłożenie tych kwestyj, które należą do głębszych i piękniejszych wyników Teorii Funkcyj¹⁾.

Podobnie jak w przestrzeni wszystkich elementów riemannowskich, elementy rozgałęzione tworzą na powierzchni Riemanna dowolnej funkcji analitycznej $\mathfrak{R}$ zbiór domknięty i odosobniony, podczas gdy elementy gładkie tworzą zbiór homeomorficzny z samą funkcją $\mathfrak{R}$. Na mocy tw. 8.1 każda powierzchnia Riemanna zawiera tedy zbiór wszędzie gęsty i przeliczalny elementów gładkich. Przyporządkujemy każdemu elementowi rozgałęzionemu powierzchni Riemanna pewne jego otoczenie. Ponieważ każde otoczenie zawierać może co najwyżej jeden element rozgałęziony, więc otoczenia te są rozłączne; ponieważ zaś dalej każdemu z tych otoczeń przyporządkować możemy pewien element gładki, należący do wspomnianego wyżej zbioru wszędzie gęstego i przeliczalnego, przeto mnogość tych otoczeń jest co najwyżej przeliczalna. Tym samym *zbiór elementów rozgałęzionych powierzchni Riemanna jest co najwyżej przeliczalny*²⁾. Utożsamiając więc, jak wyżej, elementy riemannowskie gładkie z odpowiadającymi im elementami analitycznymi, możemy powiedzieć, iż powierzchnia Riemanna funkcji analitycznej $\mathfrak{R}$ powstaje z domknięcia zbioru elementów analitycznych funkcji $\mathfrak{R}$ przez dołączenie doń co najwyżej przeliczalnej mnogości elementów rozgałęzionych. Np. powierzchnia Riemanna funkcji $\sqrt[k]{z}$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią, powstaje z dołączenia do tej funkcji dwu elementów rozgałęzionych rzędu $k-1$ o środkach 0 i ∞ ;

¹⁾ Szczegółowe ich opracowanie znajdzie czytelnik w dziele H. Weyla, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (2. wyd.), Leipzig-Berlin 1923; ob. także: T. Radó, *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Litt. Scient. Szeged, 2 (1925), str. 101–121.

²⁾ Twierdzeniem tym posługujemy się przy triangulacji powierzchni Riemanna (Weyl, l. c.).

otrzymana w ten sposób powierzchnia jest homeomorficzna z płaszczyzną (domkniętą), podczas gdy sama funkcja $\sqrt[k]{z}$ jest homeomorficzna z płaszczyzną pozbawioną dwu punktów; funkcja $\log z$ jest wprost identyczna ze swoją powierzchnią Riemanna i homeomorficzna z płaszczyzną otwartą (punkty krytyczne 0 i ∞ funkcji $\log z$ są przestępne i w punktach tych funkcja nie wyznacza elementów riemannowskich); powierzchnia Riemanna funkcji $\sqrt{\log z}$ powstaje z dołączenia do tej funkcji jednego elementu rozgałęzionego rzędu pierwszego o środku 1 i jest homeomorficzna również z płaszczyzną otwartą.

Łatwo zauważyć, iż na to, aby funkcja analityczna była algebraiczna, konieczne jest i wystarcza, aby jej powierzchnia Riemanna była zbiorem zwartym. Otrzymujemy w ten sposób definicję funkcji algebraicznej, opartą na elementarnej własności topologicznej jej powierzchni Riemanna.

