

ROZDZIAŁ II

FUNKCJE HOLOMORFICZNE

§ 1. Pochodna w dziedzinie zespolonej. W rozdziale poprzednim (§§ 6 i 15) pochodna funkcji zmiennej zespolonej rozważana była wyłącznie w punktach traktowanych, że tak powiemy, indywidualnie. Jednakże znaczenie różniczkowalności w dziedzinie zespolonej staje się jasne wtedy dopiero, gdy założona jest różniczkowalność funkcji we wszystkich punktach pewnego obszaru. Wówczas też okazuje się, jak już wspomniane było w § 6, Rozdz. I, iż różniczkowalność pociąga za sobą konsekwencje nie-równie silniejsze w dziedzinie zespolonej aniżeli w dziedzinie rzeczywistej.

W celu sprecyzowania tych ogólnych uwag, przyjmiemy przede wszystkim definicje następujące.

Funkcja nazywać się będzie *holomorficzną* w pewnym punkcie $z_0 \neq \infty$, jeżeli posiada pochodną w każdym punkcie pewnego otoczenia punktu z_0 . Uogólniając tę definicję na punkt ∞ , będziemy mówili, iż funkcja $W(z)$ jest *holomorficzna w punkcie ∞* , jeżeli jest określona w otoczeniu tego punktu i jeżeli funkcja $W_1(z) = W(1/z)$ jest holomorficzna w punkcie 0. Funkcja holomorficzna w każdym punkcie pewnego zbioru nazywać się będzie *holomorficzną na tym (lub w tym) zbiorze*. Funkcja holomorficzna na pewnym zbiorze A jest tedy określona i holomorficzna w pewnym zbiorze otwartym $G \supset A$.

(1.1) *Jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w zbiorze otwartym G i jeżeli wartości, jakie w tym zbiorze przyjmuje, należą do pewnego zbioru A , na którym holomorficzna jest pewna funkcja $F(z)$, wówczas funkcja złożona $F[W(z)]$ jest również holomorficzna w G .*

Twierdzenie to wynika natychmiast z reguły różniczkowania funkcji złożonej (Rozdz. I, tw. 6.1); w przypadku, gdy G zawiera punkt ∞ , stosujemy dla tego punktu przekształcenie $\zeta = 1/z$.

Z tej samej reguły różniczkowania funkcji złożonej wyprowadzimy twierdzenie:

(1.2) Jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w punkcie ∞ , wówczas każda funkcja postaci $W(c+z)$, gdzie c jest stałą, jest również holomorficzna w ∞ .

Dowód. Przyjmując $W_1(z)=W(1/z)$ oraz $W_2(z)=W(c+1/z)$, mamy $W_2(z)=W[(cz+1)/z]=W_1[z/(cz+1)]$ i różniczkowalność funkcji $W_2(z)$ w punkcie $z=0$ jest konsekwencją różniczkowalności funkcji $W_1(z)$ oraz $z/(cz+1)$ w tym punkcie.

Wreszcie z twierdzeń 5.5 i 6.4 Rozdz. I wynika, iż

(1.3) Jeżeli części rzeczywista i urojona funkcji $W(z)$ posiadają w każdym punkcie zbioru otwartego G , nie zawierającego punktu ∞ , pochodne cząstkowe względem x i y , ciągle i spełniające równości Cauchy-Riemanna, wówczas funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w G .

Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe (por. dalej § 5), chociaż nie jest bynajmniej oczywiste. Wymaga mianowicie dowodu, iż każda funkcja holomorficzna w zbiorze otwartym posiada w tym zbiorze pochodną ciągłą.

Twierdzenie 1.3 udowodnione zostało jeszcze przez Cauchy'ego, a odwrócenie jego przez Goursata. Jest rzeczą godną uwagi, że twierdzenie to bez założenia ciągłości pochodnych cząstkowych (przy założeniu tylko ciągłości samej funkcji $W(z)$) jest dużo głębsze i wiele prób udowodnienia go w tej postaci opierało się na fałszywych rozumowaniach. Zostało ono dowiedzione dopiero w ubiegłym dziesięcioleciu przez Loomana (którego dowód też nie był pozbawiony pewnych luk) i Mieńszowa. Dowód opiera się na subtelniejszych metodach teorii funkcji rzeczywistych i nie może być podany w tej książce. Czytelnik znajdzie go w monografii Mieńszowa (Menchoffa), cytowanej na str. 56.

W rozdziale poprzednim (§§ 7 i 8) rozważaliśmy już funkcje holomorficzne w całej płaszczyźnie otwartej: funkcje wykładniczą oraz funkcje trygonometryczne $\cos$ i $\sin$. Udowodniliśmy dalej (Rozdz. I, tw. 11.3), iż każda gałąź $\log z$ w zbiorze otwartym jest funkcją holomorficzną w tym zbiorze. Wyznaczone zostały przy tym pewne obszary, w których istnieje gałąź $\log z$. Jako wniosek z tw. 11.1, Rozdz. I, zanotujemy tu twierdzenie następujące: W każdym kole nie zawierającym punktu 0 ani ∞ istnieje gałąź holomorficzna $\log z$. Istotnie, jeżeli $K(a; r)$ jest takim kołem, wówczas spostrzegamy odrazu, iż koło to leży w obszarze, który otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny otwartej półprostą $z=-at$ (gdzie $t \geq 0$), i w którym gałąź $\log z$ istnieje na zasadzie wspomnianego tw. 11.1, Rozdz. I. Wyprowadzimy stąd następujące uogólnienie tw. 11.3, Rozdz. I:

(1.4) Jeżeli dla funkcji $W(z)$ holomorficznej w zbiorze otwartym G istnieje gałąź $\log W(z)$ w G , wówczas gałąź ta jest holomorficzna w G i pochodna jej równa jest $W'(z)/W(z)$ w każdym punkcie $z \neq \infty$ zbioru G .

Dowód. Niech $T(z)$ będzie gałęzią $\log W(z)$ w G . Niech z_0 będzie dowolnym punktem zbioru G i niech K będzie kołem o środku $W(z_0)$ i promieniu $|W(z_0)|$ (mamy $|W(z_0)| > 0$, ponieważ z założenia $\log W(z_0)$ istnieje). Koło to nie zawiera oczywiście ani punktu 0 ani ∞ . Oznaczmy przez H otoczenie punktu z_0 o promieniu dostatecznie małym na to, aby $W(z) \in K$ dla każdego $z \in H$.

Oznaczając teraz przez $L(z)$ dowolną gałąź $\log z$ w kole K , stwierdzamy natychmiast, iż funkcja złożona $L[W(z)]$, holomorficzna w kole H (por. tw. 1.1), jest w tym kole gałęzią $\log W(z)$. Na mocy tw. 11.2, Rozdz. I, funkcja $T(z)$ różni się więc co najwyżej o stałą od funkcji $L[W(z)]$ w kole H i przeto jest również holomorficzna w tym kole, a w szczególności w punkcie z_0 . Nadto, na mocy tw. 11.3, Rozdz. I, $T'(z_0)=L'[W(z_0)] \cdot W'(z_0)=W'(z_0)/W(z_0)$, o ile $z_0 \neq \infty$. Twierdzenie 1.4 jest w ten sposób udowodnione, ponieważ z_0 jest dowolnym punktem zbioru G .

Jeżeli $W(z)$ posiada pochodną w pewnym punkcie z_0 , wówczas wyrażenie $W'(z_0)/W(z_0)$ nazywa się *pochodną logarytmiczną* funkcji W w punkcie z_0 . Nazwa ta jest oczywiście związana z tw. 1.4.

ĆWICZENIE. 1. Jeżeli w zbiorze otwartym istnieje gałąź funkcji $\arctg z$ lub $\arcsin z$, to gałęzie te są funkcjami holomorficznymi. Pochodnymi ich są odpowiednio funkcja $1/(1+z^2)$ oraz jedna z gałęzi funkcji $1/\sqrt{1-z^2}$ (por. Rozdz. I, § 10, ćw. 1, 2).

§ 2. Funkcja pierwotna. Jeżeli funkcja zespolona $W(z)$ jest w każdym punkcie zbioru otwartego G pochodną pewnej funkcji $T(z)$, wówczas $T(z)$ nazywa się *funkcją pierwotną* funkcji $W(z)$.

