

ROZDZIAŁ V

PRZEKSZTAŁCENIA WIERNE

§ 1. Definicja. Nazywamy *przekształceniem wiernym*¹⁾ *jednoznaczny* zbiór otwarty każde przekształcenie jednoznacznie odwracalne tego zbioru, określone przez funkcję meromorficzną. Terminu „jednoznaczne” używamy ogólnie dla odróżnienia tych przekształceń od przekształceń wiernych określonych przez funkcje analityczne wieloznaczne (p. Rozdz. VI). W rozdziale tym zajmować się będziemy jednak wyłącznie odwzorowaniami jednoznacznymi, tak że zamiast „przekształcenie wierne jednoznaczne” mówić będziemy dla skrócenia wprost „przekształcenie wierne”.

Z tw. 12.2 i 12.3, Rozdz. III, wynika, że przy przekształceniu wiernym zbiór otwarty przechodzi na zbiór otwarty, obszar na obszar, oraz iż przekształcenie odwrotne względem przekształcenia wiernego jest również wierne. Dalej widoczne jest, iż jeżeli $\zeta = F(z)$ jest przekształceniem wiernym zbioru otwartego G na zbiór H , wówczas dla każdej funkcji $W(\zeta)$, holomorficznej i nigdzie nie znikającej w H , istnienie gałęzi $\log W(\zeta)$ w H równoważne jest istnieniu gałęzi $\log W[F(z)]$ w G . Stosując tedy tw. 10.2, Rozdz. IV, wnosimy, iż

(1.1) *Odwzorowanie wierne przekształca zbiór otwarty nie rozcinający płaszczyzny na zbiór otwarty, który również nie rozcina płaszczyzny; innymi słowy, nierozcinanie płaszczyzny przez zbiór otwarty, a więc w szczególności jednospójność obszaru, jest niezmiennikiem przekształceń wiernych.*

¹⁾ Używane są także terminy: przekształcenie odpowiednie, wiernokątne, równokątne (ang. conformal mapping, franc. représentation conforme, niem. konforme Abbildung).

W ten sam sposób, stosując tw. 12.6, Rozdz. IV, dowodzimy, iż

(1.2) *Stopień spójności obszaru jest niezmiennikiem przekształceń wiernych.*

Należy tu zauważyć, iż wymienione w tw. 1.1 i 1.2 własności są niezmiennikami nie tylko przekształceń wiernych, ale ogólniej — przekształceń homeomorficznych.

Sens geometryczny przekształceń wiernych wyraża twierdzenie następujące, które nawiązuje do pojęć wprowadzonych w Rozdz. I, § 15:

(1.3) *Na to, aby przekształcenie jednoznacznie odwracalne i ciągłe $w=W(z)$ zbioru otwartego G było wierne, konieczne jest i wystarcza, aby było podobnościowe w każdym punkcie tego zbioru, z wyjątkiem ewentualnie punktu ∞ oraz punktu z , w którym $W(z)=\infty$ — o ile punkty te w ogóle do zbioru G należą.*

Dowód. Konieczność warunku wynika natychmiast z tw. 15.8, Rozdz. I, ponieważ na mocy tw. 12.1, Rozdz. III, dla każdej funkcji $W(z)$, meromorficznej i jednoznacznie odwracalnej w G , mamy $W'(z) \neq 0$ w każdym punkcie $z \in G$, z pominięciem ewentualnie dwu punktów wyjątkowych, wymienionych w twierdzeniu. Odwrotnie, jeżeli funkcja ciągła i jednoznacznie odwracalna $W(z)$ określa w G przekształcenie podobnościowe wszędzie, z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów, wówczas, znów w myśl tw. 15.8, Rozdz. I, funkcja ta jest holomorficzna w G wszędzie, z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów, a więc — z uwagi na ciągłość (por. Rozdz. III, § 6, str. 140) — jest meromorficzna w całym zbiorze G .

CWICZENIA. 1. Funkcja $w=\text{Log} z$ przekształca wierne płaszczyznę otwartą, z której usunięta została ujemna półoś rzeczywista, na pas nieograniczony $-\pi < \text{Im} w < \pi$. Funkcja $w=z^\alpha$, gdzie $0 < \alpha < 1$, przekształca wierne ten sam obszar na obszar kątowy $-\alpha\pi < \text{Arg} w < \alpha\pi$.

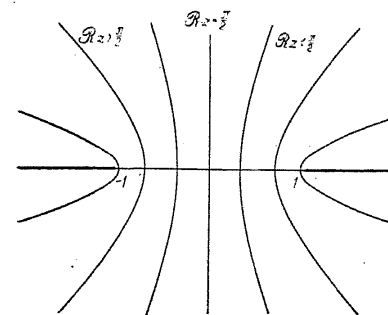
2. Funkcja $w=\frac{1}{2}(z+1/z)$ przekształca wierne zarówno pierścień $P(0;0,1)$ jak i pierścień $P(\infty;0,1)$ na obszar, jaki otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny otwartej odcinek $[-1, +1]$ osi rzeczywistej. Przy przekształceniu tym okręgi $C(0;r)$, gdzie $r \neq 1$, przechodzą na elipsy spółogniskowe (okrąg $C(0;r)$ przechodzi mianowicie na elipsę o ogniskach $-1, +1$ i sumie osi równej $2r$ lub $2/r$ zależnie od tego, czy $r > 1$, czy $r < 1$).

3. Jeżeli $P(z)$ jest wielomianem stopnia $\leq n$ i $|P(z)| \leq M$ dla $-1 \leq z \leq 1$, wówczas $|P(z)| \leq Mr^n$ na elipsie o ogniskach $-1, +1$ i sumie osi $2r$ (S. Bernstein).

[Wsk. Ob. św. 2; oszacować (p. Rozdz. III, tw. 12.6) wartość bezwzględna wielomianu $\delta^n P\left[\frac{1}{2}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)\right]$ dla $|\delta|=r$.]

4. Funkcja $w=z/(1-z)^2$ przekształca wierne koło $K(0;1)$ na obszar, jaki otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny otwartej punkty rzeczywiste $w \leq -1/4$.

[Wsk. $w=1/\delta$, gdzie $\delta=(1-z)^2/z=z+1/z-2$; por. św. 2.]



5. Funkcja $w=\cos z$ przekształca wierne pas nieograniczony $0 < \text{Im} z < \pi$ na obszar, jaki otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny otwartej punkty rzeczywiste $w \geq 1$ oraz $w \leq -1$. Przy przekształceniu tym proste $\text{Re} z=c$ (gdzie $0 < c < \pi$, $c \neq \pi/2$) przechodzą na łuki hiperbol spółogniskowych, a prosta $\text{Im} z=\pi/2$ na oś urojoną (p. rysunek).

§ 2. Przekształcenia homograficzne. Jak wynika bezpośrednio z definicji przekształcenia homograficznego (Rozdz. I, § 14), każde takie przekształcenie jest przekształceniem wiernym płaszczyzny (domkniętej) w siebie. Twierdzenie to można odwrócić:

(2.1) *Każde przekształcenie wierne płaszczyzny E , lub ogólniej: płaszczyzny bez jednego punktu, jest przekształceniem homograficznym.*

Każde przekształcenie wierne płaszczyzny otwartej E_0 w siebie jest przekształceniem liniowym.

Dowód. Niech $W(z)$ będzie funkcją meromorficzną i jednoznacznie odwracalną w płaszczyźnie pozbawionej punktu a ; niech K oznacza koło, nie zawierające tego punktu wewnątrz, ani na okręgu. Zbiór $W(K)$ jest zbiorem otwartym i funkcja $W(z)$, jako jednoznacznie odwracalna, nie przyjmuje zewnątrz koła K żadnej wartości należącej do $W(K)$. W myśl więc twierdzenia Casoratiego-Weierstrassa (Rozdz. III, tw. 6.1) punkt a jest punktem pozornie osobliwym lub co najwyżej biegunem funkcji $W(z)$, która tedy rozszerza się na całą płaszczyznę jako funkcja meromorficzna i — jak spostrzega się natychmiast — jednoznacznie odwracalna. Tym samym (por. Rozdz. III, tw. 7.3) funkcja $W(z)$ jest funkcją wymierną, t. j. funkcją postaci $P(z)/Q(z)$, gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ są wielomianami bez pierwiastków wspólnych. Ponieważ każdą wartość, a w szczególności 0 i ∞ , funkcja $W(z)$ przyjmować może co najwyżej raz jeden, zatem każdy z wielomianów $P(z)$ i $Q(z)$ posiada co najwyżej jeden pierwiastek, przy czym z uwagi na tw. 12.1, Rozdz. III, pierwiastki te nie mogą być wielokrotne. Funkcje $P(z)$ i $Q(z)$ są tedy co najwyżej stopnia pierwszego i funkcja $W(z)$ ma postać $(az+b)/(cz+d)$, przy czym nieznikanie wyznacznika $ad-bc$ jest już bezpośrednią konsekwencją tego, że funkcja $W(z)$ nie redukuje się do stałej.

Druga część twierdzenia wynika natychmiast z pierwszej, ponieważ dla przekształcenia homograficznego, przekształcającego płaszczyznę otwartą w siebie, punkt ∞ jest oczywiście punktem niezmiennym.

