

WSTĘP

TEORIA MNOGOŚCI

§ 1. Definicje podstawowe. Podstawowym pojęciem teorii mnogości jest pojęcie *zbioru* czyli *mnogości*. Jeśli A jest jakimkolwiek zbiorem przedmiotów, wówczas przedmioty należące do zbioru A nazywamy jego *elementami*; znak $a \in A$ czytamy: „ a jest elementem zbioru A ” lub „ a należy do A ”. Zbiór złożony z jednego tylko elementu a oznaczamy przez $\{a\}$.

Dogodnie jest wprowadzić pojęcie zbioru *pustego*, t. j. nie zawierającego żadnego elementu. Zbiór taki oznaczamy przez 0 .

Jeśli A i B są zbiorami i każdy element zbioru A należy do B , wówczas mówimy, iż A jest *podzbiorem* zbioru B , lub że *zawiera się w B* , i piszemy $A \subset B$ lub $B \supset A$. Jeśli jednocześnie $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są identyczne, t. j. składają się z tych samych elementów; piszemy wówczas $A = B$.

Ciąg $\{A_n\}$ zbiorów nazywamy *wstępującym*, jeśli $A_n \subset A_{n+1}$ dla każdego n , i *zstępującym*, jeśli $A_{n+1} \subset A_n$ dla każdego n . Ciągi wstępujące i zstępujące zbiorów obejmujemy nazwą ciągów *monotonicznych*.

Zbiór, którego elementami są również zbiory, nazywamy często *rodziną* lub *układem* zbiorów (używamy także terminu *rodzina* dla oznaczenia niektórych specjalnych zbiorów; mówimy np. często *rodzina funkcji*).

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest rodziną zbiorów, wówczas zbiór tych wszystkich elementów, które należą do jednego przynajmniej ze zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$, nazywamy *sumą* zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$, zbiór zaś tych wszystkich elementów, które należą jednocześnie do wszystkich zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$, *iloczynem* zbiorów tej rodziny. Sumę oraz iloczyn zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$ oznaczamy odpowiednio przez $\Sigma \mathfrak{A}$ oraz $\Pi \mathfrak{A}$.

Jeśli rodzina zbiorów jest ciągiem skończonym zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_m$, wówczas sumę tych zbiorów oznaczamy również przez $A_1 + A_2 + \dots + A_m$ lub $\sum_{k=1}^m A_k$, a iloczyn przez $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m$ lub $\prod_{k=1}^m A_k$. Sumę ciągu nieskończonego $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ zbiorów oznaczamy analogicznie przez $A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots$ lub $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, a iloczyn przez $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k \cdot \dots$ lub $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$. Używamy również dla oznaczenia sumy i iloczynu ciągu skończonego lub nieskończonego zbiorów $\{A_k\}$ znaków $\sum_k A_k$ i $\prod_k A_k$, gdy zakres wartości, jakie przebiega wskaźnik k , jest skądinąd wiadomy.

Zbiory, które nie posiadają elementów wspólnych, t. j. których iloczyn jest pusty, nazywamy *rozłącznymi*.

Jeśli A i B są zbiorami, wówczas $B - A$ oznacza różnicę tych dwu zbiorów, t. j. zbiór elementów, które należą do B , lecz nie należą do A . Jeśli w szczególności $A \subset B$, wówczas różnicę $B - A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A do B i oznaczamy przez $C_B A$. Zazwyczaj w rozumowaniach występuje pewien stały zbiór H („przestrzeń”), który zawiera wszystkie inne zbiory rozważane. Wówczas dopełnienie zbioru A do zbioru H nazywamy krótko dopełnieniem zbioru A i zamiast $C_H A$ piszemy $C A$.

Dla każdego ciągu zbiorów $\{A_n\}$ zawartych w H zachodzą wzory następujące, które noszą nazwę *wzorów de Morgana*:

$$(1.1) \quad C \sum_n A_n = \prod_n C A_n, \quad C \prod_n A_n = \sum_n C A_n.$$

Istotnie, jeśli a jest elementem zbioru występującego np. po stronie lewej pierwszego ze wzorów (1.1), wówczas znaczy to, że a nie należy do żadnego ze zbiorów A_n , t. j. iż należy do każdego ze zbiorów $C A_n$, co znowu znaczy, iż należy do zbioru występującego po stronie prawej tego wzoru. Podobnie dowodzi się drugiego ze wzorów (1.1).

ĆWICZENIA. 1. Sprawdzić następujące tożsamości:

$$A \cdot \sum_n B_n = \sum_n A \cdot B_n, \quad A + \prod_n B_n = \prod_n (A + B_n),$$

w których $A, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ oznaczają dowolne zbiory. Pierwsza z nich wyraża rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania, druga — rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia.

Wyprowadzić drugą tożsamość z pierwszej przy pomocy wzoru de Morgana.

