

ROZDZIAŁ I

FUNKCJE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

§ 1. Funkcje ciągłe. W § tym ustalimy podstawowe definicje i znakowanie, dotyczące funkcyj jednej i kilku zmiennych. Zarówno zmienne niezależne jak i funkcje przyjmować będą wartości zespolone; wartość ∞ będzie również dopuszczalna, oczywiście jeśli z samego charakteru rozważań nie będzie wynikała konieczność jej wyłączenia.

Funkcję n zmiennych zespolonych $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$, przebiegających odpowiednio n zbiorów $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ na płaszczyźnie E , uważać można za funkcję punktu $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, określoną na iloczynie kartezjańskim (por. Wstęp, § 13) $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$. Zamiast $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2, \dots, z_n \in Z_n$, możemy pisać także $F(z)$, gdzie $z \in Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$. Funkcję F nazywamy

(1^o) *ograniczoną* na zbiorze Z , jeśli istnieje liczba skończona M taka, iż $|F(z)| \leq M$ w każdym punkcie $z \in Z$;

(2^o) *jednostajnie ciągłą* na Z , jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\eta > 0$, iż nierówność $\varrho(z_1, z_2) < \eta$ pociąga za sobą $|F(z_2) - F(z_1)| < \varepsilon$ dla każdej pary punktów z_1, z_2 zbioru Z .

$\varrho(z_1, z_2)$ oznacza odległość punktów z_1 i z_2 zgodnie z definicjami Wstępu, §§ 8, 13.

(1.1) Jeśli zbiory $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ są domknięte, wówczas każda funkcja F , skończona i ciągła na zbiorze $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$, jest ograniczona i jednostajnie ciągła na tym zbiorze. Nadto, jeśli funkcja F jest rzeczywista, wówczas w pewnym punkcie zbioru Z osiąga kres górny swojej wartości na tym zbiorze.

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja F nie jest ograniczona na Z . Istnieje wówczas w zbiorze Z taki ciąg punktów $\{z^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$, iż $F(z^{(k)}) \rightarrow \infty$. Niech $\{z^{(k_j)}\}$ będzie podciągiem zbieżnym, wyjętym

z ciągu $\{z^{(k)}\}$. Podciąg taki istnieje ze względu na zwartość przestrzeni E^n (Wstęp, tw. 8.2 i 13.1 (c)). Oznaczając przez z_0 jego granicę, mamy $z_0 \in Z$ ze względu na domkniętość zbiorów $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. Zatem $F(z_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(z^{(k_j)}) = \infty$, co sprzeczne jest z założeniem, że funkcja $F(z)$ jest skończona na Z .

Przypuśćmy z kolei, iż funkcja F nie jest jednostajnie ciągła na Z . Wyznaczyć tedy można liczbę dodatnią ε oraz dwa ciągi punktów $\{p^{(k)}\}$ i $\{q^{(k)}\}$ w zbiorze Z tak, by

$$(1.2) \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(p^{(k)}, q^{(k)}) = 0 \quad \text{ i } \quad (1.3) |F(p^{(k)}) - F(q^{(k)})| \geq \varepsilon \text{ dla } k=1, 2, \dots$$

Niech $\{p^{(k_j)}\}$ będzie podciągiem zbieżnym, wyjętym z $\{p^{(k)}\}$ i niech $p_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} p^{(k_j)}$. Z uwagi na (1.2) stwierdzamy łatwo, iż również $p_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} q^{(k_j)}$. Podstawiając tedy $k = k_j$ w (1.3) i przechodząc do granicy przy $j \rightarrow \infty$, otrzymujemy, z uwagi na ciągłość i skończoność funkcji $F(z)$ w punkcie p_0 , nierówność $0 \geq \varepsilon$, oczywiście fałszywą.

Jeżeli wreszcie założymy, iż funkcja F jest rzeczywista oraz iż M jest kresem górnym jej wartości na Z , wówczas istnieje ciąg punktów $\{z_k\}$ zbioru Z taki, że $F(z_k) \rightarrow M$ gdy $k \rightarrow \infty$. Oznaczając przez $\{z_{k_l}\}$ dowolny podciąg zbieżny tego ciągu, a przez z^0 granicę tego podciagu, będziemy mieli $z^0 \in Z$ oraz $F(z^0) = \lim_{l \rightarrow \infty} F(z_{k_l}) = M$.

W szczególności, z tw. 1.1 wynika, iż każda funkcja skończona i ciągła na całej płaszczyźnie jest na niej jednostajnie ciągła (twierdzenie to nie jest oczywiście prawdziwe dla płaszczyzny otwartej E_0).

Udowodnimy teraz dwa twierdzenia „o ciągłości” i „o różniczkowalności całki oznaczonej względem parametru”. W twierdzeniach tych zarówno proces całkowania jak różniczkowania rozumiany jest względem zmiennej rzeczywistej, tak że w gruncie rzeczy nie wychodzimy tu poza dziedzinę rzeczywistą, jakkolwiek sama funkcja przyjmować może wartości zespolone. Jeżeli mianowicie $F(t)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t , to przedstawiając ją w postaci $F(t) = U(t) + iV(t)$, gdzie $U(t)$, $V(t)$ są funkcjami rzeczywistymi, możemy określić pochodną i całkę $F(t)$ przez wzory

$$F'(t) = U'(t) + iV'(t), \quad \int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt,$$

przy czym definicje te są oczywiście równoważne definicjom bezpośrednim: całki jako granicy sum przybliżonych, a pochodnej $F'(t)$

jako granicy skończonej ilorazu $[F(t+h) - F(t)]/h$, gdy h dąży do 0 przez wartości rzeczywiste. Fakty nowe pojawiają się dopiero wtedy, gdy różniczkujemy względem zmiennej zespolonej (por. dalej § 6 oraz Rozdz. II, § 1; twierdzenie 1.5, które podajemy niżej, uogólnione będzie w Rozdz. II, § 3 na różniczkowanie względem parametru zespolonego).

(1.4) Jeżeli $T = [a, b]$ jest przedziałem skończonym, $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ zbiorami domkniętymi, zaś $F(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ funkcją skończoną i ciągłą na zbiorze $T \times Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$, to całka

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_a^b F(t, z_1, z_2, \dots, z_n) dt$$

jest funkcją ciągłą na zbiorze $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$.

Dowód. Na mocy tw. 1.1 każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\eta > 0$, iż przy $t \in T$, $z'_1 \in Z_1$, $z''_1 \in Z_1$, $z'_2 \in Z_2$, $z''_2 \in Z_2$, ..., $z'_n \in Z_n$, $z''_n \in Z_n$ zespół nierówności $\varrho(z'_1, z''_1) < \eta$, $\varrho(z'_2, z''_2) < \eta$, ..., $\varrho(z'_n, z''_n) < \eta$ pociąga za sobą nierówność

$$|F(t, z'_1, z''_2, \dots, z''_n) - F(t, z'_1, z'_2, \dots, z'_n)| < \varepsilon/(b-a),$$

a tym samym

$$|\Phi(z'_1, z'_2, \dots, z'_n) - \Phi(z'_1, z'_2, \dots, z'_n)| \leq (b-a)\varepsilon/(b-a) = \varepsilon,$$

co oznacza ciągłość funkcji Φ na Z .

(1.5) Niech $T = [a, b]$ oraz $U = [c, d]$ będą przedziałami liniowymi, $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ zbiorami domkniętymi na płaszczyźnie, zaś $F(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n)$ funkcją skończoną i ciągłą na zbiorze $T \times U \times Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$. Wówczas, jeśli funkcja F posiada pochodną $F'_u(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n)$ względem u , ciągłą na zbiorze $T \times U \times Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$, to funkcja

$$\Phi(u, z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_a^b F(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n) dt$$

posiada również pochodną względem u , ciągłą na zbiorze

$$U \times Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$$

i daną przez wzór

$$(1.6) \quad \Phi'_u(u, z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_a^b F'_u(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n) dt.$$

Dowód. Rozważając ewentualnie część rzeczywistą i urojoną funkcji F z osobna, założyc możemy, iż funkcja F jest rzeczywista. Niech $(u, z_1, z_2, \dots, z_n)$ będzie dowolnym punktem zbioru $U \times Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$, a ε dowolną liczbą dodatnią. Ze względu na jednostajną ciągłość pochodnej F'_u na zbiorze $T \times U \times Z_1 \times \dots \times Z_n$ (por. tw. 1.1) istnieje taka liczba $\eta > 0$, że dla każdego $t \in T$ i $v \in U$ nierówność $|v - u| < \eta$ pociąga ze sobą nierówność

$$|F'_u(t, v, z_1, z_2, \dots, z_n) - F'_u(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n)| < \varepsilon / (b - a).$$

Niech Δu będzie dowolnym przyrostem zmiennej u , byleby takim, iż $u + \Delta u \in U$ i $|\Delta u| < \eta$. Mamy na zasadzie twierdzenia o wartości średniej

$$F(t, u + \Delta u, z_1, z_2, \dots, z_n) - F(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n) = \Delta u \cdot F'_u(t, u + \theta \Delta u, z_1, z_2, \dots, z_n),$$

gdzie $0 < \theta < 1$. Stąd, wobec $|\theta \Delta u| \leq |\Delta u| < \eta$, otrzymujemy

$$\left| \frac{F(t, u + \Delta u, z_1, z_2, \dots, z_n) - F(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n)}{\Delta u} - F'_u(t, u, z_1, z_2, \dots, z_n) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

a więc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Phi(u + \Delta u, z_1, \dots, z_n) - \Phi(u, z_1, \dots, z_n)}{\Delta u} - \int_a^b F'_u(t, u, z_1, \dots, z_n) dt \right| = \\ & = \left| \int_a^b \left[\frac{F(t, u + \Delta u, z_1, \dots, z_n) - F(t, u, z_1, \dots, z_n)}{\Delta u} - F'_u(t, u, z_1, \dots, z_n) \right] dt \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

skąd wynika jednocześnie istnienie pochodnej Φ'_u oraz wzór (1.6). Ze wzoru zaś tego, na mocy tw. 1.4, wynika natychmiast ciągłość pochodnej Φ'_u na zbiorze $U \times Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$.

§ 2. Ciągi jednostajnie i niemal jednostajnie zbieżne.

W dalszym ciągu tego rozdziału zajmować się będziemy przeważnie funkcjami zespolonymi jednej zmiennej zespolonej; większość definicji i twierdzeń uogólnia się jednak natychmiast na funkcje wielu zmiennych.

Każdą funkcję F zmiennej zespolonej uważać możemy oczywiście za funkcję dwu zmiennych rzeczywistych; oznaczając przez x i y odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej z , pisać będziemy często $F(x, y)$ zamiast $F(z)$.

Mówimy, iż ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcji skończonych na pewnym zbiorze Z jest *jednostajnie zbieżny* na tym zbiorze do pewnej funkcji $F(z)$, jeśli każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba N , iż $|F_n(z) - F(z)| \leq \varepsilon$ dla każdego $n \geq N$ oraz dla każdego punktu $z \in Z$. Analogicznie, ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcji (skończonych lub nie) na zbiorze Z nazywać będziemy *jednostajnie rozbieżnym do ∞* na Z , jeśli każdej liczbie M odpowiada liczba N taka, iż $|F_n(z)| \geq M$ dla każdego $n \geq N$ oraz dla każdego punktu $z \in Z$.

W wielu dalszych rozważaniach okaże się dogodne następujące uogólnienie powyższych definicji. Ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcji na zbiorze otwartym G nazywać się będzie *niemal jednostajnie zbieżnym* [*niemal jednostajnie rozbieżnym do ∞*] na tym zbiorze, jeśli jest jednostajnie zbieżny [jednostajnie rozbieżny do ∞] na każdym zbiorze domkniętym, zawartym w G . Jeżeli $F(z)$ jest granicą ciągu niemal jednostajnie zbieżnego $\{F_n(z)\}$, wówczas piszemy $F_n(z) \rightarrow F(z)$. Analogicznie $F_n(z) \rightarrow \infty$ oznaczać będzie, iż ciąg $\{F_n(z)\}$ jest niemal jednostajnie rozbieżny do ∞ .

Definicje te rozszerzają się natychmiast na szeregi funkcji. Szereg funkcji jest tedy *jednostajnie zbieżny*, *jednostajnie rozbieżny do ∞* i t. p., jeśli jednostajnie zbieżny, jednostajnie rozbieżny do ∞ i t. p. jest ciąg jego sum cząstkowych. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(z)|$ jest zbieżny [jednostajnie zbieżny, niemal jednostajnie zbieżny], wówczas mówimy, iż szereg $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$ jest *bezwzględnie zbieżny* [*bezwzględnie jednostajnie zbieżny*, *bezwzględnie niemal jednostajnie zbieżny*]. Oczywiście bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą zwykłą zbieżność; to samo dotyczy zbieżności bezwzględnej jednostajnej i bezwzględnej niemal jednostajnej.

(2.1) Jeżeli ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcji skończonych i ciągłych na zbiorze Z jest jednostajnie zbieżny na tym zbiorze do funkcji $F(z)$, wówczas funkcja $F(z)$ jest również skończona i ciągła na Z .

W przypadku, gdy Z jest zbiorem otwartym, zamiast zakładać, że ciąg $\{F_n(z)\}$ jest zbieżny jednostajnie, wystarczy założyć, iż jest zbieżny niemal jednostajnie.

Dowód. Niech $z_0 \in Z$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech N będzie liczbą całkowitą dodatnią taką, iż $|F_N(z) - F(z)| < \varepsilon/3$ dla każdego punktu $z \in Z$. Niech wreszcie η będzie liczbą dodatnią taką, iż dla każdego punktu $z \in Z$ warunek

$$(2.2) \quad \varrho(z_0, z) < \eta$$

pociąga za sobą $|F_N(z) - F_N(z_0)| < \varepsilon/3$. Warunek (2.2) pociąga tedy za sobą, dla każdego punktu $z \in Z$,

$$|F(z) - F(z_0)| \leq |F(z) - F_N(z)| + |F_N(z) - F_N(z_0)| + |F_N(z_0) - F(z_0)| \leq \varepsilon,$$

co oznacza ciągłość funkcji F na zbiorze Z w punkcie z_0 . Druga część twierdzenia jest oczywistą konsekwencją pierwszej.

Przyjmujemy jeszcze dwie następujące definicje, analogiczne do definicji ustalonych na początku tego §. Rodzina funkcji nazywać się będzie *ograniczoną* na pewnym zbiorze Z (a funkcje należące do tej rodziny — *wspólnie ograniczonymi* na Z), jeżeli istnieje liczba skończona M taka, iż $|F(z)| \leq M$ dla każdej funkcji F rozważanej rodziny i każdego punktu $z \in Z$. Jeśli rodzina funkcji jest ograniczona na każdym zbiorze domkniętym, zawartym w pewnym zbiorze otwartym G , wówczas rodzina ta nazywa się *niemal ograniczoną* w G , a funkcje do niej należące — *niemal wspólnie ograniczonymi* w G . Przez szereg *ograniczony* na zbiorze Z [*niemal ograniczony* w zbiorze otwartym G] rozumieć będziemy szereg, którego sumy cząstkowe tworzą ciąg jednostajnie ograniczony na Z [*niemal jednostajnie ograniczony* w G].

(2.3) *Jeżeli rodzina $\mathfrak{F}$ funkcji jest ograniczona w otoczeniu każdego punktu pewnego zbioru otwartego G (t. j. jeżeli każdy punkt tego zbioru posiada otoczenie, w którym rodzina $\mathfrak{F}$ jest ograniczona), wówczas rodzina ta jest niemal ograniczona w całym zbiorze G .*

Istotnie, niech P będzie dowolnym zbiorem domkniętym zawartym w G . Każdemu punktowi $z \in P$ przyporządkować możemy zawierające go koło otwarte, na którym rodzina $\mathfrak{F}$ jest ograniczona. Na mocy twierdzenia Borela-Lebesgue'a (Wstęp, § 6) zbiór P pokryty być może skończoną ilością takich kół. Rodzina $\mathfrak{F}$ jest więc ograniczona na zbiorze P .

Podobnie dowodzimy, że *każdy ciąg funkcji, niemal jednostajnie zbieżny [rozbieżny do ∞] w otoczeniu każdego punktu zbioru otwartego G , jest niemal jednostajnie zbieżny [rozbieżny do ∞] w całym zbiorze*.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że dla $|z| < 1$ mamy

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) z^k,$$

gdzie $\tau(k)$ oznacza liczbę dzielników liczby k , przy czym obydwie szeregi w równości (*) są niemal jednostajnie zbieżne w kole $K(0; 1)$.

2. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^n+1}}$ jest zbieżny niemal jednostajnie

w całej płaszczyźnie z pominięciem okręgu $C(0; 1)$, a mianowicie: do $z/(1-z)$, gdy $|z| < 1$, zaś do $1/(1-z)$, gdy $|z| > 1$. [Wsk. Zauważyć, iż każda liczba całkowita dodatnia może być przedstawiona w jeden i tylko jeden sposób w postaci $2^{h-1}(2k-1) = k \cdot 2^h - 2^{h-1}$, gdzie k i h są liczbami całkowitymi dodatnimi.]

3. Niech S będzie rodziną wszystkich funkcji ciągłych w pewnym zbiorze otwartym G na płaszczyźnie (domkniętej). Rodzinę S uważać będzie można za przestrzeń metryczną (por. Wstęp, § 3, éw. 3), określając dla niej metrykę w sposób następujący:

Przedstawiamy G jako sumę ciągu wstępującego zbiorów domkniętych $\{F_n\}$, określając zbiór F_n jako zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od uzupełnienia zbioru G jest $\geq 1/n$ (por. Wstęp, § 11). Oznaczając dla każdej pary funkcji $U(z), V(z)$ ciągłych w G przez $M_n(U, V)$ kres górny $|U(z) - V(z)|$ dla $z \in F_n$, określamy „odległość“ tych funkcji przez wzór

$$\varrho(U, V) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{M_n(U, V)}{1 + M_n(U, V)}.$$

Pokazać, iż 1° odległość tak określona spełnia warunki éw. 3, Wstęp, § 3; 2° przestrzeń S jest zupełna (ob. Wstęp, § 4, éw. 7) i związek $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \varrho(W_n, W_m) = 0$

jest równoważny niemal jednostajnej zbieżności ciągu $\{W_n(z)\}$ w zbiorze G ; 3° ciąg $\{\varrho(W_n, 0)\}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg funkcji $\{W_n(z)\}$ jest niemal ograniczony w G ; 4° przestrzeń S nie jest zwarta (por. Wstęp, § 6) w żadnym otoczeniu punktu 0, t. j. dla każdej liczby $M > 0$ istnieje ciąg funkcji $\{W_n(z)\}$ taki, iż:

(a) $\varrho(W_n, 0) \leq M$ dla $n = 1, 2, \dots$,

(b) żaden podciąg ciągu $\{W_n\}$ nie jest zbieżny w przestrzeni S .

§ 3. Rodziny normalne funkcji. Rozważania elementarne analizy dają wielokrotnie sposobność stosowania metody, opartej na twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa i polegającej na wyjmowaniu podciągów zbieżnych z dowolnych ciągów punktowych. Jakkolwiek twierdzenie Bolzano-Weierstrassa nie uogólnia się bezpośrednio na dowolne ciągi funkcyjne, to jednak metoda „wyjmowania podciągów zbieżnych“ może być z powodzeniem stosowana w wielu rozumowaniach dotyczących pewnych specjalnych ciągów funkcji.

Zastosowania jej znajdujemy w rozmaitych działach analizy. Dla przykładu wskażemy dowód istnienia rozwiązania równania różniczkowego $y' = u(x, y)$, gdy o funkcji $u(x, y)$ zakładamy tylko, iż jest ciągła; możnaby było również podać wiele innych przykładów z rachunku wariacyjnego, teorii równań całkowych i t. p. (ob. np. E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930, pp. 60-66, 126-130; C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, München 1935, pp. 1-8).

S. Saks i A. Zygmund. Funkcje analityczne.

Liczne te zastosowania związane są z nazwiskami Ascoli'ego, Arzeli, Hilberta, Carathéodory'ego i innych. Jednakże dopiero Montel, wyróżniając klasę t. zw. rodzin normalnych funkcji, opracował omawianą metodę systematycznie, wskazując na szczególne jej znaczenie w teorii funkcji zmiennej zespolonej (ob. np. P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Paris 1927).

