

ROZDZIAŁ III

FUNKCJE MEROMORFICZNE

§ 1. Szereg potęgowy w kole zbieżności. Szeregiem potęgowym, albo szeregiem Taylora, o środku $z_0 \neq \infty$ i współczynnikach a_n , gdzie $n=0, 1, 2, \dots$, nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, gdzie z oznacza zmienną zespoloną. Przez szereg o tych samych współczynnikach, lecz o środku $z_0 = \infty$, rozumiemy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^n$.

Jeżeli szereg potęgowy o środku z_0 jest zbieżny wszędzie w pewnym kole $K(z_0; r)$, wówczas wśród wszystkich kół $K(z_0; r)$, w których szereg ten jest wszędzie zbieżny, jest jedno największe. Nazywamy je *kolem zbieżności* rozważanego szeregu; promień koła zbieżności, który może być oczywiście nieskończony, nazywa się *promieniem zbieżności* szeregu. Jeżeli szereg potęgowy o środku z_0 nie jest wszędzie zbieżny w żadnym kole $K(z_0; r)$ o promieniu dodatnim, wówczas mówimy, że *promień zbieżności tego szeregu jest równy zeru*.

Przez przekształcenie $\zeta = z - z_0$, jeżeli $z_0 \neq \infty$, lub przez przekształcenie $\zeta = 1/z$, jeżeli $z_0 = \infty$, możemy każdy szereg o środku z_0 przekształcić na szereg o środku 0 i tych samych, co szereg dany, współczynnikach. Przy przekształceniu tym promień zbieżności nie ulega oczywiście zmianie. Uwaga ta pozwala w większości przypadków ograniczyć się do rozważania szeregów potęgowych o środku 0.

(1.1) **Twierdzenie Cauchy-Hadamarda.** Promień zbieżności szeregu potęgowego o współczynnikach a_n (gdzie $n=0, 1, \dots$) równy jest

$$R_0 = \liminf_n \frac{1}{|a_n|^{1/n}}.$$

(1.2) Szereg potęgowy (o dodatnim promieniu zbieżności) jest bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny w swym kole zbieżności, suma zaś jego w tym kole jest funkcją holomorficzną; zewnątrz swego koła zbieżności szereg potęgowy jest wszędzie rozbieżny.

Udowodnimy jednocześnie obydwa twierdzenia 1.1 i 1.2, przyjmując, iż rozważane szeregi mają środek w punkcie 0. Dowód rozbijemy na dwie części.

a) Szereg potęgowy $\sum_n a_n z^n$ jest rozbieżny w każdym punkcie z zewnątrz koła $K(0; R_0)$, gdzie $R_0 = \liminf_n 1/|a_n|^{1/n}$.

Istotnie, jeżeli $|z_1| > R_0$, wówczas istnieją dowolnie wielkie wartości n , dla których $|z_1| > 1/|a_n|^{1/n}$, a więc $|a_n z_1^n| > 1$. Wyraz ogólny $a_n z^n$ rozważanego szeregu nie dąży tedy w punkcie $z = z_1$ do zera i szereg jest w tym punkcie z pewnością rozbieżny.

b) Szereg $\sum_n a_n z^n$ jest bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny w kole $K(0; R_0)$.

Możemy przyjąć, że $R_0 > 0$. Niech r będzie dowolną liczbą dodatnią mniejszą od R_0 i niech r_0 będzie dowolną liczbą taką, iż

$$r < r_0 < R_0 = \liminf_n 1/|a_n|^{1/n}.$$

Wówczas, poczynając od pewnej wartości N wskaźnika n , mamy $|r_0| < 1/|a_n|^{1/n}$, t.j. $|a_n r_0^n| < 1$. Zatem, dla $n \geq N$, mamy $|a_n r^n| = |a_n r_0^n| \cdot |r/r_0|^n < |r/r_0|^n$. Wyrazy $a_n z^n$ rozważanego szeregu są tedy dla $|z| \leq r$ oraz $n \geq N$ mniejsze bezwzględnie od odpowiednich wyrazów postępu geometrycznego $\sum_n (r/r_0)^n$, zbieżnego z uwagi na $r < r_0$. Szereg ten jest tedy bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w każdym kole $K(0; r)$ dla $r < R_0$, a więc tym samym bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny w kole $K(0; R_0)$, i na mocy tw. 6.1, Rozdz. II, suma jego jest w tym kole funkcją holomorficzną.

Twierdzenie 1.2 rozstrzyga sprawę zbieżności szeregu wewnątrz i zewnątrz koła zbieżności. Nie przesądza wszakże nic o zbieżności szeregu na okręgu koła zbieżności. Istotnie, szereg potęgowy może tam zachowywać się najrozmaiciej. Np. z dwu szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ o wspólnym promieniu zbieżności 1, pierwszy jest wszędzie rozbieżny, a drugi wszędzie zbieżny na okręgu koła zbieżności. Możliwe jest również, iż szereg potęgowy jest w pewnych punktach okręgu koła zbieżności zbieżny, a w pewnych rozbieżny: np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ jest rozbieżny dla $z=1$, a zbieżny dla $z=-1$; szereg ten na okręgu koła zbieżności zbadany będzie dokładniej w § 3.

O funkcji, która w kole $K(z_0; r)$ jest sumą szeregu potęgowego o środku z_0 , mówimy, iż *rozwija się* na ten szereg w kole $K(z_0; r)$ albo iż szereg ten *przedstawia ją*, lub jest jej *rozwiniciem*, w kole $K(z_0; r)$.

Na mocy tw. 6.1, Rozdz. II, pochodną szeregu potęgowego otrzymujemy w jego kole zbieżności przez różniczkowanie formalne szeregu wyraz za wyrazem. Innymi słowy, jeżeli $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, wówczas w kole zbieżności mamy:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} F'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad F''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2}, \dots, \\ F^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}, \dots \end{aligned}$$

Analogiczne wzory mamy oczywiście dla szeregów o środku ∞ (wyłączając, rzecz prosta, sam punkt $z = \infty$).

Z twierdzenia Cauchy-Hadamarda 1.1 wynika natychmiast, iż *koło zbieżności szeregu zróżniczkowanego pokrywa się z kołem zbieżności szeregu danego*.

Wreszcie, jeżeli środek szeregu potęgowego z_0 leży w skończoności, wówczas, podstawiając $z = z_0$ w wyrażeniach (1.3), otrzymujemy następujące wzory na współczynniki szeregu:

$$(1.4) \quad a_0 = F(z_0), \quad a_1 = \frac{F'(z_0)}{1!}, \quad \dots, \quad a_k = \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \dots$$

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli dla szeregu potęgowego $\sum_n a_n z^n$ istnieje granica (skończona lub nieskończona) $\lim_n |a_n/a_{n+1}| = R$, wówczas R jest promieniem zbieżności szeregu.

2. Znaleźć promień zbieżności szeregów potęgowych:

$$(a) \sum_n n^a z^n, \quad (b) \sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad (c) \sum_n \frac{n^n}{n!} z^n,$$

$$(d) \sum_n a^n z^{bn} \quad (\text{gdzie } a \neq 0, \text{ zaś } b \text{ jest liczbą całkowitą większą od jedności}).$$

$$(e) \sum_n \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n)} z^n$$

(szereg *hypergeometryczny*; α, β, γ — dowolne liczby zespolone, przy czym γ nie jest liczbą całkowitą ujemną).

3. Jeżeli funkcja $F(z)$, ciągła na kole domkniętym $\bar{K}(0; R)$, rozwija się wewnątrz tego koła na szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, wówczas dla każdej liczby całkowitej n mamy:

$$(*) \quad \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} F(R \exp 2h\pi i/n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} R^{nk}$$

(liczby $\exp 2h\pi i/n$, gdzie $h=0, 1, \dots, n-1$, tworzą pełny układ pierwiastków n -tego stopnia z jedności, zaś lewa strona równości $(*)$ jest średnią arytmetyczną wartości funkcji F w punktach podziału okręgu $C(0; R)$ na n równych łuków).

[Wsk. Por. Rozdz. I, § 10, ćw. 5.]

4. Jeżeli szeregi potęgowe $\sum_n a_n z^n$ oraz $\sum_n b_n z^n$ są zbieżne w kole $K(0; R)$ odpowiednio do funkcji $F(z)$ oraz $G(z)$, wówczas dla $0 < r < R$

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F(re^{i\theta}) \cdot \overline{G(re^{i\theta})} + \overline{F(re^{i\theta})} \cdot G(re^{i\theta})] d\theta = \sum_n (a_n \bar{b}_n + \bar{a}_n b_n) r^{2n};$$

w szczególności

$$(**) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_n |a_n|^2 r^{2n} \quad (\text{Tożsamości Parsevala}).$$

Jeżeli funkcje F i G są określone i ciągłe na całym kole domkniętym $\bar{K}(0; R)$, wówczas wzory $(*)$ i $(**)$ są prawdziwe również dla $r=R$, niezależnie od zbieżności danych szeregów na okręgu tego koła.

5. Jeżeli $F(z) = \sum_n a_n z^n$ w kole $K(0; R)$ i jeżeli $|F(z)| \leq M$ dla $|z| < R$, wówczas

$$\sum_n |a_n|^2 R^{2n} \leq M^2.$$

6. Jeżeli $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ w kole $K(0; R)$ i jeżeli

$$|a_1| \geq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| R^{n-1},$$

wówczas funkcja F jest jednoznacznie odwracalna w kole $K(0; R)$, t. zn. przyjmuje wartości różne w każdych dwu różnych punktach tego koła (Landau).

[Wsk. Zakładając, że $F(z_1) = F(z_2)$, gdzie $|z_1| < R$, $|z_2| < R$ oraz $z_1 \neq z_2$, rozważyć równość $\sum_n a_n (z_2^n - z_1^n) = 0$.]

§ 2. Twierdzenie Abela. W badaniach nad zachowaniem się szeregów potęgowych na okręgu koła zbieżności rolę podstawową odgrywa następujące *twierdzenie Abela*:

(2.1) Jeżeli szereg $\sum a_n z^n$ jest zbieżny w punkcie $z = Re^{i\theta}$, wówczas

$$(2.2) \quad \lim_{r \rightarrow R-} \sum a_n r^n e^{in\theta} = \sum a_n R^n e^{in\theta};$$

ogólniej: jeżeli szereg po stronie prawej wzoru (2.2) jest jednostajnie zbieżny na pewnym zbiorze wartości θ , wówczas przejście do granicy przy $r \rightarrow R$, wskazane po stronie lewej tego wzoru, jest również jednostajne na tym zbiorze.

Należy tu zauważyć, iż jeżeli rozważany szereg potęgowy jest zbieżny dla $z = Re^{i\theta}$, wówczas tym samym, w myśl tw. 1.2, promień jego jest co najmniej równy R , a więc, dla $r < R$, szereg występujący w (2.2) pod znakiem granicy jest na pewno zbieżny. Oczywiście, omawiane twierdzenie jest interesujące tylko wtedy, gdy R jest promieniem zbieżności szeregu. Jeżeli bowiem punkt $Re^{i\theta}$ leży wewnątrz koła zbieżności, wówczas związek (2.2) jest oczywistą konsekwencją ciągłości funkcji przedstawionej przez szereg potęgowy wewnątrz jego koła zbieżności.

Zauważmy także, że granica po stronie lewej wzoru (2.2) może istnieć, choć szereg po stronie prawej nie jest zbieżny. Np. szereg $\sum z^n$ jest rozbieżny w punkcie -1 , chociaż suma jego $1/(1-z)$ dąży do $1/2$, gdy $z \rightarrow -1$ przy $|z| < 1$.

Dowód tw. 2.1 opiera się na następującym *przekształceniu Abela*:

(2.3) Jeżeli $\{u_n\}$ i $\{v_n\}$ są dwoma ciągami liczb i $s_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ dla $k = 1, 2, \dots$, wówczas dla każdego n

$$(2.4) \quad \sum_{k=1}^n u_k v_k = s_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

Dowód. Przyjmując $s_0 = 0$, widzimy, iż lewa strona wzoru (2.4) równa jest

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) v_k &= \sum_{k=1}^n s_k v_k - \sum_{k=1}^n s_{k-1} v_k = \\ &= \sum_{k=1}^n s_k v_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k v_{k+1} = s_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}). \end{aligned}$$

Przekształcenie Abela pozwala udowodnić pewne podstawowe kryteria zbieżności dla szeregów funkcyjnych postaci

$$(2.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(y),$$

gdzie $u_n(x)$ oraz $v_n(y)$ są odpowiednio funkcjami zespolonymi na dwu dowolnych zbiorach X i Y . Mianowicie:

(2.6) Szereg (2.5) jest jednostajnie zbieżny na $X \times Y$ (t.j. dla $x \in X$ oraz $y \in Y$) w każdym z następujących trzech przypadków:

(a) jeżeli szereg

$$(2.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na X , zaś $\{v_n(y)\}$ jest ciągiem monotonicznym funkcji rzeczywistych, ograniczonym na zbiorze Y ;

(b) jeżeli szereg (2.7) jest ograniczony na X , zaś ciąg $\{v_n(y)\}$ jest ciągiem monotonicznym funkcji rzeczywistych, zbieżnym jednostajnie do zera na zbiorze Y ;

(c) jeżeli szereg (2.7) jest zbieżny jednostajnie na X , a szereg

$$(2.8) \quad |v_1(y)| + \sum_{n=1}^{\infty} |v_n(y) - v_{n+1}(y)|$$

ograniczony na Y .

Dowód. Oznaczmy dla każdego m przez ε_m kres górny sum $|\sum_{k=m+1}^q u_k(x)|$ dla $q > m$ oraz $x \in X$. Mamy wówczas, stosując przekształcenie Abela (2.3),

$$(2.9) \quad \left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x) v_k(y) \right| \leq \varepsilon_m \cdot \left[|v_n(y)| + \sum_{k=m+1}^{n-1} |v_k(y) - v_{k+1}(y)| \right].$$

Jeżeli teraz funkcje $v_k(y)$ są rzeczywiste i tworzą ciąg monotoniczny, wówczas wyrażenie w nawiasie kwadratowym napisać możemy w postaci

$$(2.10) \quad |v_n(y)| + |v_n(y) - v_{m+1}(y)|.$$

Wyrażenie to w przypadku, gdy spełnione są założenia warunku (a), jest ograniczone na Y , podczas gdy $\varepsilon_m \rightarrow 0$ wraz z $m \rightarrow \infty$. W przypadku natomiast, gdy spełniony jest warunek (b), wyrażenie (2.10) dąży jednostajnie do zera wraz z $m, n \rightarrow \infty$, podczas gdy liczby ε_m tworzą ciąg ograniczony. W obydwu zatem przypadkach prawa strona nierówności (2.9) dąży jednostajnie do zera wraz z $m \rightarrow \infty$ i szereg (2.5) jest przeto jednostajnie zbieżny na $X \times Y$.

Niech teraz M oznacza kres górny sumy (2.8) na Y . Wówczas dla każdej wartości wskaźnika n

$$|v_n(y)| \leq |v_1(y)| + |v_n(y) - v_1(y)| \leq |v_1(y)| + \sum_{k=1}^{n-1} |v_{k+1}(y) - v_k(y)| \leq M.$$

Wyrażenie po lewej stronie nierówności (2.9) nie przewyższa zatem $2M \cdot \varepsilon_m$; w przypadku więc, gdy spełniony jest warunek (c), t. j. gdy M jest liczbą skończoną i $\varepsilon_m \rightarrow 0$, wyrażenie to dąży jednostajnie do zera wraz z $m \rightarrow \infty$. Szereg (2.5) jest tedy w tym przypadku znów jednostajnie zbieżny, co należało udowodnić.

Twierdzenie Abela 2.1, sformułowane na początku tego §, możemy udowodnić obecnie w postaci następującej, nieco nawet ogólniejszej:

(2.11) *Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest jednostajnie zbieżny na pewnym zbiorze Z_0 , wówczas jest również jednostajnie zbieżny (i przedstawia przeto funkcję jednostajnie ciągłą) na zbiorze Z , utworzonym z odcinków łączących punkt 0 z punktami zbioru Z_0 .*

Dowód. Każdy punkt $z \in Z$ przedstawiony być może w postaci $z = r\zeta$, gdzie $\zeta \in Z_0$ i $0 \leq r \leq 1$. Jednostajną zbieżność rozważanego szeregu na Z otrzymujemy więc natychmiast przez zastosowanie kryterium (a) tw. 2.6 do szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \cdot r^n$; istotnie, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ jest zbieżny jednostajnie dla $\zeta \in Z_0$, a $\{r^n\}_{n=0,1,\dots}$ jest ciągiem monotonicznym i ograniczonym liczb rzeczywistych.