2. Sprawdzić wzór de Morgana dla dowolnych rodzin zbiorów: jeżeli $\mathfrak{A}$ jest dowolną rodziną zbiorów, a $\mathfrak{B}$ oznacza rodzinę dopełnień zbiorów należących do $\mathfrak{A}$, wówczas $C \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

§ 2. Zbiory przeliczalne. Jeżeli każdemu elementowi zbioru A przyporządkowany został pewien element związku B w ten sposób, iż każdy element zbioru B przyporządkowany jest jednemu i tylko jednemu elementowi zbioru A , wówczas mówimy, że między zbiorami A i B ustalona została *odpowiedniość jedno-jednoznaczna*. Dwa zbiory, między którymi odpowiedniość taką można ustalić, nazywają się zbiorami *tej samej mocy*. Zbiorem *przeliczalnym* nazywa się każdy zbiór tej samej mocy co zbiór wszystkich liczb naturalnych $1, 2, \dots, n, \dots$. Zbiór, który nie jest skończony ani przeliczalny, nazywa się *nieprzeliczalnym*, podczas gdy zbiory skończone oraz zbiory przeliczalne obejmujemy wspólną nazwą zbiorów *co najwyżej przeliczalnych*. Zbiór jest więc co najwyżej przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy elementy jego ustawić można w ciąg skończony lub nieskończony.

Suma ciągu, skończonego lub nieskończonego, $\{A^{(i)}\}_{i=1,2,\dots}$ zbiorów co najwyżej przeliczalnych jest również zbiorem co najwyżej przeliczalnym. W samej rzeczy, ustawiając elementy każdego zbioru $A^{(i)}$ w ciąg skończony lub nieskończony $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_k^{(i)}, \dots$, możemy uporządkować wszystkie elementy zbioru $\sum_i A^{(i)}$ w ciąg

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_4^{(1)}, a_3^{(2)}, a_2^{(3)}, a_1^{(4)}, \dots,$$

w którym wypisane są kolejno grupy skończone wyrazów $a_k^{(i)}$ o sumach wskaźników i oraz k równych odpowiednio 2, 3, 4, 5 i t. d.

W szczególności np. zbiór wszystkich liczb całkowitych jest przeliczalny; istotnie, możemy go ustawić w ciąg $0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots$

Jeżeli $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(i)}, \dots$ jest ciągiem skończonym lub nieskończonym zbiorów co najwyżej przeliczalnych, wówczas również co najwyżej przeliczalny jest zbiór A wszystkich ciągów skończonych postaci $(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)})$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną, zaś $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$ są dowolnymi elementami odpowiednio zbiorów $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$. Dowód przebiega analogicznie do rozumowania poprzedniego. Porządkujemy elementy każdego zbioru $A^{(i)}$ w ciąg $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_j^{(i)}, \dots$, po czym wszystkie elementy zbioru A , t. j. ciągi skończone postaci $(a_{j_1}^{(1)}, a_{j_2}^{(2)}, \dots, a_{j_k}^{(k)})$,

możemy uporządkować w ciąg, wypisując je kolejno grupami skończonymi wyrazów o sumach wskaźników dolnych $j_1 + j_2 + \dots + j_k$, równych 1, 2, 3 i t. d.

Z twierdzenia tego wynika np., że zbiór wszystkich układów skończonych $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ liczb całkowitych jest przeliczalny; dalej, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest również przeliczalny, ponieważ każda liczba wymierna jest wyznaczona przez parę liczb całkowitych. Z kolei otrzymujemy przeliczalność zbioru wszystkich ciągów skończonych liczb wymiernych $(r_1, r_2, \dots, r_k)$, a w szczególności — przeliczalność zbioru liczb zespolonych *wymiernych*, t. j. liczb zespolonych postaci $a + bi$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi wymiernymi.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, iż moc zbioru nieskończonego nie ulega zmianie, jeśli dodać doń dowolny zbiór skończony lub przeliczalny (oprzeć się na tym, że każdy zbiór nieskończony zawiera zawsze podzbiór przeliczalny).

2. Udowodnić, iż prosta, przedział i przedział otwarty są zbiorami równo mocy (rozumiemy przez *prostą* zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, przez *przedział* $[a, b]$ (gdzie $a \leq b$) zbiór wszystkich liczb x takich, iż $a \leq x \leq b$, przez *przedział otwarty* (a, b) zbiór wszystkich liczb x takich, iż $a < x < b$; liczby a i b nazywamy się *krańcami* przedziału).

3. Pokazać, iż zbiór wszystkich przedziałów o krańcach wymiernych jest przeliczalny (objaśnienie nazw w ćw. 2).

§ 3. Przestrzeń topologiczna abstrakcyjna. Jakkolwiek w dalszym ciągu przedmiotem naszych rozważań będą prawie wyłącznie zbiory zawarte w płaszczyźnie i funkcje określone na tych zbiorach, to jednak w pewnych tematach teorii funkcji (np. w definicji powierzchni Riemanna, por. rozdz. VI) dogodnie jest przyjąć za punkt wyjścia ogólne przestrzenie abstrakcyjne, zdefiniowane przez postulaty. Oczywiście układ takich postulatów może być dobrany rozmaicie. Przyjmiemy tu układ Hausdorffa¹⁾, nieznacznie tylko zmieniony stosownie do dalszych potrzeb tego wykładu.