Jak stwierdziliśmy już w Rozdz. I (§ 14, tw. 14.9), przy przekształceniu homograficznym okręgi (właściwe i niewłaściwe) przechodzą na okręgi. Twierdzenie to uzupełnimy jak następuje:

(2.2) *Jeżeli C_1 i C_2 są dwoma okręgami (właściwymi lub niewłaściwymi), a z_1 i z_2 dwoma punktami nie leżącymi odpowiednio na tych okręgach, wówczas istnieje zawsze przekształcenie homograficzne, które przekształca C_1 na C_2 , a z_1 na z_2 .*

Dowód. Ponieważ przy pomocy przekształcenia homograficznego każdy okrąg przekształcić można na oś rzeczywistą, przeto przyjąć możemy od razu, iż obydwa dane okręgi C_1 i C_2 pokrywają się z tą osią.

Niech z_1 i z_2 będą parą punktów poza osią x -ów. Jeżeli punkty te leżą na prostej równoległej do osi, wówczas przesunięcie $w = z + (z_2 - z_1)$ jest żądanym przekształceniem, gdyż przekształca oś rzeczywistą w siebie, a punkt z_1 na punkt z_2 . Jeżeli natomiast prosta łącząca punkty z_1 i z_2 przecina oś rzeczywistą w pewnym punkcie $z_0 \neq \infty$, wówczas warunkom tym czyni zadość przekształcenie liniowe

$$w = z_0 + \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} (z - z_0),$$

które jest jednokładnością o środku z_0 , lub jednokładnością o środku z_0 z obrotem o kąt π , zależnie od tego, czy punkty z_1, z_2 leżą z tej samej strony, czy z różnych stron osi rzeczywistej.

ĆWICZENIE. 1. Uogólnić tw. 2.1 w sposób następujący: każde przekształcenie wierne płaszczyzny, z której usunięty został dowolny zbiór domknięty przeliczalny, jest przekształceniem homograficznym.

§ 3. Symetria względem okręgu. Dwa punkty p i q nazywać będziemy *symetrycznymi względem okręgu C* , bądź jeżeli pokrywają się i leżą na tym okręgu, bądź jeżeli każdy okrąg przechodzący przez te dwa punkty jest ortogonalny do okręgu C , t. j. przecina ten okrąg pod kątem prostym.

Widoczne jest, iż w przypadku, gdy okrąg C jest niewłaściwy, t. zn. jest linią prostą, definicja ta równoważna jest zwykłej definicji symetrii względem prostej. Zauważmy także, iż środek dowolnego okręgu C oraz punkt ∞ są symetryczne względem C ; każdy

bowiem okrąg przechodzący przez punkt ∞ jest linią prostą, a więc, jeżeli przechodzi ponadto przez środek okręgu C , wówczas przecina ten okrąg pod kątem prostym.

Ponieważ dalej przy przekształceniach homograficznych, jako wiernych, kąty się zachowują, a nadto okręgi przechodzą na okręgi, przeto *symetria względem okręgu jest niezmiennikiem przekształceń homograficznych*, t. zn. jeżeli punkty p, q są symetryczne względem okręgu C i jeżeli przy pewnym przekształceniu homograficznym punkty p, q oraz okrąg C przechodzą odpowiednio na punkty p', q' oraz okrąg C' , wówczas punkty p', q' są symetryczne względem okręgu C' . Przekształcając dowolny okrąg na prostą, np. na oś rzeczywistą, wnosimy stąd, iż każdemu punktowi odpowiada dokładnie jeden punkt z nim symetryczny względem danego okręgu. Symetria względem okręgu jest więc pewnym przekształceniem jedno-jednoznaczny płaszczyzny w siebie. Podamy explicite wzór na to przekształcenie.

Niech w tym celu p, q ($p \neq q$, $p \neq \infty$, $q \neq \infty$) będą punktami symetrycznymi względem okręgu właściwego $C = C(a; R)$. Ponieważ wszystkie okręgi przechodzące przez te dwa punkty są ortogonalne względem okręgu C , zatem w szczególności prosta łącząca punkty p i q jest prostą do okręgu C , a przeto przechodzi przez jego środek a . Weźmy z drugiej strony pod uwagę dowolny okrąg właściwy C_0 , przechodzący przez punkty p i q . Okrąg ten jest także prostą do okręgu C i przeto, jak łatwo zauważyć, środek a okręgu C leży po zewnętrznej stronie okręgu C_0 . Wynika stąd, że punkty p i q leżą na prostej, przechodzącej przez a , po jednej i tej samej stronie punktu a . Ponieważ zaś, oznaczając przez b punkt przecięcia okręgów C i C_0 , mamy $R^2 = |b - a|^2 = |p - a| \cdot |q - a|$, zatem ostatecznie

$$(3.1) \quad q - a = \frac{R^2}{p - a} \cdot (p - a) = \frac{R^2}{p - a},$$

przy czym, jak spostrzega się natychmiast, wzór ten rozszerza się na wyłączone chwilowo przypadki, gdy $p = q$ lub gdy jeden z punktów p, q staje się ∞ (i gdy drugi przeto pokrywa się ze środkiem okręgu C). W szczególności, przyjmując w (3.1), iż $a = 0$, otrzymujemy $q = R^2/\bar{p}$ jako wzór na symetrię względem okręgu $C(0; R)$, która jest więc iloczynem inwersji przez symetrię względem osi rzeczywistej.

Mówimy, że zbiór E jest *symetryczny względem okręgu C* , jeżeli każdy punkt symetryczny z jakimkolwiek punktem zbioru E względem okręgu C należy również do tego zbioru. Ponieważ sy-

metria względem okręgu jest, jak widzieliśmy, niezmiennikiem przekształceń homograficznych, przeto z zasady odbicia Schwarz'a dla prostej (Rozdz. II, tw. 8.6) otrzymujemy natychmiast *zasadę odbicia dla okręgu* w postaci następującej:

(3.2) Niech K będzie dowolnym kołem, C okręgiem tego koła, G zbiorem otwartym, symetrycznym względem C , i wreszcie $W(z)$ funkcją ciągłą na zbiorze $G \cdot \bar{K}$, meromorficzną w jego wnętrzu (t. j. w zbiorze $G \cdot K$) i przyjmującą w tych punktach zbioru $G \cdot \bar{K}$, które leżą na okręgu C , wartości leżące na pewnym okręgu Γ .

Funkcja $W(z)$ może być wówczas rozszerzona jako funkcja meromorficzna na cały zbiór G , w ten mianowicie sposób, by w punktach zbioru G symetrycznych względem okręgu C przyjmowała wartości symetryczne względem okręgu Γ .

ĆWICZENIA. 1. Ogólna postać przekształcenia homograficznego, które półpłaszczyznę $\Re z > 0$ przekształca na koło $K(0; R)$ w taki sposób, że punkt a tej półpłaszczyzny przechodzi na punkt 0, dana jest przez wzór $w = Re^{i\theta}(z-a)/(z+\bar{a})$, gdzie θ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Ogólna postać analogicznego przekształcenia dla półpłaszczyzny $\Im z < 0$ dana jest przez wzór $w = Re^{i\theta}(z-a)/(z-\bar{a})$.

2. Sprawdzić, że przekształcenie

$$(*) \quad w = \frac{(1+z^n)^2 - i(1-z^n)^2}{(1+z^n)^2 + i(1-z^n)^2},$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, przekształca wiernie wycinek kołowy $0 < |z| < 1$, $0 < \text{Arg} z < \pi/n$, na koło $K(0; 1)$. Przekształcenie to rozszerza się jako przekształcenie homeomorficzne na domknięcie wycinka. Wyróżnić łuki okręgu $C(0; 1)$, które odpowiadają w tym przekształceniu łukowi oraz promieniom ograniczającym dany wycinek.

3. Dla $n=1/2$ wzór (*), ćw. 2, określa przekształcenie wierne koła $K(0; 1)$ pozbawionego odcinka $[0, 1]$ (promienia) na pełne koło $K(0; 1)$ ($z^{1/2}$ należy tu interpretować jako którąkolwiek z dwu gałęzi holomorficznych $\sqrt{z}$ na płaszczyźnie pozbawionej dodatniej półosi rzeczywistej).

4. Jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ są pierwiastkami funkcji $W(z)$, holomorficznej, ograniczonej i nie znikającej tożsamościowo w półpłaszczyźnie $\Re z > 0$, a $\sum_{n=1}^{(r)} a_n$ oznacza sumę rozciągniętą na te wartości n , dla których $|a_n| \geq r$, to dla każdego $r > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{(r)} \frac{1}{a_n}$ jest zbieżny; podobnie jeżeli $\sum_{n=1}^{(r)} a_n$ oznacza sumę rozciągniętą na te wartości n , dla których $|a_n| \leq r$, to dla każdego $r > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{(r)} a_n$ jest zbieżny (Carleman).

[Wsk. Ob. Rozdz. IV, § 4, ćw. 1; zastosować przekształcenie półpłaszczyzny $\Re z > 0$ na koło $K(0; 1)$ wedle wzoru ćw. 1.]

5. Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia Lercha (Rozdz. III, § 8, ćw. 2):

Jeżeli funkcja $f(t)$ jest skończona i ciągła w przedziale $[0, b]$ i jeżeli $\int_0^b f(t) t^{n_k} dt = 0$ dla $k=0, 1, \dots$, gdzie $\{n_k\}$ jest ciągiem rosnącym liczb rzeczywistych takim, że $\sum_k \frac{1}{n_k} = +\infty$, wówczas funkcja $f(t)$ jest zerem tożsamościowo (Muntz).