Tw. 2.11 uzasadnia przejście jednostajne do granicy we wzorze (2.2) twierdzenia 2.1 i tym samym obejmuje to twierdzenie.

Z tw. 2.11 wynika, iż jeżeli szereg potęgowy jest odpowiednio zbieżny jednostajnie: 1° na całym okręgu swego koła zbieżności, 2° na pewnym łuku L tego okręgu, 3° w pewnym punkcie z_0 okręgu, wówczas jest jednostajnie zbieżny (i przedstawia przeto funkcję ciągłą) odpowiednio: 1° na całym domkniętym kole zbieżności, 2° na domkniętym wycinku kołowym wspartym na łuku L , 3° na promieniu łączącym środek koła z punktem z_0 .

Przypadek 3° nasuwa jeszcze pewne uwagi dodatkowe. Jeżeli szereg $F(z) = \sum_n a_n z^n$ jest zbieżny w punkcie z_0 , wówczas tw. 2.11 (jak również tw. 2.1) uzasadnia przejście do granicy $F(z) \rightarrow F(z_0)$ przy $z \rightarrow z_0$ tylko wtedy, gdy z dąży do z_0 wzdłuż promienia koła. Istotnie związek ten jest na ogół fałszywy, gdy z dąży do z_0 w dowolny sposób z wnętrza koła zbieżności, natomiast pozostaje prawdziwy, gdy zastrzeżemy, że z przebiega tylko punkty obszaru, wyciętego z koła zbieżności przez dwie dowolne cięciwy, wychodzące z punktu z_0 .

Przyjmując dla prostoty $z_0 = 1$, możemy twierdzenie to sformułować w sposób następujący:

(2.12) *Jeżeli szereg $F(z) = \sum_n a_n z^n$ jest zbieżny dla $z=1$, wówczas $F(z) \rightarrow F(1)$, gdy punkt z dąży do 1 z wnętrza koła $K(0;1)$ w ten sposób, że wyrażenie $|1-z|/(1-|z|)$ pozostaje ograniczone.*

Dowód. Niech N będzie dowolną liczbą dodatnią skończoną i niech Z oznacza zbiór tych punktów z koła domkniętego $\bar{K}(0;1)$, dla których $|1-z| \leq N \cdot (1-|z|)$. [Zbiór ten zawiera w szczególności punkt 1. Mamy dla $z \in Z$

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} |z^n - z^{n+1}| = 1 + |1-z| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |z^n| = 1 + \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq N+1;$$

z drugiej strony, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny z założenia. W myśl tedy kryterium (c) tw. 2.6 szereg $\sum_n a_n z^n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze Z i przedstawia na Z funkcję ciągłą. Mamy więc $F(z) \rightarrow F(1)$, gdy z dąży do 1, przebiegając punkty zbioru Z .

Łatwo podać interpretację geometryczną warunku, iż wyrażenie $|1-z|/(1-|z|)$ jest ograniczone. Przyjmując mianowicie $1-z = r \exp i\varphi$, mamy $|z|^2 = |1 - r \exp i\varphi|^2 = (1 - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = 1 - 2r \cos \varphi + r^2$; zatem

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{r \cdot (1+|z|)}{1-|z|^2} = \frac{1+|1-r \exp i\varphi|}{2 \cos \varphi - r},$$

przy czym dla $z=1$, t. j. dla $r=0$, wyrażenie to przyjmuje postać $1/\cos \varphi$. Ograniczoność wyrażenia $|1-z|/(1-|z|)$ przy $z \rightarrow 1$ jest tedy równoważna ograniczoności wyrażenia $1/\cos \varphi$, gdzie $\varphi = \arg(1-z)$; to zaś oznacza, iż z przebiegać ma pewien obszar, wycięty z koła zbieżności przez parę cięciw wychodzących z punktu 1.

Powracając do twierdzenia Abela w postaci (2.1) i przyjmując w nim $R=1$ oraz $\theta=0$, otrzymujemy następujące twierdzenie z teorii uogólnionych metod sumowalności szeregów: Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i A jest jego sumą, wówczas

$$(2.13) \quad \lim_{r \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = A.$$

Twierdzenie odwrotne jest oczywiście na ogół fałszywe: np. dla $a_n = (-1)^n$ wyrażenie po stronie lewej równości (2.13) jest oznaczone i równe $\frac{1}{2}$, podczas gdy szereg $\sum_n a_n$ jest rozbieżny. Jednakże dla pewnych klas szeregów twierdzenie Abela jest odwracalne. Jedną z tych klas wyróżnia następujące

(2.14) *Twierdzenie Taubera.* Jeżeli $na_n \rightarrow 0$ i istnieje granica

$$(2.15) \quad \lim_{r \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = A,$$

wówczas szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny.

Dowód. Niech $s_k(r)$ oznacza k -tą sumę cząstkową szeregu $\sum_n a_n r^n$. Przyj-

mując $r_k = 1 - \frac{1}{k}$, udowodnimy przede wszystkim, iż

$$(2.16) \quad \lim_k s_k(r_k) = A$$

lub, co jest równoważne z uwagi na (2.15), iż

$$(2.17) \quad \lim_k \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n r_k^n = 0.$$

Oznaczmy w tym celu przez η_k kres górny liczb $|na_n|$ dla $n > k$. Będziemy mieli

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n r_k^n \right| \leq \eta_k \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{r_k^n}{n} \leq \frac{\eta_k}{k} \cdot \frac{r_k^{k+1}}{1-r_k} \leq \eta_k,$$

skąd, ponieważ $\eta_k \rightarrow 0$, wynika równość (2.17).

Oszacujemy teraz różnicę $s_k(1) - s_k(r_k)$. Ponieważ

$$1 - r_k^n = (1 - r_k) \cdot (1 + r_k + \dots + r_k^{n-1}) \leq n/k,$$

przeto

$$|s_k(1) - s_k(r_k)| \leq \sum_{n=0}^k |a_n| \cdot (1 - r_k^n) \leq \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k n \cdot |a_n|;$$

z uwagi na $na_n \rightarrow 0$ prawa strona tej nierówności dąży do zera, gdy $k \rightarrow +\infty$, a więc, ze względu na (2.16), $\lim_k s_k(1) = A$. Ponieważ zaś $s_k(1)$ jest k -tą sumą cząstkową szeregu $\sum_n a_n$, szereg ten jest zbieżny do granicy A , co należało udowodnić.

ĆWICZENIA. 1. Niech $\{s_n\}_{n=0,1,\dots}$ oznacza ciąg sum cząstkowych szeregu $\sum_n a_n$ i niech $\sigma_n = (s_0 + s_1 + \dots + s_n)/(n+1)$ dla $n = 0, 1, \dots$

Wówczas, jeżeli ciąg $\{\sigma_n\}_{n=0,1,\dots}$ jest ograniczony, to szeregi $\sum_n a_n z^n$, $\sum_n s_n z^n$ i $\sum_n (n+1) \sigma_n z^n$ są zbieżne dla $|z| < 1$, przy czym

$$\sum_n a_n z^n = (1-z) \sum_n s_n z^n = (1-z)^2 \sum_n (n+1) \sigma_n z^n$$

(ciąg $\{\sigma_n\}$ jest oczywiście zawsze ograniczony, gdy szereg $\sum_n a_n$ jest ograniczony, t. zn. gdy ciąg sum cząstkowych $\{s_n\}$ jest ograniczony.)

[Wsk. Zastosować do strony lewej równości dwukrotnie przekształcenie Abela (2.3).]

2. Zachowując oznaczenia ćwiczenia poprzedniego, dowieść, iż, jeżeli ciąg $\{\sigma_n\}$ jest zbieżny i $\lim_n \sigma_n = A$, to

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \sum_n a_n r^n = A.$$

3. Niech $\{s_n(z)\}_{n=0,1,\dots}$ oznacza ciąg sum cząstkowych szeregu potęgowego $\sum_n a_n z^n$. Wówczas: (a) na to, aby punkt z_0 leżał wewnątrz lub na okręgu koła zbieżności tego szeregu, konieczne jest i wystarcza, by $\limsup_n |s_n(z_0)|^{1/n} \leq 1$; (b) na to, by szereg dany miał promień zbieżności różny od zera, konieczne jest i wystarcza, by ciąg $\{|s_n(z)|^{1/n}\}_{n=1,2,\dots}$ był niemal ograniczony w całej płaszczyźnie otwartej.

4. Jeżeli istnieje liczba skończona M taka, że

$$|na_n| < M \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad \text{oraz} \quad \left| \sum_n a_n r^n \right| < M \quad \text{dla } 0 \leq r < 1,$$

wówczas szereg $\sum_n a_n$ jest ograniczony (t. zn. ciąg sum cząstkowych szeregu jest ograniczony).

[Wsk. Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia Taubera 2.14.]

5. Jeżeli $\sum_n n|a_n|^2 < +\infty$ i granica

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \sum_n a_n r^n$$

istnieje, to szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny (Fejér).

[Wsk. Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia Taubera 2.14; skorzystać z oszacowań

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n \right)^2 &= \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{1/2} |a_n| \cdot \frac{r^n}{n^{1/2}} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} n |a_n|^2 \right) \cdot \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} \right), \\ \left(\sum_{n=p+1}^k |a_n| \right)^2 &\leq \left(\sum_{n=p+1}^k n |a_n|^2 \right) \cdot \left(\sum_{n=p+1}^k \frac{1}{n} \right) \leq k^2 \sum_{n=p+1}^k |a_n|^2, \end{aligned}$$

które otrzymujemy, stosując nierówność Schwarz'a.]

6. Dowieść, że w tw. 2.14 warunek $na_n \rightarrow 0$ zastąpić można przez warunek ogólniejszy:

$$[a_1 + 2a_2 + \dots + na_n]/(n+1) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } n \rightarrow +\infty \quad (\text{Tauber}).$$

7. Pokazać, że warunek Fejéra z ćw. 5 pociąga za sobą warunek z ćw. 6; twierdzenie Fejéra (ćw. 5) wynika w ten sposób z uogólnionego twierdzenia Taubera (ćw. 6).

S. Saks i A. Zygmund. Funkcje analityczne.

§ 3. Rozwinięcie Log (1—z). Jak wynika z tw. 11.1 i 11.3 Rozdz. I (por. także Rozdz. II, § 1), funkcja $\text{Log } z$ jest holomorphyzna w kole $K(1;1)$. Funkcje $\text{Log}(1+z)$ i $\text{Log}(1-z)$ są tedy holomorphyzne w kole $K(0;1)$. Nadto pochodna funkcji $\text{Log}(1-z)$ jest w tym kole równa

$$-\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Ponieważ $\text{Log } 1 = 0$, przeto na mocy tw. 2.3, Rozdz. II, otrzymujemy przez przecalkowanie, iż dla $|z| < 1$

$$(3.1) \quad \text{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Szereg potęgowy po stronie prawej powyższego wzoru posiada oczywiście promień zbieżności 1. Opierając się na wynikach § 2, możemy łatwo zbadać go na okręgu koła zbieżności.

Zauważmy w tym celu, iż szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ jest ograniczony na każdym łuku okręgu $C(0;1)$ nie zawierającym punktu 1. Istotnie, oznaczając przez $s_n(z)$ n -tą sumę cząstkową tego szeregu, otrzymujemy oszacowanie

$$|s_n(e^{i\theta})| = \left| e^{i\theta} \cdot \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{1-e^{in\theta}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \theta/2|},$$

z którego wynika, że sumy $s_n(e^{i\theta})$ są wspólnie ograniczone w każdym przedziale $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ przy $\varepsilon > 0$.

Podstawiając tedy $z = e^{i\theta}$ do szeregu po prawej stronie wzoru (3.1), stwierdzamy natychmiast na zasadzie kryterium (b) tw. 2.6, iż szereg ten jest zbieżny jednostajnie na każdym łuku okręgu $C(0;1)$ nie zawierającym punktu 1, a więc, z uwagi na tw. 2.11, jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej na każdym wycinku koła domkniętego $\bar{K}(0;1)$, który nie zawiera punktu 1. Ponieważ, z drugiej strony, funkcja $\text{Log}(1-z)$ jest też ciągła (tw. 11.1, Rozdz. I) na całym kole $\bar{K}(0;1)$ z wyjątkiem punktu 1, przeto rozumowanie powyższe streścić możemy w twierdzeniu następującym:

(3.2) Równość (3.1) spełniona jest w całym kole domkniętym $K(0;1)$ z wyjątkiem punktu 1, przy czym szereg po prawej stronie tej równości jest zbieżny jednostajnie na każdym wycinku tego koła nie zawierającym punktu 1.

Jako zastosowanie tw. 3.2 udowodnimy, iż

$$(3.3) \quad \int_0^{2\pi} \text{Log}|1-ae^{i\theta}| d\theta = 0, \quad \text{ilekroć} \quad |a| \leq 1.$$

Dowód. Podstawiając $a = |a|e^{i\alpha}$ oraz $\theta = \varphi - \alpha$, widzimy, że całka po stronie lewej wzoru (3.3) równa jest

$$\int_0^{2\pi} \text{Log}|1-|a|e^{i(\theta+\alpha)}| d\theta = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \text{Log}|1-|a|e^{i\varphi}| d\varphi = \int_0^{2\pi} \text{Log}|1-|a|e^{i\varphi}| d\varphi.$$

Możemy więc odrazu założyć, że a we wzorze (3.3) jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Z uwagi na tw. 3.2

$$\text{Log}|1-ae^{i\theta}| = -\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n e^{in\theta}}{n} \quad \text{dla} \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

przy czym szereg występujący po prawej stronie tej równości jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ zmiennej θ przy $\varepsilon > 0$ ¹⁾. Przez scałkowanie w przedziale $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ otrzymujemy tedy

$$\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \text{Log}|1-ae^{i\theta}| d\theta = -\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \frac{e^{in(2\pi-\varepsilon)} - e^{in\varepsilon}}{ni} = \Re \sum_{n=1}^{\infty} ia^n \frac{e^{-n\varepsilon} - e^{n\varepsilon}}{n^2}.$$

Ponieważ

$$\left| ia^n \frac{e^{-n\varepsilon} - e^{n\varepsilon}}{n^2} \right| \leq \frac{2}{n^2},$$

więc otrzymany szereg jest jednostajnie zbieżny względem parametru ε w całym przedziale $[0, 2\pi]$ i, przechodząc do granicy, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$, otrzymujemy równość (3.3).

Skorzystamy z niej w Rozdziale IV, § 3, przy wyprowadzaniu t. zw. wzoru Jensena.

¹⁾ W przypadku gdy $|a| < 1$ szereg ten jest oczywiście zbieżny jednostajnie w całym przedziale $[0, 2\pi]$ i rozumowanie się upraszcza. Wprowadzenie parametru ε niezbędne jest tylko wtedy, gdy $|a| = 1$; całka po lewej stronie wzoru (3.3) jest wówczas niewłaściwa; wyrażenie podcałkowe staje się mianowicie nieskończone na krańcach przedziału $[0, 2\pi]$.

ĆWICZENIA 1. Dla $0 < \theta < 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\operatorname{Log} \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2},$$

przy czym szeregi w lewych członach powyższych równości są jednostajnie zbieżne w każdym przedziale $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, gdzie $\varepsilon > 0$.

$$2. \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |1 - ae^{i\theta}| d\theta = \operatorname{Log} |a| \quad \text{przy} \quad |a| > 1.$$

3. Dla każdej wartości zespolonej a funkcja $(1+z)^a$ posiada w kole $K(0;1)$ gałąź holomorficzną, przyjmującą wartość 1 w punkcie $z=0$. Pokazać, iż gałąź ta rozwija się w kole $K(0;1)$ na szereg potęgowy

$$1 + \frac{a}{1}z + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \dots$$

Zbadać ten szereg na okręgu $C(0;1)$.

4. Gałąź $\operatorname{arctg} z$ w kole $K(0;1)$, która przyjmuje w punkcie 0 wartość 0 (por. Rozdz. I, § 10, ćw. 2), rozwija się w tym kole na szereg potęgowy

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

5. Pokazać, iż $\operatorname{arcsin} z$ posiada gałąź holomorficzną w kole $K(0;1)$; gałąź, która przyjmuje wartość 0 dla $z=0$, rozwija się w kole $K(0;1)$ na szereg potęgowy

$$z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \dots$$

Zbadać zbieżność tego szeregu na okręgu $C(0;1)$.