Podamy warunek oparty na definicji całki krzywoliniowej, konieczny i dostateczny na to, aby funkcja ciągła w pewnym zbiorze otwartym posiadała w tym zbiorze funkcję pierwotną. Udowodnimy w tym celu przede wszystkim twierdzenie następujące:

(2.1) Jeżeli funkcja $T(z)$ jest w zbiorze otwartym G funkcją pierwotną funkcji ciągłej $W(z)$, wówczas dla każdej pary punktów $z_1, z_2 \in G$ i każdej krzywej regularnej C :

$$z=z(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leq t \leq b, \quad z_1=z(a), \quad z_2=z(b),$$

łączycej te punkty w G , zachodzi równość

$$\int_C W(z) dz = T(z_2) - T(z_1).$$

Dowód. Niech $F(t) = T[z(t)]$ dla $a \leq t \leq b$. Przedział $[a, b]$ możemy rozbić na skończoną ilość podprzedziałów $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ (gdzie $a = a_0, b = a_n$) tak, by w każdym z nich funkcja $z(t)$ posiadała pochodną ciągłą. W każdym tedy z tych podprzedziałów pochodna

$$F'(t) = T'[z(t)] \cdot z'(t) = W[z(t)] \cdot z'(t)$$

istnieje i jest ciągła (na krańcach przedziałów $[a_k, a_{k+1}]$ rozważamy oczywiście tylko pochodne jednostronne z odpowiednich stron). Zatem:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} W[z(t)] z'(t) dt = F(a_{k+1}) - F(a_k), \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

skąd (por. rozdz. I. tw. 17.6)

$$\begin{aligned} \int_C W(z) dz &= \int_a^b W[z(t)] z'(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} [F(a_{k+1}) - F(a_k)] = \\ &= F(b) - F(a) = T(z_2) - T(z_1). \end{aligned}$$

Z udowodnionego twierdzenia 2.1 wynika w szczególności, iż gdy funkcja ciągła posiada w zbiorze otwartym G funkcję pierwotną, wówczas całka jej znika wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej, przebiegającej w G . Udowodnimy, iż odwrotnie, jeżeli całka krzywoliniowa funkcji ciągłej w zbiorze otwartym G znika wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej (lub choćby tylko wzdłuż każdej łamanej zamkniętej), wówczas funkcja ta posiada w G funkcję pierwotną. Możemy przy tym założyć odrazu, iż G jest obszarem, ponieważ w przeciwnym razie moglibyśmy określać poszukiwaną funkcję pierwotną w każdej składowej zbioru G z osobna.

Niech więc a będzie dowolnym punktem obszaru G . Oznaczmy dla każdego punktu $z \in G$ przez $T(z)$ wartość całki krzywoliniowej funkcji $W(z)$ wzdłuż dowolnej linii łamanej, łączącej w G punkt z z punktem a . Funkcja ta jest jednoznacznie określona, t.j. rozważana całka nie zależy od wyboru tej łamanej. W samej rzeczy, jeżeli C_1 i C_2 są dwiema łamanymi, przebiegającymi w G między tą samą parą punktów, wówczas krzywa $C_1 + (-C_2)$ jest łamaną zamkniętą (por. Wstęp, § 12) i w myśl założenia

$$\int_{C_1} W(z) dz - \int_{C_2} W(z) dz = \int_{C_1} W(z) dz + \int_{(-C_2)} W(z) dz = \int_{C_1 + (-C_2)} W(z) dz = 0.$$

Niech teraz z_0 będzie dowolnym punktem obszaru G i niech, dla każdego $r > 0$, $\varepsilon(r)$ oznacza górny kres wartości bezwzględnych $|W(z) - W(z_0)|$, gdy $z \in G$ i $|z - z_0| < r$.

Niech C będzie dowolną linią łamaną, łączącą w G punkty a i z_0 , zaś β dowolnym punktem pewnego koła $K(z_0; r)$ o promieniu r dostatecznie małym na to, by $K(z_0; r) \subset G$. Wówczas:

$$T(z_0) = \int_C W(z) dz, \quad T(\beta) = \int_{C+[z_0, \beta]} W(z) dz,$$

skąd

$$\begin{aligned} T(\beta) - T(z_0) &= \int_{[z_0, \beta]} W(z) dz = \int_{[z_0, \beta]} [W(z) - W(z_0)] dz + \int_{[z_0, \beta]} W(z_0) dz = \\ &= W(z_0) \cdot (\beta - z_0) + \int_{[z_0, \beta]} [W(z) - W(z_0)] dz. \end{aligned}$$

Zatem (por. Rozdz. I, (17.10)):

$$\left| \frac{T(\beta) - T(z_0)}{\beta - z_0} - W(z_0) \right| = \frac{\left| \int_{[z_0, \beta]} [W(z) - W(z_0)] dz \right|}{|\beta - z_0|} \leq \varepsilon(r),$$

a ponieważ, ze względu na ciągłość funkcji $W(z)$, $\varepsilon(r)$ dąży do zera wraz z r , funkcja $T(z)$ posiada w punkcie z_0 pochodną równą $W(z_0)$.

Otrzymujemy tedy twierdzenie następujące:

(2.2) *Na to, aby funkcja ciągła w zbiorze otwartym G posiadała w G funkcję pierwotną, konieczne jest i wystarcza, aby całka jej znikała wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej, przebiegającej w G .*

Z tw. 2.1 wynika dalej, iż:

(2.3) *Na to, aby funkcja $T(z)$ była stała w obszarze G , konieczne jest i dostateczne, by posiadała w tym obszarze pochodną równą tożsamościowo zeru (jeżeli więc dwie funkcje holomorficzne w obszarze G posiadają w tym obszarze pochodne równe, wówczas różnią się co najwyżej o stałą).*

Ogólniej: *na to, aby funkcja była w obszarze G wielomianem stopnia mniejszego niż n , konieczne jest i wystarcza, aby posiadała w tym obszarze n -tą pochodną równą zeru.*

Dowód. Konieczność warunku części pierwszej twierdzenia jest oczywista. W celu udowodnienia dostateczności tego warunku, założmy, iż dla funkcji $T(z)$ holomorficznej w obszarze G mamy tożsamościowo $T'(z) = 0$. Funkcja $T(z)$ jest więc funkcją pierwotną zera, a ponieważ każde dwa punkty z_1 oraz z_2 obszaru G możemy połączyć w tym obszarze krzywą regularną (nawet łamaną,

por. Wstęp, tw. 9.5), przeto na mocy tw. 2.1 mamy $T(z_2) = T(z_1)$ dla każdej pary punktów z_1, z_2 obszaru. Funkcja $T(z)$ jest więc stała w G .

Część druga twierdzenia wynika natychmiast z pierwszej przez indukcję.

Ponieważ każdy jednomian z^n , gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, posiada funkcję pierwotną, zatem $\int_C z^n dz = 0$ wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej C . Ponieważ dalej każdy szereg funkcyj jednostajnie zbieżny na krzywej możemy na krzywej tej całkować wyraz za wyrazem, przeto mamy także $\int_C F(z) dz = 0$ dla każdej funkcji $F(z)$, która jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego niemal jednostajnie w całej płaszczyźnie. Funkcjami takimi (por. rozdz. I, §§ 7, 8) są np. funkcja wykładnicza $\exp z$, funkcje trygonometryczne $\cos z$, $\sin z$ i t.d. W rozdz. IV (§ 3) udowodnimy ogólnie, iż jeżeli funkcja jest holomorficzna w obszarze jednospójnym, to całka jej znika wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej, przebiegającej w tym obszarze.

Rozważanie całek krzywoliniowych prowadzi często do wyznaczenia wartości pewnych całek rzeczywistych. Obliczanie całek rzeczywistych tą metodą było jednym z pierwszych zastosowań teorii funkcji zespolonych. Dla przykładu podamy tu obliczenie t. zw. *całek Fresnela* $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ oraz $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$, nawiązując do rozważania całki krzywoliniowej funkcji $\exp(-z^2)$.

Oznaczając przez C_R łuk okręgu $z = R \exp i\theta$, gdzie $0 \leq \theta \leq \pi/4$, weźmy pod uwagę krzywą zamkniętą (p. rysunek), złożoną z tego łuku oraz dwu odcinków: $[0, R] + [R \exp(\pi i/4), 0]$. Ponieważ

funkcja $\exp(-z^2)$ jest sumą szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!}$,

zbieżnego niemal jednostajnie w całej płaszczyźnie otwartej, całka jej znika wzdłuż tej krzywej. Mamy zatem:

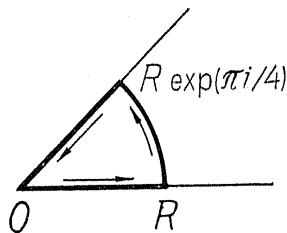
$$(2.4) \int_{[0, R \exp(\pi i/4)]} \exp(-z^2) dz = \int_{[0, R]} \exp(-z^2) dz + \int_{C_R} \exp(-z^2) dz.$$

Podstawiając $z = t \exp(\pi i/4)$ w całce po stronie lewej tej równości, możemy całkę tę napisać w postaci

$$\int_0^R \exp[-t^2 \exp(\pi i/2)] \cdot \exp(\pi i/4) dt = \exp(\pi i/4) \cdot \int_0^R \exp(-it^2) dt.$$

Dalej, pierwsza całka po stronie prawej wzoru (2.4) może być napisana jako $\int_0^R \exp(-t^2) dt$. Wreszcie, podstawiając $z = R \exp it$ w ostatniej całce tego wzoru, znajdujemy

$$(2.5) \int_{C_R} \exp(-z^2) dz = iR \cdot \int_0^{\pi/4} \exp[-R^2 \exp 2it] \cdot \exp it dt.$$