§ 4. Czynniki Blaschkego. Jeżeli dane są trzy punkty z_1, z_2, z_3 , wówczas iloraz $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ nazywamy *stosunkiem* tych trzech punktów i oznaczamy przez (z_1, z_2, z_3) . Jeżeli dane są cztery punkty z_1, z_2, z_3, z_4 , z których żadne trzy nie pokrywają się, to iloraz

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3) : (z_1, z_2, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

nazywa się *dwustosunkiem* tych czterech punktów.

Widoczne jest natychmiast, iż stosunek trzech punktów (a więc tym bardziej dwustosunek czterech) jest niezmiennikiem przekształceń liniowych; nadto dwustosunek czterech punktów jest niezmiennikiem inwersji. Stąd, w myśl tw. 14.8, Rozdz. I, *dwustosunek jest niezmiennikiem przekształceń homograficznych*.

Weźmy pod uwagę dwa punkty p, q symetryczne względem osi rzeczywistej. Wówczas dla każdego punktu rzeczywistego z mamy $|(p, q, z)| = 1$, a więc dla każdej pary wartości rzeczywistych z_1, z_2

$$|(p, q, z_1, z_2)| = 1.$$

Ponieważ symetria względem okręgu jest niezmiennikiem przekształceń homograficznych (por. § 3, str. 211), przeto przekształcając oś rzeczywistą na dowolny okrąg C , otrzymujemy twierdzenie:

Jeżeli p oraz q są punktami symetrycznymi względem okręgu C , to

$$|(z_1 - p)/(z_1 - q)| = |(z_2 - p)/(z_2 - q)|$$

dla każdej pary punktów z_1, z_2 okręgu; innymi słowy, stosunek

$$(z - p)/(z - q)$$

ma stałą wartość bezwzględną, gdy punkt z przebiega okrąg C .

Wartość tę możemy łatwo obliczyć, podstawiając na z jakikolwiek punkt okręgu C , np. punkt z_0 przecięcia okręgu C z półprostą wychodzącą z jego środka i przechodzącą przez p . Przyjmując dla prostoty $C = C(0; R)$, znajdujemy $z_0 = Rp/|p|$ oraz (por. § 3, str. 211) $q = R^2/\bar{p} = R^2 p/|p|^2$. Podstawiając te wyrażenia zamiast z i q do stosunku $(z - p)/(z - q)$, otrzymujemy jako stałą wartość bezwzględną tego stosunku $|p|/R$. Wynika stąd, że

(4.1) Jeżeli p jest dowolnym punktem, który nie leży na okręgu $C(0; R)$, to funkcja homograficzna

$$(4.2) \quad B(z) = \frac{R^2}{|p|} \frac{z-p}{z-\frac{p}{R^2}} = \frac{R^2|p|}{p} \frac{z-p}{pz-R^2}$$

posiada wartość bezwzględną stałą i równą R na okręgu $C(0; R)$, a więc przekształca ten okrąg w siebie; nadto znika w punkcie p , a więc przekształca ten punkt na środek 0 okręgu $C(0; R)$.

Istnienie funkcji homograficznej posiadającej te własności wynika już z tw. 2.2, tu jednak podaliśmy ją explicite w postaci wyrażenia (4.2). Wyrażenie to nosi często nazwę *czynnika Blaschkego* (odpowiadającego punktowi p), ponieważ występuje jako czynnik w pewnych iloczynach związanych z pierwiastkami funkcji holomorficznych w kole.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli funkcja $W(z)$, ciągła na kole domkniętym $\bar{K}(0; 1)$ i meromorficzna w jego wnętrzu, posiada stałą (skończoną i różną od 0) wartość bezwzględną na okręgu tego koła, to

$$W(z) = C \cdot \frac{(z-a_1) \cdots (z-a_m)}{(\bar{a}_1 z-1) \cdots (\bar{a}_m z-1)} \cdot \frac{(\bar{b}_1 z-1) \cdots (\bar{b}_n z-1)}{(z-b_1) \cdots (z-b_n)},$$

gdzie C jest stałą, zaś $a_1, \dots, a_m$ oraz $b_1, \dots, b_n$ oznaczają odpowiednio pierwiastki i bieguny funkcji W w kole $K(0; 1)$ (każdy pierwiastek i biegun wypisany jest tyle razy, ile wynosi jego krotność).

2. Ogólna postać przekształcenia homograficznego $w=W(z)$, które przekształca koło $K(0; R)$ na to samo koło w ten sposób, że punkt a tego koła przechodzi na punkt b , dana jest przez wzór

$$\frac{w-b}{1-\frac{\bar{b}w}{R^2}} = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\frac{\bar{a}z}{R^2}},$$

gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą.

3. Na to, aby dwustosunek czterech punktów był rzeczywisty, konieczne jest i wystarcza, by punkty te leżały na jednym okręgu (właściwym lub niewłaściwym).

4. Jeżeli z_1, z_2 są dwoma punktami koła $K(0; 1)$, wówczas odległością nie-euklidesową tych punktów w kole $K(0; 1)$ nazywamy liczbę

$$(*) \quad D(z_1, z_2) = |\operatorname{Log}(z_1, z_2, \xi_1, \xi_2)|,$$

gdzie ξ_1 i ξ_2 oznaczają punkty przecięcia okręgu $C(0; 1)$ z okręgiem $C(z_1, z_2)$, przechodzącym przez punkty z_1, z_2 i ortogonalnym do okręgu $C(0; 1)$. Okrąg taki zawsze istnieje; jest przy tym jednoznacznie określony jeżeli $z_1 \neq z_2$, a jeżeli $z_1 = z_2$, to niezależnie od obioru okręgu $C(z_1, z_2)$ wzór (*) daje $D(z_1, z_2) = 0$. Zauważyć, że wartość wyrażenia (*) nie zależy od porządku punktów ξ_1, ξ_2 .

Odległość nieeuklidesowa jest niezmiennikiem przekształceń homograficznych koła $K(0; 1)$ w siebie; t.j. że jeżeli przy przekształceniu homograficznym koła $K(0; 1)$ na to samo koło punkty z_1, z_2 przechodzą na punkty w_1, w_2 , wówczas

$$D(w_1, w_2) = D(z_1, z_2).$$

Wzór (*) napisać można także w postaci

$$D(z_1, z_2) = \operatorname{Log} \frac{1+h(z_1, z_2)}{1-h(z_1, z_2)}, \quad \text{gdzie} \quad h(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

(we wzorze tym nie występują już punkty pomocnicze ξ_1, ξ_2).

§ 5. Lemmat Schwarz. W §§ 2 i 4 rozważane były przekształcenia homograficzne koła w koło. Dowiedzimy obecnie, iż każde przekształcenie wierne koła otwartego na koło otwarte (w szczególności, każde przekształcenie wierne koła w siebie) jest homograficzne. Dowód tego twierdzenia opiera się na następującym *lemmacie Schwarz*:

(5.1) Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną i ograniczoną w kole $K=K(0; R)$, przy czym $W(0)=0$ i $|W(z)| \leq M$ dla $z \in K$, wówczas:

$$(5.2) \quad |W'(0)| \leq M/R, \quad (5.3) \quad |W(z)| \leq M|z|/R \quad \text{dla} \quad z \in K$$

i, jeżeli $W'(0)=M/R$ lub jeżeli $|W(z)|=M|z|/R$ w jednym choćby punkcie $z \neq 0$ koła K , to funkcja $W(z)$ jest funkcją liniową postaci $e^{i\alpha} \frac{M}{R} z$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą.

Dowód. Niech $F(z)=W(z)/z$ dla $z \in K$ (w punkcie 0 przyjmujemy $F(0)=W'(0)$). Ponieważ $W(0)=0$, przeto tak określona funkcja $F(z)$ jest holomorficzna w K . Zauważmy przede wszystkim, iż

$$|F(z_0)| \leq M/R \quad \text{dla każdego punktu } z_0 \in K.$$

Istotnie, jeżeli $z_0 \in K$ i $|z_0| < r < R$, wówczas oznaczając przez $M(r)$ maximum $|F(z)|$ na okręgu $C(0; r)$, mamy w myśl zasady maximum (Rozdz. III, tw. 12.6) nierówność $|F(z_0)| \leq M(r) \leq M/r$, a przechodząc do granicy, gdy $r \rightarrow R$, otrzymujemy $|F(z_0)| \leq M/R$. Ponieważ zaś, wyjąwszy przypadek, gdy funkcja $F(z)$ redukuje się do stałej, $|F(z)|$ nie osiąga swego maximum w żadnym punkcie koła K (por. Rozdz. III, tw. 12.5), przeto bądź $|F(z)| < M/R$ w całym tym kole, a więc $|W'(0)| < M/R$ oraz $|W(z)| < M|z|/R$ dla $z \in K$ i $z \neq 0$, bądź też w pewnym punkcie z mamy $|F(z)|=M/R$ i funkcja F redukuje się do stałej C , przy czym oczywiście $|C|=M/R$, t. j. $C=e^{i\alpha} M/R$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą; mamy więc wówczas $W(z)=z \cdot F(z)=Cz=e^{i\alpha} Mz/R$.

(5.4) Jeżeli $w=W(z)$ jest przekształceniem wiernym koła $K=K(a;R)$, gdzie $a \neq \infty$, na to samo koło i jeżeli ponadto $W(a)=a$, wówczas przekształcenie to jest obrotem o środku a .