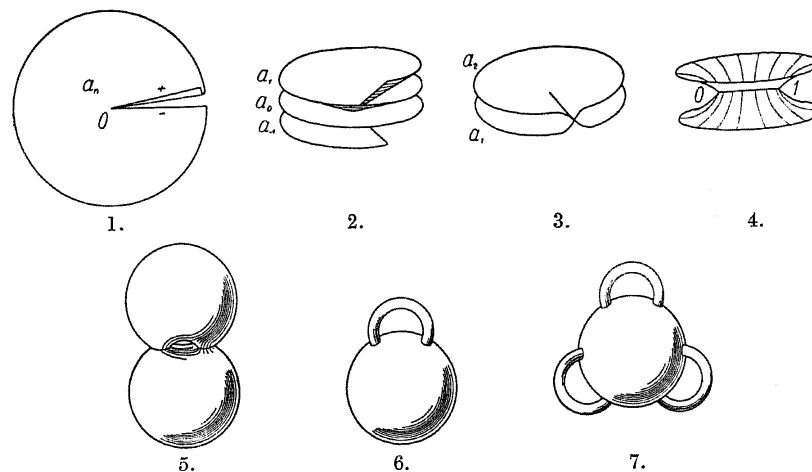
Bardzo często przez powierzchnię Riemanna funkcji analitycznej rozumie się pewien poglądowy model geometryczny przebiegu funkcji, homeomorficzny z powierzchnią Riemanna rozumianą w sensie podanej wyżej formalnej definicji abstrakcyjnej. Podajemy tu konstrukcję takiego modelu na paru przykładach.

1^o *Funkcja $\log z$.* Rozcinamy płaszczyznę wzdłuż półosi rzeczywistej dodatniej $[0, +\infty)$ (rys. 1) i rozważamy ciąg $\{a_n\}_{n=-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots}$ — nieskończony w obydwie strony — jednakowych egzemplarzy tak rozciętej płaszczyzny. Łączymy następnie wszystkie te egzemplarze w ten sposób, że, usuwając punkty 0 oraz ∞ , sklejamy brzeg ujemny cięcia egzemplarza a_n (gdzie $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) z brzegiem dodatnim cięcia egzemplarza a_{n+1} . Otrzymany model (rys. 2) uważać można za poglądowe przedstawienie powierzchni Riemanna dla funkcji $\log z$, ilustrujące przebieg tej funkcji. Istotnie, podobnie jak „okrążając” punkt 0 przechodzimy zawsze od jednego elementu $\log z$ do innego, tak na otrzymanej powierzchni, „okrążając” punkt 0, przechodzimy od jednego punktu powierzchni do innego, położonego „wyżej”, lub „niżej”, zależnie od zwrotu okrążenia.

2^o *Funkcja $\sqrt{z}$.* Przy okrążaniu punktu 0, np. wzdłuż okręgu o środku 0, bądź powracamy tu do tego samego elementu, bądź przechodzimy do innego, zależnie od tego czy ilość okrążeń jest parzysta, czy nieparzysta. Dla przedstawienia tego przebiegu konstruujemy model poglądowy powierzchni Riemanna $\sqrt{z}$, łącząc dwa egzemplarze a_1, a_2 płaszczyzny, rozciętej jak w przykładzie 1^o, w ten sposób, że brzeg ujemny cięcia egzemplarza a_1 „sklejamy” z brzegiem dodatnim cięcia egzemplarza a_2 , a brzeg ujemny cięcia a_2 z brzegiem dodatnim cięcia a_1 ; punkty 0 i ∞ , które są dla funkcji $\sqrt{z}$ punktami krytycznymi algebraicznymi, nie zostają przy tym usunięte (rys. 3). Poza punktami brzegowymi cięć żadne punkty rozważanych płaszczyzn a_1 i a_2 nie ulegają „sklejeniu”. Oczywiście „sklejenia” tego nie można zrealizować w przestrzeni trójwymiarowej, jednakże charakter geometryczny (topologiczny) otrzymanego modelu i jego związek z prze-

biegiem funkcji $\sqrt{z}$ jest wyraźny. W szczególności widzimy, że jeśli egzemplarze a_1, a_2 „skleić” brzegami odpowiednimi (a nie przeciwnymi), to otrzymany model będzie homeomorficzny z poprzednim, a jednocześnie homeomorficzny z płaszczyzną domkniętą, t. j. z powierzchnią kuli.