Nazywać będziemy *przestrzenią abstrakcyjną* każdy zbiór H , w którym wyróżniona została pewna rodzina $\mathfrak{S}$ podzbiorów, zwanych *otoczeniami* i spełniających postulaty następujące:

I. Jeśli a i b są dwoma różnymi elementami przestrzeni H , to istnieją dwa rozłączne otoczenia U i V takie, iż $a \in U$ oraz $b \in V$.

II. Dla każdego punktu a przestrzeni H istnieje ciąg zstępujący otoczeń $\{U_n\}$ zawierających punkt a , taki iż, jeśli U jest dowolnym otoczeniem zawierającym punkt a , to poczynając od pewnej wartości wskaźnika n , wszystkie otoczenia U_n zawierają się w U .

¹⁾ F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, pp. 213, 263

Jeżeli a jest dowolnym punktem przestrzeni, a $\{U_n\}$ ciągiem otoczeń, spełniających dla tego punktu warunek postulatu II, wówczas dla każdej pary otoczeń V i W , zawierających punkt a , będziemy mieli, poczynając od pewnej wartości wskaźnika n , jednocześnie $U_n \subset V$ oraz $U_n \subset W$. Otrzymujemy więc twierdzenie następujące:

(3.1) *Jeżeli punkt a przestrzeni H należy jednocześnie do dwu otoczeń V i W , wówczas istnieje takie otoczenie, które zawiera punkt a i zawarte jest w każdym z otoczeń V i W .*

Ciąg $\{U_n\}$ otoczeń należących do rodziny $\mathfrak{S}$ nazywamy *ośrodkiem przeliczalnym* (albo *bazą przeliczalną*) tej rodziny, jeśli dla każdego punktu a przestrzeni H i dla każdego otoczenia U zawierającego ten punkt istnieje w ciągu $\{U_n\}$ otoczenie U_n takie, iż $a \in U_n \subset U$. Przestrzeń H nazywa się *ośrodkową*, jeśli odpowiadająca jej rodzina otoczeń posiada ośrodek przeliczalny. Przestrzenie specjalne, które rozważane będą w dalszym ciągu (płaszczyzna, powierzchnie Riemanna), okażą się wszystkie ośrodkowe.

ĆWICZENIA. 1. Oznaczmy przez R prostą, a przez $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ i $\mathfrak{R}_5$ rodziny następujące: 1^o zbiorów, z których każdy składa się dokładnie z jednego punktu prostej, 2^o przedziałów (łącznie z przedziałami redukującymi się do punktu), 3^o przedziałów o krańcach wymiernych, 4^o przedziałów otwartych i 5^o przedziałów otwartych o krańcach wymiernych (por. § 2, ćw. 2). Sprawdzić, iż każda z tych rodzin uważana być może za rodzinę otoczeń dla prostej R (sprawdzić postulaty I i II). Pokazać, iż rodzina $\mathfrak{R}_3$ jest ośrodkiem przeliczalnym rodziny $\mathfrak{R}_4$.

2. Niech $\mathfrak{S}$ będzie rodziną otoczeń dla przestrzeni H (spełniającą postulaty I i II), H_1 dowolnym zbiorem w H i $\mathfrak{S}_1$ rodziną zbiorów postaci $H_1 \cap U$, gdzie $U \in \mathfrak{S}$. Pokazać, iż wówczas zbiór H_1 uważany być może za przestrzeń abstrakcyjną z rodziną otoczeń $\mathfrak{S}_1$.

3. Zbiór A nazywamy *przestrzenią metryczną*, jeżeli każdej parze elementów x, y tego zbioru przyporządkowana jest pewna liczba rzeczywista $\varrho(x, y)$, zwana *odległością* tych dwu punktów i spełniająca warunki następujące:

(a) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \geq 0$ dla każdej pary punktów $x \in A$ oraz $y \in A$, przy czym $\varrho(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;

(b) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ dla każdej trójki punktów $x \in A, y \in A, z \in A$.

Przez *kulę otwartą*, lub *otoczenie*, o środku x_0 i promieniu r (gdzie r jest liczbą rzeczywistą dodatnią i $x_0 \in A$) w przestrzeni A rozumiemy zbiór wszystkich punktów x tej przestrzeni takich, iż $\varrho(x_0, x) < r$. Sprawdzić, iż określona w ten sposób rodzina otoczeń dla przestrzeni metrycznej spełnia postulaty I i II.

4. Niech $\varrho(x, y)$ oznacza odległość dwu punktów w przestrzeni metrycznej A . Sprawdzić, że wzór $\varrho_0(x, y) = \varrho(x, y) / [1 + \varrho(x, y)]$ określa nową odległość w tej przestrzeni (t. j. iż $\varrho_0(x, y)$ spełnia warunki odległości, podane w ćw. 3). Przy nowej tej metryce odległość każdego dwu punktów przestrzeni jest mniejsza od 1.