Mamy $|\exp[-R^2 \exp 2it] \cdot \exp it| = |\exp[-R^2(\cos 2t + i \sin 2t)]| = \exp(-R^2 \cos 2t)$. Otóż, $\sin 2t \geq t$ w przedziale $[0, \pi/4]$ zmiennej t i przeto z uwagi na (2.5)

$$\left| \int_{C_R} \exp(-z^2) dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \cos 2t) dt = R \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \sin 2t) dt \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 t} dt < \frac{1}{R},$$

skąd wynika, że całka (2.5) dąży do zera, gdy $R \rightarrow +\infty$. Zważywszy więc, że wedle wzoru znanego z analizy rzeczywistej $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, otrzymujemy, prze-

chodząc w (2.4) do granicy wraz z $R \rightarrow +\infty$, $\exp(\pi i/4) \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-it^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, t. j.

$$\int_0^{+\infty} [\cos(t^2) - i \sin(t^2)] dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \exp(-\pi i/4) = \sqrt{\pi/8} \cdot (1 - i).$$

Przyrównując części rzeczywiste i urojone obydwu stron, mamy

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\pi/8}.$$

Uzupełnimy tu jeszcze tw. 1.4 w sposób następujący:

(2.6) *Jeżeli $W(z)$ jest funkcją skończoną w zbiorze otwartym G nie zawierającym punktu ∞ , wówczas na to, aby istniała w tym zbiorze gałąź holomorficzna $\log W(z)$, konieczne jest i wystarcza, aby funkcja $W(z)$ była holomorficzna i wszędzie różna od 0 w zbiorze G oraz by jej pochodna logarytmiczna $W'(z)/W(z)$ posiadała funkcję pierwotną w G (lub, co jest równoważne, by całka krzywoliniowa tej pochodnej znikała wzdłuż każdej krzywej zamkniętej regularnej przebiegającej w G).*

Dowód. Możemy przyjąć, iż zbiór G jest obszarem. W przeciwnym razie rozważalibyśmy funkcję $W(z)$ w każdej ze składowych zbioru G oddzielnie.

Jeżeli funkcja holomorficzna $L(z)$ jest gałęzią $\log W(z)$ w G , wówczas mamy $W(z) = \exp L(z)$. Funkcja $W(z)$ jest więc holomorficzna, nie znika nigdzie w G i na mocy tw. 1.4 mamy $L'(z) = W'(z)/W(z)$.

Zalóżmy z kolei, odwrotnie, iż funkcja $W(z)$ jest holomorficzna i nigdzie nie znika w G oraz iż istnieje pewna funkcja holomorficzna $F(z)$ w G taka, iż

$$(2.7) \quad F'(z) = W'(z)/W(z).$$

Niech $\Phi(z) = W(z)/\exp F(z)$. Różniczkując, otrzymujemy z uwagi na (2.7)

$$\Phi'(z) = [W'(z) - W(z) \cdot F'(z)] / \exp F(z) = 0,$$

skąd wynika na mocy tw. 2.3, iż w obszarze G

$$W(z) / \exp F(z) = \Phi(z) = C,$$

gdzie C jest stałą różną od zera. Przyjmując więc $F_1(z) = F(z) + \text{Log } C$, będziemy mieli $\exp F_1(z) = C \cdot \exp F(z) = W(z)$, co znaczy, iż funkcja holomorficzna $F_1(z)$ jest gałęzią $\log W(z)$ w obszarze G .

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli część rzeczywista funkcji holomorficznej w obszarze G jest stała, wówczas funkcja jest również stała.

2. Jeżeli wartość bezwzględna funkcji $W(z)$ holomorficznej w obszarze G jest stała, wówczas funkcja jest również stała w G .

[Wsk. Obliczyć pochodną funkcji $|W(z)|^2$.]

3. Jeżeli C jest dowolną krzywą regularną, nie przechodzącą przez punkt 0, wówczas $\int_C \frac{dz}{z} = \text{Log } b - \text{Log } a \pmod{2\pi i}$, gdzie a i b oznaczają odpowiednio początek i koniec krzywej C (jeżeli więc krzywa C jest zamknięta, to $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z}$ jest liczbą całkowitą).

Ogólniej, jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną i nigdzie nie znikającą na C , to $\int_C \frac{W'(z)}{W(z)} dz = \text{Log } W(b) - \text{Log } W(a) \pmod{2\pi i}$.

4. Wyznaczyć wartość parametru a , dla której całka funkcji $F(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^2}\right) e^z$ znika wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej, nie przechodzącej przez punkt 0. Wyznaczyć dla tej wartości a funkcję pierwotną funkcji $F(z)$ (jako sumę szeregu potęgowego).

5. Udowodnić, iż wartość całki $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+at)^2} dx$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą, nie zależy od a .

Opierając się na wzorze $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, wyprowadzić stąd wzór

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2ty dt = \sqrt{\pi} e^{-y^2}.$$

[Wsk. Rozważyć całkę funkcji e^{-z^2} wzdłuż obwodu prostokąta $[-R, R; 0, a]$ i przejść do granicy, gdy $R \rightarrow +\infty$; zauważyć, iż wówczas całki funkcji e^{-z^2} wzdłuż boków równoległych do osi y dążą do 0.]

6. Obliczyć całkę $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

[Wsk. Całkę tę można napisać w postaci $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \int_{-R}^R \frac{\exp it - 1}{t} dt$; funkcja

$[\exp iz - 1]/z$ jest sumą szeregu potęgowego niemal jednostajnie zbieżnego w całej płaszczyźnie otwartej, a więc całka jej znika wzdłuż każdej krzywej zamkniętej; całkujemy tę funkcję wzdłuż krzywej zamkniętej, utworzonej z półokręgu $z = Re^{i\theta}$, gdzie $0 \leq \theta \leq 2\pi$, oraz ze średnicy tego półokręgu; następnie przechodzimy do granicy, gdy $R \rightarrow +\infty$.]

7. Obliczyć całki:

$$\int_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos a_1 t + A_2 \cos a_2 t + \dots + A_n \cos a_n t}{t^2} dt,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{A_1 \sin a_1 t + A_2 \sin a_2 t + \dots + A_n \sin a_n t}{t^3} dt,$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi i $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$ w przypadku pierwszej całki, zaś $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n = 0$ w przypadku drugiej.

[Wsk. Por. rozdz. I, § 18, ćw. 4.]

8. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin a_1 t}{t} \cdot \frac{\sin a_2 t}{t} \cdot \dots \cdot \frac{\sin a_n t}{t} \cdot \cos b_1 t \cdot \cos b_2 t \cdot \dots \cdot \cos b_m t \cdot \frac{\sin at}{t} dt = \frac{1}{2} \cdot a_1 a_2 \dots a_n,$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m, a$ są liczbami rzeczywistymi, przy czym

$$a > |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + |b_1| + |b_2| + \dots + |b_m|$$

(Störmer; Whittaker i Watson).

[Wsk. Całkę daną napisać można w postaci

$$(*) \quad \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a_1 t}{t} \dots \frac{\sin a_n t}{t} \cdot \cos b_1 t \dots \cos b_m t \cdot \frac{e^{at}}{t} dt,$$

rozumiejąc tu całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^{+\infty}$ jako $\lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left[\int_{-\epsilon}^{\epsilon} + \int_{-R}^R \right]$; zauważyć, że wyrażenie

pod znakiem całki (*) może być przedstawione jako $F(t) + a_1 a_2 \dots a_n / t$, gdzie $F(t)$ jest sumą szeregu potęgowego niemal jednostajnie zbieżnego w całej płaszczyźnie.]

§ 3. Różniczkowanie całki względem parametru zespolonego. Zastosujemy twierdzenie 1.3 do rozszerzenia na dziedzinę zespoloną twierdzenia o różniczkowaniu całki względem parametru (por. Rozdz. I, § 1).

(3.1) Jeżeli $W(z, t)$ jest funkcją ciągłą dwu zmiennych: zespolonej z , przebiegającej zbiór otwarty G , i rzeczywistej t , przebiegającej przedział $[a, b]$ (t.j. jeżeli funkcja $W(z, t)$ jest ciągła na zbiorze $G \times [a, b]$), wówczas funkcja

$$F(z) = \int_a^b W(z, t) dt$$

jest ciągła w zbiorze G .