[Wsk. Pokazać, iż funkcja, która jest funkcją pierwotną gałęzi $1/\sqrt{1-z^2}$ w kole $K(0;1)$ i przyjmuje wartość 0 w punkcie 0, jest żądaną gałęzią funkcji $\operatorname{arcsin} z$; por. Rozdz. I, § 10, ćw. 1, oraz Rozdz. II, § 1, ćw. 1; napisać rozwinięcie gałęzi $1/\sqrt{1-z^2}$ na zasadzie ćw. 3.]

§ 4. Szereg Laurenta. Pierścień zbieżności. Nazywamy szeregiem Laurenta o współczynnikach a_n i środku $z_0 \neq \infty$, gdzie $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, szereg $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$; szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}/(z-z_0)^n$ nazywają się odpowiednio częścią regularną i częścią główną tego szeregu w punkcie z_0 .

Przez szereg Laurenta o współczynnikach a_n i środku ∞ rozumiemy szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n/z^n$; jego częścią regularną i częścią główną w punkcie ∞ nazywamy odpowiednio szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$.

Widoczne jest, iż szereg Laurenta o środku ∞ może być zarazem uważany za szereg o środku 0.

Przez *zbieżność* (zwykłą, jednostajną, niemal jednostajną, bezwzględną i t. p.) szeregu Laurenta rozumiemy zbieżność (analogiczną) obydwu jego części jednocześnie. W przypadku zbieżności, przez sumę szeregu Laurenta rozumiemy sumę sum obydwu jego części.

Weźmy pod uwagę dwa szeregi Laurenta o środku $z_0 \neq \infty$ oraz o środku ∞ :

$$(4.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

$$(4.2) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n/z^n.$$

Przez podstawienie $z = z - z_0$ w szeregu (4.1), a przez podstawienie $z = 1/z$ w szeregu (4.2), obydwie te szeregi przechodzą na szereg Laurenta o środku 0, mianowicie na szereg $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Część regularna tego szeregu jest szeregiem potęgowym o środku 0, część zaś główna szeregiem potęgowym o środku ∞ . Oznaczmy przez r i ϱ promienie zbieżności tych dwu szeregów. Liczba r jest oczywiście promieniem zbieżności części regularnych szeregów (4.1) i (4.2) (które są szeregami potęgowymi o środkach odpowiednio w punkcie z_0 i w punkcie ∞). Z drugiej strony, widoczne jest natychmiast na zasadzie tw. 1.2, iż część główna szeregu (4.1) jest zbieżna niemal jednostajnie zewnątrz koła $K(z_0; 1/\varrho)$, zaś rozbieżna w każdym punkcie wewnątrz tego koła; podobnie, część główna szeregu (4.2) (która jest szeregiem potęgowym o środku 0) jest zbieżna niemal jednostajnie zewnątrz, a rozbieżna wszędzie wewnątrz koła $K(\infty; 1/\varrho)$.

Liczbę ϱ nazywamy *promieniem zbieżności części głównych* szeregów (4.1) i (4.2), a pierścienie $P(z_0; 1/\varrho, r)$ i $P(\infty; 1/\varrho, r)$ odpowiednio *pierścieniami zbieżności* tych szeregów.

Mamy więc twierdzenie następujące:

(4.3) Jeżeli r_1 i r_2 są promieniami zbieżności odpowiednio części głównej i części regularnej szeregu Laurenta o środku z_0 (położonym w skończoności lub nieskończoności), wówczas części te są niemal jednostajnie zbieżne bezwzględnie i przedstawiają funkcje holomorficzne odpowiednio zewnątrz koła $K(z_0; 1/r_1)$ i wewnątrz koła $K(z_0; r_2)$.

W szczególności, jeżeli $r_1 = \infty$, t. zn. jeżeli pierścień zbieżności szeregu jest otoczeniem pierścieniowym punktu, część główna szeregu Laurenta przedstawia funkcję holomorficzną w całej płaszczyźnie (domkniętej) z wyłączeniem co najwyżej punktu z_0 .

Przechodząc do szeregu Laurenta jako całosci, otrzymujemy, że

(4.4) *Szereg Laurenta jest w swym pierścieniu zbieżności zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie i przedstawia funkcję holomorficzną.*

Jeżeli szereg Laurenta o środku z_0 (w skończoności lub nieskończoności) jest zbieżny do funkcji $W(z)$ w pewnym pierścieniu $P(z_0; r_1, r_2)$ (gdzie $r_1 < r_2$), wówczas nazywamy go *rozwinięciem Laurenta* tej funkcji. Pierścień $P(z_0; r_1, r_2)$ zawiera się wówczas w pierścieniu zbieżności rozważanego szeregu i funkcja $W(z)$ jest w nim holomorficzną.

Pokażemy, iż każda funkcja może mieć co najwyżej jedno rozwinięcie Laurenta w danym pierścieniu, t.j. że współczynniki rozwinięcia są jednoznacznie określone przez funkcję rozwijaną; w szczególności dotyczy to oczywiście będzie rozwinięć na szeregi potęgowe.

Istotnie, niech w pierścieniu $P(z_0; r_1, r_2)$, gdzie $r_1 < r_2$ i (dla prostoty) $z_0 \neq \infty$,

$$(4.5) \quad W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Niech r będzie dowolną liczbą taką, iż $r_1 < r < r_2$. Na okręgu $C_r = C(z_0; r)$, który przebiega wewnątrz pierścienia $P(z_0; r_1, r_2)$, szereg (4.5) jest jednostajnie zbieżny. Dzieląc tedy obydwie strony równości (4.5) przez $(z - z_0)^{k+1}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, i całkując wzdłuż okręgu C_r , otrzymujemy, w myśl wzoru (18.2), Rozdz. I:

$$\int_{C_r} \frac{W(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{C_r} (z - z_0)^{n-k-1} dz = a_k \cdot 2\pi i.$$

Zatem:

(4.6) *Spółczynniki a_k rozwinięcia funkcji $W(z)$ w pierścieniu*

$$P = P(z_0; r_1, r_2),$$

gdzie $z_0 \neq \infty$, $r_1 < r_2$, określają się przez całki

$$(4.7) \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{W(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz,$$

gdzie C_r oznacza dowolny okrąg przebiegający w pierścieniu P .

Analogiczny wzór otrzymujemy dla rozwinięć w pierścieniu o środku ∞ .

Ze wzoru (4.7) wynika ważne oszacowanie współczynników rozwinięć Laurenta. Zachowując poprzednie oznaczenia, oznaczmy jeszcze przez $M(r)$ maximum wartości bezwzględnej funkcji $W(z)$ na okręgu C_r . Z (4.7) otrzymujemy tedy (por. oszacowania (17.10) z Rozdz. I)

$$(4.8) \quad |a_k| \leq M(r)/r^k.$$

Do oszacowań tych wrócimy jeszcze w § 13. Tymczasem zauważymy, iż jeżeli funkcja $W(z)$ rozwija się na szereg Laurenta w pewnym otoczeniu pierścieniowym (Wstęp, str. 21) punktu $z_0 \neq \infty$, wówczas r we wzorze (4.8) przyjmować może wartości dowolnie małe. Jeżeli więc ponadto założymy, iż wyrażenie $M(r)$ jest ograniczone, gdy $r \rightarrow 0$, wówczas dla każdej wartości $k < 0$ prawa strona nierówności (4.8) dąży do zera, gdy $r \rightarrow 0$. Znikają więc wszystkie wyrazy części głównej rozwinięcia. Zatem:

(4.9) *Jeżeli funkcja $W(z)$ rozwija się na szereg Laurenta w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 i pozostaje ograniczona gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas szereg ten redukuje się do szeregu potęgowego o środku z_0 i przeto funkcja $W(z)$ (po stosownym określeniu jej wartości w z_0) jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu zwykłym punktu z_0 .*

Twierdzenie to pozostaje prawdziwe, gdy $z_0 = \infty$, ponieważ przypadek ten sprowadza się do przypadku $z_0 = 0$ przez podstawienie $z = 1/z$.

ĆWICZENIA. 1. Wyznaczyć pierścień zbieżności szeregu $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta^n z^n$ (gdzie $0 < \beta_1 < 1$).

2. Jeżeli funkcja $F(z)$ jest holomorficzną w otoczeniu punktu $z_0 \neq \infty$, wówczas

$$|F(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \text{ dla każdej dostatecznie małej wartości } r > 0.$$

Opierając się na tym, udowodnić, iż jeżeli wartość bezwzględna funkcji $F(z)$ holomorficzej w otoczeniu punktu z_0 osiąga w tym punkcie maximum lokalne (choćby niewłaściwe), wówczas funkcja $F(z)$ jest stała w otoczeniu punktu z_0 (ob. dalej w § 12 inny dowód tego twierdzenia).

3. Opierając się na twierdzeniu z ćw. 6, § 1, pokazać, że jeżeli funkcja $F(z)$ jest holomorficzną w punkcie a i nadto $F'(a) \neq 0$, to funkcja ta jest jednoznacznie odwracalna (ob. Wstęp, § 7) w pewnym otoczeniu tego punktu (wyniki dokładniejsze ob. dalej w § 12).

§5. Rozwinięcia Laurenta w otoczeniu pierścieniowym.

Udowodnimy obecnie twierdzenie częściowo odwrotne względem tw. 4.4. Pokażemy mianowicie, iż jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 , wówczas w pewnym otoczeniu pierścieniowym tego punktu rozwija się na szereg Laurenta.

Z uwagi na tw. 4.6 istnieć może jeden tylko taki szereg: nazywać go będziemy *rozwinięciem Laurenta funkcji $W(z)$ w punkcie z_0* .

Dokładniejsze twierdzenie udowodnione będzie w Rozdziale IV; pokażemy mianowicie, iż funkcja, która jest holomorficzna w pewnym pierścieniu, rozwija się w całym tym pierścieniu na szereg Laurenta.

Niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 , przy czym przyjmiemy odrazu, iż $z_0 = 0$. Do przypadku tego sprowadzamy przypadek ogólny przez podstawienie $z = z - z_0$, jeżeli $z_0 \neq \infty$, a przez podstawienie $z = 1/z$, jeżeli $z_0 = \infty$.

Niech $I_a = [-a, a; -a, a]$ będzie kwadratem, w którym, z pominięciem ewentualnie punktu 0, funkcja $W(z)$ jest wszędzie holomorficzna. Niech z_0 będzie dowolnym punktem takim, że $0 < |z_0| < a$, i niech $r = |z_0|/2$ oraz $I_r = [-r, r; -r, r]$.

Funkcja $W(z)$ jest holomorficzna na zbiorze $I_a - I_r^\circ$ i w myśl wzoru Cauchy'ego (Rozdz. II, tw. 5.3) będziemy mieli:

$$(5.1) \quad W(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(I_a)} \frac{W(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{(I_r)} \frac{W(z)}{z - z_0} dz.$$

Dla punktów z na obwodzie kwadratu I_a mamy $|z_0|/|z| \leq |z_0|/a < 1$. Szereg

$$(5.2) \quad \frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}}$$

jest tedy jednostajnie zbieżny względem z na (I_a) . Z drugiej strony, dla punktów z leżących na obwodzie kwadratu I_r mamy $|z|/|z_0| < 2r/|z_0| = 1$, a więc szereg

$$(5.3) \quad \frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_0^{n+1}}$$

jest także jednostajnie zbieżny względem z na (I_r) .

Mnożąc tedy szeregi (5.2) i (5.3) przez $W(z)$ i całkując odpowiednio wzdłuż obwodów kwadratów I_a oraz I_r , mamy z (5.1):

$$(5.4) \quad W(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n \cdot \int_{(I_a)} W(z) \cdot z^{-n-1} dz + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z_0^{-n-1} \cdot \int_{(I_r)} W(z) \cdot z^n dz.$$

Przyjmijmy teraz, dla skrócenia,

$$(5.5) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(I_a)} W(z) \cdot z^{-n-1} dz \quad \text{dla } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ponieważ funkcja $W(z)z^n$ jest dla każdej wartości całkowitej n holomorficzna na zbiorze $I_a - I_r^\circ$, zatem w myśl twierdzenia Cauchy'ego (Rozdz. II, tw. 4.5) mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(I_r)} W(z) z^n dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{(I_a)} W(z) z^n dz = a_{-n-1}$$

i równość (5.4) napisać możemy w postaci wzoru

$$(5.6) \quad W(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1} z_0^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n,$$

który wyraża (ponieważ z uwagi na (5.5) współczynniki a_n są niezależne od r , a więc i od z_0), iż funkcja $W(z)$ rozwija się na szereg Laurenta w otoczeniu pierścieniowym $P(0; 0, a)$ punktu 0.

Jeżeli w szczególności funkcja $W(z)$ jest holomorficzna nie tylko w otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 , ale w otoczeniu zwykłym (kołowym), wówczas z tw. 4.9 wynika, iż jej rozwinięcie Laurenta jest szeregiem potęgowym. Widoczne to jest zresztą także bezpośrednio ze wzoru (5.5), ponieważ jeśli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna na kwadracie I_a , wówczas holomorficzne są również na tym kwadracie wszystkie funkcje $W(z) \cdot z^{-n-1}$ dla $n < 0$, a więc tym samym, w myśl twierdzenia Cauchy'ego (Rozdz. II, tw. 4.1), $a_n = 0$ dla $n < 0$.

Streszczając wyniki tego §, otrzymujemy twierdzenie następujące:

(5.7) *Na to, aby funkcja $W(z)$ była holomorficzna w pewnym otoczeniu pierścieniowym [kołowym] punktu z_0 , konieczne jest i wystarcza, aby rozwijała się w pewnym otoczeniu pierścieniowym [kołowym] tego punktu na szereg Laurenta [szereg potęgowy].*

W szczególności, jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w kwadracie o środku z_0 i boku $2a$, wówczas rozwija się na szereg potęgowy w kole o środku z_0 i promieniu a .

Z drugiej części tego twierdzenia wynika natychmiast, że

(5.8) *Na to, aby funkcja $W(z)$ była holomorficzna w całej płaszczyźnie otwartej, konieczne jest i wystarcza, aby była sumą szeregu potęgowego zbieżnego w całej płaszczyźnie.*

Wreszcie ze wzorów 1.4, na zasadzie twierdzenia Weierstrassa (Rozdz. II, tw. 6.1), wynika natychmiast następujące uzupełnienie tego twierdzenia:

(5.9) *Jeżeli ciąg funkcji holomorficznych $\{W_k(z)\}$ w zbiorze otwartym G jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $W(z)$ w G i jeżeli $\{a_n^{(k)}\}_{n=0,1,\dots}$ oraz $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ oznaczają odpowiednio ciągi współczynników rozwinięć funkcji $W_k(z)$ i $W(z)$ na szereg potęgowy w pewnym punkcie $z_0 \in G$, wówczas $a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_n^{(k)}$ dla $n=0,1,\dots$*

ĆWICZENIE. 1. Napisać rozwinięcia funkcji $z/(z-a)(z-b)$, gdzie $0 < |a| < |b|$, na szereg Laurenta w punktach a , b i ∞ . Określić pierścienie zbieżności tych rozwinięć.

§ 6. Punkty osobliwe odosobnione. Z uwagi na jednoznaczność (por. § 4) rozwinięcia funkcji na szereg Laurenta możemy rozklasyfikować punkty, w których otoczeniu pierścieniowym funkcja jest holomorficzna, wedle typu jej rozwinięcia Laurenta w tych punktach, a dokładniej — wedle typu części głównej tego rozwinięcia.

Weźmy tedy pod uwagę funkcję $W(z)$, holomorficzną w otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 (położonego w skończoności lub w nieskończoności). Możliwe są trzy przypadki:

(I) Część główna rozwinięcia funkcji w punkcie z_0 znika, t.j. rozważane rozwinięcie jest szeregiem potęgowym o środku w punkcie z_0 . Funkcja $W(z)$ jest tedy bądź 1° już określona i holomorficzna w punkcie z_0 , bądź też 2° staje się w punkcie z_0 holomorficzna po określeniu jej lub po stosownym zmodyfikowaniu określenia jej w tym punkcie. W przypadku 2° mówimy, iż posiada tylko *pozorną* albo *usuwalną* osobliwość w z_0 . W dalszym ciągu zakładając będziemy zawsze, iż osobliwości pozorne zostały usunięte przez stosowne określenie wartości funkcji w odpowiednich punktach.