Dowód. Możemy oczywiście przyjąć, że $a=0$. Mamy wówczas $W(0)=0$ i $W^{-1}(0)=0$ oraz $|W(z)|<R$ i $|W^{-1}(z)|<R$ dla $z \in K$, przy czym funkcja odwrotna $W^{-1}(z)$ jest również holomorficzna. Oznaczając tedy przez z_0, w_0 parę odpowiadających sobie punktów w przekształceniu $w=W(z)$, otrzymujemy przez kolejne zastosowanie lematu Schwarza 5.1 do funkcji $W(z)$ i $W^{-1}(z)$

$$|w_0| \leq |z_0| \quad \text{oraz} \quad |z_0| \leq |w_0|,$$

skąd w rezultacie $|w_0|=|z_0|$, t. j. $|W(z_0)|=|z_0|$, i na mocy znów lematu Schwarza $W(z)=e^{ia}z$, gdzie a jest stałą rzeczywistą; rozważane przekształcenie jest więc obrotem.

(5.5) Każde przekształcenie wierne koła otwartego na koło otwarte jest przekształceniem homograficznym.

Dowód. Niech przekształcenie W przekształca wiernie koło otwarte $K_1=K(a_1;R_1)$ na koło $K_2=K(a_2;R_2)$ i niech $b=W(a_1)$. Niech dalej (por. tw. 2.2) H będzie przekształceniem homograficznym takim, iż $K_1=H(K_2)$ oraz $a_1=H(b)$. Przyjmując więc $G=HW$, mamy $K_1=G(K_2)$ oraz $a_1=G(a_2)$. Jeżeli więc $a_1 \neq \infty$, to na mocy tw. 5.4 przekształcenie G jest obrotem i przeto przekształcenie $W=H^{-1}G$ jest homograficzne. Przypadek $a_1=\infty$ sprowadzamy do przypadku $a_1=0$ przez inwersję.

Lemat Schwarza, choć bardzo prosty, jest podstawą różnych ważnych oszacowań. Podamy tu jako interesujące zastosowanie tego lematu prosty dowód Radó twierdzenia Study'ego o przekształceniach wiernych koła na obszary wypukłe. (Zbiór E nazywamy *wypukłym*, jeżeli każdy odcinek, którego końce należą do zbioru E , zawiera się całkowicie w tym zbiorze.)

(5.6) *Twierdzenie Study'ego.* Jeżeli przekształcenie $w=W(z)$ przekształca wiernie koło $K=K(0;1)$ na obszar wypukły G , to każde koło $K_r=K(0;r)$, gdzie $0 < r < 1$, przechodzi przy tym przekształceniu również na obszar wypukły.

Dowód. Możemy założyć, że $W(0)=0$ (w przeciwnym razie zastąpilibyśmy funkcję $W(z)$ przez $W(z)-W(0)$). Niech $0 < r < 1$ i $G_r=W(K_r)$. Dla udowodnienia wypukłości obszaru G_r należy pokazać, że gdy w_1, w_2 są dwoma punktami tego obszaru, wówczas każdy punkt w_0 odcinka $[w_1, w_2]$ należy również do G_r .

Niech w tym celu z_1, z_2 będą punktami koła K_r takimi, że $w_1=W(z_1)$, $w_2=W(z_2)$. Możemy przyjąć oczywiście, iż:

$$(5.7) \quad |z_1| \leq |z_2|,$$

$$(5.8) \quad |z_2| > 0.$$

Niech dalej t_0 będzie liczbą rzeczywistą taką, że

$$(5.9) \quad 0 < t_0 < 1, \quad w_0 = t_0 w_1 + (1-t_0)w_2 = t_0 W(z_1) + (1-t_0)W(z_2).$$

Ze względu na (5.7) mamy $z_1/z_2 \in K$, t. j. $W(z_1/z_2) \in W(K)=G$, dla każdego punktu $z \in K$. Ponieważ zaś zbiór G jest wypukły, przeto przyjmując

$$(5.10) \quad F(z) = t_0 W(z_1/z_2) + (1-t_0)W(z),$$

będziemy mieli $F(z) \in G$ dla $z \in K$. Funkcja $W^{-1}F(z)$ jest więc określona w całym kole K , przy czym dla każdego $z \in K$ mamy oczywiście również $W^{-1}F(z) \in K$, t. j. $|W^{-1}F(z)| < 1$. Nadto, wobec $W(0)=0$ oraz (5.10) mamy $W^{-1}F(0)=W^{-1}(0)=0$. Na mocy przeto lematu Schwarza, $|W^{-1}F(z)| \leq |z|$, ilekroć $|z| < 1$, a więc w szczególności $|W^{-1}F(z_2)| \leq |z_2| < r$. Ponieważ zaś, ze względu na (5.10) i (5.9), mamy $F(z_2)=w_0$, zatem $|W^{-1}(w_0)| < r$, t. j. $W^{-1}(w_0) \in K_r$ lub, co jest równoważne, $w_0 \in G_r$.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną w kole $K=K(0;R)$ i $|W(z)| \leq M < \infty$ dla $z \in K$, to

$$\left| \frac{W(z)-W(0)}{M^2-\overline{W(0)}W(z)} \right| \leq \frac{|z|}{MR}$$

dla $|z| < R$, przy czym, jeżeli w jakimkolwiek punkcie $z \neq 0$ koła K zachodzi równość, wówczas równość ta zachodzi tożsamościowo i $W(z)$ jest bądź stałą, bądź funkcją homograficzną postaci $[e^{ia}M^2z + MRa]/[MR + e^{ia}\bar{a}z]$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą, zaś $|a| < R$. (Przyjmując $W(0)=0$, otrzymujemy lemat Schwarza.)

2. Dla każdej liczby rzeczywistej $M < 1$ istnieje taka liczba $P < 1$ zależna tylko od M , iż, jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną w kole $K(a;R)$, spełniającą warunki $|W(z)| < 1$ dla $z \in K(a;R)$ oraz $|W(a)| < M$, wówczas $|W(z)| < P$ dla każdego $z \in K(a; \frac{1}{2}R)$.

3. Uogólnić wynik ćw. 2 w sposób następujący: Niech G będzie obszarem zawierającym punkt 0, $F \subset G$ zbiorem domkniętym i $M < 1$ liczbą rzeczywistą. Istnieje wówczas liczba $P < 1$ zależna tylko od G, F i M taka, że, jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną w G , spełniającą warunki $|W(z)| < 1$ dla $z \in G$ oraz $|W(0)| < M$, wówczas $|W(z)| < P$ dla $z \in F$.

4. Niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną w kole $K=K(0;1)$ taką, że $|W(z)| < 1$ dla $z \in K$. Wówczas, jeżeli $z_1 \in K$, $z_2 \in K$, $w_1=W(z_1)$, $w_2=W(z_2)$, to $D(w_1, w_2) \leq D(z_1, z_2)$. ($D(z_1, z_2)$ oraz $D(w_1, w_2)$ oznaczają odległości nieeuklidesowe punktów z_1 i z_2 oraz w_1 i w_2 w kole K ; p. § 4, ćw. 4) (Pick).

5. Niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną w kole $K=K(0;1)$ taką, że $|W(z)| < 1$ dla $z \in K$. Niech dalej $\{z'_n\}, \{z''_n\}$ będą dwoma ciągami punktów w kole K zbieżnymi do jednego i tego samego punktu tak, że ciąg $\{D(z'_n, z''_n)\}_{n=1,2,\dots}$ pozostaje ograniczony. Wówczas, jeżeli $\lim_n W(z'_n)=1$, to również $\lim_n W(z''_n)=1$ (Seidel).

6. Obszar G nazywa się *gwiazdzystym* względem pewnego punktu $a \in G$, jeżeli każdy odcinek $[a, p]$, łączący punkt a z jakimkolwiek punktem $p \in G$, zawiera się całkowicie w G .

Udowodnić, że, jeżeli przekształcenie $w=W(z)$ przekształca wiernie koło $K=K(0;1)$ na obszar gwiazdzysty względem punktu $W(0)$, wówczas każde koło $K_r=K(0;r)$ przechodzi również na obszar gwiazdzysty względem tego punktu (Study, Seidel).

[Wsk. Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia Study'ego 5.6.]

§ 6. Twierdzenie Riemanna. Udowodnimy obecnie podstawowe twierdzenie ogólnej teorii odwzorowań wiernych, orzekające, iż każdy obszar jednospójny, który nie jest całą płaszczyzną (domkniętą), ani płaszczyzną pozbawioną jednego punktu, może być przekształcony wiernie na koło otwarte. Pokażemy przede wszystkim, iż

(6.1) *Każdy obszar G , którego dopełnienie ma przynajmniej jedną składową P nie redukującą się do punktu, może być przekształcony wiernie na obszar ograniczony.*

Dowód. Twierdzenie to jest oczywiste, gdy dopełnienie danego obszaru zawiera punkty wewnętrzne; w tym bowiem przypadku inwersja względem dowolnego koła zawartego w dopełnieniu obszaru przekształca rozważany obszar na obszar położony wewnątrz tego koła. Wystarczy tedy pokazać, iż obszar G można przekształcić na obszar, którego dopełnienie zawiera punkty wewnętrzne. Można przy tym założyć, iż kontynuum P zawiera punkt ∞ ; istotnie, gdyby tak nie było, wówczas, oznaczając przez a dowolny punkt tego kontynuum i stosując inwersję $z=1/(z-a)$, przekształcilibyśmy kontynuum P na kontynuum zawierające punkt ∞ .