Rodzina funkcji (rzeczywistych lub zespolonych) określonych w pewnym zbiorze otwartym G nazywa się *normalną* w G , jeżeli każdy ciąg funkcji należących do tej rodziny zawiera bądź podciąg niemal jednostajnie zbieżny w G , bądź podciąg niemal jednostajnie rozbieżny w G do ∞ . Teoria rodzin normalnych opiera się na następującym prostym lemmacie:

(3.1) Niech $\{E_k\}$ będzie ciągiem zbiorów, a $\mathfrak{F}$ rodziną funkcji określonych na sumie tych zbiorów. Jeżeli dla każdego zbioru E_k z każdego ciągu funkcji należących do $\mathfrak{F}$ można wyjąć bądź podciąg jednostajnie zbieżny na zbiorze E_k , bądź podciąg jednostajnie rozbieżny na tym zbiorze do ∞ , wówczas z każdego ciągu funkcji rodziny $\mathfrak{F}$ można wyjąć podciąg, który jest bądź jednostajnie zbieżny, bądź jednostajnie rozbieżny do ∞ , na każdym ze zbiorów E_k jednocześnie.

Dowód. Niech $\mathfrak{C} = \{F_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ będzie dowolnym ciągiem funkcji rodziny $\mathfrak{F}$. Określimy przez indukcję dla każdego $k=0,1,2,\dots$ pewien podciąg $\mathfrak{C}^{(k)} = \{F_n^{(k)}(z)\}_{n=1,2,\dots}$ ciągu $\mathfrak{C}$, przyjmując $\mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{C}$ t. j. $F_n^{(0)}(z) = F_n(z)$ dla $n=1,2,\dots$ Zakładając, że określone zostały ciągi $\mathfrak{C}^{(0)}, \mathfrak{C}^{(1)}, \dots, \mathfrak{C}^{(k-1)}$, przyjmijmy za ciąg $\mathfrak{C}^{(k)} = \{F_n^{(k)}(z)\}_{n=1,2,\dots}$ dowolny podciąg wybrany z $\mathfrak{C}^{(k-1)}$, który jest na zbiorze E_k bądź zbieżny jednostajnie, bądź rozbieżny jednostajnie do ∞ ; możemy założyć przy tym, że $k-1$ pierwszych wyrazów ciągu $\mathfrak{C}^{(k)}$ jest identycznych z odpowiednimi wyrazami ciągu $\mathfrak{C}^{(k-1)}$, t. j. iż

$$F_1^{(k)}(z) = F_1^{(k-1)}(z), \dots, F_{k-1}^{(k)}(z) = F_{k-1}^{(k-1)}(z).$$

Dzięki temu założeniu ciąg $\{F_j^{(j)}(z)\}_{j=1,2,\dots}$ jest podciągiem wszystkich ciągów $\mathfrak{C}^{(1)}, \mathfrak{C}^{(2)}, \dots, \mathfrak{C}^{(j)}, \dots$, a więc jest jednostajnie zbieżny, lub jednostajnie rozbieżny do ∞ , na każdym ze zbiorów E_j .

Przyjmijmy, że zbiory E_k , o których mowa w lemmacie 3.1, redukują się do pojedynczych punktów. Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa każda rodzina funkcji spełnia warunki założenia lematu w stosunku do tak wyspecjalizowanego ciągu zbiorów $\{E_k\}$. Jako szczególny przypadek lematu 3.1 otrzymujemy tedy twierdzenie następujące:

(3.2) Jeżeli E jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym, wówczas każdy ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcji określonych na E zawiera podciąg, który w każdym punkcie zbioru E jest bądź zbieżny, bądź rozbieżny do ∞ .

Opierając się w dalszym ciągu na lemmacie 3.1, udowodnimy następujące ogólne twierdzenie o rodzinach normalnych:

(3.3) Jeżeli rodzina $\mathfrak{F}$ funkcji jest normalna w otoczeniu każdego punktu pewnego obszaru G , t. j. jeżeli każdy punkt tego obszaru posiada otoczenie, w którym rozważana rodzina jest normalna, to rodzina $\mathfrak{F}$ jest normalna w całym obszarze G .

Dowód. Każdemu punktowi z_0 obszaru G przyporządkować możemy otoczenie K , w którym rodzina $\mathfrak{F}$ jest normalna. Oznaczmy przez H dowolne koło o środku i promieniu wymiernym, takie że $z_0 \in H \subset \bar{H} \subset K$. Z każdego ciągu rodziny $\mathfrak{F}$ możemy tedy wyjąć podciąg, który jest w H bądź jednostajnie zbieżny, bądź jednostajnie rozbieżny do ∞ . Ponieważ zbiór wszystkich kół o środkach i promieniach wymiernych jest przeliczalny, więc przyporządkowując w ten sposób każdemu punktowi $z_0 \in G$ koło H , otrzymamy ciąg kół $\{H_j\}$ pokrywających łącznie G , przy czym dla każdego j każdy ciąg funkcji rodziny $\mathfrak{F}$ zawiera podciąg, który w kole H_j jest bądź jednostajnie zbieżny, bądź jednostajnie rozbieżny do ∞ .

Niech $\{F_n(z)\}$ będzie dowolnym ciągiem funkcji rozważanej rodziny. W myśl lematu 3.1 ciąg ten zawiera podciąg $\{F_{n_k}(z)\}$, który w każdym kole H_j jest jednostajnie zbieżny lub jednostajnie rozbieżny do ∞ . Pokażemy, że ciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ jest albo rozbieżny, albo zbieżny na wszystkich kołach jednocześnie. Istotnie, oznaczając w przeciwnym razie przez G_1 sumę tych kół, w których rozważany ciąg jest zbieżny, a przez G_2 sumę tych kół, w których jest rozbieżny, otrzymalibyśmy rozkład obszaru G na dwa zbiory niepuste, otwarte i rozłączne, co jest oczywiście niemożliwe.

Załóżmy, iż ciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ jest wszędzie zbieżny; pokażemy, iż jest on niemal jednostajnie zbieżny w G . Istotnie, niech $P \subset G$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym. W myśl twierdzenia Borela (Wstęp, tw. 6.2) istnieje wtedy skończona ilość kół $H_1, H_2, \dots, H_m$, pokrywających łącznie P . A że ciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ jest jednostajnie zbieżny w każdym z nich, jest on jednostajnie zbieżny na P .

Analogicznie, przyjmując, że ciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ jest wszędzie rozbieżny, udowodnilibyśmy, iż jest on w G niemal jednostajnie rozbieżny do ∞ .

(3.4) *Każdy ciąg funkcji, normalny i zbieżny wszędzie do granicy skończonej w zbiorze otwartym jest niemal jednostajnie zbieżny w G ; każdy ciąg funkcji, normalny w zbiorze otwartym G i rozbieżny do ∞ w jednym przynajmniej punkcie tego zbioru, jest w G niemal jednostajnie rozbieżny do ∞ .*

Dowód. Przyjmijmy, że ciąg $\{F_n(z)\}$, normalny i zbieżny w G do pewnej funkcji skończonej $F(z)$, nie jest niemal jednostajnie zbieżny w G , a więc nie jest jednostajnie zbieżny na pewnym zbiorze domkniętym $P \subset G$. Istnieje tedy pewna liczba $\varepsilon > 0$, ciąg rosnący wskaźników $\{n_k\}$ i ciąg punktów $\{z_k\}$ zbioru P taki, iż $|F_{n_k}(z_k) - F(z_k)| \geq \varepsilon$ dla $k=1, 2, \dots$. Ze względu na zbieżność i normalność ciągu $\{F_n(z)\}$, z ciągu $\{F_{n_k}(z)\}$ wyjąć możemy podciąg $\{F_{n_{k_i}}(z)\}$ niemal jednostajnie zbieżny w G , a więc jednostajnie zbieżny na zbiorze P . Z drugiej jednak strony mamy $|F_{n_{k_i}}(z_{k_i}) - F(z_{k_i})| \geq \varepsilon$ dla $i=1, 2, \dots$, co stanowi oczywistą sprzeczność.

Analogicznie przebiega dowód drugiej części twierdzenia.

(3.5) *Jeżeli ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcji skończonych i ciągłych w zbiorze otwartym G jest normalny w zbiorze G i ograniczony w pewnym punkcie zbioru G , wówczas ciąg ten jest niemal ograniczony w całym zbiorze G .*

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{F_n(z)\}$ nie jest niemal ograniczony w G , a więc nie jest ograniczony na pewnym zbiorze domkniętym $P \subset G$. Istnieje tedy ciąg punktów $\{z_k\}$ zbioru P oraz ciąg rosnący wskaźników n_k taki, że

$$(3.6) \quad |F_{n_k}(z_k)| > k \quad \text{dla } k=1, 2, \dots$$

Z kolei ciąg $\{F_{n_k}(z)\}$ zawiera podciąg $\{F_{n_{k_j}}(z)\}$, który jest w zbiorze otwartym G bądź niemal jednostajnie zbieżny, bądź niemal jednostajnie rozbieżny do ∞ . Z uwagi na (3.6) odpada jednak pierwsza alternatywa i ciąg $\{F_{n_{k_j}}(z)\}$ jest niemal jednostajnie rozbieżny do ∞ . To jednak przeczy założeniu, iż ciąg $\{F_n(z)\}$ jest ograniczony w pewnym punkcie zbioru G .

ĆWICZENIA. 1. Przykłady rodzin normalnych funkcji: (a) Ciąg funkcji $\{F_n(x, y)\}$, określonych w płaszczyźnie otwartej przez równości: $F_n(x, y) = 0$ dla $x \leq 0$ oraz $F_n(x, y) = n$ dla $x > 0$, jest normalny zarówno w obszarze $x > 0$ jak w obszarze $x < 0$, nie jest jednak normalny w sumie tych obszarów (przykład ten wskazuje, iż w tw. 3.3 warunek, iż zbiór G jest obszarem, jest istotny i nie może być zastąpiony przez warunek, iż zbiór G jest tylko otwartym). (b) Rodzina wszystkich funkcji $F(z) = az$, gdzie a jest dowolnym spółczynnikiem, jest normalna w płaszczyźnie otwartej z wyłączeniem punktu 0, nie jest natomiast normalna w żadnym otoczeniu punktu 0. (c) Rodzina funkcji $F(z) = az + b$, gdzie a i b są dowolnymi spółczynnikami, nie jest normalna w otoczeniu żadnego punktu.

2. Jeżeli $\{F_n(z)\}$ jest ciągiem normalnym i niemal ograniczonym funkcji w obszarze G i jeśli istnieje funkcja $F(z)$ taka, że każdy podciąg niemal jednostajnie zbieżny tego ciągu jest zbieżny do $F(z)$, wówczas $F_n(z) \rightarrow F(z)$ w G .

§ 4. Funkcje jednakowo ciągłe. Mówimy, że funkcje należące do rodziny $\mathfrak{F}$ funkcji skończonych są *jednakowo ciągłe* na pewnym zbiorze A , jeśli każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\eta > 0$, iż dla każdej funkcji $F(z)$ rodziny $\mathfrak{F}$ oraz dla każdej pary punktów z_1, z_2 zbioru A nierówność $\varrho(z_1, z_2) < \eta$ pociąga za sobą $|F(z_2) - F(z_1)| < \varepsilon$. Z definicji tej wynika natychmiast, iż funkcje należące do rodziny funkcji jednakowo ciągłych na jakimś zbiorze są wszystkie jednostajnie ciągłe na tym zbiorze (por. § 1, str. 43).

(4.1) Twierdzenie Ascoli'ego. *Każdy ciąg ograniczony $\{F_n(z)\}$ funkcji jednakowo ciągłych w zbiorze otwartym i ograniczonym G zawiera podciąg jednostajnie zbieżny w G .*

Dowód. Niech $\{w_j\}$ będzie ciągiem punktów wymiernych (por. Wstęp, § 8) zbioru G . Na mocy tw. 3.2 z ciągu $\{F_n(z)\}$ wyjąć można podciąg $\{F_{n_p}(z)\}$ zbieżny we wszystkich punktach ciągu $\{w_j\}$. Pisząc dla skrócenia $H_p(z) = F_{n_p}(z)$, udowodnimy, że ciąg $\{H_p(z)\}$ jest jednostajnie zbieżny w całym zbiorze G .

Niech w tym celu ε będzie dowolną liczbą dodatnią i niech η będzie odpowiadającą jej liczbą dodatnią taką, iż

$$(4.2) \quad z_1 \in G, z_2 \in G, |z_2 - z_1| < \eta \text{ pociąga za sobą } |H_p(z_2) - H_p(z_1)| < \varepsilon/3$$

dla $p=1, 2, \dots$

Ciąg przeliczalny kół $K_j = K(w_j; \eta)$ pokrywa zbiór domknięty $\bar{G}$, a więc na mocy twierdzenia Borela (Wstęp, tw. 6.2) istnieje układ skończony $K_1, K_2, \dots, K_m$ tych kół, pokrywających łącznie zbiór $\bar{G}$ i tym samym dany zbiór otwarty G . Niech p_0 będzie liczbą naturalną taką, że

$$(4.3) \quad |H_p(w_j) - H_q(w_j)| < \varepsilon/3 \quad \text{dla } p > p_0, q > p_0 \text{ oraz } j=1, 2, \dots, m,$$

Weźmy pod uwagę dowolny punkt $z \in G$. Punkt ten należy do jednego przynajmniej z kół $K_1, K_2, \dots, K_m$. Dla pewnej wartości wskaźnika $j_0 \leq m$ mamy więc $|z - w_{j_0}| < \eta$ i, w myśl (4.2)] i (4.3), dla $p > p_0$ oraz $q > p_0$:

$$|H_p(z) - H_p(w_{j_0})| < \varepsilon/3, \quad |H_p(w_{j_0}) - H_q(w_{j_0})| < \varepsilon/3, \quad |H_q(w_{j_0}) - H_q(z)| < \varepsilon/3;$$

przez dodanie stronami tych trzech nierówności otrzymujemy $|H_p(z) - H_q(z)| < \varepsilon$ dla każdego punktu $z \in G$ gdy $p > p_0$ i $q > p_0$. Ciąg $\{H_p(z)\}$ jest więc zbieżny jednostajnie w G , co należało udowodnić.

Z tw. 4.1 wyprowadzimy następujące kryterium normalności rodziny funkcji:

(4.4) *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji jednakowo ciągłych w otoczeniu każdego punktu pewnego obszaru G (t. j. jeżeli każdy punkt obszaru posiada otoczenie, w którym funkcje rodziny $\mathcal{F}$ są jednakowo ciągłe), to $\mathcal{F}$ jest rodziną normalną w G .*

Dowód. Z uwagi na tw. 3.3 wystarczy udowodnić, iż rodzina $\mathcal{F}$ jest normalna w otoczeniu każdego punktu obszaru. Weźmy tedy pod uwagę dowolny punkt $z_0 \in G$ i niech $K_0 \subset G$ będzie otoczeniem punktu z_0 , w którym funkcje rodziny $\mathcal{F}$ są jednakowo ciągłe. Możemy założyć, iż otoczenie to jest tak małe, że $|F(z) - F(z_0)| < 1$ dla każdej funkcji F rodziny $\mathcal{F}$ oraz każdego punktu $z \in K_0$.

Weźmy pod uwagę dowolny ciąg $\{F_n(z)\}$ funkcji rodziny $\mathcal{F}$ i niech $\Phi_n(z) = F_n(z) - F_n(z_0)$. Funkcje $\Phi_n(z)$ są jednakowo ciągłe, a zarazem wspólnie ograniczone w kole K_0 . Na mocy tedy twierdzenia Ascoli'ego (4.1) ciąg $\{\Phi_n(z)\}$ zawiera podciąg $\{\Phi_{n_k}(z)\}$ jednostajnie zbieżny w K_0 . Z drugiej strony ciąg liczbowy $\{F_{n_k}(z_0)\}$ zawiera podciąg $\{F_{n_{k_j}}(z_0)\}$, który jest zbieżny do granicy skończonej lub do ∞ . W przypadku pierwszym ciąg $\{F_{n_{k_j}}(z) = \Phi_{n_{k_j}}(z) + F_{n_{k_j}}(z_0)\}$ jest w K_0 jednostajnie zbieżny, w przypadku drugim jednostajnie rozbieżny do ∞ . Rodzina $\mathcal{F}$ jest więc normalna w otoczeniu każdego punktu z_0 obszaru G , co należało udowodnić.

W Rozdz. II, § 7, podamy zastosowanie tw. 4.4 w dziedzinie funkcji holomorficznych.

ĆWICZENIA. 1. Pokazać, iż tw. 4.1 pozostaje prawdziwe dla każdego zbioru G ograniczonego (nie koniecznie otwartego); założenie ograniczoności zbioru jest istotne.

2. Jeżeli $\mathcal{F}$ jest rodziną normalną i niemal ograniczoną funkcji ciągłych w zbiorze otwartym G , wówczas funkcje te są jednakowo ciągłe na każdym zbiorze domkniętym $P \subset G$ (odwrocenie tw. 4.4).

§ 5. Różniczka zupełna. Mówimy, że wyrażenie $M\Delta x + N\Delta y$, liniowe względem zmiennych rzeczywistych Δx i Δy , o współczynnikach M i N (na ogół zespolonych), jest *różniczką zupełną* funkcji (na ogół zespolonej) $W(z) = W(x, y)$ w punkcie $z_0 = (x_0, y_0)$, jeżeli

$$(5.1) \frac{W(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - W(x_0, y_0) - M\Delta x - N\Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} \rightarrow 0, \text{ gdy } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0,$$

t. j. jeżeli

$$(5.2) W(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = W(x_0, y_0) + M\Delta x + N\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2},$$

gdzie $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ wraz z $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Podstawiając w (5.1) tożsamościowo $\Delta y = 0$ lub $\Delta x = 0$, otrzymujemy $M = W'_x(x_0, y_0)$ i $N = W'_y(x_0, y_0)$. Zatem:

(5.3) *Funkcja $W(x, y)$, posiadająca w punkcie (x_0, y_0) różniczkę zupełną, posiada w tym punkcie pochodne cząstkowe względem każdej ze zmiennych x, y i pochodne te są odpowiednio równe współczynnikom różniczki.*

Podstawiając $W(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$, $M = A + Bi$, $N = C + Di$, gdzie $U(x, y)$, $V(x, y)$ są funkcjami rzeczywistymi, zaś A, B, C, D liczbami rzeczywistymi, stwierdzamy natychmiast, że związek (5.1) jest równoważny dwu związkom

$$\frac{U(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - U(x_0, y_0) - A\Delta x - C\Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} \rightarrow 0,$$

$$\frac{V(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - V(x_0, y_0) - B\Delta x - D\Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} \rightarrow 0,$$

gdy $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Stąd:

(5.4) *Na to, aby funkcja $W(z) = W(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$ posiadała w punkcie $z_0 = (x_0, y_0)$ różniczkę zupełną, konieczne jest i wystarcza, aby obydwie jej części, rzeczywista $U(x, y)$ i urojona $V(x, y)$, posiadały różniczki zupełne.*

Twierdzenie odwrotne do tw. 5.3 byłoby oczywiście fałszywe: funkcja różniczkowalna cząstkowo może nie posiadać różniczki zupełnej. Jednak:

(5.5) *Jeżeli funkcja $W(x, y)$ posiada wszędzie w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) pochodne cząstkowe $W'_x(x, y)$ oraz $W'_y(x, y)$ i pochodne te są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) , to funkcja $W(x, y)$ posiada w tym punkcie różniczkę zupełną.*

Dowód. Z uwagi na tw. 5.4 możemy założyć, iż funkcja $W(x, y)$ jest rzeczywista. Stosując twierdzenie o wartości średniej, mamy przede wszystkim

$$(5.6) \begin{aligned} & W(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - W(x_0, y_0) = \\ &= [W(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - W(x_0, y_0 + \Delta y)] + [W(x_0, y_0 + \Delta y) - W(x_0, y_0)] = \\ &= W'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + W'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y, \\ & \text{gdzie } 0 \leq \theta_1 \leq 1, 0 \leq \theta_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Przyjmując tedy $M = W'_x(x_0, y_0)$, $N = W'_y(x_0, y_0)$, możemy napisać ostatni człon związku (5.6) w postaci $(M + \varepsilon_1)\Delta x + (N + \varepsilon_2)\Delta y$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dążą do zera wraz z $\Delta x, \Delta y$. Zatem

$$\frac{W(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - W(x_0, y_0) - M\Delta x - N\Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} = \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} \rightarrow 0,$$

gdy $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, i wyrażenie $M\Delta x + N\Delta y$ jest różniczką zupełną funkcji $W(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) .