(II) Część główna jest skończona, t.j. ma postać $G(\zeta)$, gdzie $G(\zeta)$ jest wielomianem stopnia $k > 0$ względem ζ , przy czym $\zeta = 1/(z - z_0)$, jeżeli $z_0 \neq \infty$, i $\zeta = z$, jeżeli $z_0 = \infty$. W tym przypadku, z_0 nazywa się *biegunem k -krotnym* funkcji $W(z)$. Jeżeli $z \rightarrow z_0$, wówczas $\zeta \rightarrow \infty$, a więc również $G(\zeta) \rightarrow \infty$. Z drugiej strony,

część regularna rozwinięcia funkcji $W(z)$ w punkcie z_0 jest szeregiem potęgowym o środku z_0 i dąży do granicy skończonej, gdy $z \rightarrow z_0$. Zatem:

Jeżeli z_0 jest biegunem funkcji $W(z)$, wówczas $W(z) \rightarrow \infty$, gdy $z \rightarrow z_0$.

W dalszym ciągu, będziemy przyjmowali zawsze ∞ za wartość funkcji w jej biegunie.

(III) Część główna rozwinięcia funkcji jest istotnie nieskończona (t.j. zawiera nieskończenie wiele wyrazów). Punkt z_0 nazywa się wówczas *istotnie osobliwym* i przy zbliżaniu się doń funkcja $W(z)$ nie dąży do żadnej granicy; co więcej

(6.1) **Twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa.** *Każda wartość zespolona daje się przybliżyć z dowolną dokładnością w każdym otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 , istotnie osobliwego dla funkcji $W(z)$, przez wartości funkcji przyjmowane w tym otoczeniu, t.j. dla każdej wartości zespolonej w oraz każdej pary liczb dodatnich ε i r istnieje taki punkt $z \in P(z_0; 0, r)$, iż $|W(z) - w| < \varepsilon$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje taka para liczb $r > 0$, $\varepsilon > 0$, iż $|W(z) - w| \geq \varepsilon$ dla każdego punktu $z \in P(z_0; 0, r)$. Funkcja $1/[W(z) - w]$ jest wówczas holomorficzna i ograniczona w $P(z_0; 0, r)$ i rozwija się, w myśl tw. 5.7 i 4.9, w pewnym otoczeniu tego punktu na szereg potęgowy. Przyjmując dla prostoty $z_0 = 0$, mamy tedy w pewnym otoczeniu punktu 0

$$\frac{1}{W(z) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=k}^{\infty} b_n z^n,$$

gdzie b_k (przy $k \geq 0$) jest pierwszym współczynnikiem nie znikającym. Stąd

$$(6.2) \quad W(z) - w = \frac{1}{z^k} \frac{1}{b_k + b_{k+1}z + \dots}.$$

Ale z uwagi na $b_k \neq 0$, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_{k+n} z^n$, występujący w mianowniku, nie znika nigdzie w pewnym dostatecznie małym otoczeniu punktu 0; jego odwrotność jest zatem funkcją holomorficzną w otoczeniu zera i rozwija się w pewnym dostatecznie małym otoczeniu na szereg potęgowy:

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_{k+n} z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Podstawiając to rozwinięcie w (6.2), otrzymujemy

$$W(z) - w = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n;$$

a więc część główna rozwinięcia Laurentowskiego funkcji $W(z)$ w otoczeniu 0 ma postać skończoną $\sum_{n=0}^{k-1} c_n/z^{k-n}$, co jest oczywiście sprzeczne z założeniem, iż punkt $z_0=0$ jest punktem istotnie osobliwym funkcji $W(z)$.

Rozważania powyższe pozwalają rozklasyfikować punkty z_0 , w których otoczeniu pierścieniowym funkcja jest holomorficzna, wprost według zachowania się funkcji, bez rozwijania jej na szereg Laurenta:

(I) jeżeli funkcja dąży do granicy skończonej (lub choćby tylko jest ograniczona), gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas jest bądź holomorficzna w z_0 , bądź posiada co najwyżej osobliwość pozorną;

(II) jeżeli funkcja dąży do ∞ , gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas posiada w punkcie z_0 biegun;

(III) jeżeli funkcja nie dąży do żadnej granicy (skończonej ani nieskończonej), gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas posiada w z_0 osobliwość istotną.

ĆWICZENIA. 1. Pokazać, iż w twierdzeniach 8.1 (Morery) oraz 8.6 (zasada Schwarza), Rozdz. II, zbyteczne jest założenie, że rozważany tam zbiór G nie zawiera punktu ∞ .

2. Jeżeli funkcja $W(z)$ posiada w punkcie $b \neq \infty$ biegun co najwyżej n -krotny, wówczas współczynniki jej rozwinięcia $\sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-b)^k$ w tym punkcie dano są przez wzór $a_{k-n} = W_1^{(k)}(b)/k!$, gdzie $W_1(z) = W(z) \cdot (z-b)^n$ i $k=0, 1, \dots$

§ 7. Funkcje regularne, meromorficzne, wymierne.

Funkcję $W(z)$, która jest holomorficzna w otoczeniu pierścieniowym każdego punktu pewnego zbioru otwartego G , nazywać będziemy *regularną z pominięciem co najwyżej odosobnionego zbioru osobliwości w G* . Dla krótkości, zamiast funkcja regularna z pominięciem co najwyżej odosobnionego zbioru osobliwości będziemy mówili często wprost funkcja regularna. Funkcja $W(z)$ nazywać się będzie *regularną na dowolnym zbiorze A* , jeżeli jest regularna w pewnym zbiorze otwartym $[G \supset A]$. Widoczne jest natychmiast, iż

(7.1) Zbiór punktów osobliwych funkcji regularnej w zbiorze otwartym G jest domknięty w G i odosobniony, a przeto co najwyżej przeliczalny.

Stosownie do umowy przyjętej w § 6 (p. (I), str. 138) możemy założyć, iż wśród punktów osobliwych funkcji regularnej nie ma punktów pozornie osobliwych. Pozostają zatem tylko bieguny oraz punkty istotnie osobliwe; zgodnie z konwencją, przyjętą w § 6 (str. 139), nadajemy funkcji w jej biegunach wartość ∞ .

Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 , zaś $H(z)$ oznacza funkcję określoną przez część główną rozwinięcia funkcji $W(z)$ w punkcie z_0 , wówczas funkcja $W(z) - H(z)$ jest w tym otoczeniu sumą szeregu potęgowego (części regularnej rozwinięcia) i przeto, po ewentualnym stosownym określeniu jej w punkcie z_0 , jest w tym punkcie holomorficzna; z drugiej strony, w myśl tw. 4.3 funkcja $H(z)$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie domkniętej z wyłączeniem co najwyżej punktu z_0 . Wynika stąd natychmiast, iż:

(7.2) Jeżeli funkcja $W(z)$ regularna w zbiorze otwartym G posiada w tym zbiorze co najwyżej skończoną ilość punktów osobliwych $c_1, c_2, \dots, c_n$ i jeżeli $H_1(z), H_2(z), \dots, H_n(z)$ oznaczają odpowiednio części główne rozwinięcia funkcji $W(z)$ w tych punktach, wówczas funkcja $F(z) = W(z) - \sum_{j=1}^n H_j(z)$ jest holomorficzna w G .

Funkcja regularna w zbiorze otwartym G , która nie posiada w G punktów istotnie osobliwych (t.j. nie posiada punktów osobliwych poza co najwyżej biegunami), nazywa się *meromorficzną w G* . Ogólniej, funkcja nazywa się *meromorficzną na dowolnym zbiorze A* , jeżeli jest meromorficzna na pewnym zbiorze otwartym $G \supset A$.

Najprostszym przykładem funkcji meromorficznych są funkcje wymierne, t.j. funkcje postaci $R(z) = P(z)/Q(z)$, gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ są wielomianami nie posiadającymi pierwiastków wspólnych. Funkcje takie są meromorficzne w całej płaszczyźnie domkniętej i posiadają bieguny w skończoności dokładnie w tych punktach, które są pierwiastkami mianownika; poza tym, posiadają jeszcze biegun w nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy stopień licznika przewyższa stopień mianownika. Odwrotnie:

(7.3) Każda funkcja meromorficzna w całej płaszczyźnie domkniętej jest funkcją wymierną.

Dowód. Niech $W(z)$ będzie funkcją meromorficzną w całej płaszczyźnie domkniętej. Funkcja $W(z)$ posiada więc co najwyżej skończoną ilość biegunów, w przeciwnym bowiem razie bieguny te posiadałyby punkt skupienia. Oznaczając jej bieguny przez $b_1, b_2, \dots, b_n$,

a przez $H_1(z), H_2(z), \dots, H_n(z)$ odpowiednio części główne rozwinięcia funkcji $W(z)$ w tych biegunach, mamy na mocy tw. 7.2

$$(7.4) \quad W(z) = \sum_{j=1}^n H_j(z) + F(z),$$

gdzie $F(z)$ jest funkcją holomorficzną w całej płaszczyźnie domkniętej, a więc w myśl twierdzenia Liouville'a (Rozdz. II, tw. 5.11) redukuje się do stałej. Ponieważ zaś funkcje $H_j(z)$, jako części główne rozwinięcia Laurentowskiego w biegunach, są funkcjami wymiernymi, zatem i funkcja $W(z)$ jest wymierna.

Powracając do równości (7.4) i włączając stąd $U=F(z)$ do któregośkolwiek z wyrażań $H_j(z)$, otrzymujemy jednocześnie twierdzenie następujące:

(7.5) *Ogólną postacią funkcji wymiernej o biegunach $b_1, b_2, \dots, b_n$ jest wyrażenie $\sum_{j=1}^n H_j(z)$, gdzie $H_j(z)$ jest dowolnym wielomianem względem z jeżeli $b_j = \infty$, zaś względem $1/(z-b_j)$ jeżeli $b_j \neq \infty$. W szczególności, jeżeli funkcja wymierna posiada punkt b jako jedyny biegun, wówczas jest wielomianem względem z , gdy $b = \infty$, a względem $1/(z-b)$, gdy $b \neq \infty$.*

Jest to t. zw. *twierdzenie o rozkładaniu funkcji wymiernej na ułamki proste*, które — jak wiadomo — odgrywa pewną rolę w obliczaniu całek funkcji wymiernych. Podręczniki rachunku całkowego zawierają bezpośredni i elementarny dowód tego twierdzenia, które otrzymaliśmy tu na tle rozważań ogólniejszych.

Jeżeli funkcja $W(z)$ jest rozwijalna na szereg Laurenta w otoczeniu pierścieniowym pewnego punktu $b \neq \infty$, wówczas część główną jej rozwinięcia w tym punkcie jest szeregiem postaci

$$(7.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} / (z-b)^n.$$

Spółczynnik a_{-1} tego rozwinięcia odgrywa rolę szczególnie ważną w wielu rozumowaniach. Nazywamy go *residuum* funkcji w punkcie b i oznaczamy przez $\text{res}_b W$.

Definicja residuum w punkcie ∞ jest nieco odmienna. Jeżeli funkcja W jest rozwijalna na szereg Laurenta w tym punkcie i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^n$ jest częścią regularną tego rozwinięcia, wówczas przez residuum funkcji W w punkcie ∞ rozumiemy będziemy liczbę $-a_1$, t. j. współczynnik przy $1/z$ ze znakiem przeciwnym.

Przyjmując $b \neq \infty$, zauważmy przede wszystkim, iż szereg (7.6) jest niemal jednostajnie zbieżny w całej płaszczyźnie z wyłączeniem punktu b (por. tw. 4.3). Szereg ten możemy więc całkować wyraz za wyrazem wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej C , nie przechodzącej przez punkt b . Każda z funkcji $1/(z-b)^n$, dla $n \neq 1$, posiada funkcję pierwotną, którą jest funkcja $-1/(n-1)(z-b)^{n-1}$, i przeto (por. Rozdz. II, tw. 2.2) całka jej wzdłuż krzywej C jest równa zeru. Całka zatem szeregu (7.6) wzdłuż C redukuje się do wyrazu $a_{-1} \cdot \int_C \frac{dz}{z-b}$. Innymi słowy:

(7.7) *Jeżeli funkcja $W(z)$ rozwija się w otoczeniu pierścieniowym pewnego punktu $b \neq \infty$ na szereg Laurenta i $H(z)$ oznacza część główną jej rozwinięcia w tym punkcie, wówczas dla każdej krzywej regularnej zamkniętej C , nie przechodzącej przez punkt b , mamy*

$$\int_C H(z) dz = \text{res}_b W \cdot \int_C \frac{dz}{z-b}.$$

Wyprowadzimy stąd twierdzenie następujące, które nazwiemy *twierdzeniem o residuach dla prostokąta*:

(7.8) *Jeżeli funkcja $W(z)$ jest regularna na prostokącie I i nie posiada punktów osobliwych na obwodzie tego prostokąta, wówczas*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(I)} W(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{res}_{b_k} W,$$

gdzie $b_1, b_2, \dots, b_n$ oznaczają punkty osobliwe (bieguny lub punkty istotnie osobliwe) funkcji W w prostokącie I .

Dowód. Oznaczając ogólnie przez $H_k(z)$ część główną rozwinięcia funkcji W w otoczeniu pierścieniowym punktu b_k i przyjmując $F(z) = W(z) - \sum_k H_k(z)$, stwierdzamy przede wszystkim, na zasadzie tw. 7.2, iż funkcja $F(z)$ jest holomorficzna na I . Na mocy więc twierdzenia Cauchy'ego dla prostokąta (Rozdz. II, tw. 4.1), mamy $\int_{(I)} F(z) dz = 0$. Z drugiej strony, $\int_{(I)} \frac{dz}{z-b_k} = 2\pi i$ dla $k=1, 2, \dots, n$ (Rozdz. II, (4.7)). Zatem z uwagi na tw. 7.7

$$\begin{aligned} \int_{(I)} W(z) dz &= \int_{(I)} F(z) dz + \sum_k \int_{(I)} H_k(z) dz = \\ &= \sum_k \text{res}_{b_k} W \cdot \int_{(I)} \frac{dz}{z-b_k} = 2\pi i \cdot \sum_k \text{res}_{b_k} W, \quad \text{c. b. d. d.} \end{aligned}$$

ĆWICZENIA. 1. Residuum funkcji $\exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$ w punkcie 0 równe jest sumie szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$.

2. Jeżeli $W(z) = F(z)G(z)$, gdzie F jest funkcją holomorficzną, a G meromorficzną z biegunem jednokrotnym w punkcie $z_0 \neq \infty$, wówczas $\text{res}_{z_0} W = F(z_0) \cdot \text{res}_{z_0} G$.

3. Obliczyć residua funkcji $1/\sin \pi z$, $1/\cos \pi z$, $\text{tg} \pi z$, $\text{ctg} \pi z$ w ich biegunach.

4. Suma residuów funkcji wymiernej (łącznie z residuum w punkcie ∞) jest równa zeru. Tę samą własność ma każda funkcja $F(z)$, która jest holomorficzna w całej płaszczyźnie (domkniętej) z pominięciem co najwyżej skończonej liczby punktów.

5. Jeżeli $P(z)$ i $Q(z)$ są wielomianami, przy czym wielomian $Q(z)$ jest stopnia wyższego niż $P(z)$ i nie znika w żadnym punkcie rzeczywistym całkowitym, wówczas

granica $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m \frac{P(k)}{Q(k)}$ równa jest sumie residuów funkcji $-n \text{ctg} \pi z \cdot P(z)/Q(z)$

w punktach, które są pierwiastkami wielomianu $Q(z)$.

Przy tych samych założeniach suma szeregu $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{P(k)}{Q(k)}$ równa jest

sumie residuów funkcji $-\frac{\pi}{\sin \pi z} \cdot \frac{P(z)}{Q(z)}$ w tych punktach, które są pierwiastkami wielomianu $Q(z)$.

[Wsk. ob. Rozdz. I, § 18, ćw. 2.]

6. Udowodnić wzory:

1° $\pi \text{ctg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{k} \right)$, gdzie x jest dowolną liczbą nie całkowitą,

a sumowanie $\sum_k'$ rozciąga się na wszystkie wartości całkowite $k \neq 0$;

$$2^\circ \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}; \quad 3^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$4^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+bn^2} = -\frac{1}{2a} + \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \frac{\exp \pi \sqrt{a/b} + \exp(-\pi \sqrt{a/b})}{\exp \pi \sqrt{a/b} - \exp(-\pi \sqrt{a/b})};$$

$$5^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn^2} = -\frac{1}{2a} - \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \frac{1}{\exp \pi \sqrt{a/b} - \exp(-\pi \sqrt{a/b})}.$$

[Wsk. ad 1°: udowodnić najpierw wzór $\pi \text{ctg} \pi x = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m \frac{1}{x-k}$;

ad 3°: wzór 3° wyprowadzić ze wzoru 2°, odejmując $1/a^2$ od obydwu stron wzoru 2° i przechodząc do granicy wraz z $a \rightarrow 0$.]