Jeżeli ponadto funkcja $W(z, t)$ posiada w każdym punkcie $z \in G$ pochodną cząstkową $W'_z(z, t)$ ciągłą względem obydwu zmiennych z i t , wówczas funkcja $F(z)$ jest holomorficzna w G , przy czym

$$F'(z) = \int_a^b W'_z(z, t) dt.$$

Dowód. Pierwsza część twierdzenia wynika natychmiast z tw. 1.4 Rozdz. I. W celu udowodnienia części drugiej stwierdzamy, przyjmując, jak zwykle, $z = x + iy$, iż z istnienia i ciągłości pochodnej $W'_z(z, t)$ wynika istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych $W'_x(z, t)$ i $W'_y(z, t)$, spełniających równania Cauchy-Riemanna; pisząc te równania w postaci zespolonej, mamy

$$(3.2) \quad W'_x(z, t) = -i W'_y(z, t) = W'_z(z, t).$$

Na mocy twierdzenia 1.5 Rozdz. I o różniczkowalności całki względem parametru rzeczywistego funkcja $F(z)$ posiada pochodne cząstkowe względem x i y ciągle w G , przy czym

$$F'_x(z) = \int_a^b W'_x(z, t) dt = -i \int_a^b W'_y(z, t) dt = -i F'_y(z).$$

Pochodne te spełniają więc równania Cauchy-Riemanna. Funkcja $F(z)$ jest przeto holomorficzna w G , a na mocy (3.2)

$$F'(z) = F'_x(z) = \int_a^b W'_x(z, t) dt = \int_a^b W'_z(z, t) dt.$$

Tw. 3.1 przenosi się na całki krzywoliniowe:

(3.3) Jeżeli $W(z, \zeta)$ jest funkcją ciągłą zmiennych z i ζ , gdy z przebiega pewien zbiór otwarty G , a ζ krzywą regularną C , wówczas funkcja $H(z) = \int_C W(z, \zeta) d\zeta$ jest ciągła w G . Jeżeli ponadto funkcja $W(z, \zeta)$ posiada pochodną cząstkową $W'_z(z, \zeta)$ ciągłą względem obydwu zmiennych ($z \in G, \zeta \in C$), wówczas funkcja $H(z)$ jest holomorficzna w G i jej pochodna jest określona przez wzór

$$H'(z) = \int_C W'_z(z, \zeta) d\zeta.$$

Dowód. Pisząc równanie krzywej C w postaci $\zeta = \zeta(t)$ (gdzie $a \leq t \leq b$), będziemy mieli (por. Rozdz. I, tw. 17.6)

$$H(z) = \int_a^b W[z, \zeta(t)] \zeta'(t) dt,$$

przy czym przedział $[a, b]$ możemy rozbić na skończoną ilość podprzedziałów w taki sposób, by w każdym z nich pochodna $\zeta'(t)$ była ciągła. Tw. 3.3 sprowadza się tedy bezpośrednio do tw. 3.1.

Podkreślimy jeszcze, ze względu na dalsze zastosowania, następujący przypadek szczególny twierdzenia 3.3:

(3.4) Jeżeli $p(\zeta)$ jest funkcją ciągłą na krzywej regularnej C , a k dowolną liczbą całkowitą, wówczas funkcja $P(z) = \int_C \frac{p(\zeta)}{(\zeta - z)^k} d\zeta$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie otwartej poza krzywą C , przy czym

$$P'(z) = k \int_C \frac{p(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

§ 4. Twierdzenie Cauchy'ego dla prostokąta. Twórca teorii funkcji holomorficznych, August Cauchy, oparł ją na następującym twierdzeniu, znanym pod nazwą twierdzenia Cauchy'ego o całce krzywoliniowej: jeżeli funkcja $W(z)$ jest ciągła w obszarze domkniętym H , ograniczonym przez krzywą regularną zamkniętą C , i holomorficzna w jego wnętrzu, wówczas całka jej wzdłuż krzywej C jest równa zeru. Z twierdzenia tego wyprowadził Cauchy wzór

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{W(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

spełniony dla każdego punktu wewnętrznego obszaru H przy tych samych co poprzednio założeniach, dotyczących funkcji $W(z)$, obszaru H i krzywej C . Do wzoru tego, który nosi nazwę wzoru Cauchy'ego, teoria funkcji holomorficznych nawiązuje podstawowe swe wyniki, a w szczególności twierdzenie o wielokrotnej różniczkowalności funkcji holomorficznej. Zasadnicza idea budowy teorii pozostała tu bodaj nietknięta od czasów Cauchy'ego. Pewien jednak ważny szczegół dowodu twierdzenia Cauchy'ego został uzupełniony przez Goursata. Mianowicie, w dowodzie swego twierdzenia Cauchy, rozbijając funkcję $W(z)$ jak również jej całkę wzdłuż krzywej C na części rzeczywistą i urojoną, zakładał ciągłość pochodnej $W'(z)$. Goursat zastąpił dowód Cauchy'ego innym rozumowaniem, które nie wymagało już wyodrębnienia rzeczywistej i urojonej części funkcji $W(z)$ i, co ważniejsze, pozwoliło usunąć założenie ciągłości pochodnej tej funkcji. W ten sposób, założenie to usunięte zostało nie tylko z dowodu twierdzenia Cauchy'ego, ale i z definicji funkcji holomorficznej: ciągłość pochodnej funkcji zespolonej okazała się konsekwencją już samego istnienia tej pochodnej.

Należy zauważyć, iż dowód twierdzenia Cauchy'ego w całej ogólności wymaga subtelniejszych rozważań z zakresu topologii i teorii funkcji rzeczywistych. Kwestie te pominięte były zarówno przez Cauchy'ego jak przez Goursata; również w większości współczesnych podręczników teorii funkcji jeżeli nawet twierdzenie Cauchy'ego jest formułowane ogólnie, to elementy topologiczne dowodu nie są należycie uwzględnione. Bo też w praktyce twierdzenie Cauchy'ego jest stosowane zazwyczaj tylko w takich przypadkach, gdy trudności topologiczne w gruncie rzeczy nie ma. W szczególności, w rozdziale tym będziemy mogli się ograniczyć do rozważania całek krzywoliniowych wyłącznie wzdłuż obwodów prostokątów i sformułować twierdzenie w odpowiednio wąskiej formie. Inne warianty twierdzenia i wzoru Cauchy'ego podamy w Rozdz. IV.

Ogólne sformułowanie twierdzenia Cauchy'ego jest niewątpliwie interesujące samo przez się, wykracza jednak poza ramy tej książki. Wyczerpującą i elementarną dyskusję tego tematu w przypadku krzywych regularnych znajdzie czytelnik w książce: W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, wyd. 5, t. I, Leipzig 1928; przypadek całkiem ogólny (dowolne krzywe prostowalne) rozważany jest w pracach, które korzystają już z głębszych wyników teorii funkcji (rzeczywistych i zespolonych).

(4.1) Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną na prostokącie $I = [a_1, a_2; b_1, b_2]$, to

$$\int_{(I)} W(z) dz = 0.$$

Dowód. Niech, dla krótkości, $k = \left| \int_{(I)} W(z) dz \right|$. Podzielmy prostokąt I na cztery równe prostokąty, podobne do I . Ponieważ całka funkcji $W(z)$ wzdłuż obwodu prostokąta I równa jest sumie całek wzdłuż obwodów tych czterech prostokątów, przeto dla jednego z nich przynajmniej — oznaczmy go przez I_1 — będziemy mieli

$$\left| \int_{(I_1)} W(z) dz \right| \geq \frac{k}{4}.$$

Prostokąt I_1 dzielimy znów na cztery równe prostokąty, i znów dla jednego z nich — który oznaczmy przez I_2 — będziemy mieli

$$\left| \int_{(I_2)} W(z) dz \right| \geq \frac{k}{4 \cdot 4}.$$

Postępując w ten sam sposób dalej, otrzymamy ciąg zstępujący prostokątów I_n o bokach odpowiednio równych $(a_2 - a_1)/2^n$ i $(b_2 - b_1)/2^n$, przy czym

$$(4.2) \quad \left| \int_{(I_n)} W(z) dz \right| \geq \frac{k}{4^n} \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Niech z_0 będzie punktem wspólnym tych prostokątów i niech

$$\varepsilon(z) = \frac{W(z) - W(z_0)}{z - z_0} - W'(z_0).$$

Będziemy mieli

$$(4.3) \quad W(z) = W(z_0) + W'(z_0) \cdot (z - z_0) + (z - z_0) \cdot \varepsilon(z),$$

przy czym $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ dla $z \rightarrow z_0$. Oznaczmy przez ε_n kres górny $|\varepsilon(z)|$ dla $z \in I_n$. Wówczas (por. Rozdz. I, (17.10))

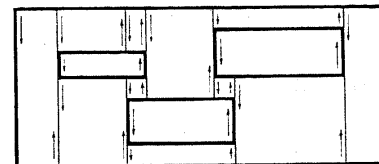
$$(4.4) \quad \left| \int_{(I_n)} (z - z_0) \cdot \varepsilon(z) dz \right| \leq \frac{2\varepsilon_n}{4^n} [(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)]^2,$$

ponieważ $|z - z_0|$ nie przewyższa dla $z \in I_n$ długości przekątnej prostokąta I_n , a więc i liczby $[(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)]/2^n$. Z drugiej strony, wyrażenie $W(z_0) + W'(z_0)(z - z_0)$, jako funkcja liniowa zmiennej z , posiada funkcję pierwotną i w myśl tw. 2.2 całka jego wzdłuż obwodu prostokąta I_n jest równa zeru. Otrzymujemy tedy z (4.2), (4.3) i (4.4)

$$\frac{k}{4^n} \leq \left| \int_{(I_n)} W(z) dz \right| = \left| \int_{(I_n)} (z - z_0) \cdot \varepsilon(z) dz \right| \leq \frac{2\varepsilon_n}{4^n} [(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)]^2,$$

a więc $k \leq 2\varepsilon_n \cdot (a_2 - a_1 + b_2 - b_1)^2$. Ponieważ zaś $\varepsilon_n \rightarrow 0$ wraz z $n \rightarrow \infty$, zatem $k=0$, co należało udowodnić.