Różniczkowalność zupełna funkcji w punkcie (x_0, y_0) jest tedy czymś pośrednim między samym tylko istnieniem pochodnych cząstkowych w tym punkcie a istnieniem w tym punkcie pochodnych cząstkowych ciągłych. W wielu jednak rozumowaniach, w których zakłada się zwykle ciągłość pochodnych cząstkowych, wystarcza już sama różniczkowalność zupełna. Ważne jest przy tym, iż podczas gdy założenie ciągłości pochodnych cząstkowych w punkcie (x_0, y_0) implikuje już istnienie tych pochodnych w pewnym całym otoczeniu tego punktu, to założenie różniczkowalności zupełnej warunku tego bynajmniej nie wymaga. Na tym, w gruncie rzeczy, polega znaczenie różniczki zupełnej, która — wprowadzona przez Stolz — odgrywa dziś ważną rolę zarówno w teorii funkcji rzeczywistych wielu zmiennych jak i w pewnych nowszych badaniach z podstaw teorii funkcji zmiennej zespolonej (ob. D. Menchoff, *Les conditions de monogénéité*, Paris 1936).

§ 6. Pochodna w dziedzinie zespolonej. Równania Cauchy-Riemanna. Funkcja zmiennej zespolonej $W(z)$, określona i skończona w otoczeniu punktu $z_0 \neq \infty$, nazywa się *różniczkowalną* w tym punkcie, jeśli istnieje granica (skończona) wyrażenia $[W(z_0 + \Delta z) - W(z_0)]/\Delta z$, gdy Δz dąży do zera przez dowolne wartości zespolone; granicę tę nazywamy wówczas *pochodną* funkcji $W(z)$ w punkcie z_0 , oznaczając ją przez $W'(z_0)$ lub $(dW/dz)_{z=z_0}$; w przypadku, gdy funkcja W zależy jeszcze od innych zmiennych, dla oznaczenia jej pochodnej względem z używamy zwykłych symboli pochodnych cząstkowych: W'_z lub $\partial W/\partial z$.

Definicja ta jest formalnie identyczna z definicją przyjętą w analizie rzeczywistej. Toteż spostrzega się natychmiast, że reguły formalnego różniczkowania (sumy, iloczynu, ilorazu dwu funkcji i t.d.) przenoszą się natychmiast z dziedziny rzeczywistej na zespoloną. Okoliczność wszakże, iż w powyższej definicji pochodnej przyrost Δz zmiennej niezależnej przebiega wartości zespolone, a nie tylko rzeczywiste, pociąga za sobą bardziej istotne konsekwencje niż możnaby przypuszczać na pierwszy rzut oka. Jak będziemy mieli wielokrotnie jeszcze sposobność podkreślić, warunek różniczkowalności w dziedzinie zespolonej jest czymś nierównie silniejszym aniżeli w dziedzinie rzeczywistej. Można powiedzieć, iż cała teoria funkcji analitycznych jest badaniem konsekwencji tego warunku.

Spośród formalnych reguł różniczkowania, które przenoszą się natychmiast z dziedziny rzeczywistej na zespoloną, wymienimy następującą regułę różniczkowania funkcji złożonej:

(6.1) Jeżeli funkcja $W(z)$ jest różniczkowalna i przyjmuje wartość $w_0 \neq \infty$ w punkcie $z_0 \neq \infty$, a funkcja $F(w)$ jest określona w otoczeniu punktu w_0 i różniczkowalna w tym punkcie, wówczas funkcja złożona $\Phi(z) = F[W(z)]$ jest również różniczkowalna w z_0 , przy czym $\Phi'(z_0) = F'(w_0) \cdot W'(z_0)$.

Dowód. Istotnie, funkcja złożona $\Phi(z_0 + h)$ jest określona dla wartości h dostatecznie małych. Zakładając najpierw, iż h przebiega wartości, dla których $W(z_0 + h) \neq W(z_0)$, mamy, dla $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0)}{h} &= \\ &= \frac{F[W(z_0 + h)] - F[W(z_0)]}{W(z_0 + h) - W(z_0)} \cdot \frac{W(z_0 + h) - W(z_0)}{h} \rightarrow F'[W(z_0)] \cdot W'(z_0). \end{aligned}$$

Jeżeli istnieją dowolnie bliskie zera wartości $h \neq 0$ takie, iż $W(z_0 + h) = W(z_0)$, to oczywiście $W'(z_0) = 0$; dla tych jednak wartości h , dla których $W(z_0 + h) = W(z_0)$, mamy również $\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0) = 0$. Przeto zawsze, gdy h dąży do zera w jakikolwiek bądź sposób, jest

$$[\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0)]/h \rightarrow F'(w_0) \cdot W'(z_0).$$

Jak wynika bezpośrednio z definicji pochodnej, na to, aby liczba Q była pochodną funkcji $W(z)$ w punkcie $z_0 = (x_0, y_0)$, konieczne jest i wystarcza, aby $[W(z_0 + \Delta z) - W(z_0) - Q \cdot \Delta z]/\Delta z \rightarrow 0$, gdy $\Delta z \rightarrow 0$; innymi słowy, przyjmując $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ i pamiętając, że $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, możemy powiedzieć: na to, aby $Q = W'(z_0)$, konieczne jest i wystarcza, aby wyrażenie $Q\Delta z = Q\Delta x + iQ\Delta y$ było różniczką zupełną funkcji $W(z)$ w punkcie z_0 . Jeśli warunek ten jest spełniony, wówczas na mocy tw. 5.3 mamy $W'_x(x_0, y_0) = Q$ oraz $W'_y(x_0, y_0) = iQ$, a więc

$$(6.2) \quad W'_x(x_0, y_0) = -iW'_y(x_0, y_0).$$

Odwrotnie, jeżeli funkcja $W(z)$ posiada w $z_0 = x_0 + iy_0$ różniczkę zupełną i spełnia równanie (6.2), wówczas, oznaczając wspólną wartość stron tego równania przez Q , otrzymujemy jako różniczkę zupełną funkcji $W(z)$ w punkcie z_0 wyrażenie $Q\Delta x + iQ\Delta y = Q\Delta z$, i tym samym $Q = W'(z_0)$. Przyjmując $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, gdzie $U(x, y)$ oraz $V(x, y)$ są odpowiednio częściami rzeczywistą i urojoną funkcji $W(z)$, możemy napisać związek (6.2) w postaci dwu równości rzeczywistych:

$$(6.3) \quad U'_x(x_0, y_0) = V'_y(x_0, y_0), \quad U'_y(x_0, y_0) = -V'_x(x_0, y_0),$$

i na mocy tw. 5.4 otrzymujemy twierdzenie następujące, które sprowadza różniczkowalność w dziedzinie zespolonej do różniczkowalności funkcji rzeczywistych:

(6.4) *Na to, aby funkcja $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ posiadała pochodną w punkcie $z_0 = (x_0, y_0)$, konieczne jest i dostateczne, aby jej obydwie części, rzeczywista $U(x, y)$ i urojona $V(x, y)$, posiadały w (x_0, y_0) różniczki zupełne i spełniały równości (6.3), lub — co jest równoważne — aby funkcja $W(z)$ posiadała różniczkę zupełną i spełniała równość (6.2). Jeżeli warunek ten jest spełniony, to*

$$W'(z_0) = W'_x(x_0, y_0) = -iW'_y(x_0, y_0),$$

przy czym $W'(z_0) \cdot (\Delta x + i\Delta y)$ jest różniczką zupełną funkcji $W(z)$ w punkcie z_0 .

Związki (6.3), które — gdy x_0 i y_0 uważać za zmienne — są równaniami o pochodnych cząstkowych, noszą zwykle nazwę *równań Cauchy-Riemanna*. Związek (6.2) jest oczywiście tylko inną formą tych równań i nazywać go będziemy *warunkiem Cauchy-Riemanna* w postaci zespolonej.

W §§ następnych podamy przykłady paru podstawowych funkcji zespolonych, różniczkowalnych w całej płaszczyźnie otwartej.

ĆWICZENIA. 1. Wyznaczyć punkty, w których następujące funkcje mają pochodne: (a) $W(z) = \bar{z}$, (b) $W(z) = |z|$, (c) $W(z) = |z|^2$, (d) $W(z) = \bar{z}z$.

2. Jeżeli funkcja $W(z)$ posiada w punkcie z_0 różniczkę zupełną $(A + Bi)\Delta x + (C + Di)\Delta y$, wówczas na to, aby funkcja $\bar{W}(z)$ sprzężona z $W(z)$ posiadała pochodną w punkcie z_0 , konieczne jest i wystarcza, by $A = -D$ oraz $B = C$, t. j. by $W'_x(z_0) = iW'_y(z_0)$.

Wynioskować stąd, iż jeśli funkcja $W(z)$ posiada w punkcie z_0 pochodną, wówczas funkcja z nią sprzężona $\bar{W}(z)$ posiada w tym punkcie pochodną wtedy i tylko wtedy, gdy $W'(z_0) = 0$.

3. Jeżeli dla funkcji $W(z)$, posiadającej w punkcie z_0 różniczkę zupełną, istnieje granica skończona części rzeczywistej wyrażenia $[W(z) - W(z_0)]/(z - z_0)$ gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas funkcja posiada pochodną w punkcie z_0 .

4. Jeżeli dla funkcji $W(z)$, posiadającej w punkcie z_0 różniczkę zupełną, istnieje granica skończona wartości bezwzględnej wyrażenia $[W(z) - W(z_0)]/(z - z_0)$ gdy $z \rightarrow z_0$, wówczas bądź funkcja $W(z)$, bądź funkcja $\bar{W}(z)$ sprzężona z $W(z)$, posiada pochodną w punkcie z_0 .

5. Sprawdzić, iż funkcja $F(z) = \sqrt{|xy|}$ ($z = x + iy$) posiada w punkcie $z = 0$ pochodne cząstkowe względem x oraz y równe zeru; spełnia więc równania Cauchy-Riemanna, nie posiada jednak w tym punkcie pochodnej zwykłej (tym samym więc nie posiada także różniczki zupełnej).

[Wsk. Podstawiając $z = x(1 + ia)$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, zauważyć, iż iloraz $[F(z) - F(0)]/z = F(z)/z$ posiada dla każdej ustalonej wartości a granicę skończoną, gdy $x \rightarrow 0$, granica ta jednak zmienia się w zależności od a .]

6. Dla funkcji ciągłej $G(z)$, określonej przez wzory $G(0) = 0$ oraz $G(z) = x^2y/(x^4 + y^2)$ dla $z = x + iy \neq 0$, spełnione są w punkcie 0 warunki Cauchy-Riemanna oraz istnieje granica stosunku $[G(z) - G(0)]/z = G(z)/z$, gdy z dąży do 0 wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez punkt 0; nadto granica ta ma tę samą wartość 0 dla każdej takiej prostej. Mimo to funkcja $G(z)$ nie posiada pochodnej w punkcie 0.

[Wsk. Granica stosunku $G(z)/z$, gdy z dąży do 0 wzdłuż paraboli $y = x^2$, jest $1/2$.]

7. Jeżeli $W(z)$ jest wielomianem n -tego stopnia i $z_1, z_2, \dots, z_n$ oznaczają pierwiastki tego wielomianu (w przypadku istnienia pierwiastków wielokrotnych każdy pierwiastek występuje w ciągu $z_1, z_2, \dots, z_n$ tyle razy, ile wynosi jego krotność), wówczas

$$(*) \quad \frac{W'(z)}{W(z)} = \sum_k \frac{1}{z - z_k}$$

w każdym punkcie z , w którym $W(z) \neq 0$.

8. Jeżeli $W(z)$ jest wielomianem stopnia ≥ 1 , wówczas wszystkie pierwiastki równania $W'(z) = 0$ leżą w zbiorze wypukłym wyznaczonym (por. Wstęp, § 8, ćw. 2) przez pierwiastki równania $W(z) = 0$ (Gauss).

[Wsk. Skorzystać ze wzoru (*) ćwiczenia poprzedniego; zauważyć, iż $1/(z - z_k) = (\overline{z - z_k})/|z - z_k|^2$; skorzystać z ćw. 2, Wstęp, § 8.]

9. Równanie $1 + z + az^n = 0$, gdzie n jest liczbą całkowitą ≥ 2 oraz a dowolną liczbą zespoloną, posiada zawsze pierwiastek o wartości bezwzględnej ≤ 2 (Landau).

[Wsk. Podstawić $z = 1/\beta$ i skorzystać z tw. Gaussa (ćw. 8).]

§ 7. Funkcja wykładnicza. W analizie rzeczywistej określiliśmy zwykle bezpośrednio potęgę oraz liczbę e ; następnie wyprowadzamy, jako twierdzenie, znane rozwinięcie funkcji wykładniczej e^x na szereg potęgowy zmiennej x dla wartości rzeczywistych tej zmiennej. W dziedzinie zespolonej metoda ta zawodzi z natury rzeczy (ponieważ już zwykła definicja potęgi nie przenosi się bezpośrednio na wartości zespolone wykładnika). W wykładzie niniejszym określimy tedy funkcję wykładniczą e^z — którą będziemy oznaczali również przez $\exp z$ — bezpośrednio przez równość

$$(7.1) \quad \exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

rozumiejąc przez $0!$ (jak zwykle) liczbę 1.

Szereg występujący w tej równości jest, jak spostrzega się od razu (stosując np. kryterium d'Alemberta), zbieżny w całej płaszczyźnie otwartej, a nadto zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w każdym kole $K(0; r)$, ponieważ w kole takim mamy oczywiście $|z^n/n!| < r^n/n!$. Tym samym:

(7.2) *Funkcja wykładnicza jest określona i ciągła w całej płaszczyźnie otwartej.*

Z definicji (7.1) wyprowadzimy podstawowe wzory dotyczące funkcji wykładniczej (bez odwoływania się do wyników znanych z analizy rzeczywistej). W szczególności:

$$(7.3) \quad \exp 0 = e^0 = 1,$$

$$(7.4) \quad \exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b \quad \text{dla każdej pary wartości } a, b.$$

Wzór (7.3) otrzymujemy wprost, podstawiając $z=0$ w (7.1). W celu otrzymania wzoru (7.4) zauważmy, iż na zasadzie twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów mamy

$$\exp a \cdot \exp b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

gdzie

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k b^{n-k}}{k! (n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!},$$

a więc

$$\exp a \cdot \exp b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b).$$

(7.5) *Funkcja wykładnicza nie znika w żadnym punkcie płaszczyzny.*

Dowód. Istotnie, gdyby $\exp a = 0$, wówczas z uwagi na (7.3) i (7.4) mielibyśmy $1 = \exp 0 = \exp a \cdot \exp(-a) = 0$.

Z definicji (7.1) wynika natychmiast, że dla wartości rzeczywistych $x \geq 0$ funkcja $\exp x$ jest funkcją stale rosnącą, zmieniającą się od 1 do $+\infty$, gdy x zmienia się od 0 do $+\infty$. Korzystając z równości $\exp(-x) = 1/\exp x$, która jest konsekwencją (7.3) i (7.4), stwierdzamy ogólniej, że:

(7.6) *Funkcja $\exp x$ jest w dziedzinie rzeczywistej funkcją dodatnią i rosnącą, przy czym:*

$$\begin{aligned} \exp x &\rightarrow +\infty & \text{dla} & \quad x \rightarrow +\infty \\ \exp x &\rightarrow 0 & \text{dla} & \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Wreszcie, mamy z (7.4) i (7.1) dla $h \neq 0$

$$(7.7) \quad \frac{\exp(z+h) - \exp z}{h} = \exp z \cdot \frac{\exp h - 1}{h} = \exp z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!},$$

skąd przechodząc do granicy, gdy $h \rightarrow 0$, otrzymujemy (korzystając z tego, iż szereg występujący w równości (7.7) przedstawia funkcję ciągłą zmiennej h) równość $\lim_{h \rightarrow 0} [\exp(z+h) - \exp z]/h = \exp z$. Zatem:

(7.8) *Funkcja wykładnicza jest różniczkowalna i równa swej pochodnej w całej płaszczyźnie otwartej.*

ĆWICZENIE. 1. Dla każdego z rzeczywistego jest $e^z \geq 1+z$; jeżeli $0 \leq z \leq 1$, to $1-z \leq e^{-z} \leq 1-\frac{1}{2}z$.

§ 8. Funkcje trygonometryczne. Podobnie do funkcji wykładniczej określamy w dziedzinie zespolonej funkcje trygonometryczne $\cos z$ oraz $\sin z$ jako sumy szeregów. Mianowicie:

$$(8.1) \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Szeregi występujące w tych wzorach są zbieżne w całej płaszczyźnie otwartej, a więc tym samym funkcje $\cos z$ i $\sin z$ są określone w całej płaszczyźnie otwartej, i widać od razu ze wzorów (8.1), że pierwsza z tych funkcji jest parzysta, a druga nieparzysta.

Dla wartości rzeczywistych z , równości (8.1) pokrywają się ze znanymi rozwinięciami funkcji $\cos z$ i $\sin z$ na szereg potęgowy. W dziedzinie rzeczywistej definicja obecna pokrywa się więc z definicją tradycyjną, opartą na metodach geometrycznych. Nie będziemy tu wszakże korzystali z wyników teorii geometrycznej, wyprowadzając podstawowe własności funkcji trygonometrycznych bezpośrednio ze wzorów (8.1). Uzyskujemy w ten sposób nie tylko rozszerzenie tych własności na dziedzinę zespoloną, ale zarazem arytmetyzację teorii funkcji trygonometrycznych w dziedzinie rzeczywistej. Wyniki tak otrzymane wskazują jednocześnie prostą i naturalną drogę do arytmetyzacji pojęcia kąta.