7. Jeżeli $F(z)$ jest funkcją regularną (z pominięciem odosobnionego zbioru osobliwości) w obszarze G , wówczas na to, aby $\exp \oint_C F(z) dz = 1$ dla każdej krzywej regularnej zamkniętej C , przebiegającej w G i nie przechodzącej przez punkty osobliwe funkcji $F(z)$, konieczne jest i wystarcza, by wszystkie residua tej funkcji w jej punktach osobliwych były liczbami rzeczywistymi i całkowitymi.

Jeżeli funkcja F warunek ten spełnia i a jest dowolnie ustalonym punktem obszaru G , w którym funkcja F jest holomorficzna, wówczas wyrażenie $H(z) = \exp \int_{C(z)} F(z) dz$, gdzie $C(z)$ oznacza jakąkolwiek krzywą regularną łączącą

punkt a z punktem z , jest funkcją regularną w G z pominięciem odosobnionego zbioru osobliwości. Dowieść, że na to, by funkcja H była meromorficzna w G , konieczne jest i wystarcza, aby wszystkie punkty osobliwe (nie pozorne) funkcji $F(z)$ były biegunami jednokrotnymi.

Wyznaczyć wartości parametru a , dla jakich warunki te spełnia funkcja $F(z) = 1/(a + \cos z)$.

[Wsk. Ob. Rozdz. II, § 2, ćw. 3.]

§ 8. Pierwiastki funkcji meromorficznej. Jeżeli funkcja $W(z)$, holomorficzna w punkcie z_0 , znika w tym punkcie, lecz nie znika tożsamościowo w żadnym jego otoczeniu, wówczas skreślając ewentualnie w rozwinięciu $W(z)$ w punkcie z_0 pierwsze wyrazy, których współczynniki są równe zeru, możemy rozwinięcie to napisać bądź w postaci

$$W(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k (a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \dots), \quad \text{gdzie } a_k \neq 0,$$

jeżeli $z_0 \neq \infty$, bądź — jeżeli $z_0 = \infty$ — w postaci

$$W(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n / z^n = z^{-k} (a_k + a_{k+1}/z + \dots), \quad \text{gdzie } a_k \neq 0.$$

Liczba k nazywa się wówczas *krotnością* punktu z_0 jako pierwiastka funkcji $W(z)$. Na to, aby punkt $z_0 \neq \infty$ był k -krotnym pierwiastkiem funkcji $W(z)$ holomorficznej w tym punkcie, konieczne jest i wystarcza, by $W(z_0) = W'(z_0) = \dots = W^{(k-1)}(z_0) = 0$ oraz by $W^{(k)}(z_0) \neq 0$ (por. wzory (1.4)).

Rozpatrując dla prostoty funkcję holomorficzną $W(z)$ w punkcie 0, widzimy natychmiast, iż na to, aby punkt ten był k -krotnym pierwiastkiem tej funkcji, konieczne jest i wystarcza, aby $W(z) = z^k W_1(z)$, gdzie $W_1(z)$ jest funkcją holomorficzną w punkcie 0, nieznikającą w tym punkcie, a więc i w żadnym punkcie dostatecznie małego otoczenia punktu 0. Wynika stąd przede wszystkim, iż

(8.1) Jeżeli punkt z_0 , w którym funckja jest holomorficzna, jest punktem skupienia pierwiastków tej funckji, wówczas funckja ta znika tożsamościowo w otoczeniu tego punktu.

Z drugiej strony (por. § 6, str. 138), na to, by funckja $W(z)$ posiadała w punkcie $z=0$ biegun k -krotny, konieczne jest i wystarcza, aby $W(z)=z^{-k}W_1(z)$, gdzie $W_1(z)$ jest funckją holomorficzną, nie znikającą w punkcie 0. Z otrzymanych w ten sposób ogólnych postaci funckji, posiadających w punkcie 0 bądź pierwiastek, bądź biegun k -krotny, wynika, iż

(8.2) Jeżeli funckja meromorficzna $W(z)$ posiada w punkcie z_0 biegun k -krotny, wówczas funckja $1/W(z)$ posiada w tym punkcie pierwiastek k -krotny i odwrotnie.

Podobnie, jeżeli funckja $W(z)$ posiada w punkcie 0 pierwiastek [biegun] k -krotny, wówczas funckja $W(1/z)$ posiada pierwiastek [biegun] k -krotny w ∞ , i odwrotnie.

Mówimy, iż funckja $W(z)$ meromorficzna w punkcie z_0 przyjmuje w tym punkcie k -krotnie wartość $w_0=W(z_0)$, jeżeli bądź $w_0=\infty$ i punkt z_0 jest k -krotnym biegunem funckji $W(z)$, bądź też $w_0\neq\infty$ i funckja $W(z)-w_0$ posiada w z_0 pierwiastek k -krotny.

Jeżeli funckja $W(z)$ przyjmuje wartość $w_0=W(z_0)$ (skończoną lub nieskończoną) k -krotnie w pewnym punkcie $z_0\neq\infty$, wówczas widoczne jest natychmiast, iż funckja $W(z+a)$ (gdzie a jest dowolną liczbą skończoną) przyjmuje k -krotnie wartość w_0 w punkcie $z=z_0-a$, a funckja $W(z)+a$ przyjmuje k -krotnie wartość w_0+a w punkcie z_0 . Ogólniej:

(8.3) Jeżeli funckja $F(z)$, meromorficzna w punkcie z_0 , przyjmuje w tym punkcie p -krotnie wartość z_0 , a funckja $W(z)$, meromorficzna w punkcie z_0 , przyjmuje w tym punkcie k -krotnie wartość w_0 , wówczas funckja $W[F(z)]$ przyjmuje w punkcie z_0 wartość w_0 kp -krotnie.

Dowód. Ze względu na tw. 8.2 możemy przyjąć, iż $w_0\neq\infty$ oraz $z_0\neq\infty$, a następnie, na mocy uwag poprzednich, iż $w_0=0$ oraz $z_0=0$. Wówczas w otoczeniu punktu 0 mamy $W(z)=z^k W_1(z)$ i $F(z)=z^p F_1(z)$, gdzie $W_1(z)$ i $F_1(z)$ są funckjami holomorficznymi w punkcie 0, przy czym $W_1(0)\neq 0$ i $F_1(0)\neq 0$. Zatem

$$W[F(z)]=z^{kp} W_1[F(z)] \cdot [F_1(z)]^k,$$

gdzie $W_1[F(0)] \cdot [F_1(0)]^k = W_1(0) \cdot [F_1(0)]^k \neq 0$. Punkt $z=0$ jest więc kp -krotnym pierwiastkiem funckji $W[F(z)]$.

Funckja liniowa $az+b$ przyjmuje oczywiście każdą swą wartość jednokrotnie (m. in. także wartość ∞ , którą przyjmuje w punkcie ∞ , gdzie posiada biegun). Podobnie, funckja $1/z$, której pochodna nie znika w żadnym punkcie różnym od 0 i ∞ i która w punktach tych posiada odpowiednio biegun jednokrotny i pierwiastek jednokrotny, przyjmuje każdą swą wartość jednokrotnie. Ogólna funckja homograficzna $(az+b)/(cz+d)$ (por. Rozdz. I, tw. 14.8) przyjmuje więc również, na mocy tw. 8.3, każdą swą wartość jednokrotnie, co zresztą łatwo można sprawdzić bezpośrednio. Odwołując się przeto raz jeszcze do tw. 8.3, stwierdzamy, iż

(8.4) Krotność pierwiastków funckji meromorficznej $W(z)$ (oraz wartości przyjmowanych przez tę funckję) nie ulega zmianie przy podstawieniu homograficznym $z=(az+b)/(cz+d)$.

Powracając jeszcze do tw. 8.1, nadamy mu postać następującą, ogólniejszą nieco i analogiczną do tw. 7.1:

(8.5) Jeżeli $W(z)$ jest funckją meromorficzną w obszarze G , nie znikającą tożsamościowo w tym obszarze, wówczas zbiór pierwiastków funckji $W(z)$ jest domknięty w G oraz odosobniony, a więc co najwyżej przeliczalny.

Dowód. Niech E będzie zbiorem pierwiastków funckji $W(z)$ w G . Widoczne jest od razu, iż zbiór ten jest domknięty w G . Założmy, iż nie jest odosobniony, a więc iż posiada w G punkt skupienia a . Oznaczmy przez G_1 zbiór tych punktów obszaru, w których otoczeniu funckja $W(z)$ znika tożsamościowo, i niech $G_2=G-G_1$. Zbiór G_1 jest oczywiście otwarty. Zbiór G_2 jest jednak też otwarty: istotnie, gdyby pewien punkt z_0 zbioru G_2 nie był punktem wewnętrznym tego zbioru, wówczas byłby punktem skupienia zbioru G_1 i, w myśl tw. 8.1, funckja $W(z)$ znikałaby w pewnym jego otoczeniu; punkt z_0 należałby więc do G_1 , a nie do G_2 .

Jeden tedy ze zbiorów G_1, G_2 jest pusty. Ponieważ zbiór G_1 zawiera, na mocy tw. 8.1, punkt a , zatem $G_2=0$, a więc $G=G_1$, i funckja $W(z)$ znika tożsamościowo w G .

Twierdzeniu 8.5 można nadać również postać następującą:

(8.6) Jeżeli dwie funckje meromorficzne w pewnym obszarze przyjmują wartości identyczne w punktach zbioru, posiadającego punkt skupienia wewnątrz obszaru, wówczas funckje te są identyczne w całym obszarze.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli funkcja $W(z)$, meromorficzna w obszarze symetrycznym względem osi rzeczywistej, przyjmuje wartości rzeczywiste w tych punktach obszaru, które leżą na osi rzeczywistej, wówczas $W(z) = \overline{W(z)}$ dla każdego punktu z obszaru.

2. Opierając się na wyniku ćw. 7, § 8, Rozdz. I, udowodnić twierdzenie następujące: jeżeli $f(t)$ jest funkcją skończoną i ciągłą w przedziale skończonym $[a, b]$ i jeżeli $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$ dla $n = 1, 2, \dots$, to $f(t) = 0$ tożsamościowo w $[a, b]$ (Lerch).

3. Jeżeli $\{F_n(z)\}$ jest w obszarze G ciągiem niemal ograniczonym funkcji holomorficznych, zbieżnym w każdym punkcie pewnego zbioru E posiadającego punkt skupienia wewnątrz G , wówczas ciąg ten jest zbieżny niemal jednostajnie w całym obszarze G (Vitali-Osgood).

[Wsk. Por. Rozdz. I, § 3, ćw. 2.]

4. Jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna i ograniczona w obszarze (półpasie) $y > 0$, $a < x < b$ i jeżeli dla pewnej wartości x_0 przedziału otwartego (a, b) mamy $\lim_{y \rightarrow +\infty} W(x_0 + iy) = g$, gdzie g jest pewną liczbą skończoną, wówczas $\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = g$ jednostajnie w każdym półpasie $y > 0$, $a + \varepsilon < x < b - \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$ (Montel).

[Wsk. Zauważyć, iż ciąg funkcji $\{W(z + ni)\}_{n=1,2,\dots}$ jest normalny w obszarze $y > 0$, $a < x < b$.]

5. Niech $F(z) = P(z)/Q(z)$, gdzie P i Q są funkcjami holomorficznymi w punkcie z_0 , przy czym $P(z_0) \neq 0$. Pokazać, iż: 1° jeżeli funkcja Q posiada w z_0 pierwiastek jednokrotny, to $\operatorname{res}_{z_0} F = P(z_0)/Q'(z_0)$; 2° jeżeli funkcja Q posiada w z_0 pierwiastek dwukrotny, to $\operatorname{res}_{z_0} F = [6P'(z_0)Q''(z_0) - 2P(z_0)Q'''(z_0)]/3[Q''(z_0)]^2$.

§ 9. Pochodna logarytmiczna. Pochodna logarytmiczna (Rozdz. II, § 1, str. 97) odgrywa dość istotną rolę w podstawowych badaniach nad rozmieszczeniem pierwiastków i biegunów funkcji meromorficznej. Pokażemy, iż pochodna logarytmiczna funkcji meromorficznej jest również meromorficzna, i zbadamy jej część główną w punktach osobliwych.

(9.1) *Pochodna logarytmiczna $W'(z)/W(z)$ funkcji $W(z)$, meromorficznej i nie znikającej tożsamościowo w zbiorze otwartym G , jest również meromorficzna w G i posiada bieguny dokładnie w tych punktach, które są bądź pierwiastkami, bądź biegunami funkcji $W(z)$. Jeżeli z_0 jest k -krotnym pierwiastkiem lub biegunem tej funkcji, wówczas częścią główną rozwinięcia funkcji $W'(z)/W(z)$ w tym punkcie jest wyrażenie $\varepsilon k/(z - z_0)$, gdzie ε jest $+1$ lub -1 zależnie od tego, czy punkt z_0 jest pierwiastkiem, czy biegunem funkcji $W(z)$. Ogólniej, jeżeli $F(z)$ jest dowolną funkcją holomorficzną w z_0 , wówczas $\varepsilon k F(z_0)/(z - z_0)$ jest częścią główną rozwinięcia funkcji $F(z) \cdot W'(z)/W(z)$.*

Dowód. Widoczne jest od razu, iż poza pierwiastkami i biegunami funkcji $W(z)$ funkcja $W'(z)/W(z)$ jest wszędzie holomorficzna w G . Niech więc $z_0 \in G$ będzie pierwiastkiem lub biegunem k -krotnym funkcji $W(z)$. Mamy $W(z) = (z - z_0)^{\varepsilon k} W_1(z)$, gdzie $W_1(z)$ jest funkcją holomorficzną, nie znikającą w punkcie z_0 . Z drugiej strony, jeżeli $F(z)$ jest dowolną funkcją holomorficzną w z_0 , wówczas $F(z) = F(z_0) + (z - z_0)F_1(z)$, gdzie $F_1(z)$ jest również funkcją holomorficzną w z_0 . Zatem:

$$\begin{aligned} F(z) \cdot \frac{W'(z)}{W(z)} &= [F(z_0) + (z - z_0)F_1(z)] \frac{(z - z_0)^{\varepsilon k - 1} \cdot [\varepsilon k W_1(z) + (z - z_0)W_1'(z)]}{(z - z_0)^{\varepsilon k} W_1(z)} = \\ &= \frac{\varepsilon k \cdot F(z_0)}{z - z_0} + \varepsilon k \cdot F_1(z) + F(z) \cdot \frac{W_1'(z)}{W_1(z)}. \end{aligned}$$

Ponieważ dwa ostatnie wyrazy są na pewno holomorficzne w punkcie z_0 , część główna funkcji $F(z) \cdot W'(z)/W(z)$ w tym punkcie redukuje się do $\varepsilon k F(z_0)/(z - z_0)$, co należało udowodnić.

Niech teraz $W(z)$ będzie funkcją meromorficzną na prostokącie I , nie posiadającą pierwiastków ani biegunów na obwodzie tego prostokąta. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą pierwiastkami (różnymi) funkcji $W(z)$ w I o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_n$. Podobnie, niech $b_1, b_2, \dots, b_m$ będą biegunami tej funkcji w I o krotnościach $h_1, h_2, \dots, h_m$. Wówczas w myśl tw. 7.2 i 9.1 mamy dla każdej funkcji $F(z)$ holomorficznej na I

$$F(z) \frac{W'(z)}{W(z)} = \Phi(z) + \sum_{j=1}^n \frac{k_j F(a_j)}{z - a_j} - \sum_{j=1}^m \frac{h_j F(b_j)}{z - b_j},$$

gdzie $\Phi(z)$ jest również funkcją holomorficzną na I . Całkując wzdłuż (I) obydwie strony powyższej równości i korzystając z twierdzenia oraz wzoru Cauchy'ego dla prostokąta (Rozdz. II, tw. 4.1 i 5.3), otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(I)} F(z) \frac{W'(z)}{W(z)} dz = \sum_{j=1}^n k_j F(a_j) - \sum_{j=1}^m h_j F(b_j).$$

Innymi słowy:

(9.2) Jeżeli $W(z)$ jest funkcją meromorficzną na prostokącie I , nie posiadającą pierwiastków ani biegunów na obwodzie tego prostokąta, wówczas dla każdej funkcji $F(z)$ holomorficznej na I

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(I)} F(z) \frac{W'(z)}{W(z)} dz = \sum_{j=1}^{\alpha} F(a_j) - \sum_{j=1}^{\beta} F(b_j),$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, a_{\alpha}$ są pierwiastkami, zaś $b_1, b_2, \dots, b_{\beta}$ biegunami $W(z)$ wewnątrz I , wypisanymi po tyle razy, ile wynosi ich krotność.