Udowodnione tw. 4.1 sformułujemy jeszcze w postaci nieco ogólniejszej, którą nazwać będziemy *twierdzeniem Cauchy'ego dla układu prostokątów*.



(4.5) Jeżeli $I_1, I_2, \dots, I_n$ jest układem prostokątów rozłącznych, zawartych wewnątrz prostokąta I , a $W(z)$ funkcją holomorficzną na zbiorze domkniętym $I - (I_1^\circ + I_2^\circ + \dots + I_n^\circ)$, wówczas

$$(4.6) \quad \int_{(I)} W(z) dz = \sum_j \int_{(I_j)} W(z) dz.$$

Dowód. Przedłużając np. równolegle do osi y boki prostokątów I_j (p. rysunek), możemy podzielić figurę $I - \sum_{j=1}^n I_j^\circ$ na skończoną ilość nie zachodzących na siebie prostokątów $J_1, J_2, \dots, J_s$. Będziemy mieli wówczas:

$$\int_{(I)} W(z) dz = \sum_{j=1}^s \int_{(J_j)} W(z) dz + \sum_{j=1}^n \int_{(I_j)} W(z) dz.$$

Ponieważ jednak funkcja $W(z)$ jest holomorficzna na każdym z prostokątów J_j , zatem całka jej znika wzdłuż obwodu każdego z nich i otrzymujemy wzór (4.6).

Z tw. 4.5 wyprowadzimy uogólnienie wzoru (18.5) Rozdz. I. Niech z będzie dowolnym punktem wewnętrznym prostokąta I , a $Q \subset I^\circ$ kwadratem o środku z . Funkcja $1/(3-z)$ jest holomorficzna względem 3 na $I-Q^\circ$ i w myśl wzoru (18.5), Rozdz. I, oraz tw. 4.5

$$\int_{(I)} \frac{d3}{3-z} = \int_{(Q)} \frac{d3}{3-z} = 2\pi i.$$

Jeżeli natomiast punkt z leży zewnątrz I , wówczas $1/(3-z)$ jest funkcją holomorficzną zmiennej 3 na całym prostokącie I i na mocy tw. 4.1 całka jej znika wzdłuż obwodu tego prostokąta. W rezultacie dla każdego prostokąta I

$$(4.7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(I)} \frac{d3}{3-z} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } z \in I^\circ, \\ 0, & \text{jeżeli } z \in \text{OI}. \end{cases}$$

§ 5. Wzór Cauchy'ego dla układu prostokątów. Niech $I_1, I_2, \dots, I_n$ będzie układem prostokątów rozłącznych, zawartych wewnątrz prostokąta I , i niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną na zbiorze domkniętym $R = I - \sum_j I_j^\circ$. Wyprowadzimy wzór, który wyraża wartości funkcji $W(z)$ wewnątrz figury R przez wartości tej funkcji na brzegu tej figury.

Niech w tym celu z będzie dowolnie ustalonym punktem wewnętrznym figury R , a Q_r kwadratem o środku z i boku o długości r ; przyjmujemy, iż liczba r jest dostatecznie mała, by kwadrat Q_r leżał wewnątrz R .

Funkcja $\frac{W(3)-W(z)}{3-z}$ jest tedy funkcją holomorficzną zmiennej 3 na figurze $R-Q_r^\circ = I - \sum_j I_j^\circ - Q_r^\circ$ i w myśl twierdzenia Cauchy'ego dla układu prostokątów (tw. 4.5)

$$(5.1) \quad \int_{(I)} \frac{W(3)-W(z)}{3-z} d3 = \sum_j \int_{(I_j)} \frac{W(3)-W(z)}{3-z} d3 + \int_{(Q_r)} \frac{W(3)-W(z)}{3-z} d3.$$

W myśl wzoru (4.7) mamy:

$$\begin{aligned} \int_{(I)} \frac{W(3)-W(z)}{3-z} d3 &= \int_{(I)} \frac{W(3)}{3-z} d3 - W(z) \cdot \int_{(I)} \frac{d3}{3-z} = \int_{(I)} \frac{W(3)}{3-z} d3 - 2\pi i \cdot W(z), \\ \int_{(I_j)} \frac{W(3)-W(z)}{3-z} d3 &= \int_{(I_j)} \frac{W(3)}{3-z} d3 \quad \text{dla } j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

i przeto równość (5.1) napisać można w postaci

$$(5.2) \quad 2\pi i \cdot W(z) = \int_{(I)} \frac{W(3)}{3-z} d3 - \sum_j \int_{(I_j)} \frac{W(3)}{3-z} d3 - \int_{(Q_r)} \frac{W(3)-W(z)}{3-z} d3.$$

Z drugiej strony, stosunek $[W(3)-W(z)]/(3-z)$ dąży do $W'(z)$, gdy $3 \rightarrow z$, i jest zatem ograniczony w otoczeniu punktu z . Całka $\int_{(Q_r)} \frac{W(3)-W(z)}{3-z} d3$ dąży więc do zera wraz z długością obwodu kwadratu Q_r , gdy $r \rightarrow 0$. Przechodząc tedy we wzorze (5.2) do granicy, gdy $r \rightarrow 0$, otrzymujemy twierdzenie następujące:

(5.3) *Jeżeli $I_1, I_2, \dots, I_n$ jest układem prostokątów rozłącznych, zawartych wewnątrz prostokąta I , a $W(z)$ jest funkcją holomorficzną na zbiorze $R = I - (I_1^\circ + I_2^\circ + \dots + I_n^\circ)$, wówczas dla każdego punktu $z \in R^\circ$*

$$(5.4) \quad 2\pi i \cdot W(z) = \int_{(I)} \frac{W(3)}{3-z} d3 - \sum_j \int_{(I_j)} \frac{W(3)}{3-z} d3.$$

Wzór (5.4) nazywać będziemy *wzorem Cauchy'ego dla układu prostokątów*. Stosować go będziemy przeważnie w przypadku układu złożonego z jednego tylko lub dwu prostokątów. W przypadku pierwszym prawa strona wzoru redukuje się do całki wzdłuż obwodu prostokąta I . Otrzymujemy wówczas na mocy tw. 3.4 następujące twierdzenie, podstawowe dla teorii funkcji holomorficznych:

(5.5) *Jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w zbiorze otwartym G , wówczas posiada w każdym punkcie $z \neq \infty$ tego zbioru pochodne wszystkich rzędów, przy czym jeżeli I jest dowolnym prostokątem zawierającym wewnątrz punkt z i zawartym w G , pochodne te dane są przez wzór*

$$(5.6) \quad W^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{(I)} \frac{W(3)}{(3-z)^{k+1}} d3, \quad \text{gdzie } k=1, 2, \dots$$

W szczególności z tw. 5.5 wynika natychmiast, iż *pochodna funkcji holomorficznej jest również holomorficzna*, a więc tym samym jest ciągła. Wniosek ten pozwala całkowicie odwrócić tw. 1.3.