5. Przykłady przestrzeni metrycznych: 1^o Prosta $\mathbb{R}$: $\varrho(x, y) = |x - y|$; 2^o Przestrzeń C_1 funkcji ciągłych w przedziale $[0, 1]$: odległość $\varrho(x, y)$, gdy $x(t)$ i $y(t)$ oznaczają dwie dowolne funkcje ciągłe w przedziale $[0, 1]$, określamy jako kres górny różnicy bezwzględnej $|y(t) - x(t)|$ dla $0 \leq t \leq 1$; 3^o Przestrzeń C_2 funkcji ciągłych na całej linii prostej: odległość $\varrho(x, y)$ dwu takich funkcji $x(t)$ i $y(t)$ określamy jako sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{M_n}{1 + M_n}$, gdzie M_n oznacza kres górny różnicy

bezwzględnej $|y(t) - x(t)|$ dla $n \leq t \leq n+1$; 4^o Przestrzeń M funkcji ograniczonych w przedziale $[0, 1]$: definicja odległości taka sama jak dla przestrzeni C_1 .

Sprawdzić, iż powyższe definicje odległości spełniają warunki (a) i (b) ćwiczenia 3.

§ 4. Zbiory domknięte i otwarte. W § tym oraz w dwu §§ następnych (§§ 5 i 6) H oznaczać będzie dowolnie ustaloną przestrzeń abstrakcyjną z odpowiadającym jej układem otoczeń $\mathcal{S}$, spełniającym postulaty I i II, § 3.

Punkt $a \in H$ nazywa się *punktem skupienia* zbioru $A \subset H$, jeśli każde otoczenie zawierające punkt a zawiera punkty zbioru A , różni od a . Zbiór utworzony z punktów zbioru A oraz jego punktów skupienia nazywamy *domknięciem* zbioru A i oznaczamy przez $\bar{A}$. Zbiór A nazywamy *domkniętym*, jeśli $A = \bar{A}$, t. j. jeśli zbiór A zawiera wszystkie swe punkty skupienia.

Ogólniej, jeśli $A \subset B \subset H$, wówczas zbiór $\bar{A} \cdot B$ nazywa się *domknięciem zbioru A w zbiorze B* , przy czym zbiór A nazywa się *domkniętym w zbiorze B* , jeśli $A = \bar{A} \cdot B$, t. j. jeśli zbiór A zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, które należą do B . Domkniętość zbioru w zbiorze domkniętym, a więc — w szczególności — w przestrzeni H oznacza oczywiście domkniętość zwykłą.

Punkt a zbioru A , który nie jest jego punktem skupienia, nazywa się *punktem odosobnionym* zbioru, a zbiór, którego wszystkie punkty są odosobnione — *zbiorem odosobnionym*. Zbiór niepusty, który nie posiada punktów odosobnionych, nazywa się *zbiorem w sobie gęstym*, a zbiór jednocześnie domknięty i w sobie gęsty — *zbiorem doskonałym*.

Punkt a przestrzeni H nazywamy *granicą* ciągu nieskończonego $\{a_n\}$ punktów, jeśli każde otoczenie, zawierające punkt a , zawiera zarazem wszystkie wyrazy a_n ciągu, począwszy od pewnej wartości wskaźnika n . Z postulatu I, § 3, wynika, iż ciąg posiadać może co najwyżej jedną granicę. Ciąg $\{a_n\}$, który posiada granicę, nazywa się *zbieżnym* i granicę jego oznaczamy przez $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(4.1) *Na to, aby punkt a należał do domknięcia $\bar{A}$ zbioru A , konieczne jest i wystarcza, aby był granicą ciągu $\{a_n\}$ punktów tego zbioru.*

Dowód. Załóżmy iż $a \in \bar{A}$. Niech $\{U_n\}$ będzie ciągiem zstępującym otoczeń, zawierających a i spełniających warunek postulatu II, § 3. Ponieważ $a \in \bar{A}$, więc każdemu otoczeniu U_n przyporządkować możemy pewien punkt $a_n \in A \cdot U_n$. Z drugiej strony, jeśli U jest dowolnym otoczeniem punktu a , wówczas, począwszy od pewnej wartości wskaźnika n , wszystkie otoczenia U_n , a więc tym samym i wszystkie punkty a_n , zawarte są w U . Mamy więc $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Założmy odwrotnie, iż a jest granicą pewnego ciągu punktów $\{a_n\}$ zbioru A . Rozważymy dwa przypadki: albo wszystkie elementy ciągu $\{a_n\}$ są, począwszy od pewnego miejsca, jednakowe i wówczas, począwszy od pewnej wartości n , mamy $a = a_n \in A \subset \bar{A}$; albo ciąg $\{a_n\}$ zawiera nieskończenie wiele elementów różnych i wówczas, jak widzimy natychmiast, punkt a jest punktem skupienia zbioru A , a więc $a \in \bar{A}$.