Rozpocniemy od ustalenia związków między funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznymi. Na mocy (7.1) mamy

$$\begin{aligned} \exp iz &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \end{aligned}$$

a więc w myśl (8.1)

$$(8.2) \quad \exp iz = \cos z + i \sin z.$$

Podstawiając tu $-z$ zamiast z , otrzymamy równość

$$\exp(-iz) = \cos z - i \sin z;$$

dodając ją stronami do (8.2), względnie odejmując od (8.2), znajdujemy:

$$(8.3) \quad \cos z = \frac{1}{2} [\exp iz + \exp(-iz)], \quad \sin z = -\frac{1}{2} i [\exp iz - \exp(-iz)].$$

Są to t. zw. *wzory Eulera*. Przez przekształcenia formalne, w których korzystamy tylko z własności (7.3) i (7.4) funkcji wykładniczej, otrzymujemy stąd podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1, & \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, & \text{i t. p.} \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja wykładnicza jest w myśl twierdzeń 7.2 i 7.8 ciągła i różniczkowalna w całej płaszczyźnie otwartej, więc ze wzorów (8.3) wynika, iż również

(8.5) *Funkcje trygonometryczne $\cos z$ i $\sin z$ są ciągłe i różniczkowalne w całej płaszczyźnie otwartej.*

Różniczkując wzory (8.3) na mocy tw. 7.8, otrzymujemy:

$$(8.6) \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Z równości $\cos 0 = 1$ oraz z łatwego oszacowania

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} < \\ &< -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \frac{2^4}{4!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2k} = -1 + \frac{50}{63} < 0 \end{aligned}$$

wynika natychmiast, iż funkcja $\cos z$ posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni. Najmniejszy z tych pierwiastków (t. j. ich kres dolny) oznaczать będziemy przez $\pi/2$. W przedziale $[0, \pi/2]$ funkcja $\cos z$ jest więc stale dodatnia, z wyjątkiem prawego krańca, w którym znika. Z uwagi na drugi ze wzorów (8.6) funkcja $\sin z$ rośnie tedy w całym tym przedziale, a więc jest wszędzie w tym przedziale dodatnia, wyjąwszy lewy kraniec 0, w którym znika. Tym samym, na mocy znów pierwszego ze wzorów (8.6), funkcja

$\cos z$ jest malejąca w przedziale $[0, \pi/2]$. Ponieważ w myśl (8.4) mamy $1 = \cos^2 \pi/2 + \sin^2 \pi/2 = \sin^2 \pi/2$ i, jak widzieliśmy, funkcja $\sin z$ jest nieujemna w przedziale $[0, \pi/2]$, więc $\sin \pi/2 = 1$. Korzystając tedy z drugiego i trzeciego wzoru (8.4), otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \cos \pi/2 &= 0, & \sin \pi/2 &= 1; & \cos \pi &= -1, & \sin \pi &= 0; \\ \cos(3\pi/2) &= 0, & \sin(3\pi/2) &= -1; & \cos 2\pi &= 1, & \sin 2\pi &= 0, \end{aligned}$$

i ogólniej, dla dowolnej liczby zespolonej z :

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \cos(z + \pi/2) &= -\sin z, & \sin(z + \pi/2) &= \cos z; \\ \cos(z + 2\pi) &= \cos z, & \sin(z + 2\pi) &= \sin z. \end{aligned}$$

Z drugiej pary wzorów (8.7) wynika, że

(8.8) *Funkcje $\cos z$ i $\sin z$ są okresowe, o okresie 2π , w całej płaszczyźnie otwartej.*

Natomiast pierwsza para wzorów (8.7) pozwala wnioskować o zachowaniu się rozważanych funkcji w przedziałach („ćwiartkach“) $[\pi/2, \pi]$, $[\pi, 3\pi/2]$ i t. p., na zasadzie zbadanego już ich przebiegu w przedziale $[0, \pi/2]$. Ponieważ dalej funkcja $\cos z$ jest malejąca, a funkcja $\sin z$ rosnąca w przedziale $[0, \pi/2]$, obydwie zaś funkcje są ciągłe i nieujemne w tym przedziale, przeto na mocy (8.7) oraz pierwszego ze wzorów (8.4), otrzymujemy twierdzenie następujące:

(8.9) *Jeżeli a oraz b są liczbami rzeczywistymi, spełniającymi warunek $a^2 + b^2 = 1$, wówczas istnieje dokładnie jedna wartość θ taka, iż:*

$$\cos \theta = a, \quad \sin \theta = b, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Funkcje trygonometryczne $\operatorname{tg} z$ oraz $\operatorname{ctg} z$ określamy przez wzory:

$$(8.10) \quad \operatorname{tg} z = \sin z / \cos z \quad \operatorname{ctg} z = \cos z / \sin z.$$

Z definicji tej oraz z wyprowadzonych już własności funkcji $\cos z$ i $\sin z$ wynika bezpośrednio, że:

(8.11) *Funkcje $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ są funkcjami ciągłymi w całej płaszczyźnie otwartej, skończonymi i różniczkowalnymi wszędzie, z wyjątkiem punktów, w których funkcja $\cos z$, wzgl. funkcja $\sin z$, znika i w których funkcje $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ przyjmują odpowiednio wartość ∞ . Pochodne tych funkcji dane są przez wzory:*

$$(8.12) \quad (\operatorname{tg} z)' = 1 / \cos^2 z, \quad (\operatorname{ctg} z)' = -1 / \sin^2 z,$$

które otrzymujemy, różniczkując równości (8.10) na zasadzie wzorów (8.6).

Wreszcie, wzory Eulera (8.3) dają dla funkcji $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$:

$$(8.13) \quad \operatorname{tg} z = -i \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{\exp iz + \exp(-iz)}, \quad \operatorname{ctg} z = i \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{\exp iz - \exp(-iz)}.$$

Z przebiegu funkcji $\cos z$ i $\sin z$ w przedziale $[0, \pi/2]$ wynika, iż funkcja $\operatorname{tg} z$ jest w przedziale $[0, \pi/4]$ stale rosnąca i przebiega

wartości od 0 do 1. Dokonywując tedy w całce $\int_0^a \frac{dt}{a^2 + t^2}$ (gdzie a

jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią) podstawienia $t = a \operatorname{tg} u$, otrzymujemy, po prostych przekształceniach na zasadzie pierwszego ze związków (8.4), równość

$$(8.14) \quad \int_0^a \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 u} \cdot \frac{d \operatorname{tg} u}{du} du = \frac{1}{a} \int_0^{\pi/4} du = \frac{\pi}{4a},$$

która wyraża liczbę π przez całkę oznaczoną funkcji wymiernej.

Podobnie

$$(8.15) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

Przez analogiczne podstawienie $t = a \sin u$ w całce $\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}$ otrzymujemy wzór

$$(8.16) \quad \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{\pi}{2a}.$$

ĆWICZENIA. 1. *Funkcje hiperboliczne.* Funkcje hiperboliczne, cosinus hiperboliczny i sinus hiperboliczny, określa się przez wzory analogiczne do wzorów (8.3) Eulera:

$$\cosh z = \frac{1}{2} [\exp z + \exp(-z)], \quad \sinh z = \frac{1}{2} [\exp z - \exp(-z)].$$

Sprawdzić związki następujące między funkcjami hiperbolicznymi a trygonometrycznymi: $\cosh z = \cos iz$, $\sinh z = -i \sin iz$. Wyprowadzić stąd wzory analogiczne do wzorów (8.4):

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \cosh(a \pm b) = \cosh a \cdot \cosh b \pm \sinh a \cdot \sinh b$$

i t. p., oraz do wzorów (8.6) na pochodne:

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

Sprawdzić dalej następujące rozwinięcia funkcji hiperbolicznych na szereg potęgowy:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

z których wynika w szczególności, iż $|\cos z| \leq \cosh |z|$ oraz $|\sin z| \leq \sinh |z|$.

2. Udowodnić następujące tożsamości, w których m oznacza dowolną liczbę całkowitą dodatnią:

$$\cos m z = \cos^m z - \binom{m}{2} \cos^{m-2} z \sin^2 z + \binom{m}{4} \cos^{m-4} z \sin^4 z - \dots$$

(wyrazem ostatnim strony prawej jest $(-1)^{\frac{m}{2}} \sin^m z$ lub $(-1)^{\frac{m-1}{2}} m \cos z \sin^{m-1} z$, zależnie od tego, czy m jest liczbą parzystą, czy nieparzystą);

$$\sin m z = m \cos^{m-1} z \sin z - \binom{m}{3} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \dots$$

(wyrazem ostatnim strony prawej jest $(-1)^{\frac{m+2}{2}} m \cos z \sin^{m-1} z$ lub $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin^m z$, zależnie od tego czy m jest liczbą parzystą czy nieparzystą);

$$2^{m-1} \cos^m z = \cos m z + \binom{m}{1} \cos(m-2) z + \binom{m}{2} \cos(m-4) z + \dots$$

(wyrazem ostatnim strony prawej jest $\frac{1}{2} \binom{m}{\frac{1}{2} m}$ lub $\binom{m}{\frac{1}{2}(m-1)} \cos z$, zależnie od tego czy m jest liczbą parzystą czy nieparzystą);

analogiczny wzór dla $\sin^m z$: dla m parzystego

$$(2i)^m \sin^m z = 2 \cos m z - 2 \binom{m}{1} \cos(m-2) z + 2 \binom{m}{2} \cos(m-4) z - \dots + (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{\frac{1}{2} m},$$

oraz dla m nieparzystego

$$(2i)^{m-1} \sin^m z = \sin m z - \binom{m}{1} \sin(m-2) z + \binom{m}{2} \sin(m-4) z + \dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{\frac{1}{2}(m-1)} \sin z.$$

[Wsk. Przyjmując najpierw z rzeczywiste, w tożsamościach

$$\cos m z + i \sin m z = (\cos z + i \sin z)^m, \quad 2^m \cos^m z = (e^{iz} + e^{-iz})^m,$$

które wynikają bezpośrednio ze wzorów (8.2) i (8.3), rozwinać strony prawe według reguły dwumianu Newtona i przyrównać części rzeczywiste oraz urojone stron. Uogólnienie na wartości z zespolone wynika z tw. orzekającego, iż szereg potęgowy, który znika dla wartości rzeczywistych zmiennej, znika tożsamościowo.]

3. Pokazać, iż wyrażenie trygonometryczne

$$2^n \sin^n \theta + \binom{n}{1} 2^{n-1} \sin^{n-1} \theta \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \binom{n}{2} 2^{n-2} \sin^{n-2} \theta \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \dots + \cos n \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

jest równe $(-1)^{\frac{n}{2}} \cos n \theta$ lub $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n \theta$ zależnie od tego, czy n jest liczbą parzystą, czy nieparzystą. [Wsk. Rozważyć wyrażenie $\left[2 \sin \theta + \exp i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]^n$.]

4. Podstawiając $w = \sin z$, pokazać, iż:

(a) dla każdej wartości m całkowitej dodatniej parzystej jest $\cos mz = F_1(w)$, $\sin mz / \cos z = G_1(w)$,

(b) dla każdej wartości m całkowitej dodatniej nieparzystej jest $\cos mz / \cos z = F_2(w)$, $\sin mz = G_2(w)$,

gdzie $F_1(w)$ i $G_2(w)$ są wielomianami względem w stopnia m , a $G_1(w)$ i $F_2(w)$ stopnia $m-1$.

[Wsk. Por. ćw. 2.]

5. Pokazać, iż pierwiastkami wielomianów $F_1(w)$, $G_1(w)$, $F_2(w)$ i $G_2(w)$, ćw. 4, są odpowiednio:

$$\begin{aligned} & \pm \sin \frac{\pi}{2m}, \quad \pm \sin \frac{3\pi}{2m}, \dots, \quad \pm \sin \frac{(m-1)\pi}{2m}; \\ & 0, \pm \sin \frac{\pi}{m}, \quad \pm \sin \frac{2\pi}{m}, \dots, \quad \pm \sin \frac{(m-2)\pi}{m}; \\ & \pm \sin \frac{\pi}{2m}, \quad \pm \sin \frac{3\pi}{2m}, \dots, \quad \pm \sin \frac{(m-2)\pi}{2m}; \\ & 0, \pm \sin \frac{\pi}{m}, \quad \pm \sin \frac{2\pi}{m}, \dots, \quad \pm \sin \frac{(m-1)\pi}{m}. \end{aligned}$$

Wyprowadzić stąd wzory następujące:

(a) dla m parzystego:

$$\begin{aligned} \cos mz &= \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right), \\ \frac{\sin mz}{\cos z} &= m \sin z \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{(m-2)\pi}{m}}\right); \end{aligned}$$

(b) dla m nieparzystego:

$$\begin{aligned} \frac{\cos mz}{\cos z} &= \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}\right), \\ \sin mz &= m \sin z \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{m}}\right). \end{aligned}$$

6. Podstawiając z/m zamiast z we wzorach (a) ćw. 5 i przechodząc do granicy wraz z $m \rightarrow +\infty$, wyprowadzić następujące rozwinięcia funkcji cosinus i sinus na iloczyn nieskończone:

$$\begin{aligned} \cos z &= \left(1 - \frac{z^2}{(\pi/2)^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{(3\pi/2)^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{(5\pi/2)^2}\right) \dots, \\ \sin z &= z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

Iloczyn powyższe są zbieżne jednostajnie w każdym kole o promieniu skończonym, t. j. niemal jednostajnie w całej płaszczyźnie (przez zbieżność iloczynu nieskończonego $A_1 \cdot A_2 \dots A_n \dots$ rozumiemy tu zbieżność ciągu iloczynów cząstkowych $P_1 = A_1$, $P_2 = A_1 \cdot A_2$, ..., $P_n = A_1 \cdot A_2 \dots A_n$, ...; dokładniejsze omówienie pojęcia granicy iloczynu nieskończonego podane będzie w Rozdz. VII).

7. Niech $f(t)$ będzie funkcją rzeczywistą, ograniczoną i ciągłą, lub posiadającą co najwyżej skończoną ilość nieciągłości, w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$. Wówczas w każdym punkcie τ , w którym funkcja jest ciągła, mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t) dt}{y^2 + (t-\tau)^2} \rightarrow \pi f(\tau),$$

gdy y dąży do 0 przez wartości rzeczywiste dodatnie.

§ 9. Argument. Niech $z = x + iy \neq 0$, gdzie $x = \Re z$, $y = \Im z$. Na mocy tw. 8.9 istnieje liczba rzeczywista θ , spełniająca równości:

$$(9.1) \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\Im z}{|z|}.$$

Mamy więc, przyjmując $r = |z|$ i korzystając ze wzoru (8.2):

$$(9.2) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \text{ gdzie } r \geq 0 \text{ oraz } \theta \text{ jest liczbą rzeczywistą.}$$

Każda liczba rzeczywista θ , spełniająca warunki (9.1), nazywa się *argumentem* albo *amplitudą* liczby zespolonej z ; z uwagi na (8.8) i (8.9) jest ona określona jednoznacznie z dokładnością do stałej addytywnej postaci $2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Każda liczba zespolona $z \neq 0$ posiada tedy nieskończenie wiele argumentów, różniących się od siebie wielokrotnościami liczby 2π , czyli—używając terminologii arytmetyki i teorii liczb—przystających do siebie mod 2π . (Mówimy, iż dwie liczby a i b *przystają* do siebie mod c , i piszemy $a \equiv b \pmod{c}$, jeżeli $b - a$ jest wielokrotnością całkowitą c .)

Argument liczby z oznaczamy ogólnie przez $\arg z$. Spośród argumentów θ tej samej liczby z dokładnie jeden spełnia nierówność $-\pi < \theta \leq \pi$; nazywać go będziemy *argumentem głównym* tej liczby i oznaczać przez $\text{Arg} z$. Jeżeli z jest liczbą rzeczywistą, to $\text{Arg} z$ równy jest 0 lub π zależnie od tego, czy z jest liczbą dodatnią, czy ujemną.

Funkcja $\text{Arg} z$ określona w ten sposób w całej płaszczyźnie otwartej z pominięciem punktu 0 jest oczywiście ograniczona w całym tym obszarze. Ponadto:

(9.3) *Funkcja $\text{Arg} z$ jest ciągła w każdym punkcie $z = z_0$ płaszczyzny otwartej, który nie leży na półosi rzeczywistej ujemnej.*

Dowód. Niech $\theta_0 = \text{Arg} z_0$. Ponieważ punkt z_0 nie leży na półosi rzeczywistej ujemnej, przeto z pewnością $\theta_0 \neq \pi$, a więc

$$(9.4) \quad -\pi < \theta_0 < \pi.$$

Przypuścimy, że funkcja $\text{Arg}z$ nie jest ciągła w punkcie z_0 . Możemy więc wyznaczyć ciąg punktów $\{z_n\}$, dążący do z_0 w ten sposób, by ciąg ich argumentów głównych dążył do pewnej liczby $\tilde{\theta}_0$ różnej od θ_0 . Ponieważ dla każdego n mamy $-\pi < \text{Arg}z_n \leq \pi$, więc

$$(9.5) \quad -\pi \leq \tilde{\theta}_0 \leq \pi.$$

Pisząc dla skrócenia $\theta_n = \text{Arg}z_n$ dla $n=1, 2, \dots$, będziemy mieli $\cos\theta_n = \text{Re}z_n/|z_n|$ oraz $\sin\theta_n = \text{Im}z_n/|z_n|$, skąd wynika ze względu na $z_n \rightarrow z_0$ i $\theta_n \rightarrow \tilde{\theta}_0$, że $\cos\tilde{\theta}_0 = \text{Re}z_0/|z_0| = \cos\theta_0$ oraz $\sin\tilde{\theta}_0 = \text{Im}z_0/|z_0| = \sin\theta_0$. Stąd jednak, z uwagi na (9.4) i (9.5) (por. tw. 8.9), otrzymujemy $\tilde{\theta}_0 = \theta_0$ i dochodzimy do sprzeczności.

Powracając do przedstawienia (9.2) liczb zespolonych, możemy zauważyć, iż liczba $z=0$ posiada również przedstawienie tej postaci: wystarczy przyjąć $r=0$, a jako θ dowolną liczbę rzeczywistą. Dla symetrii rozumiemy będziemy przez *argument liczby 0* dowolną liczbę rzeczywistą. Możemy więc powiedzieć, iż:

(9.6) *Każda liczba zespolona z posiada przedstawienie postaci (9.2). W przedstawieniu takim r i θ są odpowiednio wartością bezwzględną i argumentem liczby z.*

Druga część tego twierdzenia wymaga jeszcze krótkiego uzasadnienia. Z (9.2) na mocy (8.4) wynika przede wszystkim, że $|z| = |r| \cdot |\cos\theta + i\sin\theta| = r$, a następnie, że $\cos\theta = \text{Re}z/|z|$ i $\sin\theta = \text{Im}z/|z|$, t. zn. iż r oraz θ są odpowiednio wartością bezwzględną i argumentem liczby z .

Jeżeli $z_1 = r_1 \cdot \exp i\theta_1$, $z_2 = r_2 \cdot \exp i\theta_2$, to $z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot \exp i(\theta_1 + \theta_2)$, $z_1/z_2 = (r_1/r_2) \cdot \exp i(\theta_1 - \theta_2)$. Z tw. 9.6 wynika więc, że

(9.7) *Przy mnożeniu i dzieleniu liczb zespolonych (różnych od zera) argumenty ich odpowiednio się dodają i odejmują; w szczególności, przy mnożeniu przez liczbę rzeczywistą dodatnią argument (dokładniej, zbiór argumentów) liczby zespolonej nie ulega zmianie.*

Dla każdej liczby zespolonej z mamy

$$\exp z = \exp \text{Re}z \cdot \exp i \text{Im}z = \exp \text{Re}z \cdot (\cos \text{Im}z + i \sin \text{Im}z),$$

a zatem, ponieważ (por. (7.6)) $\exp \text{Re}z > 0$, mamy na mocy tw. 9.6:

$$(9.8) \quad |\exp z| = \exp \text{Re}z, \quad \arg \exp z = \text{Im}z + 2k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

W drugim z powyższych wzorów znak równości łączy dwa symbole, które nie oznaczają jednej liczby, ale pewien zbiór liczb (w tym przypadku zbiór liczb, przystających do siebie mod 2π). Znak równości będzie w takich razach oznaczał, iż każda z wartości jednej ze stron jest pewną wartością drugiej i na odwrót. Należy się jednak wystrzegać przypisywania znakowi $=$, użytemu w tym sensie, własności, które mu przysługują, gdy używany jest w sensie zwykłym. Np. w równości rozważanej nie można by oczywiście przenieść wyrażenia $2k\pi$ ze strony prawej na lewą.

Z (9.8) wynika natychmiast, jako uzupełnienie wzoru 7.3, że

(9.9) *$\exp z = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy z jest postaci $2k\pi i$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.*

Ponieważ zaś związek $\exp z_1 = \exp z_2$ jest równoważny związkowi $\exp(z_1 - z_2) = 1$, przeto:

(9.10) *$\exp z_1 = \exp z_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy z_1, z_2 różnią się o wielokrotność $2\pi i$; funkcja wykładnicza jest więc okresowa, o okresie $2\pi i$.*

W § poprzednim badane były pierwiastki rzeczywiste funkcji $\cos z$ i $\sin z$. Udowodnimy, iż poza tymi pierwiastkami funkcje trygonometryczne nie posiadają już więcej pierwiastków w dziedzinie zespolonej, a więc, iż

(9.11) *Jedynymi pierwiastkami funkcji $\cos z$ oraz $\sin z$ są punkty rzeczywiste postaci $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ dla funkcji $\cos z$, oraz postaci $k\pi$ dla $\sin z$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.*

Dowód. Na mocy wzorów Eulera (8.3) związek $\sin z = 0$ jest równoważny związkowi $\exp iz - \exp(-iz) = 0$, a więc związkowi $\exp 2iz = 0$, który ze względu na tw. 9.9 spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy $2iz$ jest postaci $2k\pi i$, a więc, gdy z jest postaci $k\pi$. Z równości $\cos z = \sin(z + \frac{1}{2}\pi)$ (wzór (8.7)) wynika analogiczna własność dla $\cos z$.