Wzór (5.6) pozwala także usunąć z tw. 3.3 założenie ciągłości pochodnej cząstkowej $W'_z(z, \zeta)$. Jeżeli bowiem funkcja $W(z, \zeta)$ jest holomorficzna względem z w zbiorze otwartym G i ciągła względem obydwu zmiennych, gdy z przebiega G , a ζ krzywą regularną C , wówczas dla każdego prostokąta ICG mamy

$$W'_z(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{W(\zeta, \zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

gdy $z \in I^\circ$ i $\zeta \in C$. Ciągłość pochodnej $W'_z(z, \zeta)$ na zbiorze $G \times C$ okazuje się tedy konsekwencją ciągłości funkcji $W(z, \zeta)$. Twierdzenie 3.3 możemy więc obecnie tak sformułować:

(5.7) *Jeżeli funkcja $W(z, \zeta)$, ciągła, gdy ζ przebiega krzywą regularną C , a z zbiór otwarty G nie zawierający punktu ∞ , jest dla każdego $\zeta \in C$ holomorficzna w G względem z , wówczas funkcja $H(z) = \int_C W(z, \zeta) d\zeta$ jest również holomorficzna w G i jej pochodne wyrażają się przez wzór*

$$H^{(k)}(z) = \int_C \frac{\partial^k W}{\partial z^k}(z, \zeta) d\zeta \quad \text{dla } k=1, 2, \dots$$

Opierając się na tw. 5.5, udowodnimy jeszcze twierdzenie następujące:

(5.8) *Na to, by funkcja $W(z)$ holomorficzna w całej płaszczyźnie otwartej była wielomianem stopnia $< n$, potrzeba i wystarcza, by*

$$(5.9) \quad W(z)/z^n \rightarrow 0, \quad \text{gdy } z \rightarrow \infty.$$

Dowód. Konieczność warunku jest widoczna. W celu udowodnienia, iż jest dostateczny, niech $z_0 \neq \infty$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny, a Q_R kwadratem o środku z_0 i boku $2R$. W myśl tw. 5.5

$$(5.10) \quad W^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(Q_R)} \frac{W(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Z założenia (5.9) wynika, iż

$$\frac{W(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{W(z)/z^n}{[1 - (z_0/z)]^n} \rightarrow 0,$$

gdy $z \rightarrow \infty$. Oznaczając tedy dla $R > 0$ przez $\varepsilon(R)$ górny kres war-

tości bezwzględnej wyrażenia $W(z)/(z - z_0)^n$ przy $|z - z_0| \geq R$, mamy $\varepsilon(R) \rightarrow 0$, gdy $R \rightarrow \infty$. Z drugiej strony, dla $z \in (Q_R)$ mamy $|W(z)/(z - z_0)^{n+1}| \leq \varepsilon(R)/R$ i z uwagi na (5.10)

$$|W^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \varepsilon(R)}{2\pi R} \cdot 8R = \frac{4n! \varepsilon(R)}{\pi}.$$

Prawa strona powyższej nierówności dąży do zera, gdy $R \rightarrow \infty$; zatem $W^{(n)}(z_0) = 0$ w każdym punkcie z_0 płaszczyzny otwartej i na mocy tw. 2.3 funkcja $W(z)$ redukuje się do wielomianu stopnia co najwyżej $n-1$, co należało udowodnić.

Jeżeli funkcja $W(z)$ jest ograniczona, wówczas warunek (5.9) jest już oczywiście spełniony dla $n=1$. Jako szczególny przypadek tw. 5.8 otrzymujemy więc następujące

(5.11) **Twierdzenie Liouville'a.** *Każda funkcja holomorficzna i ograniczona w całej płaszczyźnie otwartej (a więc w szczególności każda funkcja holomorficzna w całej płaszczyźnie domkniętej) redukuje się do stałej.*

Jednym z ładniejszych zastosowań tego wyniku jest dowód t. zw. podstawowego twierdzenia algebry (twierdzenia Gaussa):

(5.12) *Każde równanie algebraiczne $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$, którego lewa strona nie redukuje się do stałej, posiada przynajmniej jeden pierwiastek.*

Dowód. Oznaczmy przez $Q(z)$ lewą stronę równania. Zakładając, iż $Q(z)$ nie redukuje się do stałej, możemy przyjąć $a_n \neq 0$, $n > 0$; mamy wówczas $Q(z) = z^n(a_n + a_{n-1}/z + \dots + a_0/z^n) \rightarrow \infty$, gdy $z \rightarrow \infty$. Przypuszczając, iż $Q(z)$ nie posiada pierwiastków, stwierdzamy, że funkcja $1/Q(z)$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie, a nadto ograniczona, ponieważ $1/Q(z) \rightarrow 0$, gdy $z \rightarrow \infty$. W myśl tedy twierdzenia Liouville'a funkcja $1/Q(z)$, a więc tym samym i funkcja $Q(z)$, redukuje się do stałej i dochodzimy do sprzeczności.

ĆWICZENIA. 1. Funkcja $W(z)$ (rzeczywista lub zespolona), skończona i ciągła w zbiorze otwartym G , nazywa się *harmoniczną* w G , jeżeli posiada wszędzie w G pochodne cząstkowe rzędu drugiego W''_{xx} i W''_{yy} , które czynią zadość równaniu Laplace'a $W''_{xx}(z) + W''_{yy}(z) = 0$ (lewą stronę tego równania oznacza się często przez ΔW).

Pokazać, iż każda funkcja holomorficzna w zbiorze otwartym G jest harmoniczna w G (tym samym obydwie części funkcji holomorficznej, rzeczywista i urojona, są również funkcjami harmonicznymi).

2. Jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna i wszędzie różna od zera w zbiorze otwartym G , wówczas funkcja $\text{Log } |W(z)|$ jest harmoniczna w G .

3. Na to, aby funkcja $W(z)$ skończona, ciągła i posiadająca pochodne W'_x, W'_y, W''_{xx} i W''_{yy} ciągle w zbiorze otwartym G , była w tym zbiorze holomorficzna, konieczne jest i wystarcza, aby funkcja ta, jak również i funkcja $zW(z)$, były harmoniczne w G (M. Ries z).

4. Jeżeli funkcja $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ jest funkcją holomorficzną, wówczas

$$\begin{aligned} \partial^2 |W(z)|^p / \partial x^2 + \partial^2 |W(z)|^p / \partial y^2 &= p^2 \cdot |W(z)|^{p-2} \cdot |W'(z)|^2 \\ \partial^2 |U(x, y)|^p / \partial x^2 + \partial^2 |U(x, y)|^p / \partial y^2 &= p \cdot (p-1) \cdot |U(x, y)|^{p-2} \cdot |W'(z)|^2 \end{aligned}$$

(Hardy).

5. Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną, wówczas normalna do powierzchni $\beta = |W(x + iy)|^2$ w każdym punkcie $z = x + iy$, w którym $W(z) \neq 0$, tworzy z osią β kąt, którego tg równy jest $2 \cdot |W'(z)| \cdot |W(z)|$.

[Wsk. Jeżeli γ oznacza kąt, jaki normalna do powierzchni $\beta = |F(x, y)|^2$ w punkcie (x, y) tworzy z osią β , wówczas $\text{tg}^2 \gamma = [F'_x(x, y)]^2 + [F'_y(x, y)]^2$.]

6. Uogólnić tw. Liouville'a 5.11 w sposób następujący: Jeżeli część rzeczywista funkcji $W(z)$ holomorficznej w całej płaszczyźnie otwartej E_0 jest ograniczona z góry (t.j. jeżeli istnieje liczba skończona M taka, iż $\Re W(z) < M$), wówczas funkcja W jest stała.

[Wsk. Zastosować tw. 5.11 do funkcji $\exp W(z)$.]

§ 6. Ciągi niemal jednostajnie zbieżne funkcji holomorficznych. Jako dalsze zastosowanie wzoru Cauchy'ego podamy następujące twierdzenie Weierstrassa o różniczkowaniu wyrazu za wyrazem ciągów funkcji holomorficznych:

(6.1) Jeżeli ciąg $\{W_n(z)\}$ funkcji holomorficznych w zbiorze otwartym G jest niemal jednostajnie zbieżny w G do funkcji $W(z)$, wówczas funkcja $W(z)$ jest również holomorficzna w G , przy czym jeżeli zbiór G nie zawiera punktu ∞ , to

$$(6.2) \quad W_n^{(k)}(z) \rightarrow W^{(k)}(z) \quad \text{w zbiorze } G \text{ dla } k=1, 2, \dots$$

Dowód. Możemy założyć, iż G nie pokrywa się z całą płaszczyzną domkniętą, ponieważ wówczas, w myśl twierdzenia Liouville'a 5.11, funkcje $W_n(z)$ redukowałyby się do stałych. Poza tym, również i w pierwszej części twierdzenia, możemy przyjąć, iż G nie zawiera punktu ∞ ; istotnie, oznaczając przez a dowolny punkt uzupełnienia zbioru G , możemy zawsze rozważać, zamiast funkcji $W_n(z)$ w zbiorze G , funkcje $W_n^*(\zeta) = W_n(a + 1/\zeta)$ w zbiorze otwartym G^* , który otrzymujemy, przekształcając G przy pomocy inwersji $\zeta = 1/(z-a)$, i który już na pewno punktu ∞ nie zawiera.

Niech teraz z_0 będzie dowolnym punktem zbioru G , a $Q \subset G$ dowolnie ustalonym kwadratem o środku z_0 . Dla każdego punktu $z \in Q^\circ$ mamy w myśl wzoru Cauchy'ego $W_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{W_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, a więc ponieważ ciąg $W_n(z)$ dąży na Q jednostajnie do $W(z)$, przeto również $W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{W(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Na mocy tw. 3.4 funkcja $W(z)$ jest tedy holomorficzna w Q° , a więc w szczególności w punkcie z_0 i tym samym w całym zbiorze G , ponieważ z_0 oznacza jakikolwiek punkt tego zbioru.