(4.2) *Domknięcie dowolnego zbioru jest zbiorem domkniętym, czyli wzór $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ zachodzi dla każdego zbioru A przestrzeni.*

Dowód. Jeśli $a \in \bar{\bar{A}}$, wówczas każde otoczenie, zawierające a , zawiera punkty zbioru $\bar{A}$ i tym samym punkty zbioru A ; zatem $a \in \bar{A}$, a więc $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$, co wobec oczywistego związku $\bar{\bar{A}} \supset \bar{A}$ daje $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Punkt a zbioru A nazywamy *punktem wewnętrznym* tego zbioru, jeśli istnieje otoczenie U takie, iż $a \in U \subset A$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru A nazywamy jego *wnętrzem* i oznaczamy przez A° . Zbiór $\bar{A} - A^\circ$ nazywa się *brzegiem* zbioru A . Zbiór niepusty, który jest identyczny ze swym wnętrzem, nazywa się *otwartym*.

Jeżeli punkt nie należy do domknięcia zbioru A , t. j. nie leży ani wewnątrz, ani na brzegu tego zbioru, powiadamy, iż punkt ten leży *zewnątrz* zbioru A . Mówiąc więc, iż warunek pewien spełniony jest zewnątrz jakiegoś zbioru, rozumiemy przez to, że spełniony jest w dopełnieniu domknięcia tego zbioru.

Z definicji zbiorów domkniętych i otwartych wynika natychmiast, iż

(4.3) *Dopełnienie każdego zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym; dopełnienie każdego zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym.*

Jeśli A i B są dwoma dowolnymi zbiorami w przestrzeni H , wówczas, jak sprawdzamy łatwo na mocy tw. 3.1,

$$(A \cdot B)^\circ = A^\circ \cdot B^\circ \quad \text{oraz} \quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Przez indukcję uogólniamy natychmiast te wzory na dowolną skończoną ilość zbiorów. Z drugiej strony, jeśli $\mathfrak{A}$ jest dowolną skończoną lub nieskończoną rodziną zbiorów, wówczas, jak sprawdzamy bezpośrednio, wewnątrz sumy zbiorów tej rodziny zawiera sumę wewnątrz zbiorów rodziny, zaś domknięcie iloczynu zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$ zawarte jest w iloczynie domknięć tych zbiorów. Wynika stąd twierdzenie następujące:

(4.4) *Suma skończonej ilości — oraz iloczyn dowolnej rodziny — zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Iloczyn skończonej ilości — oraz suma dowolnej rodziny — zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

Mówimy, iż podzbiór A pewnego zbioru B jest *wszędzie gęsty* w B , jeśli $BC\overline{A}$. Jeśli B jest całą przestrzenią H , wówczas ostatni warunek napisać można w postaci równości $H=\overline{A}$.

Zbiór, którego domknięcie nie posiada punktów wewnętrznych, t. j. nie zawiera żadnego otoczenia, nazywa się *nigdzie gęstym*.

(4.5) *Jeżeli przestrzeń H jest ośrodkowa, wówczas w przestrzeni tej:*

1° *każdy zbiór E zawiera podzbiór co najwyżej przeliczalny, wszędzie gęsty w E ;*

2° *każdy zbiór odosobniony Z jest co najwyżej przeliczalny;*

3° *z każdej rodziny zbiorów otwartych, pokrywających łącznie pewien zbiór, wyjąć można ciąg zbiorów, które również zbiór ten pokrywają;*

4° *każda rodzina $\mathfrak{G}_0$ zbiorów otwartych rozłącznych jest co najwyżej przeliczalna.*

Dowód. *ad 1°:* Niech $\{U_n\}$ będzie ośrodkiem przeliczalnym (§ 3, str. 5) rodziny otoczeń przestrzeni H . Każdemu otoczeniu U_n , które zawiera punkty danego zbioru E , przyporządkujemy pewien punkt $a_n \in U_n \cap E$. Zbiór punktów, przyporządkowanych w ten sposób otoczeniom U_n , oznaczmy przez A . Zbiór ten jest oczywiście zawarty w E i co najwyżej przeliczalny. Pokażemy, iż jest wszędzie gęsty w E , t. j. iż $EC\overline{A}$.

W tym celu niech a będzie dowolnym punktem zbioru E , a U dowolnym otoczeniem, zawierającym ten punkt. W ośrodku $\{U_n\}$ istnieje napewno otoczenie U_n takie, iż $a \in U_n \subset U$. Zatem $U_n \cap E \neq \emptyset$, i otoczenie U_n — a więc tym samym otoczenie dane U — zawiera punkt zbioru A (punkt a_n). Przeto $a \in \overline{A}$, skąd $EC\overline{A}$.

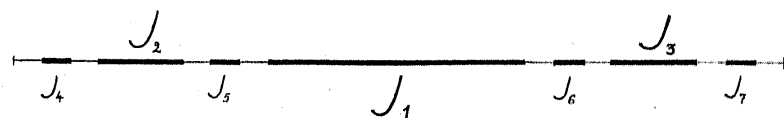
ad 2°: Na mocy 1° istnieje zbiór co najwyżej przeliczalny $Z_0 \subset Z$, który jest wszędzie gęsty w Z . Ponieważ jednak zbiór Z jest z założenia odosobniony, przeto łatwo zauważyć, iż jest identyczny z każdym swym podzbiorem wszędzie gęstym. Zatem $Z=Z_0$, t. j. zbiór Z jest co najwyżej przeliczalny.