Tw. 9.11 uzupełnić jeszcze możemy twierdzeniem następującym, które znajdzie zastosowanie w wielu dalszych rozważaniach:

(9.12) *Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i niech E_ε oznacza dopełnienie sumy kół $K(n\pi; \varepsilon)$, gdzie $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, względem płaszczyzny otwartej. Istnieje wówczas stała dodatnia C_ε , zależna tylko od ε i taka, że*

$$(9.13) \quad |\sin z| \geq C_\varepsilon \quad \text{oraz} \quad |\text{tg} z| \geq C_\varepsilon \quad \text{dla każdego } z \in E_\varepsilon.$$

Dowód. Niech $K=K(0;\varepsilon)$ i niech H oznacza pas, określony przez nierówność $-\frac{1}{2}\pi \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\pi$. Ze względu na związki $\sin(z+\pi)=-\sin z$, $\operatorname{tg}(z+\pi)=\operatorname{tg} z$ wystarczy pokazać, że istnieje stała C_ε taka, iż nierówności (9.13) spełnione są dla każdego $z \in H-K$.

Oznaczmy przez H_1 zbiór punktów $z \in H-K$, dla których $|\Im z| \leq 1$. Ponieważ zbiór ten jest ograniczony domknięty i żadna z funkcji $\sin z$ oraz $\operatorname{tg} z$ nigdzie na nim nie znika, przeto istnieje liczba $C>0$ taka, iż $|\sin z| \geq C$ oraz $|\operatorname{tg} z| \geq C$ dla $z \in H_1$.

Z drugiej strony, na mocy wzorów Eulera (8.3) i (8.13) mamy, przyjmując $z=x+iy$,

$$|\sin z| = \frac{1}{2}|e^{iz} - e^{-iz}| \geq \frac{1}{2}||e^{iz}| - |e^{-iz}|| = \frac{1}{2}|e^{-y} - e^y|$$

i podobnie

$$|\operatorname{tg} z| \geq |e^y - e^{-y}| / (e^y + e^{-y}) \geq |e^y - e^{-y}|.$$

Ponieważ $|e^y - e^{-y}| \geq e - 1/e$, gdy $|y| \geq 1$, więc oznaczając przez C_ε mniejszą spośród liczb C i $\frac{1}{2}(e - 1/e)$, stwierdzamy natychmiast, iż związki (9.13) spełnione są dla każdego $z \in H-K$, a więc również dla każdego $z \in E_\varepsilon$.

§ 10. Logarytm. Nazywamy *logarytmem* liczby ζ i oznaczamy przez $\log \zeta$ każdą liczbę z spełniającą równość $\exp z = \zeta$. Z tw. 9.10 wynika, iż jeżeli pewna liczba z_0 jest $\log \zeta$, wówczas każda liczba $z_0 + 2k\pi i$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, jest również $\log \zeta$, i odwrotnie: każda liczba, która jest $\log \zeta$, jest postaci $z_0 + 2k\pi i$. Spośród tych logarytmów dokładnie jeden posiada więc część urojoną y , taką, iż $-\pi < y \leq \pi$; logarytm ten nazywamy *logarytmem głównym* liczby ζ i oznaczamy przez $\operatorname{Log} \zeta$.

Z tw. 7.6 wynika, iż każda liczba rzeczywista dodatnia posiada dokładnie jeden logarytm rzeczywisty; logarytm ten jest zarazem jej logarytmem głównym. Liczba 0, z uwagi na tw. 7.5, w ogóle logarytmu nie posiada. Jeżeli zaś $\zeta \neq 0$, to związek $\exp z = \zeta$ jest w myśl (9.8) równoważny układowi dwu związków rzeczywistych:

$$|\zeta| = \exp \Re z, \quad \arg \zeta = \Im z + 2k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Pierwszy z tych związków określa jednoznacznie $\Re z = \operatorname{Log} |\zeta|$, z drugiego zaś wynika, iż $\Im z$ jest jedną z wartości $\arg \zeta$. Streszczając:

(10.1) *Każda liczba zespolona $\zeta \neq 0$ posiada nieskończenie wiele logarytmów. Ogólna postać $\log \zeta$ dana jest przez wzór $\log \zeta = \operatorname{Log} |\zeta| + i \arg \zeta$. W szczególności:*

$$\operatorname{Log} \zeta = \operatorname{Log} |\zeta| + i \operatorname{Arg} \zeta.$$

Przy pomocy logarytmu określamy *potęgę* o dowolnej zasadzie $a \neq 0$ i dowolnym wykładniku γ . Przyjmujemy mianowicie za definicję potęgi a^γ o zasadzie $a \neq 0$ równość

$$(10.2) \quad a^\gamma = e^{\gamma \log a}.$$

Ponieważ $\log a$ ma nieskończenie wiele wartości, przeto a^γ posiada na ogół również nieskończenie wiele wartości (tę, która odpowiada wartości głównej $\log a$, nazywać będziemy *wartością główną* potęgi). Istotnie, oznaczając przez θ którąkolwiek z wartości $\arg a$, możemy na zasadzie tw. 10.1 napisać wzór (10.2) w postaci

$$(10.3) \quad a^\gamma = \exp[\gamma(\operatorname{Log} |a| + \theta i + 2k\pi i)] = \exp[\gamma(\operatorname{Log} |a| + \theta i)] \cdot \exp 2k\gamma\pi i,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Tylko jednak drugi czynnik po prawej stronie równości (10.3) może zawierać wieloznaczność, przy czym spostrzegamy od razu, iż i ten czynnik jest jednoznaczny i równy 1, jeżeli γ jest liczbą rzeczywistą całkowitą; w tym przypadku definicja a^γ przez wzór (10.2) pokrywa się ze zwykłą definicją arytmetyczną potęgi. Ogólnie, w myśl tw. 9.10, jeśli γ jest liczbą rzeczywistą, to dwóm wartościom k_1, k_2 zmiennej całkowitej k odpowiada w równości (10.3) ta sama wartość a^γ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\gamma \cdot (k_1 - k_2)$ jest całkowita. Jeśli więc γ jest liczbą niewymierną, wówczas różnym wartościom k odpowiadają zawsze różne wartości potęgi a^γ , która posiada przeto nieskończenie wiele wartości. Jeśli natomiast γ jest liczbą wymierną, wówczas, przyjmując $\gamma = p/q$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, spostrzegamy od razu, że $\gamma \cdot (k_1 - k_2)$ jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy $k_1 - k_2$ jest wielokrotnością liczby q ; a^γ posiada więc dokładnie q różnych wartości, które otrzymujemy np. dla $k=0, 1, \dots, q-1$.

Z równości (10.3) mamy dla każdej wartości rzeczywistej γ $|a^\gamma| = \exp(\gamma \operatorname{Log} |a|) = |a|^\gamma$, rozumiejąc $|a|^\gamma$ w sensie przyjętym w analizie rzeczywistej; wyrażenie a^γ (dla wartości γ rzeczywistych) ma więc, mimo swą wielowartościowość, jednoznacznie określoną wartość bezwzględną.

ĆWICZENIA. 1. Równanie $\cos z = a$ posiada dla każdej wartości skończonej a nieskończenie wiele pierwiastków. Dla jakich wartości a każde dwa pierwiastki tego równania różnią się o wielokrotność 2π ? o wielokrotność π ? Napisać (przy pomocy znaku $\log$) wzór na rozwiązanie równania $\cos z = a$. Analizować zadanie dla równania $\sin z = a$.

Wartości z , spełniające odpowiednio równania $\cos z = a$ oraz $\sin z = a$, oznaczamy ogólnie przez $\arccos a$ oraz $\arcsin a$.

2. Równania $\operatorname{tg} z = a$ oraz $\operatorname{ctg} z = a$ posiadają dla każdej wartości $a \neq \pm i$, skończonej lub nieskończonej, nieskończenie wiele pierwiastków. Dla $a = \pm i$ równania powyższe rozwiązań nie posiadają.

Napisać (przy pomocy znaku $\log$) wzór na rozwiązanie tych równań (uwzględnić w szczególności przypadek $a = \infty$).

Wartości z , spełniające odpowiednio równania $\operatorname{tg} z = a$ i $\operatorname{ctg} z = a$, oznaczamy ogólnie przez $\operatorname{arc} \operatorname{tg} a$ i $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} a$.

3. Pokazać, iż pierwiastki równania

$$\binom{n}{1}x + \binom{n}{3}x^3 + \dots = 0$$

(w którym wyrazem ostatnim jest nx^{n-1} lub x^n zależnie od parzystości lub nieparzystości liczby n) dane są przez wzór $x = \pm i \operatorname{tg}(k\pi/n)$, gdzie $k=0, 1, \dots, (n-2)/2$ dla n parzystego i $k=0, 1, \dots, (n-1)/2$ dla n nieparzystego.

[Wsk. Równanie dane napisać w postaci $(1+x)^n = (1-x)^n$.]

4. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki równań:

$$(a) \quad \binom{n}{1}x - \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{5}x^5 - \dots = 0,$$

$$(b) \quad 1 - \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{4}x^4 - \dots = 0,$$

$$(c) \quad 1 + \binom{n}{1}x - \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 - \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n = 0.$$

Dla równań (a) i (b) rozróżnić przypadki n parzystego i nieparzystego.

5. Jeżeli $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ jest układem n różnych pierwiastków n -tego stopnia z jedności, to dla każdej liczby całkowitej k suma $z_0^k + z_1^k + \dots + z_{n-1}^k$ jest równa n , gdy k jest wielokrotnością liczby n , zaś równa 0 w przypadku przeciwnym.

6. Znaleźć wszystkie wartości potęg $1^i, i^i, i^{1/2}$ (zauważyć, iż dwie pierwsze posiadają tylko wartości rzeczywiste, a trzecia tylko wartości urojone).

7. Pokazać, iż na to, by potęgą a^{u+vi} (gdzie u oraz v są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$) posiadała tylko wartości rzeczywiste, konieczne jest i wystarcza, by $2u$ było liczbą całkowitą, a liczba $v \cdot \operatorname{Log}|a| + u \cdot \operatorname{Arg} a$ była wielokrotnością π .

8. Zbadać rozmieszczenie punktów $z \neq 0$, w których potęgą z^z przyjmuje wyłącznie wartości rzeczywiste (punkty te położone są na przelicznej mnożności prostych równoległych do osi y -ów i na każdej z tych prostych znajduje się nieskończenie wiele punktów o podanej własności).

9. Pokazać, iż na to, by wszystkie wartości potęgi a^c miały tę samą wartość bezwzględną, konieczne jest i wystarcza, by $\Re c = 0$. Jeżeli $\Re c \neq 0$, wówczas potęga a^c posiada nieskończenie wiele wartości bezwzględnych różnych, których kresem dolnym jest 0, a górnym $+\infty$.

Na to, aby wszystkie wartości potęgi a^c mieściły się na jednej półprostej wychodzącej z punktu 0, konieczne jest i wystarcza, aby $\Re c$ było liczbą całkowitą; na to zaś, by mieściły się na skończonej ilości takich półprostych, konieczne jest i wystarcza, aby $\Re c$ było liczbą wymierną.

10. Udowodnić, iż punkty z , w których wszystkie wyrazy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (1-z^{2^n})$ znikają, poczynając od pewnego miejsca, tworzą zbiór przeliczny wszędzie gęsty na okręgu $C(0;1)$. Poza tymi punktami szereg jest wszędzie rozbieżny.

11. Jeżeli a i b są dwiema liczbami rzeczywistymi niewspółmiernymi, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje kombinacja liniowa $ma + nb$ o współczynnikach całkowitych m, n nie znikających jednocześnie, taka, iż $|ma + nb| < \varepsilon$. [Dow.: Każdej liczbie całkowitej k przyporządkować możemy liczbę $x(k)$ taką, iż $0 \leq x(k) \leq |b|$ oraz $x(k) \equiv ka \pmod{b}$. Istnieją na pewno dwie różne liczby całkowite k_1, k_2 takie, iż $|x(k_2) - x(k_1)| \leq \varepsilon$. Mamy $x(k_1) = k_1 a + p_1 b$ oraz $x(k_2) = k_2 a + p_2 b$, gdzie p_1 i p_2 są liczbami całkowitymi. Wówczas $|(k_2 - k_1)a + (p_2 - p_1)b| \leq \varepsilon$.]

Pokazać na zasadzie powyższego, iż: (a) Jeżeli c jest dowolną liczbą rzeczywistą niewymierną, wówczas wartości potęgi a^c (gdzie $a \neq 0$) tworzą zbiór wszędzie gęsty na okręgu o środku 0 i promieniu równym wartości bezwzględnej $|a|^c$; (b) Jeżeli funkcja ciągła zmiennej rzeczywistej $F(z)$ posiada dwa okresy niewspółmierne, wówczas redukuje się do stałej.

Wiele interesujących przykładów w związku z tematami §§ 7-10 znajduje się w książkach: G. H. Hardy, *Kurs analizy* (przekład W. Wojtowicza z V-go wyd. oryginału), Wyd. II-gie, Warszawa 1930 oraz E. W. Hobson, *Trygonometria płaska* (przekład W. Wojtowicza z III-go wyd. oryginału), Warszawa 1917.

§ 11. Gałąź logarytmu, argumentu i potęgi. Jeżeli $F(z)$ jest funkcją określoną na zbiorze E , wówczas gałęzią jednoznaczna logarytmu tej funkcji na E nazywać będziemy każdą funkcję $L(z)$, skończoną i ciągłą na zbiorze E , która spełnia na tym zbiorze równość $\exp L(z) = F(z)$; ostatni warunek wyraża, iż wartościami funkcji $L(z)$ w punktach $z \in E$ są wartości $\log F(z)$ w tych punktach.

Analogicznie do gałęzi logarytmu określamy gałąź argumentu, potęgi i innych funkcji określonych przez wyrażenia wieloznaczne. Jeżeli więc $F(z)$ jest funkcją określoną i nigdzie nie znikającą na zbiorze E , wówczas gałęzią jednoznaczna argumentu funkcji $F(z)$ na E nazywać będziemy każdą funkcję ciągłą na E , której wartościami w punktach $z \in E$ są wartości $\arg F(z)$ w tych punktach. Podobnie gałęzią jednoznaczna potęgi $[F(z)]^v$ nazywać będziemy każdą funkcję, której wartościami w punktach z zbioru E są wartości $[F(z)]^v$.

W dalszych rozdziałach (rozdz. VI) rozważać będziemy również gałęzie wieloznaczne funkcji, w tym jednak rozdziale, oraz w czterech następnych, ograniczymy się do rozważania tylko gałęzi jednoznacznych tak, że bez obawy nieporozumienia będziemy mogli mówić po prostu „gałąź” zamiast „gałąź jednoznaczna”.

Widoczne jest na mocy tw. 10.1, że jeżeli $L(z)$ jest gałęzią $\log F(z)$ na zbiorze E , to funkcja $A(z) = \mathcal{J}L(z)$ jest gałęzią $\arg F(z)$ na E ; odwrotnie, jeżeli $A(z)$ jest gałęzią argumentu funkcji $F(z)$, ciąglej na zbiorze E i nigdzie nie znikającej na tym zbiorze, wówczas funkcja $L(z) = \operatorname{Log}|F(z)| + iA(z)$ jest gałęzią logarytmu funkcji $F(z)$.

Istnienie gałęzi argumentu funkcji ciągłej na jakimś zbiorze jest więc równoważne istnieniu gałęzi logarytmu tej funkcji. Z tw. 9.3 wynika zatem, iż funkcje $\text{Arg} z$ i $\text{Log} z$ są gałęziami odpowiednio $\arg z$ i $\log z$ w obszarze, jaki otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny otwartej ujemną półkę x -ów. Ogólniej:

(11.1) Jeżeli G_α oznacza obszar, jaki otrzymujemy, usuwając z płaszczyzny otwartej punkty posiadające argument α , wówczas funkcje

$$\text{Arg}[z \exp(\pi - \alpha)i] - (\pi - \alpha), \quad \text{Log}[z \exp(\pi - \alpha)i] - (\pi - \alpha)i$$

są odpowiednio gałęziami $\arg z$ oraz $\log z$ w obszarze G_α .

Dowód. Zauważmy, że gdy z przebiega obszar G_α , to punkt $\zeta = z \exp(\pi - \alpha)i$ przebiega płaszczyznę otwartą z wyłączeniem punktów ujemnej półki rzeczywistej. Na mocy tw. 9.3 funkcja $\text{Arg}[z \exp(\pi - \alpha)i] - (\pi - \alpha)$ jest więc ciągła w G_α . Z drugiej strony, z tw. 9.7 wynika natychmiast, iż $\text{Arg}[z \exp(\pi - \alpha)i] - (\pi - \alpha)$ jest dla każdego z równy jednej z wartości $\arg z$. Rozważana więc funkcja jest gałęzią $\arg z$ w zbiorze G_α . Dla funkcji $\log$ dowód przebiega analogicznie.

W Rozdz. IV udowodnimy istnienie gałęzi $\log z$ i $\arg z$ w każdym obszarze jednospójnym nie zawierającym punktów 0 i ∞ . Tymczasem ograniczymy się do kilku wyników bardziej elementarnych. Zauważmy przede wszystkim, iż jeżeli $L_1(z), L_2(z)$ są gałęziami logarytmu tej samej funkcji $F(z)$ na zbiorze E , wówczas, funkcja $[L_1(z) - L_2(z)]/2\pi i$ przyjmuje w E tylko wartości całkowite, a więc (por. Wstęp, tw. 11.1) redukuje się wprost do stałej, gdy E jest zbiorem spójnym. Zatem:

(11.2) Dwie gałęzie logarytmu tej samej funkcji na zbiorze spójnym mogą różnić się co najwyżej o stałą, mianowicie o całkowitą wielokrotność $2\pi i$. Podobnie, dwie gałęzie argumentu tej samej funkcji na zbiorze spójnym różnić się mogą co najwyżej o całkowitą wielokrotność 2π .

Udowodnimy dalej, iż każda gałąź $\log z$ w zbiorze otwartym posiada w tym zbiorze wszędzie pochodną. Dokładniej:

(11.3) Jeżeli funkcja $L(z)$ jest gałęzią $\log z$ w pewnym zbiorze otwartym G , wówczas w każdym punkcie $z \in G$ mamy $L'(z) = 1/z$.

Dowód. Niech $z_0 \in G$, $z \in G$, $w_0 = L(z_0)$, $w = L(z)$. Mamy więc $z_0 = \exp L(z_0) = \exp w_0$ oraz $z = \exp L(z) = \exp w$. Stąd

$$(11.4) \quad \frac{L(z) - L(z_0)}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{\exp w - \exp w_0}.$$

Na zasadzie wzoru na pochodną funkcji wykładniczej (tw. 7.8) stwierdzamy, że gdy $z \rightarrow z_0$, a więc gdy $w \rightarrow w_0$, prawa strona równości (11.4) dąży do $1/\exp w_0 = 1/z_0$. Zatem $L'(z_0) = 1/z_0$ w każdym punkcie $z_0 \in G$.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli K jest kołem nie zawierającym punktu ∞ , wówczas dla każdego punktu $a \neq \infty$, nie należącego do koła K , istnieje w K gałąź $\arg(z - a)$ oraz gałąź $\log(z - a)$.

2. Jeżeli $W(z)$ jest funkcją ciągłą na zbiorze E i jeżeli wszystkie wartości, jakie funkcja ta na tym zbiorze przyjmuje, należą do pewnego koła K , nie zawierającego punktów 0 i ∞ , wówczas istnieje na E gałąź $\arg W(z)$ i gałąź $\log W(z)$.

3. Jeżeli C jest łukiem zwykłym (ob. Wstęp, § 12), wówczas dla każdego punktu a , nie leżącego na C , istnieje na C gałąź $\arg(z - a)$ oraz gałąź $\log(z - a)$. Ogólniej, dla każdej funkcji $W(z)$, ciągłej i nie znikającej nigdzie na C , istnieje na C gałąź $\arg W(z)$ i gałąź $\log W(z)$.