Przechodząc do wzoru (6.2), wystarczy go oczywiście udowodnić tylko dla pierwszej pochodnej, t.j. dla $k=1$. Zachowując poprzednie oznaczenia, oznaczmy jeszcze przez $4r$ długość boku kwadratu Q . Mamy przede wszystkim w myśl tw. 5.5

$$(6.3) \quad W'(z) - W'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{W(\zeta) - W_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad \text{dla } z \in Q^\circ.$$

Jeżeli z należy do otoczenia $K(z_0; r)$ punktu z_0 , a ζ leży na obwodzie kwadratu Q , wówczas $|\zeta - z| \geq r$. Oznaczając tedy przez m_n górny kres $|W(\zeta) - W_n(\zeta)|$ dla $\zeta \in (Q)$, otrzymujemy z (6.3) oszacowanie $|W'(z) - W'_n(z)| \leq 8m_n/\pi r$ dla $z \in K(z_0; r)$. Ponieważ $m_n \rightarrow 0$, ciąg $\{W'_n(z)\}$ dąży jednostajnie do $W'(z)$ w otoczeniu $K(z_0; r)$ punktu z_0 i przeto (por. Rozdz. I, § 2, str. 48) dąży niemal jednostajnie do $W'(z)$ w całym zbiorze G .

ĆWICZENIA. 1. Opierając się na elementarnej tożsamości

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = 1/(1-z)$$

dla $|z| < 1$, udowodnić dla $|z| < 1$ wzory:

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots = z/(1-z)^2,$$

$$1^2z + 2^2z^2 + 3^2z^3 + \dots + n^2z^n + \dots = z(1+z)/(1-z)^3,$$

$$1 + \binom{k+1}{1}z + \binom{k+2}{2}z^2 + \dots + \binom{k+n}{n}z^n + \dots = 1/(1-z)^{k+1}, \quad \text{gdzie } k=0, 1, 2, \dots$$

2. Pokazać, iż dla $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(k) z^k,$$

gdzie $\sigma(k)$ oznacza sumę podzielników liczby k (por. Rozdz. I, § 2, ów. 1).

S. Saks i A. Zygmund. Funkcje analityczne.

3. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ jest zbieżny w półpłaszczyźnie $\Re z > 1$. Oznaczając sumę tego szeregu przez $\zeta(z)$, pokazać, iż funkcja $\zeta(z)$ jest holomorficzna w półpłaszczyźnie $\Re z > 1$ oraz iż jej pochodne dane są przez wzór

$$\zeta^{(k)}(z) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^z}, \quad \text{gdzie } k = 1, 2, \dots$$

(Bardziej szczegółowo funkcja $\zeta(z)$ badana będzie w Rozdz. IX.)

4. Udowodnić, iż szereg $\sum_n a^n \sin nz$, gdzie $0 \leq |a| < 1$, jest niemal jednostajnie zbieżny w obszarze $|\Re z| < \log 1/|a|$ i przedstawia w tym obszarze funkcję holomorficzną.

5. Udowodnić, iż jeżeli całka $\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| dt$, gdzie $p(t)$ jest funkcją ciągłą zmiennej rzeczywistej, posiada wartość skończoną, to funkcja $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(t)}{t-z} dt$ jest holomorficzna w każdym z obszarów $\Re z > 0$ oraz $\Re z < 0$.

6. Udowodnić, iż jeżeli całka $\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| e^{M|t|} dt$, gdzie $p(t)$ jest funkcją ciągłą zmiennej rzeczywistej, posiada wartość skończoną dla każdego $M > 0$, wówczas funkcje $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{zt} dt$, $G_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cos zt dt$ i $G_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \sin zt dt$ są holomorficzne w całej płaszczyźnie otwartej.

7. Zbiór punktów z , w których całka $\int_0^{\infty} e^{-z^2 t^2} dt$ jest zbieżna, jest otwarty, a funkcja, określona w tym zbiorze przez całkę, jest holomorficzna. Zbiór ten jest sumą dwu obszarów rozłącznych; określić te obszary.

8. Niech $W(z)$ będzie funkcją ciągłą w zbiorze otwartym i ograniczonym G . Oznaczając dla każdego $h > 0$ przez G_h zbiór punktów $z \in G$ takich, iż $\rho(z, \partial G) > 2h$, przyjmijmy $W_h(z) = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h W(z + \xi + i\eta) d\xi d\eta$ dla $z \in G_h$ (funkcje W_h nazywają się *średnimi połowymi* funkcji W).

Pokazać, iż funkcje $W_h(z)$ są ciągłe w G_h i posiadają w G_h pochodne cząstkowe ciągłe względem x oraz y . Następnie, iż $W_h(z) \rightarrow W(z)$ w G , gdy $h \rightarrow 0$.

Jeżeli funkcja W jest holomorficzna w G , wówczas, dla każdego $h > 0$, funkcja W_h jest holomorficzna w G_h . Odwrotnie, jeżeli istnieje ciąg wartości $\{h_n\}$, dążący do zera, taki, iż dla każdego n funkcja W_{h_n} jest holomorficzna w G_{h_n} , wówczas funkcja W jest holomorficzna w G .

§ 7. Twierdzenie Stieltjesa-Osgooda. Inne bezpośrednie zastosowanie wzoru Cauchy'ego stanowi następujące

(7.1) **Twierdzenie Stieltjesa-Osgooda.** Każda rodzina $\mathfrak{B}$ funkcji holomorficznych w obszarze G , niemal ~~jednostajnie~~ ograniczona w G , jest w tym obszarze normalna; innymi słowy, każdy niemal ograniczony ciąg funkcji holomorficznych w pewnym obszarze zawiera podciąg niemal jednostajnie zbieżny w tym obszarze.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie tw. 6.1 możemy założyć, iż obszar G nie zawiera punktu ∞ . Niech z_0 będzie dowolnym punktem obszaru G , a $Q \subset G$ kwadratem o środku z_0 . Oznaczmy przez $4r$ długość boku tego kwadratu, a przez M górny kres wartości bezwzględnych, jakie przyjmują w Q funkcje rodziny $\mathfrak{B}$. Dla każdej pary punktów $z' \in Q$, $z'' \in Q$ oraz dla każdej funkcji $W(z)$ rodziny $\mathfrak{B}$ mamy na zasadzie wzoru Cauchy'ego

$$\begin{aligned} W(z'') - W(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{W(\zeta)}{\zeta - z''} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{W(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta = \\ (7.2) \quad &= \frac{z'' - z'}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{W(\zeta)}{(\zeta - z')(\zeta - z'')} d\zeta. \end{aligned}$$

Jeżeli punkty z', z'' należą do otoczenia $K(z_0; r)$ punktu z_0 , wówczas $|\zeta - z'| \geq r$, $|\zeta - z''| \geq r$ dla każdego punktu $\zeta \in (Q)$, i ze wzoru (7.2) otrzymujemy

$$|W(z'') - W(z')| \leq \frac{8M}{\pi r} |z'' - z'|, \quad \text{jeżeli } z' \in K(z_0; r) \text{ oraz } z'' \in K(z_0; r).$$

Funkcje $W(z)$ rodziny $\mathfrak{B}$ są tedy jednakowo ciągłe w pewnym otoczeniu $K(z_0; r)$ każdego punktu $z_0 \in G$. Tym samym, na mocy tw. 4.4 Rozdz. I, rodzina ta jest normalna w obszarze G .

W sformułowaniu tw. 7.1 wystarczy założyć tylko, iż G jest zbiorem otwartym, nie konieczne obszarem. W samej rzeczy, analogiczne założenie wystarcza również w sformułowaniu tw. 4.4 Rozdz. I, jeżeli przyjąć tylko, iż rozważana tam rodzina $\mathfrak{F}$ funkcji jest ograniczona w każdym punkcie G .

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli ciąg $\{W_n(z)\}$ funkcji holomorficznych w zbiorze otwartym G jest ograniczony w G i zbieżny w każdym punkcie tego zbioru, wówczas jest zbieżny niemal jednostajnie w całym tym zbiorze.

2. Jeżeli ciąg $\{W_n(z)\}$ funkcji holomorficznych w zbiorze otwartym G jest w każdym punkcie tego zbioru zbieżny do granicy skończonej, wówczas istnieje zbiór otwarty H , wszędzie gęsty w G , w którym ciąg $\{W_n(z)\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji holomorficznej (Osgood).

[Wsk. Ob. Wstęp, § 11, ćw. 2.]

3. Niech H oznacza przestrzeń, której elementami są funkcje holomorficzne w pewnym zbiorze otwartym G . Określamy „odległość” dla tej przestrzeni w ten sam sposób, jak dla przestrzeni S funkcji ciągłych w G (ob. Rozdz. I, § 2, ćw. 3). Udowodnić, iż: (a) przestrzeń H jest zupełna, (b) zbiory zwarte w przestrzeni H pokrywają się ze zbiorami ograniczonymi w tej przestrzeni (t. zn. na to, aby rodzina $\mathfrak{B}$ funkcji tworzyła w przestrzeni H zbiór zwarty, konieczne jest i wystarcza, by istniała liczba skończona M taka, że $\varrho(0, W) < M$ dla każdej funkcji W należącej do $\mathfrak{B}$).