Niech teraz b będzie dowolnym, różnym od ∞ , punktem zbioru P . Obszar CP jest jednospójny (por. Wstęp, § 9), a że nie zawiera punktu ∞ , więc, w myśl tw. 3.2, Rozdz. IV, określić w nim można gałąź holomorficzną $\log(z-b)$. Oznaczmy jedną taką gałąź przez $L(z)$. Funkcja $L(z)$ jest oczywiście jednoznacznie odwracalna w G , przekształca tedy wiernie obszar G na pewien obszar $H=L(G)$. Weźmy z kolei pod uwagę jedną jeszcze gałąź $\log(z-b)$, np. $L^*(z)=L(z)+2\pi i$, i niech $H^*=L^*(G)$. Dowiedzimy najpierw że

$$(6.2) \quad H \cdot H^* = 0.$$

Istotnie, gdyby punkt w_0 był wspólnym punktem obszarów H i H^* , wówczas mielibyśmy:

$$(6.3) \quad w_0 = L(z_0) \quad \text{oraz} \quad w_0 = L^*(z_0^*), \quad \text{gdzie} \quad z_0 \in G, \quad z_0^* \in G.$$

Stąd jednak $z_0 - b = \exp w_0$, $z_0^* - b = \exp w_0$, a więc $z_0 = z_0^*$ i tym samym, ze względu na (6.3), $L(z_0) = L^*(z_0)$, co jest oczywiście fałszywe. Równość (6.2) jest więc udowodniona.

Wynika z niej, iż $H^* \subset CH$, a ponieważ H^* jest obszarem, więc CH zawiera napewno punkty wewnętrzne. Przekształcenie $w=L(z)$ jest tedy przekształceniem żądanym.

Udowodnimy jeszcze następujący lemat:

(6.4) *Jeżeli G jest dowolnym obszarem jednospójnym, zawierającym punkt 0, zawartym w kole $K_0=K(0;1)$, lecz niepokrywającym się z tym kołem, wówczas istnieje funkcja $F(z)$ holomorficzna i jednoznacznie odwracalna w G , taka iż*

$$(6.5) \quad |F(z)| < 1 \quad \text{dla} \quad z \in G,$$

$$(6.6) \quad F(0)=0, \quad |F'(0)| > 1, \quad |F(z)| > |z| \quad \text{jeżeli} \quad z \in G \quad \text{i} \quad z \neq 0.$$

Dowód. Niech a będzie dowolnym punktem zawartym w $K_0 - G$.

Określmy funkcję $F(z)$ jako iloczyn trzech przekształceń wiernych obszaru G . Pierwszym z nich będzie funkcja homograficzna $F_1(z)$, przekształcająca koło K_0 w siebie i punkt a na punkt 0 (por. tw. 2.2). Punkt 0 nie należy zatem do obszaru jednospójnego $F_1(G)$ i w myśl tw. 3.1, Rozdz. IV, określić możemy w $F_1(G)$ gałąź jednoznaczna $\sqrt{z}$; gałąź tę oznaczmy przez $F_2(z)$. Wreszcie, przez $F_3(z)$ oznaczmy funkcję homograficzną, przekształcającą koło K_0 w siebie oraz punkt $F_2[F_1(0)]$ na punkt 0. Niech $F=F_3F_2F_1$.

Funkcja $F(z)$ jest oczywiście holomorficzna w G . Nadto ponieważ $|F_1(z)| < 1$ i $|F_3(z)| < 1$ dla $z \in K_0$, oraz $|F_2(z)| < 1$ dla $z \in F_1(G)$, zatem funkcja $F(z)$ spełnia warunek (6.5). Mamy dalej

$$(6.7) \quad F(0) = F_3[F_2F_1(0)] = 0,$$

a więc spełniony jest również pierwszy z warunków (6.6). Ażeby udowodnić, iż funkcja $F(z)$ spełnia także pozostałe dwa z tych warunków, zauważmy przede wszystkim, iż funkcje F_1 i F_3 są jednoznacznie odwracalne w całym kole K_0 , a funkcja F_2 w obszarze $F_1(G)$; tym samym funkcja $F(z)$ holomorficzna w G posiada odwrócenie

$$(6.8) \quad \Phi(z) = F_1^{-1} F_2^{-1} F_3^{-1},$$

określone w obszarze $F(G) \subset K_0$.

Nadto, choć sama funkcja $F(z)$ jest naogół holomorficzna tylko w obszarze G , jej odwrócenie rozszerza się natychmiast jako funkcja holomorficzna na całe koło K_0 , spełniając warunek

$$|\Phi(z)| < 1 \quad \text{dla} \quad z \in K_0,$$

gdyż funkcje $F_1^{-1}(z)$ i $F_3^{-1}(z)$, jako odwrócenia funkcji $F_1(z)$ i $F_3(z)$, są przekształceniami homograficznymi koła K_0 w siebie, zaś $F_2^{-1}(z) = z^2$. Ponadto z uwagi na (6.7) funkcja $\Phi(z)$ znika dla $z=0$.

Na mocy więc lematu Schwarza (tw. 5.1) mamy $|\Phi'(0)| < 1$, skąd

$$|F'(0)| = |1/\Phi'(0)| > 1,$$

oraz $|\Phi(z)| < |z|$ dla $z \in K_0$ i $z \neq 0$, skąd

$$|z| < |F(z)| \quad \text{dla } z \in G \text{ i } z \neq 0,$$

o ile tylko funkcja $\Phi(z)$ nie redukuje się do funkcji liniowej (obrotu). Gdyby jednak funkcja $\Phi(z)$ była liniowa, wówczas, jak widzimy z (6.8), funkcja $F_2^{-1} = F_1\Phi F_3$ byłaby homograficzna, co jest niemożliwe, gdyż $F_2^{-1}(z) = z^2$.

(6.9) Jeżeli G jest obszarem jednospójnym, którego dopełnienie zawiera więcej niż jeden punkt, i a jest dowolnym punktem tego obszaru, wówczas istnieje zawsze przekształcenie wierne $w = W(z)$ tego obszaru na wnętrze koła $K_0 = K(0; 1)$ takie, iż $W(a) = 0$.

Dowód. Z uwagi na lemat 6.1 założyć możemy od razu, iż obszar G jest ograniczony; następnie, iż $a = 0$, i wreszcie, stosując ewentualnie jednokładność o środku 0, że $G \subset K_0$.

Weźmy pod uwagę rodzinę $\mathfrak{M}$ wszystkich funkcji $F(z)$, holomorficznych i jednoznacznie odwracalnych w G , spełniających przy tym warunki $F(0) = 0$ oraz $F(G) \subset K_0$. Oznaczmy przez m kres górny wszystkich liczb $|F'(0)|$ dla funkcji F należących do tej rodziny. Funkcja $F(z) = z$ należy oczywiście do rodziny $\mathfrak{M}$, przy czym $|F'(0)| = 1$. Mamy tedy napewno $m \geq 1$.

Niech $\{F_n(z)\}$ będzie ciągiem funkcji rodziny $\mathfrak{M}$ takim, iż $\lim_n |F'_n(0)| = m$. Funkcje $\{F_n(z)\}$ są wspólnie ograniczone (mianowicie $|F_n(z)| \leq 1$) i przeto w myśl tw. 7.1, Rozdz. II, ciąg $\{F_n(z)\}$ zawiera podciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ zbieżny niemal jednostajnie w G . Niech $W(z) = \lim_k F_{n_k}(z)$. Mamy (Rozdz. II, tw. 6.1)

$$(6.10) \quad |W'(0)| = \lim_k |F'_{n_k}(0)| = m > 0,$$

a więc na mocy tw. 11.3, Rozdz. III, funkcja $W(z)$ jest holomorficzna i jednoznacznie odwracalna w G . Powiadamy, iż określa żądane przekształcenie wierne obszaru G na koło K_0 . Mamy przede wszystkim $W(0) = 0$, a nadto oczywiście $W(G) \subset K_0$. Załóżmy, iż $W(G) \neq K_0$. Wówczas, na mocy lematu 6.4, istniałaby funkcja $\Phi(z)$ holomorficzna i jednoznacznie odwracalna w zbiorze otwartym $W(G)$ taka, że

$$(6.11) \quad \Phi(0) = 0, \quad |\Phi(z)| < 1 \quad \text{dla } z \in W(G),$$

$$(6.12) \quad |\Phi'(0)| > 1.$$

Z uwagi na (6.11) funkcja $\Psi(z) = \Phi[W(z)]$ należałaby również do rodziny $\mathfrak{M}$, a z uwagi na (6.10) i (6.12) mielibyśmy

$$|\Psi'(0)| = |\Phi'(0) \cdot W'(0)| > m,$$

co jest sprzeczne z definicją liczby m .

Twierdzenie 6.9 możemy jeszcze tak uzupełnić:

(6.13) Jeżeli G_1 i G_2 są dwoma obszarami jednospójnymi, których dopełnienia zawierają po więcej niż jednym punkcie, i jeżeli a_1, a_2 są odpowiednio dwoma dowolnymi punktami tych obszarów, wówczas istnieje jedno i tylko jedno przekształcenie wierne, które przekształca obszar G_1 na G_2 , punkt a_1 na a_2 oraz pewien dowolnie dany kierunek w punkcie a_1 na kierunek dany w punkcie a_2 .

W szczególności, jeżeli a jest dowolnym punktem obszaru jednospójnego G , wówczas jedynym przekształceniem wiernym $w = W(z)$ tego obszaru takim, że $W(G) = G$, $W(a) = a$ oraz $W'(a) = \lambda W'(a) > 0$, jest przekształcenie tożsamościowe.