4. Jeżeli dla funkcji $F(z)$, nie znikającej nigdzie na pewnym zbiorze spójnym E , istnieją na E dwie gałęzie potęgi $[F(z)]^\alpha$ (gdzie α jest dowolną liczbą zespoloną), wówczas stosunek tych dwu gałęzi jest stały na E .

5. Na żadnym okręgu o środku $a \neq \infty$ (i przeto tym bardziej w żadnym otoczeniu pierścieniowym tego punktu) nie istnieje gałąź $\log(z - a)$, ani $\arg(z - a)$, ani $(z - a)^\alpha$, gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą nie całkowitą.

6. Gałąź $\sqrt{(z - a)(z - b)}$, gdzie $a \neq b$, istnieje na okręgu każdego koła, które zawiera bądź wewnątrz, bądź zewnątrz obydwa punkty a i b , natomiast nie istnieje na okręgu żadnego koła, które zawiera jeden z punktów a, b wewnątrz, a drugi zewnątrz.

7. Jeżeli na zbiorze spójnym E , nie zawierającym punktów $\pm i$, istnieją dwie gałęzie funkcji $\arctg z$ (ob. § 10, ćw. 2), wówczas gałęzie te różnią się co najwyżej o stałą wielokrotność π .

8. Jeżeli na zbiorze spójnym E , nie zawierającym punktów ± 1 , istnieją dwie gałęzie funkcji $\arccos z$ (ob. § 10, ćw. 1), wówczas bądź suma, bądź różnica tych dwu gałęzi jest na E stałą wielokrotnością 2π .

9. W żadnym otoczeniu pierścieniowym punktu i lub $-i$ nie istnieje gałąź $\arctg z$; podobnie w żadnym otoczeniu pierścieniowym punktu 1 lub -1 nie istnieje gałąź $\arccos z$.

10. Jeżeli $\varphi_\nu(z)$, gdzie $|\nu| > R$, oznacza gałąź potęgi $\left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^\nu$ w kole $K(0; R)$, przyjmującą wartość 1 dla $z = 0$, wówczas $\varphi_\nu(z)$ dąży jednostajnie w $K(0; R)$ do $\exp z$ gdy $\nu \rightarrow \infty$.

§ 12. Kąt między półprostymi. Podamy zastosowanie rozważań powyższych do definicji kąta między dwiema półprostymi.

Nazywamy *półprostą* o początku z_0 i współczynniku kierunkowym $p \neq 0$ zbiór wszystkich punktów postaci

$$(12.1) \quad z = z_0 + pt,$$

gdzie t przebiega wartości rzeczywiste nieujemne.

Przyjmując $z_0 = x_0 + iy_0$, $p = m + in$, gdzie x_0, y_0, m, n są liczbami rzeczywistymi, możemy napisać równanie (12.1) w postaci układu dwu równań rzeczywistych $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, nazywając *współczynnikami kierunkowymi* półprostej parę liczb (m, n) . Jednakże w dalszym ciągu korzystać będziemy raczej z postaci zespolonej równania półprostej, charakteryzując kierunek jej przez jedną liczbę zespoloną, która zastępuje parę liczb rzeczywistych.

Jeżeli w równaniu (12.1) zastąpimy współczynnik p przez λp , gdzie λ jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, wówczas otrzymamy oczywiście tę samą półprostą, ponieważ gdy t przebiega wszystkie wartości rzeczywiste nieujemne, λt przebiega również wszystkie wartości nieujemne. Odwrotnie:

(12.2) *Jeżeli $z = z_1 + p_1 t$ oraz $z = z_2 + p_2 u$, gdzie t oraz u przebiegają wartości nieujemne, są równaniami tej samej półprostej L , wówczas $z_2 = z_1$ i stosunek p_2/p_1 jest liczbą dodatnią; innymi słowy, początek półprostej jest określony jednoznacznie, a współczynnik kierunkowy z dokładnością do dowolnego czynnika rzeczywistego dodatniego.*

Dowód. Podstawiając $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $p_1 = m_1 + in_1$, $p_2 = m_2 + in_2$, napisać możemy dwa dane równania półprostej L w postaci dwu układów równań rzeczywistych $x = x_1 + m_1 t$, $y = y_1 + n_1 t$ oraz $x = x_2 + m_2 u$, $y = y_2 + n_2 u$. Widoczne jest natychmiast, iż x_1 jest kresem (dolnym lub górnym) zależnie od znaku współczynnika m_1) zbioru odciętych punktów półprostej L , i to jedynym kresem skończonym tego zbioru. Z drugiej strony, x_2 jest oczywiście również kresem tego zbioru, przeto $x_2 = x_1$. Podobnie dowodzimy, iż $y_2 = y_1$, skąd ostatecznie $z_2 = z_1$.

Powracając do równań półprostej L w postaciach zespolonych $z = z_1 + p_1 t$ oraz $z = z_2 + p_2 u$, oznaczmy przez z_0 jakikolwiek punkt tej półprostej różny od punktu $z_1 = z_2$. Niech t_0 i u_0 będą wartościami parametrów t i u , odpowiadającymi punktowi z_0 w tych równaniach. Mamy więc $p_1 = (z_0 - z_1)/t_0$ i $p_2 = (z_0 - z_2)/u_0 = (z_0 - z_1)/u_0$, skąd, ponieważ liczby t_0 oraz u_0 są rzeczywiste i dodatnie, otrzymujemy $p_2/p_1 = t_0/u_0 > 0$, co należało udowodnić.

Jeżeli p jest dowolnym współczynnikiem kierunkowym półprostej, wówczas $p/|p|$ jest również współczynnikiem kierunkowym tej półprostej, o wartości bezwzględnej 1. Jak spostrzega się od razu, wśród współczynników kierunkowych półprostej istnieje tylko jeden o wartości bezwzględnej 1. Nazwiemy go *współczynnikiem kierunkowym unormowanym* albo krócej *kierunkiem* danej półprostej.

Argument kierunku półprostej, będący w myśl twierdzeń 12.2 i 9.7 jednocześnie argumentem wszystkich jej współczynników kierunkowych, nazywamy krótko *argumentem* danej półprostej. Zatem na mocy tw. 9.6:

(12.4) *Argument θ półprostej jest wyznaczony z dokładnością do stałej addytywnej postaci $2k\pi$; jeżeli $p = m + ni$ jest współczynnikiem kierunkowym półprostej, wówczas jej argument θ określony jest przez wzory*

$$\cos \theta = m / \sqrt{m^2 + n^2}, \quad \sin \theta = n / \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Kątem $\angle(L_1, L_2)$ między dwiema półprostymi L_1, L_2 nazywamy różnicę ich argumentów, t. j. oznaczając przez p_1 i p_2 odpowiednio współczynniki kierunkowe półprostych L_1 i L_2 , przyjmujemy $\angle(L_1, L_2) = \arg p_2 - \arg p_1$. Kąt między dwiema półprostymi jest tedy określony jednoznacznie z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej postaci $2k\pi$.

Półoś rzeczywista dodatnia posiada oczywiście argument 0 (ogólnie $2k\pi$). Z drugiej strony, jeżeli dany jest dowolny punkt $z \neq 0$ w skończoności, półprosta wychodząca z punktu 0 i przechodząca przez punkt z posiada argument równy $\arg z$. Stąd *argument dowolnego punktu $z \neq 0$ na płaszczyźnie równy jest kątowi, jaki półprosta wychodząca z punktu 0 i przechodząca przez punkt z tworzy z półosią rzeczywistą*. Dalej, *wartość bezwzględna $|z|$ dowolnego punktu jest oczywiście równa jego odległości od punktu 0*. Otrzymujemy w ten sposób interpretację geometryczną argumentu i wartości bezwzględnej dowolnej liczby zespolonej skończonej.

Z tw. 12.4 oraz wzorów (8.4) wynika, iż

(12.5) *Kąt $\alpha = \angle(L_1, L_2)$ między dwiema półprostymi L_1, L_2 o współczynnikach kierunkowych $p_1 = m_1 + n_1 i$, $p_2 = m_2 + n_2 i$ określony jest przez równości:*

$$\cos \alpha = (m_1 m_2 + n_1 n_2) / (m_1^2 + n_1^2)^{1/2} (m_2^2 + n_2^2)^{1/2},$$

$$\sin \alpha = (m_1 n_2 - m_2 n_1) / (m_1^2 + n_1^2)^{1/2} (m_2^2 + n_2^2)^{1/2},$$

skąd:

$$\operatorname{tg} \alpha = (m_1 n_2 - m_2 n_1) / (m_1 m_2 + n_1 n_2).$$

§ 13. Styczna do krzywej. Niech

$$(13.1) \quad z=z(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leq t \leq b,$$

będzie krzywą na płaszczyźnie (por. Wstęp, § 12). Niech $t_0 < b$ będzie punktem przedziału $[a, b]$, w którego żadnym otoczeniu prawostronnym funkcja $z(t)$ nie jest stała, i niech Δt będzie liczbą dodatnią taką, iż $z(t_0 + \Delta t) \neq z(t_0)$. Półprosta wychodząca z punktu $z(t_0)$, jako początku, i przechodząca przez punkt $z(t_0 + \Delta t)$ posiada współczynnik kierunkowy $z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)$, a więc jej kierunek (t. j. współczynnik kierunkowy unormowany, por. § 12, str. 77) jest równy $[z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)] / |z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)|$. Jeśli granica tego kierunku

$$(13.2) \quad l = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{|z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)|}$$

istnieje (przy czym bierzemy pod uwagę tylko te wartości Δt , dla których licznik i mianownik rozważanego stosunku nie znikają), wówczas liczbę l nazywamy *kierunkiem prawostronnym* krzywej (13.1) w punkcie t_0 , a półprostą o początku $z(t_0)$ i kierunku l nazywamy *półstyczną prawostronną* krzywej w tym punkcie.

Analogicznie określamy *kierunek lewostronny* i *półstyczną lewostronną* krzywej w danym punkcie.

Jeżeli krzywa posiada w t_0 kierunek zarówno prawostronny, jak lewostronny, i jeżeli kierunki te różnią się tylko znakiem, wówczas obydwie półstyczne uzupełniają się do jednej prostej, którą nazywamy *styczną* do krzywej w punkcie t_0 . Zamiast „kierunek prawostronny krzywej” będziemy mówili wówczas wprost *kierunek*.

Jeżeli funkcja $z(t)$ posiada w punkcie t_0 pochodną $z'(t_0) \neq 0$, wówczas krzywa $z=z(t)$ posiada w tym punkcie styczną i kierunek jej jest w punkcie t_0 równy $z'(t_0) / |z'(t_0)|$. Istotnie, dzieląc przez $\Delta t > 0$ licznik i mianownik wyrażenia pod znakiem granicy w (13.2), otrzymujemy $l = z'(t_0) / |z'(t_0)|$; jeżeli zaś Δt dąży do 0 przez wartości ujemne, wówczas to samo wyrażenie dąży do $-l$.

Jeżeli $z(t) = x(t) + iy(t)$, wówczas istnienie pochodnej $z'(t)$ równoważne jest istnieniu obydwu pochodnych $x'(t)$, $y'(t)$, zaś warunek $z'(t) \neq 0$ — warunkowi $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$. Scharakteryzowanie stycznej przez współczynnik kierunkowy unormowany $z'(t) / |z'(t)| = [x'(t) + iy'(t)] / ([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{1/2}$ równoważne jest określeniu jej kierunku przez parę liczb $x'(t) / ([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{1/2}$, $y'(t) / ([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{1/2}$, jak to się zwykle czyni w geometrii różniczkowej.

§ 14. Przekształcenia homograficzne. Jedno-jednoznaczne przekształcenie płaszczyzny (domkniętej) postaci

$$(14.1) \quad \zeta = az + b, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0,$$

nazywamy *przekształceniem liniowym* lub *podobieństwem*. Liczby $|a|$ oraz $\arg a$ nazywamy odpowiednio *spółczynnikiem podobieństwa* oraz *kątem obrotu* tego przekształcenia.

Widoczne jest natychmiast, iż przy przekształceniu liniowym prosta, półprosta i odcinek przechodzą odpowiednio na prostą, półprostą i odcinek. Odległość między dwoma punktami w skończoności ulega pomnożeniu przez współczynnik podobieństwa; tym samym okrąg i koło (Wstęp, § 8) przechodzą odpowiednio znów na okrąg i koło.

Półprosta $z = z_0 + pt$ o współczynniku p przechodzi przy przekształceniu (14.1) na półprostą $\zeta = (az_0 + b) + apt$ o współczynniku ap . Ponieważ zaś $\arg ap = \arg p + \arg a$, przeto przy przekształceniu liniowym argument półprostej powiększa się o kąt obrotu przekształcenia, skąd wynika, iż *kąt między dwiema półprostymi nie ulega zmianie przy przekształceniu liniowym*.

Jeżeli współczynnik podobieństwa przekształcenia jest równy jedności, przekształcenie nazywa się *ruchem*. Ruch, którego kąt obrotu jest równy zeru, nazywa się *przesunięciem*. Przekształcenie (14.1) jest więc przesunięciem wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$. Ogólną postacią przesunięcia jest zatem

$$(14.2) \quad \zeta = z + b;$$

spółczynnik b nazywa się tu *wektorem przesunięcia*.

Punkt w skończoności, który jest niezmienny względem przekształcenia liniowego, nazywać będziemy *środkiem* tego przekształcenia. Dla przekształcenia tożsamościowego każdy punkt w skończoności jest oczywiście jego środkiem. Przesunięcie, jeżeli nie jest przekształceniem tożsamościowym, nie posiada w ogóle środka, natomiast każde przekształcenie liniowe (14.1), które nie jest przesunięciem, posiada dokładnie jeden środek: mianowicie $z_0 = b / (1 - a)$. Wyrażając b przez z_0 i a oraz podstawiając $k = |a|$ i $\theta = \arg a$ w równaniu (14.1), możemy każde przekształcenie liniowe, które posiada środek i nie jest tożsamościowe, napisać w postaci

$$(14.3) \quad \zeta - z_0 = k e^{i\theta} \cdot (z - z_0),$$

gdzie z_0 , k oraz θ oznaczają odpowiednio środek, współczynnik pod-

bieństwa oraz kąt obrotu przekształcenia. Ponieważ przekształcenie tożsamościowe podpada (dla $k=1$, $\theta=0$) również pod wzór (14.3), przeto wzór ten zawiera ogólną postać przekształcenia liniowego, posiadającego środek.

Ruch, który posiada środek (t. zn. jest bądź przekształceniem tożsamościowym, bądź nie jest przesunięciem), nazywa się *obrotem*. Przekształcenie liniowe, które posiada środek i którego kąt obrotu jest równy zeru, nazywamy *jednokładnością*. Specjalizując wzór (14.3), otrzymujemy jako ogólną postać obrotu i jednokładności o środku z_0 odpowiednio wzory:

$$(14.4) \quad \zeta - z_0 = e^{i\theta} \cdot (z - z_0), \quad \text{gdzie } \theta \text{ jest kątem obrotu,}$$

$$(14.5) \quad \zeta - z_0 = k \cdot (z - z_0), \quad \text{gdzie } k \text{ jest współczynnikiem podobieństwa.}$$

Jeżeli $h(z) = az + b$, gdzie $a = re^{i\theta} \neq 0$, wówczas przyjmując:

$$h_1(z) = e^{i\theta} z, \quad h_2(z) = rz, \quad h_3(z) = z + b,$$

mamy $h = h_3 h_2 h_1$. Zatem:

(14.6) Każde przekształcenie liniowe jest iloczynem obrotu o środku 0, jednokładności o środku 0 oraz przesunięcia.

Przekształcenia liniowe — jak widać natychmiast — tworzą grupę (por. Wstęp, § 7). Grupa ta stanowi podgrupę ogólniejszej klasy przekształceń, zwanych przekształceniami homograficznymi.

Nazywamy *przekształceniem homograficznym* każde przekształcenie płaszczyzny postaci

$$(14.7) \quad \zeta = \frac{az + b}{cz + d},$$

gdzie a, b, c i d są dowolnymi liczbami zespolonymi skończonymi takimi, że $ad - bc \neq 0$. Punktowi $z = \infty$ przyporządkowujemy w tym przekształceniu punkt $\zeta = a/c$.

Wyrażenie $\Delta = ad - bc$ nazywamy *wyznacznikiem* przekształcenia (14.7). Założenie, iż $\Delta \neq 0$, jest całkiem naturalne; gdyby bowiem wyznacznik Δ zniknął, wówczas mielibyśmy $a/c = b/d$ i prawa strona równości (14.7) redukowałaby się do stałej (poza punktem $z = -d/c$, w którym przyjmowałaby postać nieoznaczoną $0/0$).

Każde przekształcenie homograficzne jest jednoznacznie odwracalne i przekształcenie odwrotne względem przekształcenia homograficznego jest również homograficzne. Sprawdzamy to natychmiast, wyrażając z przez ζ z równania (14.7); otrzymujemy $z = (-d\zeta + b)/(c\zeta - a)$.

Podobnie sprawdzamy łatwo, iż iloczyn dwu przekształceń homograficznych jest przekształceniem homograficznym. Istotnie, jeżeli $h_1(z) = (a_1 z + b_1)/(c_1 z + d_1)$ i $h_2(z) = (a_2 z + b_2)/(c_2 z + d_2)$, gdzie $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ i $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$, to znajdujemy dla $h = h_2 h_1$

$$h(z) = \frac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_1)} = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)};$$

wyznacznik tego przekształcenia jest równy $(a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$. Przekształcenia homograficzne tworzą więc grupę przekształceń.

Podobnie jak przekształcenie liniowe (por. tw. 14.6), każde przekształcenie homograficzne przedstawić można jako iloczyn kilku przekształceń bardziej specjalnych.

Nazywać będziemy *inwersją względem koła* $K(a; r)$ (gdzie $a \neq \infty$ i $r \neq \infty$) przekształcenie homograficzne dane przez wzór

$$\zeta - a = r^2 / (z - a).$$

Przy tym przekształceniu okrąg $C(a; r)$ przechodzi w siebie (punkt $z = a + r \exp i\theta$ przechodzi na punkt $\zeta = a + r \exp(-i\theta)$); obszar wewnętrzny okręgu, t. j. koło $K(a; r)$, przechodzi na obszar zewnętrzny, t. j. na $\overline{CK}(a; r)$; w szczególności przechodzą na siebie wzajemnie punkt a oraz punkt ∞ .

Inwersję względem koła $K(a; r)$ nazywać będziemy także *inwersją o środku a oraz promieniu r* , a w szczególności inwersję względem koła $K(0; 1)$ — wprost *inwersją*. Inwersję tę, wyrażającą się przez wzór $\zeta = 1/z$, stosujemy często, gdy chodzi o przekształcenie płaszczyzny w siebie tak, aby punkt ∞ przeszedł na punkt 0 i odwrotnie. Każdy punkt z okręgu $C(0; 1)$ przechodzi przy przekształceniu tym na punkt $\bar{z}$ z nim sprzężony, t. zn. symetryczny z nim względem osi rzeczywistej.

(14.8) Każde przekształcenie homograficzne jest iloczynem skończonej ilości: obrotów, jednokładności o środku 0, przesunięć oraz inwersji.

Dowód. Niech $h(z) = (az + b)/(cz + d)$ będzie funkcją homograficzną. Założyć możemy, że $c \neq 0$, ponieważ przy $c = 0$ funkcja $h(z)$ jest liniowa i twierdzenie sprowadza się do tw. 14.6. Możemy więc napisać

$$h(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + d/c};$$

przyjmując więc

$$h_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad h_2(z) = \frac{1}{z}, \quad h_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} z + \frac{a}{c},$$

mamy $h = h_3 h_2 h_1$, gdzie h_2 jest inwersją, a h_1 oraz h_3 przekształceniami liniowymi. Ponieważ zaś, na mocy tw. 14.6, każde przekształcenie liniowe jest iloczynem obrotu i jednokładności o środku 0 oraz przesunięcia, przeto tw. 14.8 jest udowodnione.