ad 3°: Niech $\mathfrak{G}$ będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych i G sumą zbiorów tej rodziny. Niech następnie (jak w dowodzie 1°) $\{U_n\}$ będzie ośrodkiem przeliczalnym rodziny otoczeń przestrzeni H . Każdemu punktowi $a \in G$ przyporządkować możemy takie otoczenie U_n , które zawiera punkt a i zawarte jest w jednym ze zbiorów otwartych rodziny $\mathfrak{G}$. Jeśli więc przez $\{U_{n_k}\}$ oznaczmy ciąg tych wszystkich otoczeń U_n , które przyporządkowane zostały punktom zbioru G , wówczas będziemy mieli $G \subset \sum_k U_{n_k}$. Z drugiej strony, każde otoczenie U_{n_k} otrzymanego ciągu zawarte jest w pewnym zbiorze otwartym G_{n_k} rodziny $\mathfrak{G}$. Ciąg zbiorów otwartych $\{G_{n_k}\}$ pokrywa tedy zbiór G , a więc tym samym pokrywa każdy zbiór zawarty w sumie zbiorów rodziny $\mathfrak{G}$.

ad 4°: Na zasadzie 3° z rodziny $\mathfrak{G}_0$ wyjąć możemy ciąg skończony lub przeliczalny zbiorów, których suma jest identyczna z sumą zbiorów rodziny $\mathfrak{G}_0$. Ponieważ jednak, z założenia, rodzina $\mathfrak{G}_0$ składa się ze zbiorów rozłącznych, przeto ciąg ten zawierać musi wszystkie zbiory rodziny $\mathfrak{G}_0$, która zatem jest co najwyżej przeliczalna.

Część 3° twierdzenia 4.5 nosi nazwę *twierdzenia Lindelöfa* i należy do typu t. zw. „*twierdzeń o pokrywaniu*”. Inne twierdzenia tego typu (twierdzenia Borela oraz Borela-Lebesgue'a) podane będą w § 6.

ĆWICZENIA. 1. Przykłady zbiorów na prostej, uważanej za przestrzeń metryczną R z odległością daną przez wzór $\varrho(x,y)=|y-x|$ (por. § 2, ćw. 2 oraz § 3, ćw. 3 i 5). 1° Każdy przedział $[a,b]$ jest zbiorem domkniętym, każdy przedział otwarty (a,b) jest zbiorem otwartym; 2° zbiór punktów $1, 2, \dots, n, \dots$ jest zbiorem odosobnionym; 3° zbiór punktów $0, 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ jest zbiorem domkniętym z jednym tylko punktem skupienia 0; 4° zbiór punktów wymiernych jest zbiorem przeliczalnym wszędzie gęstym w R .



2. Zbiór nigdzie gęsty Cantora. Oznaczmy przez I przedział $[0,1]$; dzielimy I na trzy przedziały równe i wewnątrz przedziału środkowego, t. j. przedziału otwartego $(1/3, 2/3)$, oznaczamy przez J_1 . Każdy z pozostałych dwu przedziałów $[0, 1/3]$ i $[2/3, 1]$ dzielimy znów na trzy równe przedziały i przedziały środkowe otwarte oznaczamy przez J_2 i J_3 . Postępujemy w ten sam sposób z każdym z czterech przedziałów dopełniających do przedziałów J_1, J_2 i J_3 w I i przedziały środkowe otwarte, otrzymane przy podziale tych czterech przedziałów, oznaczamy przez J_4, J_5, J_6 i J_7 (p. rysunek). Postępując tak dalej, otrzymujemy ciąg przedziałów otwartych rozłącznych $\{J_n\}$. Udowodnić, iż zbiór $B = I - \sum_{n=1}^{\infty} J_n$ jest doskonały nigdzie gęsty (zbiór ten nazywa się *zbiorem Cantora*). Pokazać, iż zbiór ten można także określić jako zbiór wszystkich liczb przedziału $[0,1]$, które posiadają rozwinięcie na ułamek trójkowy nie zawierający cyfry 1 (t. j. dają się rozwinąć na szereg (skończony lub nieskończony) postaci $a_1/3 + a_2/3^2 + \dots + a_n/3^n + \dots$, o współczynnikach a_n równych 0 lub 2).

3. Na to, aby przestrzeń metryczna (por. § 3, ćw. 3) była ośrodkowa, konieczne jest i wystarcza, aby istniał zbiór skończony lub przeliczalny, wszędzie gęsty w tej przestrzeni.

4. Pokazać, że zbieżność ciągu elementów $\{x_n\}$ oznacza w przestrzeniach C_1 i M (§ 3, ćw. 5) zbieżność jednostajną ciągu funkcji $\{x_n(t)\}$ w przedziale $[0,1]$ a w przestrzeni C_2 — zbieżność jednostajną ciągu funkcji $\{x_n(t)\}$ w każdym przedziale (skończonym) prostej.