Dowód. Z uwagi na tw. 6.9 można założyć, że

$$G_1 = G_2 = K(0; 1) = K_0$$

oraz że $a_1 = a_2 = 0$. W myśl tw. 5.4 jedynymi przekształceniami wiernymi $w = W(z)$ takimi, iż $W(K_0) = K_0$ i $W(0) = 0$, są obroty o środku 0, a wśród obrotów tych istnieje oczywiście dokładnie jeden, który przekształca kierunek dany w punkcie 0 na inny kierunek dany.

Obszarami jednospójnymi nie podpadającymi pod założenia twierdzeń 6.9 i 6.13 są: płaszczyzna i płaszczyzna pozbawiona jednego punktu. Z tw. 2.1 wynika jednak, że każde przekształcenie wierne tych obszarów jest homograficzne, prowadzi przeto znów bądź do płaszczyzny domkniętej, bądź do płaszczyzny pozbawionej jednego punktu, a więc w żadnym razie nie do koła o promieniu skończonym. Co najwyżej, przez inwersję o środku w punkcie usuniętym możemy przekształcić płaszczyznę pozbawioną dowolnego punktu na płaszczyznę otwartą.

Najistotniejszą część rozważań tego § możemy więc sformułować w postaci następującego twierdzenia Riemanna:

(6.14) Każdy obszar jednospójny przekształcić można wiernie na jeden i tylko jeden z trzech obszarów następujących: 1^o płaszczyznę domkniętą, 2^o płaszczyznę otwartą, 3^o koło $K(0; 1)$.

Twierdzenie powyższe, jakkolwiek wypowiedziane przez Riemanna, nie zostało przezeń udowodnione całkowicie. Metoda użyta przez Riemanna odnosiła się przy tym tylko do obszarów ograniczonych przez krzywą zamkniętą bez punktów wielokrotnych i wiązała zagadnienie odwzorowania odpowiedniego z t. zw. zagadnieniem brzegowym Dirichleta z teorii funkcji harmonicznych. Ponadto, i w tym zakresie, oryginalny dowód Riemanna zawierał luki.

Dowód zupełny twierdzenia Riemanna w całej jego ogólności zawdzięczamy Koebemu i Carathéodory'emu. Dowód Carathéodory'ego, oparty konsekwentnie na metodach teorii funkcji zmiennej zespolonej, uległ jeszcze wielu dalszym uproszczeniom, z których wyróżnić należy przede wszystkim zreczny pomysł Fejéra i F. Riesz'a skorzystania z metody ciągów normalnych dla uniknięcia pewnych bezpośrednich, lecz rachunkowo żmudnych dowodów zbieżności. Dalsze modyfikacje dowodu podane były przez Ostrowskiego i Carathéodory'ego.

Jest rzeczą godną uwagi, iż metody te nie dają się jednak zastosować do analogicznych zagadnień, dotyczących przekształcenia wiernego (jednoznaczego) obszarów wielospójnych na pewne obszary kanoniczne. Tu już wydaje się niezbędne nawiązanie do metod riemanowskich, oczywiście stosownie uzupełnionych (por. np. Hurwitz-Courant, *Funktionentheorie*, wyd. II, Berlin 1930).

Wprawdzie metodą Carathéodory'ego-Fejéra-Riesz'a można przekształcić wiernie dowolny obszar dwuspójny na pierścień kołowy, albo na koło lub płaszczyznę otwartą, pozbawioną punktu (ob. Cremer, Ber. Sächs. Ak. Wiss. 82 (1930), 190-192), ale metoda ta zawodzi już dla obszarów trójspójnych.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli $\mathfrak{B}$ jest rodziną funkcji holomorficznych w obszarze G i żadna z funkcji tej rodziny nie przyjmuje wartości należących do pewnego kontynuuum C , wówczas $\mathfrak{B}$ jest rodziną normalną (Fatou: uogólnienie tw. 11.4, Rozdz. III; dalsze uogólnienia w Rozdz. VII).

2. Pokazać, iż w ćw. 1, § 4, Rozdz. IV, warunek, że funkcja $W(z)$ jest ograniczona w kole $K(0;1)$, zastąpić można przez warunek, że funkcja ta nie przyjmuje wartości należących do pewnego kontynuuum C .

Podobnie, w ćw. 2, § 4, Rozdz. IV, warunek, że ciąg $\{W_n(z)\}$ jest ograniczony w $K(0;1)$, zastąpić można przez warunek, że żadna z funkcji tego ciągu nie przyjmuje w $K(0;1)$ wartości należących do pewnego kontynuuum C .

3. Niech G będzie obszarem jednospójnym zawartym w kole $K(0;1)$ i zawierającym punkt 0; niech $\mathfrak{R}$ oznacza rodzinę funkcji F holomorficznych, jednoznacznie odwracalnych w G i spełniających ponadto warunki $F(0)=0$ oraz $|F(z)| < 1$ dla $z \in G$. Ustalamy pewien punkt $a \neq 0$ w obszarze G i oznaczamy przez m kres górny liczb $|F(a)|$, gdy F jest dowolną funkcją rodziny $\mathfrak{R}$.

Pokazać, że w rodzinie $\mathfrak{R}$ istnieje funkcja F_0 taka, że $|F_0(a)| = m$, oraz że funkcja ta przekształca wiernie obszar G na koło $K(0;1)$ (Carathéodory).

4. Niech Γ będzie dowolnym kontynuuum ograniczonym. Istnieje wówczas funkcja rzeczywista $R(z)$, ciągła i skończona w całej płaszczyźnie otwartej, równa 1 na Γ i taka, że dla każdego wielomianu $P(z)$ mamy $|P(z)| \leq M \cdot |R(z)|^n$, gdzie n jest stopniem wielomianu, zaś M oznacza kres górny wartości $|P(z)|$ na Γ (Mazurkiewicz-Szumskowiczówna).

[Wsk. Oznaczając przez G tę składową dopełnienia kontynuuum Γ , która zawiera punkt ∞ , a przez W funkcję, która przekształca wiernie G na koło $K(0;1)$ w ten sposób, że $W(\infty)=0$, możemy przyjąć $R(z)=1/W(z)$ dla $z \in G$ oraz $R(z)=1$ dla $z \in CG$; por. § 1, ćw. 3.]

*** § 7. Twierdzenie Radó.** W wykładzie tym nie będziemy się zajmowali przekształceniami wiernymi obszarów wielospójnych w ogóle, lecz ograniczymy się tylko do uogólnienia na dowolne obszary drugiej części tw. 6.13. Uogólnienie to, które podane zostało przez Radó, opiera się na następującym twierdzeniu Koebego, zwanym *twierdzeniem o zniekształcaniu* („Verzerrungssatz“):

(7.1) Jeżeli $\{W_n(z)\}$ jest ciągiem funkcji holomorficznych, jednoznacznie odwracalnych w kole $K = K(0;R)$, i jeżeli

(7.2) $W_n(0)=0$ dla $n=1,2,\dots$ oraz $\sup_n \varrho[0, CW_n(K)] < +\infty$,

wówczas ciąg $\{W_n(z)\}$ jest niemal ograniczony w K .

Dowód. Niech a_n oznacza punkt brzegu obszaru $W_n(K)$ taki, iż $|a_n| = \varrho[0, CW_n(K)]$. Niech $F_n(z) = W_n(z)/a_n$. Funkcje $F_n(z)$ są wraz z funkcjami $W_n(z)$ holomorficzne i jednoznacznie odwracalne w kole K ; obszary $F_n(K)$ są więc w myśl tw. 1.1 jednospójne. Nadto, każdy z tych obszarów zawiera koło $K_0 = K(0;1)$, a na brzegu — punkt 1. Na mocy tedy tw. 3.1, Rozdz. IV, w każdym z tych obszarów istnieją gałęzie holomorficzne $\log(z-1)$. Niech w szczególności $L_n(z)$ i $L_n^*(z)$ oznaczają gałęzie $\log(z-1)$ w obszarze $F_n(K)$, przyjmujące w punkcie $z=0$ odpowiednio wartości πi oraz $3\pi i$. Podobnie jak w dowodzie lematu 6.1, stwierdzamy natychmiast, iż obszary $L_n F_n(K)$ i $L_n^* F_n(K)$ są rozłączne, a więc że tym bardziej

$$(7.3) \quad L_n F_n(K) \cdot L_n^* F_n(K) \subset L_n F_n(K) \cdot L_n^* F_n(K) = 0.$$

Z drugiej strony, w kole K_0 istnieje tylko jedna gałąź $\log(z-1)$, która w punkcie $z=0$ przyjmuje wartość $3\pi i$. Obszar $L_n^*(K_0)$ nie zależy przeto od n i z (7.3) wynika, że żadna z funkcji $L_n F_n(z)$ nie przyjmuje w K wartości należących do pewnego obszaru stałego, niezależnego od n . W myśl więc tw. 11.4, Rozdz. III, funkcje $L_n F_n(z)$ tworzą rodzinę normalną w kole K , a że $L_n F_n(0) = L_n(0) = \pi i$, zatem (por. Rozdz. I, tw. 3.5) ciąg $\{L_n F_n(z)\}$ jest niemal ograniczony w K . Tym samym jednak niemal ograniczony w K jest ciąg $\{F_n(z) = 1 + \exp L_n F_n(z)\}$, a więc, z uwagi na drugi z warunków (7.2), również i ciąg $\{W_n(z) = a_n F_n(z)\}$.