Jak widzieliśmy, przy przekształceniu liniowym okrąg przechodzi zawsze na okrąg, a prosta na prostą. Przy przekształceniach homograficznych okrąg może natomiast przejść na prostą i odwrotnie. Nazywając dla uproszczenia sformułowań prostą z dołączonym do niej punktem ∞ *prostą domkniętą* lub *okręgiem niewłaściwym*, możemy wypowiedzieć podstawową własność geometryczną przekształceń homograficznych w postaci następującej:

(14.9) *Przekształcenie homograficzne przekształca zawsze okrąg na okrąg.*

Dowód. Równanie okręgu możemy napisać w spólrzędnych kartezjańskich w postaci

$$(14.10) \quad A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

gdzie A, B, C i D są liczbami rzeczywistymi, przy czym $|A| + |B| + |C| > 0$ oraz $|B| + |C| + |D| > 0$. Ze względu na tw. 14.8 wystarczy pokazać, iż okrąg (14.10) przechodzi na okrąg przy inwersji $\zeta = 1/z$. Przyjmując $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, mamy $x = \xi/(\xi^2 + \eta^2)$, $y = -\eta/(\xi^2 + \eta^2)$ i otrzymujemy z równania (14.10) po łatwych uproszczeniach

$$A + B\xi - C\eta + D(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

t. j. znów równanie okręgu, właściwego lub niewłaściwego, zależnie od tego, czy $D \neq 0$, czy $D = 0$.

Ponieważ przy każdej inwersji środek inwersji przechodzi na punkt ∞ , a z drugiej strony okrąg jest niewłaściwy wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera punkt ∞ , więc z tw. 14.9 wynika w szczególności, iż

(14.11) *Przy inwersji o dowolnym środku okrąg przechodzi na okrąg właściwy lub na okrąg niewłaściwy (prostą domkniętą) zależnie od tego, czy środek inwersji nie leży na okręgu, czy też na nim leży.*

ĆWICZENIA. 1. Każde przekształcenie przez ruch na płaszczyźnie napisać można w postaci dwu równań rzeczywistych $\xi = a + x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $\eta = b + x \sin \alpha + y \cos \alpha$, gdzie α jest kątem obrotu przekształcenia.

2. Niech R będzie zbiorem punktów, których jedna spólrzędna jest wymierna, a druga niewymierna. Pokazać, iż przy pomocy stosownego obrotu zbiór ten przekształcić można na zbiór, którego wszystkie punkty posiadają obydwie spólrzędne niewymierne (Sierpiński).

3. Dane jest przekształcenie płaszczyzny w postaci dwu równań rzeczywistych:

$$(*) \quad \xi = a + u_1 x + v_1 y, \quad \eta = b + u_2 x + v_2 y.$$

Pokazać, iż na to, aby przekształcenie (*) zachowywało odległość punktów, konieczne jest i wystarcza, aby $u_1^2 + u_2^2 = 1$, $v_1^2 + v_2^2 = 1$, $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Pokazać, iż jeżeli warunek ten jest spełniony, wówczas przekształcenie to jest albo ruchem, albo iloczynem symetrii względem osi x i ruchu, t. zn. przekształceniem postaci $\xi = g(\bar{z})$, gdzie $\xi = g(z)$ jest ruchem.

4. Pokazać, iż każde przekształcenie płaszczyzny, które zachowuje odległość punktów, jest albo ruchem albo iloczynem symetrii względem osi x i ruchu.

[Wsk. Oznaczając przez (ξ, η) , (a, b) , $(a + m_1, b + n_1)$ i $(a + m_2, b + n_2)$ punkty, na które przechodzą odpowiednio punkty (x, y) , $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$, wyrazić, iż odległości punktu (ξ, η) od punktów (a, b) , $(a + m_1, b + n_1)$ i $(a + m_2, b + n_2)$ są równe odpowiednio odległościom punktu (x, y) od punktów $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$; skorzystać następnie z ów. 3.]

5. Pokazać, iż każde przekształcenie homograficzne, nie tożsamościowe, posiada zawsze jeden, a co najwyżej dwa punkty niezmiennne (*punktem niezmiennym* przekształcenia nazywamy punkt, który przechodzi na siebie przy przekształceniu).

Przekształcenia homograficzne, które posiadają dwa różne punkty niezmiennne, nazywają się *loksodromicznymi*, a przekształcenia, które posiadają tylko jeden punkt niezmienny, *parabolicznymi*. Przekształcenie tożsamościowe zaliczamy do każdej z tych klas.

Wyróżnić przekształcenia loksodromiczne i paraboliczne wśród przekształceń liniowych. Zbadać, do której z tych dwu klas przekształceń należą inwersje.

6. Pokazać, iż ogólne postacie przekształcenia loksodromicznego i parabolicznego, nie tożsamościowego, o punktach niezmiennych w skończoności, dane są odpowiednio przez wzory:

$$(a) \quad \frac{\xi - z_1}{\xi - z_2} = k \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (k \neq 0, k \neq 1), \quad (b) \quad \frac{1}{\xi - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + l \quad (l \neq 0),$$

gdzie z_1, z_2 (dla przekształcenia loksodromicznego) i z_0 (dla przekształcenia parabolicznego) oznaczają punkty niezmiennne przekształcenia.

Wskazać odmianę wzorów (a) oraz (b) dla przypadku punktu niezmiennego w nieskończoności.

Sprawdzić, że przekształcenia loksodromiczne o wspólnych punktach niezmiennych z_1, z_2 tworzą grupę abelową; również przekształcenia paraboliczne o wspólnym punkcie niezmiennym tworzą grupę abelową. (Grupę przekształceń nazywamy *abelową*—od nazwiska matematyka norweskiego Abela, jeżeli mnożenie przekształceń jest w tej grupie przemienne, t. zn. jeżeli jest $h_1 h_2 = h_2 h_1$ dla każdej pary przekształceń h_1 i h_2 , należących do tej grupy.)

7. Przekształcenie homograficzne nazywamy *rzeczywistym*, jeżeli przekształca każdy punkt rzeczywisty na punkt rzeczywisty. Spółczynniki przekształcenia rzeczywistego są rzeczywiste lub stają się rzeczywistymi po odpowiednim skróceniu.

Jeżeli $h(z) = (az+b)/(cz+d)$ jest przekształceniem rzeczywistym i współczynniki a, b, c i d są rzeczywiste, wówczas przez *signum* tego przekształcenia ($\text{sign } h$) rozumiemy $+1$ lub -1 zależnie od tego, czy wyznacznik $ad-bc$ jest dodatni, czy ujemny. Signum nie zmienia się, gdy współczynniki przekształcenia pomnożymy przez ten sam czynnik rzeczywisty, dodatni lub ujemny.

Sprawdzić, iż: 1° jeżeli h jest przekształceniem homograficznym rzeczywistym, to $\text{sign } h^{-1} = \text{sign } h$; 2° jeżeli h_1 oraz h_2 są przekształceniami homograficznymi rzeczywistymi, to $\text{sign } h_2 h_1 = \text{sign } h_2 \cdot \text{sign } h_1$; 3° przekształcenia homograficzne rzeczywiste o signum dodatnim tworzą grupę.

8. Napisać przekształcenie loksodromiczne (a) z ćwiczenia 6 w postaci $\xi = (az+\beta)/(z+\delta)$ i obliczyć współczynniki α, β i δ w następujących dwu przypadkach: 1° gdy z_1, z_2 oraz k są liczbami rzeczywistymi ($z_1 \neq z_2, k \neq 0$); 2° gdy $z_1 = u+iv$ oraz $z_2 = u-iv$ są punktami urojonymi sprzężonymi, zaś $k = e^{i\theta}$.

Pokazać, iż w obydwu przypadkach przekształcenie jest rzeczywiste, przy czym w przypadku 2° signum przekształcenia jest zawsze dodatnie, a w przypadku 1° dodatnie lub ujemne, w zależności od znaku k .

9. Przekształcenie loksodromiczne (a), ćw. 6, (z oczywistą modyfikacją wzoru, gdy jeden z punktów z_1, z_2 znajduje się w nieskończoności) nazywa się *hiperbolicznym*, jeżeli k jest liczbą rzeczywistą, zaś *eliptycznym*, jeżeli k jest postaci $e^{i\theta}$. Przekształcenie tożsamościowe zaliczamy zarówno do przekształceń hiperbolicznych jak i eliptycznych.

Pokazać, iż każde przekształcenie homograficzne rzeczywiste (nietożsamościowe) posiada bądź 1° dwa różne punkty niezmiennicze rzeczywiste, bądź 2° dwa punkty niezmiennicze urojone sprzężone, bądź wreszcie 3° jeden punkt niezmienny rzeczywisty — i że w zależności od tych trzech przypadków jest 1° hiperboliczne, 2° eliptyczne lub 3° paraboliczne.

10. Przekształcenia hiperboliczne, jak również przekształcenia eliptyczne o wspólnej parze punktów niezmienniczych, tworzą grupy abelowe (por. ćw. 6).

11. Niech z_1 i z_2 będą dwoma różnymi punktami na płaszczyźnie i niech $\mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{E}$ oznaczają odpowiednio grupę wszystkich przekształceń homograficznych hiperbolicznych oraz grupę wszystkich przekształceń eliptycznych o tych samych punktach niezmienniczych z_1 i z_2 .

Pokazać, iż jeżeli w jest dowolnym punktem płaszczyzny, różnym od z_1 i z_2 , wówczas zbiór wszystkich punktów $h(w)$, gdzie h oznacza dowolne przekształcenie należące do grupy $\mathfrak{H}$, jest okręgiem przechodzącym przez punkty z_1 i z_2 . Gdy punkt w zmienia się na płaszczyźnie, otrzymujemy wszystkie okręgi przechodzące przez punkty z_1 i z_2 . Okręgi te nazywamy *trajektoriami* przekształceń należących do grupy $\mathfrak{H}$.

Sformułować analogiczne definicje i twierdzenia dla grupy $\mathfrak{E}$ przekształceń eliptycznych.

12. Niech $h(z)$ będzie dowolnym przekształceniem homograficznym typu hiperbolicznego, eliptycznego lub parabolicznego. Każdy punkt w_0 różny od punktów niezmienniczych przekształcenia h wyznacza ciąg punktów nieskończony w obydwu kierunkach

$$\dots, w_{-n}, \dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots, w_n, \dots$$

taki, iż $w_{n+1} = h(w_n)$ dla $n = \dots, -1, 0, +1, \dots$. Pokazać, iż wszystkie punkty tego ciągu leżą na pewnej trajektorii przekształcenia h , przy czym: 1° w przypadku hiperbolicznym ciąg $\{w_n\}$ dąży do jednego lub do drugiego z punktów niezmienniczych przekształcenia h zależnie od tego, czy $n \rightarrow +\infty$, czy $n \rightarrow -\infty$; 2° w przypadku eliptycznym albo istnieje taka liczba całkowita p , iż $w_{n+p} = w_n$ dla każdego n , albo punkty ciągu $\{w_n\}$ tworzą zbiór wszędzie gęsty na trajektorii (por. § 10, ćw. 11); 3° w przypadku parabolicznym ciąg $\{w_n\}$ dąży do jednego punktu niezmienniczego przekształcenia zarówno gdy $n \rightarrow +\infty$, jak i gdy $n \rightarrow -\infty$.

§ 15. Przekształcenia podobnościowe. Nawiązując do rozważań §§ 5 i 6, podamy obecnie podstawową interpretację geometryczną pochodnej w dziedzinie zespolonej. Udowodnimy przede wszystkim twierdzenie następujące:

(15.1) Jeżeli funkcja

$$(15.2) \quad \xi = W(z)$$

jest ciągła i skończona w otoczeniu punktu $z_0 \neq \infty$ oraz posiada w tym punkcie różniczkę zupełną $(A+Bi)\Delta x + (C+Di)\Delta y$ o wyznaczniku $AD-BC \neq 0$ (gdzie A, B, C, D są liczbami rzeczywistymi), to każdemu kierunkowi l^0 odpowiada pewien kierunek λ^0 w ten sposób, iż gdy wychodząca z punktu z_0 krzywa C

$$(C) \quad z = z(t), \quad \text{gdzie } a \leq t \leq b, \quad z(a) = z_0,$$

posiada dla $t=a$ kierunek l^0 , wówczas wychodząca z punktu $\xi_0 = W(z_0)$ krzywa Γ

$$(I') \quad \xi = \xi(t) = W[z(t)], \quad \text{gdzie } a \leq t \leq b, \quad \xi(a) = \xi_0,$$

która jest obrazem krzywej C w przekształceniu $\xi = W(z)$, posiada dla $t=a$ kierunek λ^0 .

Odpowiedniość ta między kierunkami l^0 i λ^0 dana jest przez wzór

$$(15.3) \quad \lambda = \mu + \nu i = h \cdot [(Am + Cn) + i(Bm + Dn)],$$

gdzie $l = m + ni$ oraz $\lambda = \mu + \nu i$ oznaczają jakiekolwiek współczynniki odpowiadających sobie kierunków l^0 oraz λ^0 , a h jest dowolnym czynnikiem dodatnim.

Dowód. Niech $l^0 = m^0 + n^0 i$ będzie kierunkiem (t. j. współczynnikiem kierunkowym unormowanym, por. § 13) krzywej C dla $t=a$. Przyjmując $z(t) = x(t) + iy(t)$ oraz:

$$\begin{aligned} \Delta z &= z(a + \Delta t) - z(a), & \Delta x &= x(a + \Delta t) - x(a), & \Delta y &= y(a + \Delta t) - y(a), \\ \Delta \xi &= \xi(a + \Delta t) - \xi(a), \end{aligned}$$

mamy

$$(15.4) \quad l^0 = m^0 + n^0 i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{\Delta z}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \left(\frac{\Delta x}{|\Delta z|} + i \frac{\Delta y}{|\Delta z|} \right).$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \Delta \zeta &= W[z(a + \Delta t)] - W[z(a)] = W(z_0 + \Delta z) - W(z_0) = \\ &= (A + Bi)\Delta x + (C + Di)\Delta y + \varepsilon(\Delta z) \cdot |\Delta z|, \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon(\Delta z) \rightarrow 0$, gdy $\Delta z \rightarrow 0$, a więc gdy $\Delta t \rightarrow 0$. Zatem z (15.4)

$$(15.5) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{\Delta \zeta}{|\Delta z|} = (A + Bi)m^0 + (C + Di)n^0.$$

Wyrażenie po prawej stronie (15.5) na pewno nie znika; istotnie, gdyby było zerem, wówczas mielibyśmy $Am^0 + Cn^0 = 0$ oraz $Bm^0 + Dn^0 = 0$, a tym samym, z uwagi na $AD - BC \neq 0$, zniknęłyby obydwie liczby m^0, n^0 , co sprzeczne jest z równością $|l^0| = |m^0 + n^0 i| = 1$. Z istnienia granicy (15.5) wynika więc istnienie granicy wyrażenia

$$\Delta \zeta / |\Delta \zeta| = (\Delta \zeta / |\Delta z|) / |\Delta \zeta / \Delta z|,$$

która jest kierunkiem λ^0 krzywej Γ dla $t = a$; otrzymujemy przy tym z (15.5)

$$(15.6) \quad \lambda^0 = \frac{(Am^0 + Cn^0) + (Bm^0 + Dn^0)i}{|(Am^0 + Cn^0) + (Bm^0 + Dn^0)i|}.$$

Jeżeli więc $l = m + ni$ jest dowolnym współczynnikiem kierunkowym kierunku l^0 , zaś $\lambda = \mu + \nu i$ dowolnym współczynnikiem kierunkowym kierunku λ^0 (t. j. jeżeli l i λ różnią się odpowiednio od l^0 i λ^0 co najwyżej czynnikami rzeczywistymi dodatnimi), wówczas na zasadzie równości (15.6) czynią one zadość związkowi (15.3), gdzie h jest czynnikiem dodatnim.

Przekształcenie $\zeta = W(z)$, ciągle w otoczeniu punktu $z_0 \neq \infty$, nazywamy *podobnościovym* w tym punkcie, jeżeli

1) funkcja $W(z)$ jest skończona w punkcie z_0 i posiada w tym punkcie różniczkę zupełną $(A + Bi)\Delta x + (C + Di)\Delta y$ o wyznaczniku $AD - BC \neq 0$,

2) w odpowiedniości kierunków, jaką przekształcenie to wyznacza w myśl twierdzenia 15.1, zachowuje się kąt między odpowiadającymi sobie parami kierunków; innymi słowy: oznaczając przez l_1, λ_1 oraz l_2, λ_2 pary współczynników kierunkowych odpowiadających sobie kierunków, mamy (zgodnie z definicją kąta, § 12)

$$(15.7) \quad \arg \lambda_2 - \arg \lambda_1 = \arg l_2 - \arg l_1.$$

Warunek 2) może być zastąpiony przez następujący:

2^{bis}) w odpowiedniości kierunków, wyznaczonej przez przekształcenie $\zeta = W(z)$ w punkcie z_0 , kąt między odpowiadającymi sobie kierunkami ma wartość stałą (z dokładnością oczywiście do dowolnej wielokrotności 2π).

Istotnie, dla rozważanych wyżej współczynników $l_1, l_2, \lambda_1, \lambda_2$ warunek 2^{bis}) oznacza, iż

$$\arg \lambda_2 - \arg l_2 = \arg \lambda_1 - \arg l_1,$$

ten zaś związek równoważny jest związkowi (15.7). Kąt stały, jaki tworzą odpowiadające sobie kierunki w przekształceniu podobnościowym w punkcie z_0 , nazywać będziemy *kątem obrotu* przekształcenia w tym punkcie.

(15.8) *Na to, aby przekształcenie $\zeta = W(z)$, ciągle w otoczeniu punktu $z_0 \neq \infty$, było w tym punkcie podobnościowe, konieczne jest i wystarcza, aby funkcja $W(z)$ była w tym punkcie skończona i posiadała pochodną $W'(z_0) \neq 0$. Jeżeli warunek ten jest spełniony, wówczas $\arg W'(z_0)$ jest kątem obrotu rozważanego przekształcenia w punkcie z_0 .*

Dowód. Załóżmy najpierw, iż rozważane przekształcenie jest podobnościowe w z_0 . Wówczas przede wszystkim funkcja $W(z)$ posiada w tym punkcie różniczkę zupełną postaci $(A + Bi)\Delta x + (C + Di)\Delta y$ o wyznaczniku $AD - BC \neq 0$. Mamy więc:

$$(15.9) \quad W'_x(z_0) = A + Bi, \quad W'_y(z_0) = C + Di.$$

Niech θ będzie kątem obrotu przekształcenia $\zeta = W(z)$ w punkcie z_0 i niech $\gamma = \operatorname{tg} \theta$. Kierunkowi o współczynniku $l = m + ni$ odpowiada w myśl tw. 15.1 kierunek o współczynniku

$$\lambda = (Am + Cn) + (Bm + Dn)i;$$

przeto na mocy tw. 12.5 mamy tożsamościowo dla każdej pary liczb rzeczywistych m, n

$$(15.10) \quad \frac{m(Bm + Dn) - n(Am + Cn)}{m(Am + Cn) + n(Bm + Dn)} = \operatorname{tg} \theta = \gamma,$$

a więc

$$(15.11) \quad (B - A\gamma)m^2 + [(D - A) - (B + C)\gamma]mn - (C + D\gamma)n^2 = 0$$

(w przypadku, gdy $\gamma = \operatorname{tg} \theta = \infty$, przyrównujemy do zera mianownik ułamka w (15.10), co zresztą czyni rachunek jeszcze prostszym).