5. a) Wyznaczając w przestrzeniach C_1 i C_2 (§ 3, ćw. 5) zbiory przeliczalnie wszędzie gęste, udowodnić, że przestrzeń te są ośrodkowe. b) Pokazać, iż w przestrzeni M (§ 3, ćw. 5) funkcje, z których każda jest równa 1 w pewnym punkcie przedziału $[0,1]$, a poza tym punktem jest równa 0, tworzą zbiór odosobniony korzystając z nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych przedziału $[0,1]$ (p. dalej, tw. 8.6, str. 24), wywnioskować stąd, iż przestrzeń M nie jest ośrodkowa.

6. Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym w przestrzeni metrycznej, wówczas $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = 0$.

7. Przestrzeń metryczna, w której dla każdego ciągu punktów $\{a_n\}$ warunek $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = 0$ pociąga za sobą zbieżność tego ciągu, nazywa się *zupełną*.

Sprawdzić, że następujące przestrzenie są zupełne: 1° prosta R (ze zwykłą definicją odległości przez wzór $\rho(x, y) = |y - x|$; 2° płaszczyzna euklidesowa E_0 , t. j. zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych (x, y) ze zwykłą definicją odległości przez wzór $\rho(Q_1, Q_2) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$, gdzie $Q_1 = (x_1, y_1)$ i $Q_2 = (x_2, y_2)$; 3° przestrzenie C_1, C_2 i M (§ 3, ćw. 5).

8. W przestrzeni M (§ 3, ćw. 5) funkcje ciągłe tworzą zbiór domknięty nigdzie gęsty.

9. W przestrzeni C_2 funkcje ciągłe $x(t)$ takie, iż $|x(t)| < 1$ dla każdego t , tworzą zbiór domknięty nigdzie gęsty.

§ 5. Zbiory spójne. Zbiór A w przestrzeni H nazywa się *spójnym*, jeśli nie jest sumą dwu zbiorów rozłącznych, niepustych i domkniętych w A , t. j. takich, iż żaden z nich nie zawiera punktów skupienia drugiego. Zbiór, złożony z jednego tylko elementu, jest oczywiście spójny. Zbiór domknięty i spójny, zawierający więcej niż jeden element, nazywa się *kontynuum*. Zatem:

Na to, aby zbiór domknięty był kontynuum, potrzeba i wystarcza, aby zawierał co najmniej dwa punkty i nie dał się przedstawić jako sumą dwu zbiorów rozłącznych, domkniętych i niepustych (warunek Jordana).

Zbiór otwarty i spójny nazywamy *obszarem*. Na to, aby zbiór otwarty był obszarem, konieczne jest i dostateczne, aby nie był sumą dwu zbiorów rozłącznych, otwartych i niepustych. Istotnie, jeśli zbiór otwarty G jest sumą dwu zbiorów otwartych i rozłącznych, wówczas zbiory te są zarazem domknięte w G ; odwrotnie, jeśli G jest sumą dwu zbiorów rozłącznych i domkniętych w G , wówczas zbiory te są zarazem zbiorami otwartymi.

Zbiór, który jest domknięciem obszaru, nazywać będziemy *obszarem domkniętym*. Zbiór taki jest spójny, jak wynika z następującego twierdzenia:

(5.1) *Jeżeli A jest zbiorem spójnym, wówczas domknięcie jego jest również zbiorem spójnym; ogólniej, każdy zbiór B taki, iż $A \subset B \subset \bar{A}$, jest spójny.*

Dowód. Istotnie założmy, że zbiór B jest sumą dwu zbiorów B_1 i B_2 niepustych, domkniętych w B i rozłącznych. Wówczas $A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$, przy czym zbiory $A \cdot B_1$ i $A \cdot B_2$ są rozłączne i żaden z nich nie zawiera punktów skupienia drugiego. Jeden więc z nich przynajmniej, np. $A \cdot B_1$, jest pusty. Zatem $B_1 \subset B - A \subset \bar{A} - A$, skąd wynika, iż każdy punkt zbioru B_1 jest punktem skupienia zbioru A . Ponieważ zaś $A \cdot B_1 = 0$, a więc $A \subset B - B_1 = B_2$, przeto każdy punkt zbioru B_1 jest punktem skupienia zbioru B_2 . Dochodzimy w ten sposób do sprzeczności.

(5.2) *Jeśli $\mathfrak{S}$ jest rodziną zbiorów spójnych, posiadających wspólny punkt a , wówczas suma S zbiorów tej rodziny jest również zbiorem spójnym.*

Dowód. Załóżmy, iż S jest sumą dwu zbiorów rozłącznych S_1 oraz S_2 , z których żaden nie zawiera punktów skupienia drugiego. Niech $a \in S_1$. Wówczas każdy zbiór A rodziny $\mathfrak{S}$ zawiera się

w zbiorze S_1 , w przeciwnym bowiem razie byłby sumą dwu zbiorów niepustych rozłącznych, $A \cdot S_1$ oraz $A \cdot S_2$, z których żaden nie zawiera punktów skupienia drugiego. Zatem $S_2 = 0$, skąd wynika, iż zbiór S jest spójny.