(7.5) Jeżeli $W(z)$ jest przekształceniem wiernym obszaru G w siebie i jeżeli w pewnym punkcie $a \in G$ jest $W(a)=a$ oraz $W'(a) \neq 0$, wówczas, pomijając przypadek, gdy G jest płaszczyzną domkniętą lub płaszczyzną pozbawioną jednego punktu, mamy $W(z)=z$, t. j. $W(z)$ jest przekształceniem tożsamościowym.

Dowód. Możemy przyjąć oczywiście, iż $a=0$ oraz iż G nie zawiera punktu ∞ . Przyjmując dla skrócenia $R=\varrho(0,CG)$, będziemy mieli $0 < R < +\infty$. Możemy dalej założyć, iż $W'(0) \geq 1$, ponieważ w przeciwnym razie moglibyśmy rozważać przekształcenie W^{-1} zamiast W .

Przypuśćmy, iż przekształcenie $W(z)$ nie jest tożsamościowe. Rozwinięcie funkcji $W(z)$ w kole $K=K(0;R) \subset G$ możemy więc napisać w postaci

$$(7.5) \quad W(z) = a_1 z + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots, \quad \text{gdzie } a_1 \geq 1, \quad a_k \neq 0.$$

Niech $\{W_n(z)\}$ będzie ciągiem kolejnych iteracji funkcji $W(z)$ w obszarze G , t. j. niech $W_1(z) = W(z)$ oraz $W_n(z) = W[W_{n-1}(z)]$ dla $n > 1$. Każda z funkcji $W_n(z)$ jest przekształceniem wiernym obszaru G w siebie, a nadto, jak spostrzega się natychmiast,

$$W_n(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \varrho[0, CW_n(K)] \leq \varrho[0, CW_n(G)] = \varrho(0, CG) = R < +\infty;$$

ciąg $\{W_n(z)\}$ jest więc na mocy tw. 7.1 niemal ograniczony w K . Oznaczając tedy przez M kres górny wartości bezwzględnych funkcji $W_n(z)$ w kole $K(0;R/2)$ oraz przez $a_1^{(n)}$ i $a_k^{(n)}$ odpowiednio współczynniki przy z i z^k w rozwinięciu funkcji $W_n(z)$ w K , będziemy mieli:

$$(7.6) \quad |a_1^{(n)}| \leq \frac{M}{R/2}, \quad |a_k^{(n)}| \leq \frac{M}{(R/2)^k} \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Ale, jak widzimy od razu, $a_1^{(n)} = a_1^n$, co z uwagi na $a_1 \geq 1$ oraz na pierwsze z oszacowań (7.6), daje $a_1 = 1$. Ustaliwszy w ten sposób wartość a_1 , stwierdzamy przez łatwą indukcję, iż $a_k^{(n)} = n a_k$, co z uwagi na drugą z nierówności (7.6) daje $a_k = 0$. Otrzymujemy w ten sposób sprzeczność z przypuszczeniem (7.5), iż $a_k \neq 0$.

ĆWICZENIE. 1. Jeżeli $\{W_n(z)\}$ jest ciągiem funkcji holomorficznnych, jednoznacznie odwracalnych w obszarze G , i jeżeli $\sup_n |W'_n(a)| < \infty$ w pewnym punkcie $a \in G$, to ciąg $\{W_n(z)\}$ jest normalny w obszarze G .

*** § 8. Wzory Schwarza-Christoffela.** Stosując przekształcenie homograficzne, możemy zastąpić w tw. 11.4, Rozdz. IV, koło domknięte K przez półpłaszczyznę domkniętą $\Im z \geq 0$ (z dołączonym punktem ∞), a okrąg tego koła przez oś rzeczywistą. Mianowicie:

(8.1) *Jeżeli funkcja W , ciągła na półpłaszczyźnie domkniętej $\Im z \geq 0$ i holomorficzna w półpłaszczyźnie otwartej $\Im z > 0$, jest jednoznacznie odwracalna na osi rzeczywistej i przekształca tę oś na linię łamaną L (która jest oczywiście zamknięta i nie ma punktów wielokrotnych), wówczas funkcja ta przekształca wiernie półpłaszczyznę otwartą $\Im z > 0$ na obszar wewnętrzny łamanej L , a półpłaszczyznę domkniętą $\Im z \geq 0$ homeomorficznie na domknięcie tego obszaru.*

Rozważymy pewną klasę funkcji spełniających założenia tego twierdzenia.

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ będą liczbami rzeczywistymi skończonymi takimi, że $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ oraz

$$(8.2) \quad a_k < 1 \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n,$$

$$(8.3) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 1.$$

Weźmy pod uwagę całkę

$$(8.4) \quad W(z) = \int_0^z \frac{dz}{(\bar{z} - a_1)^{\alpha_1} (\bar{z} - a_2)^{\alpha_2} \dots (\bar{z} - a_n)^{\alpha_n}},$$

rozumiejąc przez $(\bar{z} - a_k)^{\alpha_k}$ funkcję $\Phi_k(\bar{z}) = \exp[\alpha_k \text{Log}(\bar{z} - a_k)]$, holomorficzną w półpłaszczyźnie otwartej $\Im z > 0$ i ciągłą w półpłaszczyźnie domkniętej $\Im z \geq 0$ ($\Phi_k(a_k) = 0, 1, \infty$ zależnie od znaku α_k). Przez $\int_0^z$ we wzorze (8.4) rozumiemy całkę wzdłuż odcinka $[0, z]$. Jak zresztą spostrzegamy od razu na zasadzie twierdzenia Cauchy'ego, całka ta ma tę samą wartość wzdłuż każdej krzywej regularnej, łączącej punkty 0 i z oraz przebiegającej w półpłaszczyźnie $\Im z \geq 0$.

Oznaczmy dla skrócenia przez $\Phi(\bar{z})$ wyrażenie pod znakiem całki we wzorze (8.4). Ze względu na (8.2) i (8.3) całka rzeczywista $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(t)| dt$ ma wartość skończoną i przeto funkcja $W(z)$ określona przez wzór (8.4) jest, podobnie jak funkcje Φ_k , holomorficzna w półpłaszczyźnie otwartej $\Im z > 0$ i ciągła na jej domknięciu. Podkreślamy, że domknięcie to obejmuje punkt ∞ i że funkcja W rozszerza się przez ciągłość również i na ten punkt. Istotnie, jeżeli z jest dowolnym punktem półpłaszczyzny $\Im z \geq 0$, wówczas, przyjmując $r = |z|$, obliczyć możemy różnicę $W(z) - W(r)$, całkując funkcję Φ wzdłuż dowolnej krzywej regularnej, przebiegającej w półpłaszczyźnie $\Im z \geq 0$ oraz łączącej punkty r i z . Całkując np. wzdłuż łuku okręgu $C(0; r)$, otrzymujemy $|W(z) - W(r)| \leq \int_0^\pi |\Phi(re^{i\theta})| r d\theta$, a ponieważ ze względu na (8.3) wyrażenie $z\Phi(z)$ dąży do zera gdy $z \rightarrow \infty$, zatem również $W(z) - W(r) \rightarrow 0$ gdy $r = |z| \rightarrow +\infty$. Z drugiej strony, gdy $r \rightarrow +\infty$ przez wartości rzeczywiste, $W(r)$ dąży do wartości całki $\int_0^{+\infty} \Phi(t) dt \neq \infty$; do tej samej granicy dąży przeto $W(z)$, gdy z dąży w dowolny sposób do ∞ w półpłaszczyźnie $\Im z \geq 0$.

Zbadajmy krzywą, na jaką funkcja W przekształca oś rzeczywistą.

Zauważmy w tym celu, że dla wartości t rzeczywistych funkcja $\Phi_k(t)$ ma argument stały (z dokładnością oczywiście do całkowitej wielokrotności 2π) zarówno, gdy $t < a_k$, jak i gdy $t > a_k$. Gdy przechodzimy od wartości $t < a_k$ do wartości $t > a_k$, argument $\Phi_k(t)$ zmniejsza się o $a_k\pi$. Wynika stąd, że argument funkcji $\Phi(z)$ pod znakiem całki we wzorze (8.4) ma także wartość stałą na każdym z $n+1$ obszarów wartości rzeczywistych z , określonych odpowiednio przez nierówności:

$$z < a_1, \quad a_1 < z < a_2, \quad a_2 < z < a_3, \quad \dots, \quad a_{n-1} < z < a_n, \quad z > a_n,$$

przy czym przy przejściu od każdego z tych obszarów do następnego argument funkcji ulega powiększeniu o $a_k\pi$. Tym samym przy przejściu od wartości $z > a_n$ do wartości $z < a_1$ argument $\Phi(z)$ ulega zmniejszeniu o $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\pi$, lub — co jest równoważne (pomijając oczywiście całkowite wielokrotności 2π) — powiększeniu o $(2 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)\pi$.