Ze względu na (a) przestrzeń H uważana być może za zbiór domknięty w przestrzeni S . Zauważyć, iż przestrzeń S nie posiada własności (b).

§ 8. Twierdzenie Morery. Na zakończenie tego rozdziału podamy następujące odwrócenie twierdzenia Cauchy’ego 4.1:

(8.1) **Twierdzenie Morery.** Jeżeli całka krzywoliniowa funkcji $W(z)$, ciągłej w zbiorze otwartym G nie zawierającym punktu ∞ , znika wzdłuż obwodu każdego prostokąta ICG , wówczas funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w G .

Dowód. Niech $z_0 = x_0 + iy_0$ będzie jakimkolwiek punktem zbioru G . Oznaczmy przez Q dowolny kwadrat, zawarty w G , o środku w punkcie z_0 . Przyjmijmy dla każdego punktu $z = x + iy \in Q$:

$$z' = x + iy_0, \quad z'' = x_0 + iy,$$

oznaczając w ten sposób przez z' i z'' odpowiednio rzuty punktu z na proste $\eta = y_0$ i $\xi = x_0$.

Niech dla każdego punktu $z \in Q$

$$(8.2) \quad F(z) = \int_{[z_0, z', z]} W(\zeta) d\zeta.$$

Ponieważ dla każdego punktu $z \in Q$ mamy z założenia

$$\int_{[z_0, z', z, z'', z_0]} W(\zeta) d\zeta = 0,$$

więc

$$(8.3) \quad F(z) = \int_{[z_0, z', z]} W(\zeta) d\zeta = - \int_{[z, z'', z_0]} W(\zeta) d\zeta = \int_{[z_0, z'', z]} W(\zeta) d\zeta.$$

Pokażemy, iż określona w ten sposób funkcja $F(z)$ jest wewnątrz Q funkcją pierwotną funkcji $W(z)$.

Niech w tym celu $z = x + iy$ będzie dowolnym punktem należącym do wnętrza kwadratu Q , zaś h dowolną liczbą rzeczywistą dostatecznie małą na to, by punkty $z + h = (x + h) + iy$ oraz $z + ih = x + i(y + h)$ należały również do wnętrza Q . Mamy wówczas, korzystając odpowiednio ze wzorów (8.3) i (8.2), równości:

$$F(z + h) = \int_{[z_0, z'', z + h]} W(\zeta) d\zeta, \quad F(z + ih) = \int_{[z_0, z', z + ih]} W(\zeta) d\zeta;$$

odejmując od nich odpowiednio równości (8.3) i (8.2), otrzymujemy:

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z, z + h]} W(\zeta) d\zeta, \quad F(z + ih) - F(z) = \int_{[z, z + ih]} W(\zeta) d\zeta,$$

skąd, dzieląc przez h ,

$$(8.4) \quad \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = W(z) + \frac{1}{h} \int_{[z, z + h]} [W(\zeta) - W(z)] d\zeta,$$

$$(8.5) \quad \frac{F(z + ih) - F(z)}{h} = iW(z) + \frac{1}{h} \int_{[z, z + ih]} [W(\zeta) - W(z)] d\zeta.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z uwagi na ciągłość funkcji W istnieje taka liczba $\eta > 0$, iż $|\zeta - z| \leq \eta$ pociąga za sobą $|W(\zeta) - W(z)| \leq \varepsilon$. Jeżeli więc $|h| < \eta$, wówczas:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[z, z + h]} [W(\zeta) - W(z)] d\zeta \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{1}{h} \int_{[z, z + ih]} [W(\zeta) - W(z)] d\zeta \right| \leq \varepsilon.$$

Przechodząc zatem do granicy w (8.4) i (8.5), gdy h dąży do 0 poprzez wartości rzeczywiste, otrzymujemy:

$$F'_x(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = W(z) = \frac{1}{i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + ih) - F(z)}{h} = -i F'_y(z),$$

t. j. warunek Cauchy-Riemanna dla pochodnych cząstkowych $F'_x(z)$ i $F'_y(z)$ wewnątrz Q . Ponieważ zaś z uwagi na równość $F'_x(z) = W(z)$ pochodne te są ciągłe, przeto funkcja $F(z)$ jest holomorficzna wewnątrz Q i tym samym holomorficzna jest również (por. § 5) pochodna jej $W(z) = F'_x(z) = F'(z)$.

Funkcja $W(z)$ jest tedy holomorficzna w otoczeniu każdego punktu zbioru G , a więc w całym tym zbiorze.

Jako zastosowanie twierdzenia Morery podamy t. zw. *zasadę odbicia Schwarza* dla linii prostej.

Zasadę tę sformułujemy w sposób następujący:

(8.6) Niech G będzie zbiorem otwartym, symetrycznym względem osi rzeczywistej i nie zawierającym punktu ∞ . Niech G_+ oraz G_- oznaczają odpowiednio części zbioru G położone w górnej i dolnej półpłaszczyźnie, t. zn. zbiory tych punktów $z \in G$, dla których odpowiednio $\Im z \geq 0$ oraz $\Im z \leq 0$.

Wówczas każda funkcja $W(z)$, ciągła na zbiorze G_+ , holomorficzna w jego wnętrzu (t. j. w każdym punkcie zbioru G_+ nie leżącym na osi x -ów) i przyjmująca wartości rzeczywiste w punktach osi rzeczywistej, może być przedłużona na cały zbiór G jako funkcja holomorficzna. Innymi słowy, istnieje funkcja $W_0(z)$ holomorficzna w całym zbiorze G i identyczna z funkcją $W(z)$ w G_+ ; funkcję tę otrzymujemy, przyjmując

$$W_0(z) = W(z) \text{ dla } z \in G_+ \text{ oraz } W_0(z) = \overline{W(\bar{z})} \text{ dla } z \in G_-.$$

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, iż definicja powyższa określa funkcję W_0 jednoznacznie w G : istotnie, w punktach z osi rzeczywistej, które należą jednocześnie do G_+ i G_- , funkcja $W(z)$ jest rzeczywista i przeto $\overline{W(\bar{z})} = \overline{W(z)} = W(z)$. Ponieważ przy tym funkcja $W(z)$ jest ciągła na zbiorze G_+ , wynika stąd jednocześnie, iż funkcja $W_0(z)$ jest ciągła w całym zbiorze G . Ze względu więc na tw. 8.1, dla udowodnienia, że funkcja W_0 jest holomorficzna w G , wystarczy pokazać, że

$$(8.7) \quad \int_{(I)} W_0(z) dz = 0$$

dla każdego prostokąta ICG .

Równość ta wynika natychmiast z twierdzenia Cauchy'ego, gdy ICG_+^0 ; wewnątrz bowiem zbioru G_+ funkcja W_0 jest identyczna z funkcją W , a przeto holomorficzna. Jeżeli natomiast prostokąt I , leżąc w zbiorze G_+ , nie jest całkowicie zawarty w jego wnętrzu, wówczas posiada jeden z boków na osi rzeczywistej i możemy napisać $I = [a, b; 0, d]$. Dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon < d$ prostokąt $I_\varepsilon = [a, b; \varepsilon, d]$ zawiera się już całkowicie wewnątrz G_+ i przeto $\int_{(I_\varepsilon)} W_0(z) dz = 0$. Przechodząc do granicy, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$, otrzymujemy równość (8.7) z uwagi na ciągłość funkcji $W_0(z)$ na ICG .

Niech teraz ICG_- . Wówczas oznaczając przez I^* prostokąt symetryczny do I względem osi x -ów i podstawiając $z = \bar{z}$, stwierdzimy łatwo, iż

$$(8.8) \quad \int_{(I)} W_0(z) dz = \int_{(I)} \overline{W(\bar{z})} dz = - \int_{(I^*)} W(z) dz,$$

a ponieważ z uwagi na $I^* \subset G_+$ całka funkcji W wzdłuż obwodu prostokąta I^* jest zerem, przeto z (8.8) wynika równość (8.7).

Wreszcie, gdy I jest dowolnym prostokątem zawartym w G , wówczas albo zawiera się całkowicie w jednym ze zbiorów G_+ lub G_- , albo też jest sumą dwu takich prostokątów, przyległych wzdłuż wspólnego boku na osi rzeczywistej. W każdym więc razie, na mocy rozpatrzonych już przypadków, otrzymamy znów równość (8.7) dla prostokąta I .

Twierdzenie 8.6 jest w ten sposób udowodnione.

W dowodzie twierdzenia Morery, jak również i twierdzenia 8.6, zakładaliśmy, iż zbiór G nie zawiera punktu ∞ . Niemniej zastrzeżenie to będzie można usunąć na zasadzie twierdzeń rozdziału następnego (§ 6), z których wynika, iż funkcja ciągła w zbiorze otwartym i holomorficzna wszędzie w tym zbiorze z wyjątkiem co najwyżej jednego punktu jest holomorficzna również i w tym punkcie.