W szczególności (przyjmując tożsamościowo $F(z)=1$)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(I)} \frac{W'(z)}{W(z)} dz = \alpha - \beta,$$

gdzie α jest ilością pierwiastków, a β ilością biegunów funkcji $W(z)$ wewnątrz I .

§ 10. Twierdzenie Rouché. Udowodnimy przede wszystkim następujący lemat, będący wariantem twierdzenia i wzoru Cauchy'ego z Rozdz. II oraz twierdzenia 9.2 z § poprzedniego.

(10.1) Niech G będzie dowolnym zbiorem otwartym, nie zawierającym punktu ∞ , i F zbiorem domkniętym, zawartym w G . Istnieje wówczas w $G-F$ układ skończony odcinków (zorientowanych) $L_1, L_2, \dots, L_n$ taki iż:

(I) dla każdej funkcji $W(z)$ holomorficznej w G

$$\sum_j \int_{L_j} W(z) dz = 0;$$

(II) dla każdej funkcji $W(z)$ holomorficznej w G i każdego punktu $a \in F$

$$W(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{L_j} \frac{W(z)}{z-a} dz;$$

(III) dla każdej funkcji $W(z)$, holomorficznej w zbiorze G i nieposiadającej w tym zbiorze pierwiastków poza zbiorem F ,

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{L_j} \frac{W'(z)}{W(z)} dz = \alpha,$$

gdzie α oznacza ilość pierwiastków funkcji $W(z)$ w G , licząc każdy pierwiastek tyle razy, ile wynosi jego krotność.

Dowód. Weźmy pod uwagę siatkę kwadratów $\Omega^{(N)}$ na płaszczyźnie rzędu N dostatecznie wysokiego (por. Wstęp, § 10) tak, by każdy kwadrat tej siatki, który posiada punkty wspólne z F , zawierał się całkowicie w G ; wystarczy w tym celu przyjąć $1/2^{N-1} < \rho(F, CG)$, gdyż wówczas średnice kwadratów siatki $\Omega^{(N)}$ są mniejsze niż $\rho(F, CG)$. Niech $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ będzie układem tych kwadratów siatki, które posiadają punkty wspólne z F , i niech $L_1, L_2, \dots, L_n$ będą odcinkami brzegowymi tego układu. Pokażemy, iż układ ten spełnia żądane trzy warunki.

ad (I) i (II). Niech $W(z)$ będzie dowolną funkcją holomorficzną w G . Wówczas $\int_{(Q_r)} W(z) dz = 0$ dla $r=1, 2, \dots, s$, więc również

$\sum_{r=1}^s \int_{(Q_r)} W(z) dz = 0$. Ponieważ po lewej stronie tej równości całki wzdłuż

boków siatki, należących do dwu przyległych kwadratów Q_j , wzajemnie się znoszą, więc z ich sumy pozostają tylko całki wzdłuż odcinków brzegowych $L_1, L_2, \dots, L_n$ i rozważana równość przyjmuje

$$\text{żądaną postać } \sum_{j=1}^n \int_{L_j} W(z) dz = 0.$$

Niech teraz a będzie dowolnym punktem zbioru F i niech Q_{r_0} będzie tym spośród kwadratów Q_r , który zawiera punkt a . Założmy najpierw, iż a jest punktem wewnętrznym kwadratu Q_{r_0} . Funkcja $W(z)/(z-a)$ jest tedy holomorficzna na każdym z kwadratów Q_r dla $r \neq r_0$ i w myśl twierdzenia oraz wzoru Cauchy'ego dla prostokąta (Rozdz. II, tw. 4.1 i 5.3)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(Q_r)} \frac{W(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \neq r_0, \\ W(a) & \text{dla } r = r_0. \end{cases}$$

Zatem $2\pi i \cdot W(a) = \sum_{r=1}^s \int_{(Q_r)} \frac{W(z)}{z-a} dz$, przy czym, jak w rozumowaniu poprzednim, całki wzdłuż tych boków siatki, które należą do dwu przyległych kwadratów Q_r , znoszą się wzajemnie i równość

$$\text{przyjmuje postać } 2\pi i \cdot W(a) = \sum_{j=1}^n \int_{L_j} \frac{W(z)}{z-a} dz.$$

Przez proste przejście do granicy uogólniamy wzór ten na punkty $a \in F$, leżące na brzegu kwadratu Q_{r_0} .

ad (III). Niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną w G , nie posiadającą pierwiastków poza zbiorem F . Niech pierwiastkami jej w G będą $a_1, a_2, \dots, a_m$ o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_m$. Rozumując analogicznie jak w dowodzie tw. 9.2, mamy na zasadzie tw. 7.2 i 9.1

$$\frac{W'(z)}{W(z)} = \Phi(z) + \sum_{p=1}^m \frac{k_p}{z - a_p},$$

gdzie $\Phi(z)$ jest pewną funkcją holomorficzną w G ; a więc z uwagi na (I) i (II)

$$\sum_{j=1}^n \int_{L_j} \frac{W'(z)}{W(z)} dz = \sum_{j=1}^n \int_{L_j} \Phi(z) dz + \sum_{p=1}^m k_p \cdot \sum_{j=1}^n \int_{L_j} \frac{dz}{z - a_p} = 2\pi i \sum_{p=1}^m k_p = 2\pi i a,$$

gdzie a oznacza ilość pierwiastków $W(z)$ w G , liczonych po tyle razy, ile wynosi ich krotność.

(10.2) **Twierdzenie Rouché.** Jeżeli $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ są funkcjami ciągłymi na zbiorze domkniętym F i holomorficznymi w jego wnętrzu G i jeżeli $|\Phi(z)| < |\Psi(z)|$ na brzegu zbioru F , wówczas funkcje $\Psi(z)$ oraz $\Psi(z) + \Phi(z)$ posiadają tę samą ilość pierwiastków wewnątrz F , licząc każdy pierwiastek tyle razy, ile wynosi jego krotność.

Dowód. Założyć możemy przede wszystkim, iż wnętrze G zbioru F nie zawiera punktu ∞ . Istotnie, w przeciwnym razie, oznaczając przez a dowolny punkt poza G , moglibyśmy zastosować przekształcenie $z = 1/(z - a)$, t. j. $z = a + 1/z$, przy którym zbiór F przechodzi na zbiór domknięty, nie zawierający już w swym wnętrzu punktu ∞ , i przy którym — z uwagi na tw. 8.4 — ilość i krotność pierwiastków funkcji nie ulega zmianie.

Niech teraz F_1 oznacza zbiór tych punktów $z \in F$, w których $|\Phi(z)| \geq |\Psi(z)|$. Zbiór ten jest oczywiście domknięty i zawiera się w G . Niech dalej $W_\lambda(z) = \Psi(z) + \lambda\Phi(z)$, gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, zmieniającym się w przedziale $[0, 1]$. Dla tych wartości λ funkcja $W_\lambda(z)$ nie posiada pierwiastków w G poza zbiorem F_1 ; istotnie dla $z \in G - F_1$ mamy

$$(10.3) \quad 0 < |\Psi(z)| - |\Phi(z)| \leq |\Psi(z)| - |\lambda\Phi(z)| \leq |\Psi(z) + \lambda\Phi(z)|.$$

Na mocy tw. 10.1 istnieje w $G - F_1$ układ skończony odcinków $L_1, L_2, \dots, L_n$ taki, iż, oznaczając przez α_λ ilość pierwiastków funkcji $W_\lambda(z)$ w G , liczonych po tyle razy, ile wynosi ich krotność, mamy:

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{L_j} \frac{W'_\lambda(z)}{W_\lambda(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{L_j} \frac{\Psi'(z) + \lambda\Phi'(z)}{\Psi(z) + \lambda\Phi(z)} dz.$$

Z uwagi na (10.3), wyrażenie po prawej stronie powyższego związku jest funkcją ciągłą parametru λ w przedziale $[0, 1]$, a że przyjmuje tylko wartości całkowite, mianowicie α_λ , przeto zachować musi wartość stałą. W szczególności więc $\alpha_0 = \alpha_1$, t. j. funkcje $W_0(z) = \Psi(z)$ oraz $W_1(z) = \Psi(z) + \Phi(z)$ posiadają tę samą ilość pierwiastków w G .

Istnieje wiele odmian dowodu twierdzenia Rouché. Pomysł wprowadzenia parametru λ znajdujemy w pracach: A. Cohn, Math. Zeitschrift, **14** (1922), str. 110-149, S. Mazurkiewicz, Spraw. Tow. Nauk. Warsz., **28** (1935), str. 1-2 oraz w książce: L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. I (3-e wyd.), Berlin 1930, str. 190.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli funkcja $F(z)$ jest ciągła na kole domkniętym $K(0; 1)$, holomorficzna w jego wnętrzu i spełnia warunek $|F(z)| < 1$ dla $|z| \leq 1$, wówczas równanie $F(z) - z = 0$ posiada dokładnie jeden pierwiastek wewnątrz koła $K(0; 1)$.

2. Dla każdej wartości $R > 0$ istnieje taka liczba N , iż przy $n \geq N$ wszystkie pierwiastki wielomianu $1 + z/1! + z^2/2! + \dots + z^n/n!$ leżą zewnątrz koła $K(0; R)$.

3. Równanie $(z - 1)^p e^z = a$, gdzie p jest liczbą całkowitą dodatnią, zaś $0 < |a| < 1/2^p$, ma dokładnie p różnych pierwiastków w półpłaszczyźnie $\Re z > 0$, przy czym wszystkie te pierwiastki leżą w kole $K(1; \frac{1}{2})$ (Biernacki).

4. Niech $W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ w kole $K = K(0; 1)$ i niech $F \subset K$ będzie zbiorem domkniętym, zawierającym punkt 0. Wówczas, jeśli μ oznacza kres dolny funkcji $|W(z)|$ na brzegu zbioru F , a m — liczbę pierwiastków funkcji $W(z)$ w tym zbiorze, to $\mu \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m|$ (Saxer).

§ 11. Twierdzenie Hurwitza. Jako zastosowanie twierdzenia Rouché podamy twierdzenie następujące:

(11.1) Jeżeli ciąg $\{W_n(z)\}$ funkcji, ciągłych na zbiorze domkniętym F i holomorficznych wewnątrz F , jest jednostajnie zbieżny na tym zbiorze i jeżeli funkcja $W(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(z)$ nie znika nigdzie na brzegu zbioru F , wówczas, poczynając od pewnej wartości n , wszystkie funkcje $W_n(z)$ posiadają wewnątrz F tę samą ilość pierwiastków co funkcja $W(z)$ (licząc każdy pierwiastek tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Dowód. Niech m będzie kresem dolnym wartości $|W(z)|$ na brzegu zbioru F . Ponieważ $m > 0$, przeto poczynając od pewnej wartości n_0 wskaźnika n , mamy na brzegu rozważanego zbioru $|W_n(z) - W(z)| < m \leq |W(z)|$, przy czym na mocy twierdzenia Weierstrassa (Rozdz. II, tw. 6.1) funkcja $W(z)$ jest holomorficzna wewnątrz F . Stosując tedy tw. 10.2 do pary funkcji $\Phi_n(z) = W_n(z) - W(z)$, $\Psi(z) = W(z)$, otrzymujemy, iż dla $n \geq n_0$ funkcje $W(z) = \Psi(z)$ i $W_n(z) = \Psi(z) + \Phi_n(z)$ posiadają tę samą ilość pierwiastków.

Tw. 11.1 formułuje się często w innej nieco postaci, znanej pod nazwą *twierdzenia Hurwitza*:

(11.2) *Jeżeli $\{W_n(z)\}$ jest ciągiem funkcji holomorficznych w obszarze G , niemal jednostajnie zbieżnym w tym obszarze, i jeżeli funkcja $W(z) = \lim_n W_n(z)$ nie znika tożsamościowo i posiada w G przynajmniej p różnych pierwiastków, wówczas, poczynając od pewnej wartości n , wszystkie funkcje $W_n(z)$ posiadają w G również przynajmniej p różnych pierwiastków.*

Dowód. Niech $z_1, z_2, \dots, z_p$ będą różnymi pierwiastkami funkcji $W(z)$. Na mocy tw. 8.5, dla dostatecznie małej wartości r , koła domknięte $\bar{K}_j = \bar{K}(z_j; r)$ tworzą układ p kół domkniętych, rozłącznych, zawartych w G i nie zawierających poza punktami z_j innych pierwiastków funkcji $W(z)$. W myśl tedy tw. 11.1, poczynając od pewnej wartości n , każda z funkcji $W_n(z)$ posiada w każdym z kół $\bar{K}_j$ przynajmniej jeden pierwiastek, a więc tym samym przynajmniej p pierwiastków w obszarze G .

Z twierdzenia 11.2 otrzymujemy jako natychmiastowy wniosek twierdzenie następujące, które odgrywa istotną rolę w teorii odwzorowań wiernych (ob. dalej, Rozdz. V):

(11.3) *Jeżeli ciąg $\{W_n(z)\}$ funkcji holomorficznych i jednoznacznie odwracalnych w obszarze G jest niemal jednostajnie zbieżny w tym obszarze, wówczas funkcja $W(z) = \lim_n W_n(z)$ bądź redukuje się do stałej, bądź jest również jednoznacznie odwracalna w G .*

Dowód. Gdyby funkcja $W(z)$ nie redukowałą się do stałej i przyjmowała tę samą wartość w_0 w dwu różnych punktach obszaru G , to stosując tw. 11.2 do ciągu $\{W_n(z) - w_0\}$, otrzymalibyśmy natychmiast, iż dla dostatecznie wielkich wartości n każda z funkcji $W_n(z) - w_0$ znika przynajmniej w dwu różnych punktach obszaru, co sprzeczne jest z jednoznacznością odwracalnością funkcji $W_n(z)$.

Jako jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia Hurwitza podamy następujące uzupełnienie twierdzenia Stieltjesa-Osgooda (Rozdz. II, § 7) o rodzinach normalnych:

(11.4) *Funkcje holomorficzne w obszarze G i nie przyjmujące w tym obszarze wartości należących do pewnego stałego koła $K(a; r)$ tworzą w G rodzinę normalną.*

Dowód. Niech $\{W_n(z)\}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych w G , nie przyjmujących żadnej wartości należącej do koła $K(a; r)$. Należy udowodnić, iż ciąg ten zawiera bądź podciąg niemal jednostajnie zbieżny w G , bądź podciąg niemal jednostajnie rozbieżny do ∞ w G . Można przy tym założyć, iż $a \neq \infty$, w przeciwnym bowiem razie ciąg $\{W_n(z)\}$ byłby ograniczony w G (przez liczbę $1/r$) i wystarczyłoby odwołać się bezpośrednio do twierdzenia Stieltjesa-Osgooda. Dalej, zastępując ewentualnie ciąg $\{W_n(z)\}$ przez ciąg $\{W_n(z) - a\}$, można przyjąć, iż $a = 0$. Ciąg $\{T_n(z) = 1/W_n(z)\}$ jest wówczas jednostajnie ograniczony i, na mocy twierdzenia Stieltjesa-Osgooda, zawiera pewien podciąg $\{T_{n_k}(z)\}$ niemal jednostajnie zbieżny w G . Przyjmując $T(z) = \lim_k T_{n_k}(z)$, rozróżnimy dwa przypadki:

1° Funkcja $T(z)$ znika tożsamościowo w G . Zatem $T_{n_k}(z) \rightarrow 0$, i przeto $W_{n_k}(z) = 1/T_{n_k}(z) \rightarrow \infty$ w obszarze G .

2° Funkcja $T(z)$ nie znika tożsamościowo w G . Na mocy więc tw. Hurwitza 11.2, ponieważ żadna z funkcji $T_{n_k}(z) = 1/W_{n_k}(z)$ nie znika w żadnym punkcie obszaru G , funkcja $T(z)$ również nie może posiadać pierwiastków w tym obszarze. Niech $F \subset G$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym i niech $m > 0$ oznacza kres dolny $|T(z)|$ na F . Wówczas, dla dostatecznie wielkich wartości k mamy $|T_{n_k}(z)| \geq \frac{m}{2}$, a więc $|W_{n_k}(z) - 1/T(z)| \leq 2|T(z) - T_{n_k}(z)|/m^2$, i ciąg $\{W_{n_k}(z)\}$ jest zbieżny jednostajnie na F do $1/T(z)$. Zatem znów $W_{n_k}(z) \rightarrow 1/T(z)$ w obszarze G .