Rozważając teraz funkcję $W(z)$ na osi rzeczywistej i różniczkując $W(z)$ względem zmiennej rzeczywistej z , otrzymujemy z (8.4), iż $dW(z)/dz = \Phi(z)$. Wynika stąd natychmiast wobec stałości $\arg \Phi(z)$ wewnątrz każdego z przedziałów osi rzeczywistej

$$[-\infty, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, +\infty],$$

że przedziały te przechodzą odpowiednio na odcinki

$$[W(\infty), W(a_1)], [W(a_1), W(a_2)], \dots, [W(a_{n-1}), W(a_n)], [W(a_n), W(\infty)].$$

Cała zatem oś rzeczywista przechodzi na łamaną zamkniętą $[W(\infty), W(a_1), \dots, W(a_n), W(\infty)]$. Jeżeli łamana ta nie ma punktów wielokrotnych, wówczas przekształcenie W osi rzeczywistej na łamaną zamkniętą jest jedno-jednoznaczne. Funkcja W czyni więc wtedy zadość warunkom tw. 8.1 i przekształca wiernie półpłaszczyznę otwartą $\Im z > 0$ na obszar wewnętrzny łamanej $[W(\infty), W(a_1), \dots, W(a_n), W(\infty)]$, a półpłaszczyznę domkniętą $\Im z \geq 0$ na domknięcie tego obszaru. Kąty „zewewnętrzne” tej łamanej, t. j. kąty między kolejnymi odcinkami zorientowanymi

$$\overrightarrow{[W(\infty), W(a_1)]}, \overrightarrow{[W(a_1), W(a_2)]}, \dots, \overrightarrow{[W(a_n), W(\infty)]}, \overrightarrow{[W(\infty), W(a_1)]},$$

są odpowiednio równe $a_1\pi, \dots, a_n\pi, (2 - a_1 - \dots - a_n)\pi$. (Łamana ta jest na ogół $(n+1)$ -kątem; jeżeli jednak $a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv 2, \text{ mod } 2$, to odcinki $\overrightarrow{[W(a_n), W(\infty)]}$ i $\overrightarrow{[W(\infty), W(a_1)]}$ tworzą jeden odcinek $\overrightarrow{[W(a_n), W(a_1)]}$ i łamana staje się n -kątem.)

Wzory postaci (8.4) nazywamy *wzorami Schwarz-Christoffela*. Różne uogólnienia tych wzorów (por. np. éw. 6, str. 229) polegają na uwzględnieniu w (8.4) również i przypadków, gdy $a_k = 1$ lub $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$; otrzymujemy wówczas przekształcenia półpłaszczyzny na obszary wielokątne „uogólnione”, których brzeg składać się może nie tylko z odcinków, ale i z półprostych.

Należy zauważyć, że na ogół jest dość trudno wywnioskować ze wzoru (8.4), czy przekształcenie W przekształca oś rzeczywistą na wielokąt bez punktów wielokrotnych. Łatwe to jest jednak w pewnych przypadkach najprostszych, gdy np. $n=2$, $0 < a_1 < 1$, $0 < a_2 < 1$, $1 < a_1 + a_2 < 2$. Funkcja W przekształca wówczas półpłaszczyznę $\Im z > 0$ wiernie na wnętrze trójkąta o kątach „wewnętrznych” równych $(1 - a_1)\pi$, $(1 - a_2)\pi$, $(a_1 + a_2 - 1)\pi$. Dobierając stosownie wartości a_1, a_2 , możemy w ten sposób otrzymać przekształcenie półpłaszczyzny na trójkąt o dowolnym kształcie (a nawet na całkiem dowolny trójkąt, o ile funkcję $W(z)$ zastąpimy przez funkcję postaci $aW(z) + b$, gdzie a i b są stałymi współczynnikami).

Inną, łatwą do bezpośredniego zbadania specjalizację wzoru Schwarz-Christoffela otrzymujemy, przyjmując we wzorze (8.4) $n=3$, $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$. Funkcja $W(z)$ przekształca wówczas półpłaszczyznę $\Im z \geq 0$ na prostokąt.

ĆWICZENIA. 1. Niech

$$W(z) = \int_0^z \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_1}\right)^{-\alpha_1} \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_2}\right)^{-\alpha_2} \dots \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_n}\right)^{-\alpha_n} d\bar{\lambda},$$

gdzie $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ są punktami na okręgu $C(0;1)$, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ liczbami rzeczywistymi takimi, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2$; przez $\left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_k}\right)^{\alpha_k}$ dla $k=1, 2, \dots, n$ rozumiemy wartości główne odpowiednich potęg.

Pokazać, że funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w kole otwartym $K(0;1)$, ciągła na kole domkniętym $\bar{K}(0;1)$ i przekształca okrąg $C(0;1)$ na pewną łamaną zamkniętą L o kątach wewnętrznych $(1 - \alpha_1)\pi$, $(1 - \alpha_2)\pi$, ..., $(1 - \alpha_n)\pi$.

Jeżeli łamana ta nie ma punktów wielokrotnych, t. j. jeżeli funkcja $W(z)$ jest jednoznacznie odwracalna na okręgu $C(0;1)$, wówczas funkcja $W(z)$ jest jednoznacznie odwracalna na całym kole domkniętym $\bar{K}(0;1)$ i przekształca wiernie koło $K(0;1)$ na obszar wewnętrzny łamanej L .

2. Jeżeli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ są punktami na okręgu $C(0;1)$, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ liczbami rzeczywistymi takimi, że:

$$(*) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2, \quad (**) \quad \alpha_1/\delta_1 + \alpha_2/\delta_2 + \dots + \alpha_n/\delta_n = 0,$$

to funkcja

$$W(z) = \int_{z_0}^z \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(1 - \frac{\delta}{\delta_n}\right)^{\alpha_n} \frac{d\delta}{\delta^2},$$

gdzie z_0 jest dowolnie ustalonym punktem na $C(0;1)$, jest ciągła na kole domkniętym $\bar{K}(0;1)$ i meromorficzna w jego wnętrzu, przy czym jedynym jej biegunem jest punkt 0. Wyjaśnić rolę warunku (*).

Funkcja $W(z)$ przekształca okrąg $C(0;1)$ na pewną łamaną zamkniętą L o kątach wewnętrznych $(1-\alpha_1)\pi, (1-\alpha_2)\pi, \dots, (1-\alpha_n)\pi$. Jeżeli łamana ta nie ma punktów wielokrotnych, wówczas funkcja $W(z)$ jest jednoznacznie odwracalna w kole domkniętym $\bar{K}(0;1)$ i przekształca wiernie jego wnętrze na obszar zewnętrzny łamanej L .

[Wsk. por. Rozdz. IV, § 11, ćw. 1.]

3. Funkcja $W(z) = \int_{z_0}^z (1-\delta^n)^{-2/n} d\delta$ przekształca wiernie koło $K(0;1)$ na obszar wewnętrzny n -kąta foremnego, zaś homeomorficznie koło domknięte $\bar{K}(0;1)$ na domknięcie tego obszaru. Obwód wielokąta równy jest $2^{n-2} \int_0^\pi (\sin \vartheta)^{-2/n} d\vartheta$.

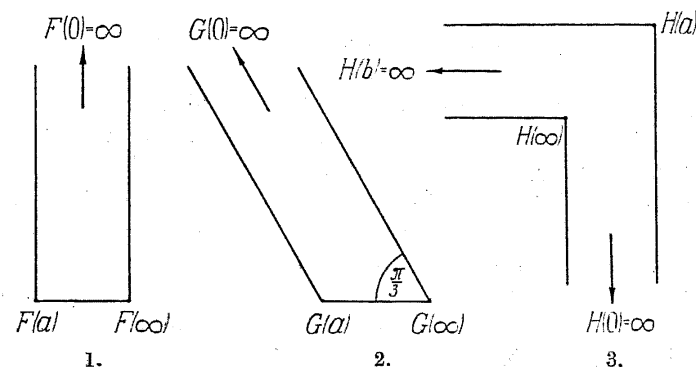
4. Funkcja $W(z) = \int_{z_0}^z (1-\delta^n)^{2/n} \frac{d\delta}{\delta^2}$, gdzie z_0 jest dowolnie ustalonym punktem na okręgu $C(0;1)$, przekształca wiernie koło $K(0;1)$ na obszar zewnętrzny n -kąta foremnego, zaś homeomorficznie koło domknięte $\bar{K}(0;1)$ na domknięcie tego obszaru.

5. Niech $F(z)$ będzie funkcją holomorficzną, nigdzie nie znikającą w pewnym otoczeniu $K=K(0;r)$ punktu 0 i taką, że $\text{Arg} F(z)$ ma wartość stałą w pewnym przedziale $[-\varepsilon, \varepsilon]$ osi rzeczywistej (warunek ten jest np. spełniony, gdy funkcja $F(z)$ jest rzeczywista i różna od zera w tym przedziale). Funkcja

$$W(z) = \int_{z_0}^z \frac{F(z)}{z} dz,$$

gdzie z_0 jest dowolnie ustalonym (w otoczeniu K) punktem półpłaszczyzny $\Im z > 0$, jest wówczas holomorficzna w obszarze $0 < |z| < r$, $\Im z \geq 0$, i przekształca przedziały $[-\varepsilon, 0]$ i $[0, \varepsilon]$ na dwie półproste równoległe i zgodnie skierowane. Odległość tych półprostych równa jest $\pi \cdot |F(0)|$.

6. a) Funkcja $F(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\delta}{\delta \sqrt{\delta-a}}$, gdzie z_0 jest dowolnie ustalonym punktem płaszczyzny $\Im z > 0$, zaś $a > 0$, przekształca półpłaszczyznę $\Im z \geq 0$ na półpas o szerokości $\pi/\sqrt{a}$, zakreślony na rys. 1.



b) Funkcja $G(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\delta}{\delta(\delta-a)^{1/3}}$ przekształca półpłaszczyznę $\Im z \geq 0$ na obszar domknięty, zakreślony na rys. 2.

c) Funkcja $H(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\delta}{\delta(\delta-a)^{1/2}(\delta-b)}$, gdzie $0 < a < b$, przekształca półpłaszczyznę $\Im z \geq 0$ na obszar domknięty, zakreślony na rys. 3. Określić szerokość dwu pasów, z jakich obszar ten się składa.