3^o *Funkcja $\sqrt{z(z-1)}$.* Przy przedłużaniu elementu tej funkcji wzdłuż okręgu otaczającego tylko jeden z punktów krytycznych 0 i 1, przechodzimy — przy jednym okrążeniu — do innego elementu. Natomiast przy przedłużaniu wzdłuż okręgu otaczającego obydwa punkty 0 i 1 powracamy zawsze do elementu wyjściowego (Rozdz. I, § 11, ów. 6). Dla przedstawienia tego przebiegu rozważmy dwa identyczne egzemplarze, b_1 i b_2 , płaszczyzny rozciętej wzdłuż odcinka $[0, 1]$. „Sklejamy” (zachowując punkty 0 i 1) ujemny brzeg cięcia b_1 z dodatnim brzegiem cięcia b_2 , a ujemny brzeg cięcia b_2 z dodatnim brzegiem cięcia b_1 . Otrzymany model (rys. 4) jest modelem powierzchni Riemanna funkcji $\sqrt{z(z-1)}$ i jest homeomorficzny — jak łatwo sprawdzamy — z powierzchnią, jaką otrzymalibyśmy, „sklejając” rozważane egzemplarze odpowiednimi (a nie przeciwnymi) brzegami cięć. Ta zaś powierzchnia jest z kolei homeomorficzna z powierzchnią, jaką otrzymalibyśmy, sklejając dwie jednakowe powierzchnie kul wzdłuż jednakowych otworów kołowych, t. j. z powierzchnią, która jest oczywiście homeomorficzna wprost z powierzchnią kuli. Widzimy w ten sposób, że powierzchnia Riemanna $\sqrt{z(z-1)}$ jest, tak samo jak powierzchnia Riemanna $\sqrt{z}$, homeomorficzna z powierzchnią kuli.



4^o *Funkcja $\sqrt{z(z-1)(z-2)}$.* Rozważamy dwa identyczne egzemplarze płaszczyzny, c_1 i c_2 , rozciętej wzdłuż odcinków $[0, 1]$ i $[2, +\infty)$. Egzemplarze te, podobnie jak w konstrukcjach poprzednich, „sklejamy” przeciwnymi brzegami odpowiednich cięć. Otrzymujemy model przebiegu funkcji analitycznej $\sqrt{z(z-1)(z-2)}$, który jest modelem jej powierzchni Riemanna. Przy pomocy analogicznych przekształceń jak w przykładzie 3^o stwierdzamy, że otrzymana powierzchnia Riemanna jest identyczna z powierzchnią, jaką otrzymalibyśmy,

„sklejając“ dwie powierzchnie kuli (które wyobrazić tu sobie musimy, jako wykonane z materiału rozciągliwego) wzdłuż dwu otworów kołowych (rys. 5); inną słowem, rozważana powierzchnia jest homeomorficzna z powierzchnią kuli z jednym uchem (antabą) (rys. 6), lub — co jest równoważne — z powierzchnią pierścienia (torusa), t. j. z powierzchnią, powstającą przez obrót okręgu około osi, leżącej w płaszczyźnie tego okręgu lecz nie przecinającej go.

W ten sam sposób można zbudować ogólnie model powierzchni Riemanna dla funkcji $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}$, gdzie $z_1, z_2, \dots, z_n$ jest dowolnym układem n różnych punktów. Powierzchnia taka przy $n=2k-1$ oraz $n=2k$ (gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią) jest homeomorficzna z powierzchnią kuli o k uchach (antabach) (rys. 6 i 7), czyli pierścienia o k „otworach“. Zamiast pierwiastka kwadratowego możnaby rozważać tu oczywiście pierwiastek dowolnego stopnia całkowitego. Można też udowodnić ogólnie (i nie przedstawia to większych trudności), że do tych samych typów topologicznych sprowadzają się powierzchnie Riemanna wszystkich funkcji algebraicznych.