Należy zauważyć, iż tw. 11.4 zawiera w istocie wynik bardzo słaby. Montel udowodnił, iż rodzinę normalną w obszarze G tworzą funkcje holomorficzne w tym obszarze, nie przyjmujące dwu dowolnie ustalonych wartości, np. 0 i 1. Dowód tego twierdzenia, daleko oczywiście mocniejszego, opiera się jednak na głębszych metodach teorii funkcji (ob. Rozdz. VII).

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli $\{F_n(z)\}$ jest w obszarze G ciągiem niemal ograniczonym funkcji holomorficznych, nie znikających nigdzie w tym obszarze, i jeżeli $\lim F_n(z_0) = 0$ w pewnym punkcie z_0 obszaru G , wówczas $F_n(z) \rightarrow 0$ w całym obszarze G .

Ogólniej, jeżeli $\{F_n(z)\}$ jest w obszarze G ciągiem niemal ograniczonym funkcji holomorficznych, z których żadna nie posiada więcej niż p pierwiastków w tym obszarze, i jeżeli granica $\lim F_n(z)$ istnieje oraz jest równa zeru w $p+1$ różnych punktach obszaru G , to $F_n(z) \rightarrow 0$ w całym obszarze G (por. Rozdz. I, § 3, ćw. 2).

2. Jeżeli $\{F_n(z)\}$ jest ciągiem funkcji holomorficznych w obszarze G i ciąg $\{a_n F_n(z)\}$ jest normalny w G , wówczas ciąg $\{F_n(z)\}$ jest również normalny.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: ciąg $\{F_n(z) = nz\}$ jest normalny w kole $K(i; 1)$ i spełnia nawet warunek tw. 11.4 (żadna z funkcji $F_n(z) = nz$ nie przyjmuje w kole $K(i; 1)$ wartości należących do półpłaszczyzny $y < 0$). Ciąg $\{a_n F_n(z) = nx\}$ nie jest jednak normalny w kole $K(i; 1)$.

3. Jeżeli $\{F_n(z)\}$ jest ciągiem funkcji holomorficznych w obszarze G i ciąg $\{a_n F_n(z)\}$ jest ograniczony z góry (lub z dołu) w tym obszarze, wówczas ciąg $\{a_n F_n(z)\}$ jest normalny w G .

§ 12. Odwzorowania określone przez funkcje meromorficzne. Z twierdzeń § 11 wynika łatwo następujące ważne twierdzenie:

(12.1) Jeżeli funkcja $W(z)$, meromorficzna w pewnym punkcie z_0 , nie jest stała w otoczeniu tego punktu i przyjmuje w nim m -krotnie wartość $w_0 = F(z_0)$, wówczas każdej dostatecznie małej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\eta > 0$, iż każda wartość $w \neq w_0$, należąca do koła $K(w_0; \eta)$, przyjmowana jest w dokładnie m punktach koła $K(z_0; \varepsilon)$ i w każdym z tych punktów jednokrotnie.

Dowód. Możemy założyć przede wszystkim, iż $w_0 \neq \infty$, a więc iż funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w z_0 , w przeciwnym bowiem razie moglibyśmy (korzystając z tw. 8.2) wziąć pod uwagę funkcję $1/W(z)$ zamiast funkcji $W(z)$. Ponieważ funkcja $W(z) \rightarrow w_0$ nie znika tożsamościowo w otoczeniu punktu z_0 , więc gdy liczba $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie mała, funkcja $W(z)$ jest holomorficzna na kole domkniętym $\bar{K} = K(z_0; \varepsilon)$ i ani funkcja $W(z) - w_0$, ani jej pochodna $W'(z)$, nie znika w żadnym punkcie koła $\bar{K}$ poza co najwyżej punktem z_0 . Funkcja $W(z)$ może więc przyjmować w punktach koła $\bar{K}$ każdą wartość $w \neq w_0$ najwyżej jednokrotnie. Z drugiej strony, funkcja $W(z) - w_0$ posiada w kole $K(z_0; \varepsilon)$ dokładnie m pierwiastków, licząc m razy m -krotny pierwiastek z_0 . Ponieważ zaś $W(z) \rightarrow w$ dąży jednostajnie do $W(z) - w_0$ wraz z $w \rightarrow w_0$, przeto, w myśl tw. 11.1, dla

każdej wartości $w \neq w_0$ dostatecznie bliskiej w_0 , funkcja $W(z) - w$ posiada w $K(z_0; \varepsilon)$ dokładnie m pierwiastków. Innymi słowy, skoro tylko η jest dostatecznie małą liczbą dodatnią, każda wartość $w \in K(w_0; \eta)$, różna od w_0 , przyjmowana jest w kole $K(z_0; \varepsilon)$ dokładnie w m różnych punktach i w każdym z tych punktów jednokrotnie.

(12.2) Jeżeli $W(z)$ jest funkcją meromorficzną w zbiorze otwartym G , nie redukującą się do stałej w otoczeniu żadnego punktu tego zbioru, wówczas zbiór $W(G)$ jest również otwarty.

Jeżeli $W(z)$ jest funkcją meromorficzną w obszarze G , nie redukującą się do stałej, wówczas zbiór $W(G)$ jest również obszarem.

Pierwsza część tego twierdzenia jest bezpośrednią konsekwencją tw. 12.1. Część druga jest konsekwencją części pierwszej, tw. 8.5 tego rozdziału oraz tw. 7.1 (b) Wstępu.

Należy tu zauważyć, iż tw. 12.2 nie jest prawdziwe dla dowolnych funkcji ciągłych, jak wskazuje przykład funkcji $w = W(x + iy) = x$, która płaszczyznę otwartą przekształca na linię prostą. Jest natomiast prawdziwe dla dowolnych funkcji ciągłych jednoznacznie odwracalnych, dowód jednak wymaga subtelniejszych rozważań topologicznych.

(12.3) Jeżeli funkcja $W(z)$ jest meromorficzna i jednoznacznie odwracalna w zbiorze otwartym G , wówczas jej odwrócenie $Z = W^{-1}$ jest funkcją meromorficzną w zbiorze otwartym $H = W(G)$; przy tym jeżeli $z_0 \in G$, $w_0 = W(z_0)$, $z_0 \neq \infty$ oraz $w_0 \neq \infty$, to $Z'(w_0) = 1/W'(z_0)$.

Dowód. Przede wszystkim z tw. 12.1 wynika natychmiast, iż jeżeli $z_0 \in G$ oraz $w_0 = W(z_0)$, wówczas $w \rightarrow w_0$ pociąga za sobą $Z(w) \rightarrow z_0 = Z(w_0)$. Jeżeli więc ponadto założymy, iż $w_0 \neq \infty$ oraz $z_0 \neq \infty$, wówczas

$$\frac{Z(w) - Z(w_0)}{w - w_0} = \frac{Z(w) - z_0}{W[Z(w)] - W(z_0)} \rightarrow \frac{1}{W'(z_0)},$$

gdy $w \rightarrow w_0$, przy czym $W'(z_0) \neq 0$, ponieważ w przeciwnym przypadku funkcja $W(z)$ przyjmowałaby swą wartość w_0 w punkcie z_0 przynajmniej dwukrotnie i, na mocy tw. 12.1, nie byłaby w otoczeniu tego punktu jednoznacznie odwracalna. Jeżeli zatem $z_0 \neq \infty$ oraz $w_0 = W(z_0) \neq \infty$, wówczas funkcja $Z(w)$ jest holomorficzna w w_0 , przy czym $Z'(w_0) = 1/W'(z_0)$. Pozostają więc co najwyżej jeszcze do zbadania dwa punkty zbioru H : punkt ∞ oraz punkt, który odpowiada punktowi ∞ zbioru G . Jednak, jak zauważyliśmy już ogólnie,

funkcja $Z(w)$ posiada oznaczoną granicę $z_0 = Z(w_0)$ w punkcie w_0 również i wtedy, gdy $z_0 = \infty$ lub $w_0 = \infty$; jest przeto meromorficzna w każdym punkcie $w_0 \in H$ (por. § 6, str. 140), a więc w całym obszarze H .

Z tw. 12.1 i 12.3 wynika natychmiast następujące twierdzenie o lokalnym odwracaniu funkcji meromorficznych:

(12.4) *Funkcja meromorficzna w zbiorze otwartym G jest jednoznacznie odwracalna w otoczeniu każdego punktu, w którym przyjmuje wartość swą jednokrotnie; posiada tedy w dostatecznie małym otoczeniu każdego takiego punktu odwrócenie, które jest również funkcją meromorficzną.*

Jako zastosowanie tw. 12.2 podamy jeszcze dowód następującego twierdzenia, zwanego często *zasadą maximum dla funkcji holomorficznych*:

(12.5) *Wartość bezwzględna funkcji $W(z)$, holomorficznej w obszarze G i nie redukującej się do stałej, nie osiąga w żadnym punkcie tego obszaru swego kresu górnego.*

Dowód. Gdyby funkcja $|W(z)|$ osiągała swój kres górny M w pewnym punkcie $z_0 \in G$, wówczas mielibyśmy przede wszystkim $M = |W(z_0)| > 0$, w przeciwnym bowiem razie funkcja $W(z)$ znikałaby tożsamościowo. Następnie, funkcja $W(z)$ nie przyjmowałaby w G żadnej wartości postaci $\lambda \cdot W(z_0)$ dla $\lambda > 1$, co sprzeczne jest jednak z tym, iż na mocy tw. 12.2 zbiór $W(G)$ jest otwarty.

Z licznych zastosowań zasady maximum wskażemy tu najprostsze. Zauważmy przede wszystkim, iż jeżeli funkcja W jest ciągła na domknięciu pewnego obszaru G , wówczas na pewno osiąga maximum swej wartości bezwzględnej na zbiorze $\bar{G}$ w pewnym punkcie tego zbioru. Jeżeli jednak ponadto funkcja W jest holomorficzna w obszarze G , wówczas na mocy tw. 12.5 maximum to nie może być osiągnięte w żadnym punkcie obszaru, chyba że funkcja redukuje się do stałej. Zatem:

(12.6) *Jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w obszarze G i ciągła na jego domknięciu, wówczas kres górny wartości $|W(z)|$ dla $z \in G$ osiągany jest na brzegu obszaru G .*

Wynika stąd natychmiast twierdzenie następujące:

(12.7) *Jeżeli ciąg $\{W_n(z)\}$ funkcji holomorficznych w obszarze G i ciągłych na domknięciu obszaru G jest zbieżny jednostajnie na brzegu tego obszaru, wówczas ciąg ten jest zbieżny jednostajnie na całym obszarze domkniętym $\bar{G}$.*

Dowód. Dla każdej pary liczb naturalnych p, q maximum wyrażenia $|W_p(z) - W_q(z)|$ w obszarze domkniętym $\bar{G}$ równe jest, na mocy tw. 12.6, maximum tego wyrażenia na brzegu obszaru G . Zbieżność jednostajna ciągu $\{W_n(z)\}$ na brzegu obszaru G pociąga więc za sobą zbieżność jednostajną ciągu na całym obszarze domkniętym $\bar{G}$.

ĆWICZENIA. 1. Niech $F(z)$ będzie funkcją holomorficzną, nie redukującą się do stałej, w obszarze G , zaś M liczbą nieujemną o następującej własności: dla każdego punktu z_0 na brzegu G oraz dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje takie otoczenie K punktu z_0 , iż $|F(z)| \leq M + \varepsilon$, jeżeli $z \in K \cap G$. Wówczas $|F(z)| < M$ dla każdego punktu $z \in G$. (Twierdzenie to jest o tyle ogólniejsze od tw. 12.6, iż nie wymaga, by funkcja była określona i ciągła na brzegu obszaru.)

2. Jeżeli funkcja $F(z)$ holomorficzna w obszarze G nie znika w żadnym punkcie tego obszaru, wówczas jej wartość bezwzględna nie osiąga w żadnym punkcie obszaru swego minimum, wyjąwszy przypadek, gdy funkcja $F(z)$ redukuje się do stałej.

3. Część rzeczywista funkcji holomorficznej w obszarze nie osiąga w żadnym punkcie tego obszaru swego maximum ani minimum, wyjąwszy przypadek, gdy funkcja dana redukuje się do stałej.

[Wsk. Oznaczając daną funkcję przez $F(z)$, rozważyć funkcję $\exp F(z)$.]

4. Tw. 12.6 sformułować można w postaci następującej: Jeżeli funkcja $W(z)$ jest ciągła na zbiorze domkniętym F i holomorficzna w jego wnętrzu, wówczas maximum jej wartości bezwzględnej na zbiorze F osiągane jest na brzegu tego zbioru. Analogiczne sformułowanie dla tw. 12.7.

[Wsk. Każdy punkt brzegowy składowej zbioru jest punktem brzegowym całego zbioru.]

5. Jeżeli $\{W_n(z)\}$ jest ciągiem funkcji holomorficznych zbieżnym wszędzie w zbiorze otwartym G , a R jest zbiorem punktów, w których żadnym otoczeniu ciąg $\{W_n(z)\}$ nie jest zbieżny jednostajnie, wówczas zbiór R jest domknięty w G , nigdzie gęsty i każda składowa domknięcia zbioru R posiada punkty wspólne z CG .

[Wsk. Por. Wstęp, § 9, ćw. 2; Rozdz. II, § 7, ćw. 2.]

6. Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną w obszarze G , nie zawierającym punktów 0 ani ∞ , zaś a jest dowolną liczbą rzeczywistą, wówczas, wyjąwszy przypadek, gdy $W(z) = C/z^a$, gdzie C jest stałą, funkcja $|z|^a \cdot |W(z)|$ nie osiąga swego kresu górnego w żadnym punkcie obszaru G .

7. (a) Funkcję $F(t)$ rzeczywistą i skończoną w przedziale otwartym (a, b) nazywamy *wypukłą* w tym przedziale, jeżeli

$$F\left(\frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}\right) \leq \frac{m_1 F(t_1) + m_2 F(t_2)}{m_1 + m_2},$$

ilekroć $a < t_1 < t_2 < b$, $m_1 > 0$ i $m_2 > 0$ (znaczy to, że dla każdego podprzedziału $[t_1, t_2]$ żaden z punktów łuku $y = F(t)$, gdzie $t_1 \leq t \leq t_2$, nie leży powyżej cięciwy tego łuku).

Udowodnić, iż na to, aby funkcja $F(t)$, skończona i ciągła w przedziale otwartym (a, b) , była w tym przedziale wypukła, konieczne jest i dostateczne, aby spełniała następujący warunek *maximum*: dla każdego a kres górny funkcji $F(t) + at$ na każdym przedziale $[a_1, b_1]$ zawartym w (a, b) osiągany jest na jednym z krańców a_1, b_1 tego przedziału.

(b) Opierając się na tym, udowodnić, że jeśli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną nie znikającą tożsamościowo w pierścieniu $P(0; \varrho_1, \varrho_2)$, a $M(r)$ dla $\varrho_1 < r < \varrho_2$ oznacza kres górny funkcji $|W(z)|$ na okręgu $C(0; r)$, wówczas $\text{Log } M(r)$ jest funkcją wypukłą $\text{Log } r$ w przedziale otwartym (ϱ_1, ϱ_2) (Hadamard: „twierdzenie o trzech kołach”).

§ 13. Funkcje holomorficzne dwu zmiennych. Jeżeli G_1 i G_2 są dwoma zbiorami otwartymi, wówczas funkcję dwu zmiennych $F(z, w)$ nazywamy *holomorficzną* w zbiorze $G_1 \times G_2$ (por. Wstęp, § 13; Rozdz. I, § 1), jeżeli funkcja ta jest ciągła na zbiorze $G_1 \times G_2$ i jeżeli dla każdej wartości $z \in G_1$ jest holomorficzna względem w w G_2 oraz dla każdej wartości $w \in G_2$ jest holomorficzna względem z w G_1 .

Funkcję $F(z, w)$ nazywamy *holomorficzną w punkcie* (z_0, w_0) , jeżeli jest holomorficzna w jakimś otoczeniu dwukółowym (ob. Wstęp, § 13) tego punktu.