Z (15.11) otrzymujemy $B=A\gamma$, $C=-D\gamma$, $D-A=(B+C)\gamma$ i, podstawiając wartości na B oraz C z pierwszych dwu równości w trzecią, mamy $(D-A)(1+\gamma^2)=0$, a więc $A=D$; z kolei, z pierwszych dwu równań dostajemy $B=-C$. Zatem, mamy w myśl (15.9) $W'_x(z_0)=A+Bi=-i(C+Di)=-iW'_y(z_0)$, t.j. funkcja $W(z)$ czyni zadość warunkowi Cauchy-Riemanna w punkcie z_0 , a więc na mocy tw. 6.4 posiada w tym punkcie pochodną. Nadto

$$|W'(z_0)|^2 = |W'_x(z_0)|^2 = A^2 + B^2 = AD - BC \neq 0.$$

Odwrotnie, jeżeli funkcja $W(z)$ posiada w punkcie z_0 pochodną $W'(z_0)=A+Bi \neq 0$, wówczas w myśl tw. 6.4 posiada w tym punkcie różniczkę zupełną $W'(z_0) \cdot (\Delta x + i\Delta y) = (A+Bi)\Delta x + (-B+Ai)\Delta y$ o wyznaczniku $A^2+B^2 > 0$. Kierunkowi o współczynniku $l=m+ni$ odpowiada więc na mocy tw. 15.1 kierunek o współczynniku

$$\lambda = (A+Bi)m + (-B+Ai)n = (A+Bi)(m+ni) = W'(z_0) \cdot l.$$

W myśl tw. 9.7, kąt między kierunkami l i λ jest równy $\arg \lambda - \arg l = \arg W'(z_0)l - \arg l = \arg W'(z_0)$, a więc ma wartość stałą. Przekształcenie $\zeta=W(z)$ jest przeto podobnościowe w punkcie z_0 , przy czym $\arg W'(z_0)$ jest kątem obrotu tego przekształcenia.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli funkcja $W(z)$ posiada w punkcie z_0 różniczkę zupełną, wówczas stosunek $[W(z)-W(z_0)]/(z-z_0)$ ma granicę skończoną, gdy z dąży do z_0 wzdłuż jakiegokolwiek półprostej wychodzącej z punktu z_0 . Przyjmując, iż $(A+Bi)\Delta x + (C+Di)\Delta y$ jest różniczką zupełną funkcji $W(z)$ w punkcie z_0 , obliczyć tę granicę oraz jej wartość bezwzględną dla półprostej $z=z_0+(m+ni)t$.

2. Jeżeli funkcja $W(z)$ posiada w punkcie z_0 różniczkę zupełną i jeżeli granica części rzeczywistej stosunku $[W(z)-W(z_0)]/(z-z_0)$ istnieje, jest skończona i ta sama, gdy $z \rightarrow z_0$ wzdłuż trzech półprostych wychodzących z punktu z_0 , z których żadne dwie nie leżą na jednej prostej, wówczas funkcja $W(z)$ posiada pochodną w punkcie z_0 (Mięśzow).

Jest to uogólnienie twierdzenia zawartego w ćw. 3, § 6. Sformułować i udowodnić analogiczne uogólnienie twierdzenia zawartego w ćw. 4, § 6.

3. Jeżeli funkcja $W(z)$ posiada w punkcie z_0 różniczkę zupełną i jeżeli granica stosunku $[W(z)-W(z_0)]/(z-z_0)$ jest ta sama, gdy $z \rightarrow z_0$ wzdłuż dwu półprostych wychodzących z punktu z_0 i nie leżących na jednej prostej, wówczas funkcja $W(z)$ posiada pochodną w punkcie z_0 (Mięśzow).

[Wsk. Można założyć, iż jedna z danych półprostych posiada kierunek półoś rzeczywistej dodatniej.]

Twierdzenie to uważać można za uogólnienie tw. 6.4, gdyż warunki Cauchy-Riemanna oznaczają istnienie granicy rozważanego stosunku wzdłuż dwu półprostych, równoległych odpowiednio do osi rzeczywistej i urojonej.

4. Jeżeli funkcja $W(z)$, ciągła w otoczeniu punktu z_0 , posiada w tym punkcie różniczkę zupełną i jeżeli w odpowiedności kierunków, wyznaczonej w punkcie z_0 przez przekształcenie $\zeta=W(z)$, istnieją trzy pary odpowiadających sobie kierunków (l_1, λ_1) , (l_2, λ_2) , (l_3, λ_3) takie, iż 1° żadne dwa z kierunków l_1, l_2, l_3 nie są identyczne ani przeciwne (t.j. nie są kierunkami półprostych wychodzących z punktu z_0 i leżących na jednej prostej) oraz 2° $\angle(l_i, l_k) = \angle(\lambda_i, \lambda_k)$ dla $i, k=1, 2, 3$, — wówczas przekształcenie $\zeta=W(z)$ jest podobnościowe w punkcie z_0 , t.j. funkcja $W(z)$ posiada pochodną $\neq 0$ w tym punkcie (Mięśzow).

5. Jeżeli przekształcenie homograficzne hiperboliczne h_1 i przekształcenie homograficzne eliptyczne h_2 posiadają punkty niezmiennie wspólne, wówczas trajektorie przekształcenia h_2 tworzą rodzinę okręgów ortogonalnych do trajektorij przekształcenia h_1 ; dokładniej: przez każdy punkt płaszczyzny, różny od danych punktów niezmiennych, przechodzą dwa okręgi do siebie ortogonalne, które są odpowiednio trajektoriami przekształceń h_1 oraz h_2 .

[Wsk. Por. § 14, ćw. 11; udowodnić najpierw twierdzenie dla przypadku, gdy punktami niezmiennymi są punkty 0 i ∞ ; przejść do przypadku ogólnego, opierając się na tym, iż przekształcenia homograficzne są podobnościowe, a więc zachowują ortogonalność (prostokątność) okręgów.]

§ 16. Krzywe regularne. Krzywą C daną przez równanie (por. § 13, oraz Wstęp, § 12)

$$(16.1) \quad z=z(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leq t \leq b,$$

nazywać będziemy *regularną*, jeżeli przedział $[a, b]$ jej parametru rozbić można na skończoną ilość podprzedziałów takich, iż w każdym z nich funkcja $z(t)$ posiada pochodną $z'(t)$ ciągłą (na krańcach tych podprzedziałów funkcja może posiadać tylko pochodne jednostronne; krańce te mogą więc być punktami „kątowymi“ krzywej). Widoczne jest, iż regularność krzywej jest własnością niezależną od sposobu przedstawienia parametrycznego krzywej (por. Wstęp, § 12).

Jeżeli $t_0, t_1, \dots, t_n$ oznaczają dowolny ciąg wartości parametru taki, iż $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b$, wówczas kres górny sum $\sum_{k=0}^{n-1} |z(t_{k+1}) - z(t_k)|$ nazywa się *długością łuku* krzywej $z=z(t)$ w przedziale $[a, b]$ jej parametru. Jeżeli funkcja $z(t)=x(t)+iy(t)$ posiada w przedziale tym pochodną ciągłą, wówczas, jak wiadomo z analizy rzeczywistej, długość krzywej (16.1) dana jest przez całkę

$$(16.2) \quad l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Ponieważ długość sumy kilku krzywych równa jest sumie długości tych krzywych, więc wzór powyższy rozszerza się natychmiast na każdą krzywą regularną w przedziale $[a, b]$.

§ 17. Całka krzywoliniowa. Niech $g(t)$ i $h(t)$ będą dwiema funkcjami skończonymi w przedziale $[a, b]$. Weźmy pod uwagę sumy postaci

$$(17.1) \quad \sum_{k=0}^{n-1} g(t'_k)[h(t_{k+1}) - h(t_k)], \text{ gdzie } a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b \text{ oraz } t_k \leq t'_k \leq t_{k+1}.$$

Jeżeli istnieje granica skończona tych sum, gdy liczba charakterystyczna (por. Wstęp, § 9, str. 26) ciągu $t_0, t_1, \dots, t_n$ dąży do zera, wówczas mówimy, iż funkcja $g(t)$ jest całkowalna w $[a, b]$ względem $h(t)$; granicę tę nazywamy *całką Stieltjesa* funkcji $g(t)$ względem $h(t)$ w $[a, b]$ i oznaczamy przez $\int_a^b g(t) dh(t)$.

Jeżeli funkcje $g(t)$ i $h(t)$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i jeżeli ponadto funkcja $h(t)$ posiada w tym przedziale pochodną ciągłą, wówczas rozważana granica na pewno istnieje i wyraża się przez zwykłą całkę Riemanna. Mamy mianowicie w tym przypadku

$$(17.2) \quad \int_a^b g(t) dh(t) = \int_a^b g(t) h'(t) dt.$$

Dla dowodu założyć można, iż funkcja $h(t)$ jest rzeczywista, w przeciwnym bowiem razie moglibyśmy przeprowadzić dowód oddzielnie dla jej części rzeczywistej i urojonej. Niech M będzie kresem górnym $|g(t)|$ na $[a, b]$, a l niech oznacza liczbę charakterystyczną ciągu $t_0, t_1, \dots, t_n$. Niech $\omega(l)$ będzie kresem górnym liczb $|h'(\beta) - h'(a)|$ gdy $|\beta - a| \leq l$, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Oznaczając dla skrócenia przez S sumę (17.1) i stosując twierdzenie o wartości średniej, mamy

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} g(t'_k) h'(t'_k) (t_{k+1} - t_k), \text{ gdzie } t_k \leq t'_k \leq t_{k+1}, \quad t_k \leq t'_k \leq t_{k+1}.$$

Zatem

$$(17.3) \quad |S - \sum_{k=0}^{n-1} g(t'_k) h'(t'_k) (t_{k+1} - t_k)| \leq M \cdot (b - a) \cdot \omega(l).$$

Z uwagi na ciągłość pochodnej $h'(t)$ liczba $\omega(l)$ dąży wraz z l do zera. Z drugiej strony, odjemnik pod znakiem wartości bezwzględnej we wzorze (17.3) jest sumą przybliżoną całki Riemanna, występującej po prawej stronie równości (17.2), i dąży do tej całki, gdy $l \rightarrow 0$. Tym samym istnieje także granica sum S , gdy $l \rightarrow 0$, i spełniona jest równość (17.2).

Jeżeli funkcje $g(t)$ i $h(t)$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i jeżeli funkcja $g(t)$ jest całkowalna względem $h(t)$ w każdym z dwu przedziałów $[a, c]$ i $[c, b]$, gdzie $a < c < b$, wówczas całkowalna jest także w całym przedziale $[a, b]$ i jej całka Stieltjesa w tym przedziale równa jest sumie jej całek w dwu wymienionych podprzedziałach. Uwaga ta pozwala sformułować otrzymany przed chwilą wynik w postaci nieco ogólniejszej:

(17.4) *Jeżeli funkcje $g(t)$ i $h(t)$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i jeżeli przedział ten rozbić można na skończoną ilość podprzedziałów tak, by w każdym z nich funkcja $h(t)$ miała pochodną ciągłą, wówczas funkcja $g(t)$ jest całkowalna względem $h(t)$ w przedziale $[a, b]$ i jej całka Stieltjesa w tym przedziale sprowadza się do całki Riemanna przez równość (17.2).*

Jeżeli C jest dowolną krzywą ciągłą

$$(17.5) \quad z = z(t), \text{ gdzie } a \leq t \leq b,$$

a $F(z)$ jest funkcją skończoną określoną na tej krzywej (dokładniej: na obrazie geometrycznym tej krzywej, por. Wstęp, § 12), wówczas przez całkowalność i całkę krzywoliniową funkcji $F(z)$ wzdłuż krzywej C rozumiemy odpowiednio całkowalność i całkę Stieltjesa funkcji $F[z(t)]$ względem funkcji $z(t)$ w przedziale $[a, b]$. Oznaczać będziemy całkę krzywoliniową funkcji $F(z)$ wzdłuż krzywej C przez $\int_C F(z) dz$.

Z tw. 17.4 wynika bezpośrednio, iż

(17.6) *Funkcja $F(z)$, skończona i ciągła na krzywej regularnej C , posiada zawsze całkę krzywoliniową wzdłuż tej krzywej, przy czym, jeżeli krzywa C dana jest przez równanie (17.5), to*

$$(17.7) \quad \int_C F(z) dz = \int_a^b F[z(t)] z'(t) dt.$$

Z równości tej wynika m. in., iż wartość całki funkcji ciągłej wzdłuż krzywej regularnej nie zależy od sposobu przedstawienia parametrycznego krzywej (por. Wstęp, § 12). Istotnie, niech $t = \varphi(\tau)$ będzie nieistotną zmianą parametru, przy której krzywa C , dana przez równanie (17.5), przechodzi na krzywą Γ o równaniu

$$z = z[\varphi(\tau)], \text{ gdzie } \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

Funkcja $\varphi(\tau)$ jest rosnąca i ciągła w przedziale $[\alpha, \beta]$, a z pominięciem co najwyżej skończonej ilości punktów różniczkowalna.

Dla każdej tedy funkcji $F(z)$ ciągłej na krzywej C lub — co jest tym samym — na krzywej Γ mamy:

$$\begin{aligned}\int_C F(z) dz &= \int_a^b F[z(t)] \frac{dz}{dt} dt = \int_a^b F[z(t)] \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_a^b F[z(\varphi(\tau))] \frac{dz}{d\tau} d\tau = \int_\Gamma F(z) dz.\end{aligned}$$

Z tw. 17.6 wynikają dalej natychmiast następujące związki, w których C , C_1 i C_2 oznaczają krzywe regularne, a $F(z)$ funkcję ciągłą na C :

$$(17.8) \quad \int_{-C} F(z) dz = - \int_C F(z) dz;$$

$$(17.9) \quad \int_C F(z) dz = \int_{C_1} F(z) dz + \int_{C_2} F(z) dz, \quad \text{jeżeli } C = C_1 + C_2;$$

$$(17.10) \quad \left| \int_C F(z) dz \right| \leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML, \quad \text{gdzie } M \text{ oznacza kres górny wartości } |F(z)| \text{ na } C, \text{ a } L \text{ długość krzywej } C.$$

§ 18. Przykłady. W tym § ustalimy terminologię dla kilku krzywych regularnych, z którymi częściej mieć będziemy do czynienia. Przypomnimy przede wszystkim, iż krzywe, które różnią się od siebie co najwyżej nieistotnie, jak również ich obraz geometryczny, obejmujemy zwykle tą samą nazwą. W § 12 Wstępu określiliśmy już odcinek oraz łamaną jako krzywe na płaszczyźnie; są to oczywiście krzywe regularne. W szczególności, obwód prostokąta (por. Wstęp, § 8, str. 19) uważać można za krzywą regularną zamkniętą bez punktów wielokrotnych. Korzystając ze wzoru (16.2), widzimy, iż długość odcinka równa jest odległości jego krańców.

Przez okrąg o środku $z_0 \neq 0$ i promieniu $r \neq \infty$ rozumiemy krzywą zamkniętą bez punktów wielokrotnych

$$(18.1) \quad z = z_0 + re^{it}, \quad \text{gdzie } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Długość jej dana jest przez całkę

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = r \int_0^{2\pi} |e^{it}| dt = 2\pi r.$$

Jeżeli $K = K(z_0; r)$, wówczas (K) oznaczać będzie okrąg (18.1). Okrąg ten oznaczać będziemy także przez $C(z_0; r)$, t.j. tak samo jak jego obraz geometryczny, który również nazywa się okręgiem (por. Wstęp, § 8, str. 17). Pisząc dla krótkości $C_r = C(z_0; r)$, mamy na zasadzie tw. 17.6 dla każdej liczby całkowitej $k \neq -1$:

$$\int_{C_r} (z - z_0)^k dz = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{(k+1)it} dt = r^{k+1} \cdot \frac{e^{2(k+1)\pi i} - 1}{k+1} = 0,$$

podczas gdy

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Zatem:

$$(18.2) \quad \int_{C(z_0; r)} (z - z_0)^k dz \begin{cases} = 0 & \text{dla } k \neq -1 \\ = 2\pi i & \text{dla } k = -1. \end{cases}$$

Dla przykładu, oraz ze względu na dalsze zastosowania, obliczymy kilka całek krzywoliniowych wzdłuż łamanych.

Jeżeli $F(z)$ jest funkcją skończoną i ciągłą, określoną na odcinku $[z_1, z_2]$, wówczas, pisząc równanie tego odcinka w postaci $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$, gdzie $0 \leq t \leq 1$, znajdujemy

$$\int_{[z_1, z_2]} F(z) dz = (z_2 - z_1) \int_0^1 F[(z_2 - z_1)t + z_1] dt;$$

w szczególności, dla odcinka $[z_1, z_2]$, równoległego do osi odciętych,

$$(18.3) \quad \int_{[z_1, z_2]} F(z) dz = \int_{x_1}^{x_2} F(x + iy_1) dx, \quad \text{jeżeli } z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_1,$$

i podobnie dla odcinka $[z_1, z_2]$ równoległego do osi rzędnych,

$$(18.4) \quad \int_{[z_1, z_2]} F(z) dz = i \int_{y_1}^{y_2} F(x_1 + iy) dy, \quad \text{jeżeli } z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_1 + iy_2.$$

Stąd, dla każdej funkcji $F(z)$ ciągłej na obwodzie (I) prostokąta $I = [a_1, a_2; b_1, b_2]$,

$$\int_{(I)} F(z) dz = \int_{a_1}^{a_2} [F(x + ib_1) - F(x + ib_2)] dx + i \int_{b_1}^{b_2} [F(a_2 + iy) - F(a_1 + iy)] dy.$$

W szczególności więc dla kwadratu $Q = [-a, a; -a, a]$ mamy na zasadzie wzoru (18.4):

$$\int_{(Q)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \int_{-a}^a \frac{dx}{x^2 + a^2} + 2\pi i \int_{-a}^a \frac{dy}{y^2 + a^2} = 2\pi i.$$

Podstawiając tu $z - z_0$ zamiast z , gdzie z_0 jest dowolną liczbą zespoloną, otrzymujemy wzór

$$(18.5) \quad \int_{(Q)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \text{gdzie } Q \text{ jest kwadratem o środku } z_0.$$

ĆWICZENIA. 1. Niech $W(z)$ będzie funkcją ciągłą w otoczeniu punktu z_0 , posiadającą w tym punkcie różniczkę zupełną. Udowodnić, iż wówczas

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} W(z) dz = i \cdot [W'_x(z_0) + i W'_y(z_0)],$$

gdzie C_r oznacza okrąg $C(z_0; r)$.

Na to więc, aby funkcja $W(z)$ posiadała pochodną w punkcie z_0 , konieczne jest i wystarcza, by $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} W(z) dz = 0$.

2. Niech $P(z)$ i $Q(z)$ będą dwoma wielomianami, przy czym $Q(z)$ niech będzie stopnia wyższego niż $P(z)$. Oznaczając przez I_m , gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, kwadrat o wierzchołkach w punktach $(m + \frac{1}{2}) \cdot (\pm 1 \pm i)$, udowodnić, iż całki $\int_{(I_m)} \frac{1}{\sin \pi z} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$ oraz $\int_{(I_m)} \operatorname{ctg} \pi z \frac{P(z)}{Q(z)} dz$ dążą do 0, gdy $m \rightarrow \infty$.

[Wsk. Skorzystać z tw. 9.12; zauważyć, iż $z \cdot \left[\frac{P(z)}{Q(z)} + \frac{P(-z)}{Q(-z)} \right] \rightarrow 0$, gdy $z \rightarrow \infty$; przy całkowaniu wzdłuż obwodu (I_m) połączyć całki wzdłuż boków przeciwnych.]

3. Obliczyć całki $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(n\theta - \sin \theta) d\theta$ oraz $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

[Wsk. Zauważyć, iż całki te są odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną całki funkcji $e^z \cdot z^{-(n+1)}$ wzdłuż okręgu $C(0; 1)$.]

4. Niech D_r oznacza półokrąg $z = re^{i\theta}$, gdzie $0 \leq \theta \leq \pi$. Zakładając, że $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi oraz że $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$, obliczyć granicę wartości całki $\int_{D_r} \frac{A_1 \exp ia_1 z + A_2 \exp ia_2 z + \dots + A_n \exp ia_n z}{z^2} dz$, gdy $r \rightarrow 0$ oraz gdy $r \rightarrow \infty$.

5. Jeżeli $-1 < \nu < 1$, wówczas całka $I_n = \int_{C_n} \frac{\exp \nu \pi i}{\sin \pi z} \frac{dz}{z - a}$, gdzie a jest

dowolną liczbą i $C_n = C(0; n + \frac{1}{2})$, dąży do 0, gdy n dąży do $+\infty$ przebiegając wartości całkowite.