Niech $F(z, w)$ będzie funkcją holomorficzną w iloczynie kartezjańskim $G_1 \times G_2$ dwu zbiorów otwartych nie zawierających punktu ∞ i niech $z_0 \in G_1$, $w_0 \in G_2$. Niech $Q \subset G_1$ będzie kwadratem o środku z_0 . W myśl tw. 5.5, Rozdz. II, mamy

$$(13.1) \quad F'_z(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{F(\zeta, w)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad \text{dla} \quad (z, w) \in Q^\circ \times G_2.$$

Wyrażenie podcałkowe jest funkcją ciągłą trzech zmiennych: z, ζ i w , które przebiegają odpowiednio: wewnątrz kwadratu Q , brzeg tego kwadratu i zbiór G_2 ; prawa strona wzoru (13.1) jest więc funkcją ciągłą w $Q^\circ \times G_2$, a jednocześnie na mocy tw. 5.7, Rozdz. II, jest różniczkowalna względem w w G_2 dla każdej wartości $z \in Q^\circ$ oraz różniczkowalna względem z w Q° dla każdej wartości $w \in G_2$. Funkcja $F'_z(z; w)$ jest tedy holomorficzna w każdym punkcie $(z_0, w_0) \in G_1 \times G_2$. Analogiczny rezultat otrzymujemy oczywiście dla pochodnej cząstkowej $F'_w(z, w)$, a przez indukcję dla pochodnych cząstkowych wyższych rzędów. Zatem:

(13.2) Jeżeli funkcja $F(z, w)$ jest holomorficzna w iloczynie kartezjańskim $G_1 \times G_2$ dwu zbiorów otwartych nie zawierających punktu ∞ , wówczas jej wszystkie pochodne $\frac{\partial^{m+n} F(z, w)}{\partial z^m \partial w^n}$ są również holomorficzne w $G_1 \times G_2$.

Weźmy teraz pod uwagę funkcję $F(z, w)$ holomorficzną w pewnym punkcie (z_0, w_0) , gdzie $w_0 \neq \infty$. W myśl tw. 5.7 mamy

$$(13.3) \quad F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) (w - w_0)^n,$$

gdzie punkt zmienny (z, w) przebiega pewne otoczenie dwukółowe $K(z_0; r_1) \times K(w_0; r_2)$ punktu (z_0, w_0) . Niech $0 < \varrho_1 < r_1$, $0 < \varrho_2 < r_2$ i niech M będzie kresem górnym $|F(z, w)|$ dla $z \in \bar{K}(z_0; \varrho_1)$ i $w \in \bar{K}(w_0; \varrho)$. Na mocy tw. 4.6 współczynniki $a_n(z)$ dane będą przez wzory

$$(13.4) \quad a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varrho} \frac{F(z, w)}{(w - w_0)^{n+1}} dw,$$

gdzie C_ϱ oznacza okrąg koła $K(w_0; \varrho)$, skąd (por. wzór (4.8))

$$(13.5) \quad |a_n(z)| \leq M/\varrho^n \quad \text{dla} \quad z \in K(z_0; \varrho_1).$$

Jak wynika ze wzoru (13.4), współczynniki $a_n(z)$ są na mocy tw. 5.7, Rozdz. II, holomorficzne w $K(z_0; \varrho_1)$, a ze względu na oszacowanie (13.5) szereg (13.3) jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w otoczeniu dwukółowym $K(z_0; \varrho_1) \times K(w_0; \varrho_2)$. Odwrotnie, jeżeli w pewnym otoczeniu dwukółowym $K(z_0; \varrho_1) \times K(w_0; \varrho_2)$ punktu (z_0, w_0) funkcja $F(z, w)$ rozwija się na jednostajnie zbieżny szereg postaci (13.3) o współczynnikach $a_n(z)$ holomorficznych w $K(z_0; \varrho_1)$, wówczas, jak wynika natychmiast z twierdzenia Weierstrassa (Rozdz. II, tw. 6.1), funkcja $F(z, w)$ jest holomorficzna w $K(z_0; \varrho_1) \times K(w_0; \varrho_2)$. Zatem:

(13.6) Na to, aby funkcja $F(z, w)$ była holomorficzna w punkcie $(z_0, w_0 \neq \infty)$, konieczne jest i dostateczne, aby w iloczynie kartezjańskim $K_1 \times K_2$ otoczeń punktów z_0 i w_0 funkcja ta rozwijała się na szereg jednostajnie zbieżny postaci (13.3) o współczynnikach $a_n(z)$ holomorficznych w K_1 .

Analogiczny warunek otrzymujemy, przedstawiając zmienne z i w .

Twierdzenie to będzie uzupełnione w Rozdz. IV, § 9.

§ 14. Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa.

W wielu przypadkach badanie dowolnej funkcji holomorficznej w punkcie (z_0, w_0) sprowadzić można do badania funkcji, która jest wielomianem względem jednej ze zmiennych z, w . Redukcja ta opiera się na następującym twierdzeniu przygotowawczym („Vorbereitungssatz“) Weierstrassa:

(14.1) Jeżeli funkcja $F(z, w)$ jest holomorficzna i nie znika tożsamościowo w otoczeniu dwukółowym $K_1 \times K_2$ punktu (z_0, w_0) , gdzie $z_0 \neq \infty$, $w_0 \neq \infty$, i jeżeli $F(z_0, w_0) = 0$, wówczas w pewnym otoczeniu dwukółowym $K(z_0; \varrho) \times K(w_0; \varrho)$ punktu (z_0, w_0) funkcja ta ma postać

(14.2) $F(z, w) = (z - z_0)^p [(w - w_0)^k + A_1(z)(w - w_0)^{k-1} + \dots + A_k(z)] \cdot F_1(z, w)$, gdzie p i k są liczbami całkowitymi nieujemnymi, $A_1(z), A_2(z), \dots, A_k(z)$ funkcjami holomorficznymi w $K(z_0; \varrho)$, znikającymi dla $z = z_0$, i wreszcie $F_1(z, w)$ funkcją holomorficzną, nigdzie nie znikającą w $K(z_0; \varrho) \times K(w_0; \varrho)$.

Jeżeli ponadto funkcja $F(z_0, w)$ nie znika tożsamościowo w otoczeniu punktu w_0 , wówczas po prawej stronie równości (14.2) mamy $p = 0$, zaś k jest krotnością pierwiastka $w = w_0$ funkcji $F(z_0, w)$.

Twierdzenie pozostaje prawdziwe również dla $z_0 = \infty$ lub $w_0 = \infty$ z tą tylko różnicą, iż we wzorze (14.2) zastąpić wtedy należy $z - z_0$ oraz $w - w_0$ odpowiednio przez $1/z$ oraz $1/w$.

Dowód. Możemy oczywiście przyjąć (stosując ewentualnie podstawienia $z = 1/\zeta$ i $w = 1/\omega$, jeżeli $z_0 = \infty$ lub $w_0 = \infty$, albo odpowiednie przesunięcia, jeżeli z_0, w_0 są liczbami skończonymi), iż $z_0 = w_0 = 0$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy funkcja $F(0, w)$ nie znika tożsamościowo w otoczeniu punktu $w = 0$ i posiada w tym punkcie pierwiastek k -krotny. Niech $Q \subset K_2$ będzie dostatecznie małym kwadratem o środku 0, takim iż funkcja $F(0, w)$ nie posiada w Q pierwiastków poza punktem $w = 0$. Ponieważ funkcja $F(z, w)$, jako funkcja zmiennej w , dąży jednostajnie na Q do $F(0, w)$, gdy $z \rightarrow 0$, zatem na mocy tw. 11.1 istnieje koło $K(0; r) \subset K_1$ takie, iż dla każdego $z \in K(0; r)$ funkcja $F(z, w)$ posiada w Q dokładnie k pierwiastków, przy czym żaden z nich nie leży na obwodzie kwadratu Q . Niech $w_1(z), w_2(z), \dots, w_k(z)$ będą tymi pierwiastkami (wypisanymi po tyle razy, ile wynosi ich krotność). Weźmy pod uwagę wielomian względem w

$$P(z, w) = [w - w_1(z)][w - w_2(z)] \dots [w - w_k(z)] = w^k + A_1(z)w^{k-1} + \dots + A_k(z).$$

Spółczynniki $A_1(z), \dots, A_k(z)$ tego wielomianu znikają oczywiście wraz z pierwiastkami $w_1(z), \dots, w_k(z)$ dla $z = 0$. Pokażemy, iż spółczynniki te są funkcjami holomorficznymi w kole $K(0; r)$. Istotnie, na mocy tw. 9.2 mamy dla $z \in K(0; r)$ oraz $j = 1, 2, \dots$

$$S_j(z) = [w_1(z)]^j + [w_2(z)]^j + \dots + [w_k(z)]^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} w^j \frac{F'_w(z, w)}{F(z, w)} dw,$$

a ponieważ w myśl tw. 13.2 funkcja $F'_w(z, w)$ jest holomorficzna w $K_1 \times K_2 \supset K(0; r) \times Q$, przeto na mocy tw. 5.7, Rozdz. II, wszystkie funkcje $S_j(z)$ są holomorficzne w $K(0; r)$. Stąd jednak wynika, iż spółczynniki $A_1(z), \dots, A_k(z)$ są również holomorficzne w kole $K(0; r)$, ponieważ na zasadzie znanego twierdzenia algebry o funkcjach symetrycznych wyrażają się jako pewne wielomiany¹⁾ względem funkcji $S_j(z)$. Wielomian $P(z, w)$ jest więc też holomorficzny względem z w $K(0; r)$.

Niech teraz $F_1(z, w) = F(z, w)/P(z, w)$. Dla każdej wartości $z \in K(0; r)$ funkcje $F(z, w)$ i $P(z, w)$ posiadają w kwadracie Q te same pierwiastki, i o tej samej krotności. Funkcja $F_1(z, w)$ nie znika tedy nigdzie w $K(0; r) \times Q$ i jest holomorficzna względem w wewnątrz Q dla każdej wartości $z \in K(0; r)$. Pozostaje tylko udowodnić, iż funkcja $F_1(z, w)$ jest ciągła na zbiorze $K(0; r) \times Q^\circ$ oraz holomorficzna względem z w kole $K(0; r)$ dla każdej wartości $w \in Q^\circ$. Otóż ze względu na tw. 3.3 i 5.7, Rozdz. II, wynika to natychmiast ze wzoru

$$F_1(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{F_1(z, w)}{w - w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{F(z, w) dw}{(w - w)P(z, w)},$$

gdzie $z \in K(0; r)$ oraz $w \in Q^\circ$, ponieważ $P(z, w) \neq 0$, gdy $z \in K(0; r)$ i $w \in Q$, i ponieważ funkcja $F(z, w)/P(z, w)$ jest holomorficzna względem z w $K(0; r)$ dla $w \in (Q)$.

Obierając teraz liczbę $\varrho < r$ tak, aby $K(0; \varrho) \subset Q$, otrzymujemy dla punktu $(0, 0)$ otoczenie dwukółowe $K(0; \varrho) \times K(0; \varrho)$, w którym zachodzi żądany rozkład funkcji $F(z, w)$.

Możemy teraz przejść do przypadku, gdy funkcja $F(0, w)$ znika tożsamościowo względem w . W pewnym dwukółowym otoczeniu punktu $(0, 0)$ mamy więc na zasadzie tw. 13.6

$$(14.3) \quad F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) w^n,$$

¹⁾ Bezpośredni dowód tego twierdzenia podajemy dalej (p. str. 164).

gdzie $a_n(z)$ są funkcjami holomorficznymi w otoczeniu punktu 0, znikającymi w tym punkcie. Odrzucając przypadek, gdy wszystkie $a_n(z)$, a więc zarazem i $F(z, w)$, znikają tożsamościowo, oznaczmy przez z^p najwyższą potęgę z , która jest wspólnym czynnikiem wszystkich $a_n(z)$, i niech $a_k(z)$ będzie pierwszym spółczynnikiem w rozwinięciu (14.3), który nie znika w punkcie 0 więcej niż p -krotnie. Jeżeli teraz funkcja $\Phi(z, w) = F(z, w)/z^p$ nie znika w punkcie $(0, 0)$, to rozkład $F(z, w) = z^p \Phi(z, w)$ jest żądanym rozkładem funkcji $F(z, w)$ w dwukolowym otoczeniu tego punktu. Jeżeli natomiast $\Phi(0, 0) = 0$, wówczas stosując do funkcji $\Phi(z, w)$ wynik poprzednio uzyskany, otrzymujemy dla $F(z, w) = z^p \Phi(z, w)$ wzór postaci (14.2).

W rozumowaniu powyższym korzystaliśmy z twierdzenia algebry, które pozwala wyrazić spółczynniki wielomianu w sposób wymierny i całkowity z pomocą jednorodnych sum potęg pierwiastków tego wielomianu. Podamy tu jeden z wielu sposobów wyprowadzenia tych wyrażeń.

Niech $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą pierwiastkami wielomianu

$$F(w) = w^n + A_1 w^{n-1} + \dots + A_n$$

(w razie istnienia pierwiastków wielokrotnych zakładamy, że każdy pierwiastek występuje w ciągu $\{w_j\}$ tyle razy, ile wynosi jego krotność) i niech

$$(14.4) \quad \frac{F(w)}{w - w_j} = w^{n-1} + B_1^{(j)} w^{n-2} + \dots + B_{n-1}^{(j)}.$$

Przez przyrównanie spółczynników otrzymujemy $A_k = B_k^{(j)} - B_{k-1}^{(j)} w_j$ (gdzie $k = 1, 2, \dots, n-1$; $B_0^{(j)} = 1$), skąd, przyjmując dla symetrii $A_0 = 1$:

$$\begin{aligned} B_1^{(j)} &= A_1 + A_0 w_j, & B_2^{(j)} &= A_2 + A_1 w_j + A_0 w_j^2, & B_3^{(j)} &= A_3 + A_2 w_j + A_1 w_j^2 + A_0 w_j^3, \\ &\dots, & B_{n-1}^{(j)} &= A_{n-1} + A_{n-2} w_j + \dots + A_1 w_j^{n-2} + A_0 w_j^{n-1}. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wyrażenia na spółczynniki w tożsamość (14.4), znajdziemy

$$F'(w) = \sum_{j=1}^n \frac{F(w)}{w - w_j} = A_0 S_0 w^{n-1} + (S_0 A_1 + S_1 A_0) w^{n-2} + (S_0 A_2 + S_1 A_1 + S_2 A_0) w^{n-3} + \dots$$

$$\dots + (S_0 A_{n-1} + S_1 A_{n-2} + \dots + S_{n-1} A_0),$$

gdzie $S_j = w_1^j + \dots + w_n^j$ dla $j = 0, 1, 2, \dots$

Przyrównując tu znów spółczynniki po obydwu stronach, mamy

$$\begin{aligned} (n-1)A_1 &= S_0 A_1 + S_1 A_0, & (n-2)A_2 &= S_0 A_2 + S_1 A_1 + S_2 A_0, \\ &\dots, & A_{n-1} &= S_0 A_{n-1} + S_1 A_{n-2} + \dots + S_{n-1} A_0, \end{aligned}$$

skąd, ponieważ $A_0 = 1$, $S_0 = n$, otrzymujemy kolejno żądane wyrażenia na spółczynniki $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ w zależności od $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$. Wyrażenie na A_n wynika z kolei z oczywistej równości

$$S_n + A_1 S_{n-1} + A_2 S_{n-2} + \dots + n A_n = \sum_{j=1}^n F(w_j) = 0.$$

(14.6) Jeżeli $F(z, w)$ jest funkcją holomorficzną w punkcie (z_0, w_0) i funkcja $F(z_0, w)$ posiada w punkcie w_0 pierwiastek jednokrotny (co w przypadku $w_0 \neq \infty$ znaczy, że $F(z_0, w_0) = 0$ i $F'_w(z_0, w_0) \neq 0$), wówczas dla dostatecznie małej wartości $r > 0$ istnieje funkcja $W(z)$ holomorficzna w otoczeniu $K(z_0; r)$ punktu z_0 , taka, iż dla $z \in K(z_0; r)$ i $w \in K(w_0; r)$ związki $F(z, w) = 0$ oraz $w = W(z)$ są równoważne.

Dowód. Przyjmując $z_0 \neq \infty$ oraz $w_0 \neq \infty$ i stosując do funkcji $F(z, w)$ rozkład (14.2) przy $p = 0$ i $k = 1$, stwierdzamy natychmiast, iż w dostatecznie małym otoczeniu dwukolowym punktu (z_0, w_0) związek $F(z, w) = 0$ jest równoważny związkowi $w - w_0 + A_1(z) = 0$; a więc wystarczy przyjąć $W(z) = w_0 - A_1(z)$. Przypadek, gdy $z_0 = \infty$ lub $w_0 = \infty$, sprowadzamy do rozważonego przypadku przez zwykłe podstawienia $z = 1/\zeta$, $w = 1/w$.