Jeśli S jest podzbiorem spójnym pewnego zbioru A i jeśli każdy zbiór spójny, zawarty w A i zawierający S , pokrywa się z S , wówczas zbiór S nazywa się *składową* zbioru A . Składowe zbioru są to więc podzbiory spójne, które przy zachowaniu spójności nie mogą być już rozszerzone w danym zbiorze.

Niech a będzie dowolnym punktem zbioru A i niech S będzie sumą wszystkich zbiorów spójnych, zawartych w A i zawierających punkt a . Na mocy twierdzenia 5.2 zbiór S jest również podzbiorem spójnym zbioru A i jest oczywiście jego składową. Zatem:

(5.3) *Każdy punkt zbioru należy do pewnej składowej zbioru.*

Zauważmy dalej, iż jeśli S jest składową pewnego zbioru A , zaś S_1 jest dowolnym podzbiorem spójnym zbioru A , posiadającym punkty wspólne z S , wówczas, w myśl twierdzenia 5.2, zbiór $S \cup S_1 \subset A$ jest również spójny, a więc $S = S \cup S_1 \supset S_1$. Przeto:

(5.4) *Składowa zbioru zawiera wszystkie podzbiory spójne zbioru, które mają z nią punkty wspólne; każde więc dwie składowe zbioru są albo identyczne, albo rozłączne.*

Wreszcie z twierdzenia 5.1 wynika natychmiast, iż

(5.5) *Każda składowa zbioru domkniętego jest również zbiorem domkniętym, a więc jest bądź kontynuum, bądź redukuje się do punktu.*

Jeśli a jest punktem odosobnionym zbioru A , wówczas jest również punktem odosobnionym każdego zbioru B , zawartego w A i zawierającego a , i każdy taki zbiór rozbić możemy na dwa zbiory $\{a\}$ oraz $B - \{a\}$, z których oczywiście żaden nie zawiera punktów skupienia drugiego. Jedynym tedy podzbiorem spójnym, zawierającym punkt a , jest zbiór $\{a\}$. Zatem:

(5.6) *Punkty odosobnione zbioru są zarazem składowymi zbioru i każdy przeto zbiór spójny jest albo w sobie gęsty, albo redukuje się do jednego punktu; w szczególności, każde kontynuum jest zbiorem doskonałym.*

Zanotujemy jeszcze pewne bezpośrednie konsekwencje twierdzenia 5.2:

(5.7) *Jeżeli rodzina $\mathfrak{S}$ zbiorów spójnych zawiera pewien zbiór A_0 , z którym każdy zbiór A tej rodziny posiada punkty wspólne, wówczas suma S zbiorów rodziny $\mathfrak{S}$ jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Przede wszystkim w myśl twierdzenia 5.2 każdy zbiór postaci $A_0 + A$, gdzie $A \in \mathfrak{S}$, jest spójny; ponieważ zaś wszystkie zbiory tej postaci posiadają punkt wspólny (np. dowolny punkt $a \in A_0$), zatem suma ich jest spójna. Suma ta pokrywa się oczywiście ze zbiorem S .

(5.8) *Jeżeli każde dwa punkty zbioru A należą do pewnego podzbioru spójnego tego zbioru, wówczas sam zbiór A jest również spójny.*

Dowód. Niech a będzie dowolnym punktem zbioru A , zaś S sumą wszystkich podzbiorów spójnych zbioru A , które zawierają punkt a . Mamy wówczas $A = S$, gdyż każdy punkt zbioru A należy do jednego z takich podzbiorów. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia 5.2 zbiór S jest spójny.

§ 6. Zbiory zwarte. Zbiór A w przestrzeni H nazywa się *zwartym*, jeśli z każdego ciągu $\{a_n\}$ punktów tego zbioru wyjąć można podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny. Każdy podzbiór zbioru zwartego jest oczywiście także zwarty. W szczególności tedy, jeśli przestrzeń H jest zwarta, każdy zbiór w tej przestrzeni również jest zwarty.

(6.1) **Twierdzenie Cantora.** *Jeśli $\{A_n\}$ jest ciągiem zstępującym zbiorów domkniętych, zwartych i niepustych, wówczas iloczyn tych zbiorów jest również niepusty.*

Dowód. Przyporządkujmy każdemu zbiorowi A_n pewien punkt $a_n \in A_n$. Ciąg $\{a_n\}$ zawiera się w zbiorze A_1 zwartym, wyjąć więc zeń można podciąg zbieżny $\{a_{n_k}\}$. Niech a będzie granicą tego podciagu. Każdy zbiór A_n zawiera wszystkie wyrazy ciągu $\{a_{n_k}\}$, począwszy od pewnego miejsca (mianowicie dla $n_k \geq n$). Ponieważ zaś wszystkie zbiory A_n są z założenia domknięte, przeto punkt a należy do wszystkich tych zbiorów, a więc także i do ich iloczynu.

(6.2) **Twierdzenie Borela.** *Jeżeli $\{G_n\}$ jest ciągiem zbiorów otwartych, pokrywających łącznie zbiór domknięty i zwarty A , wówczas z ciągu tego wyjąć można skończoną ilość zbiorów, które również pokrywają łącznie zbiór A , t. j. istnieje wówczas taka liczba N , iż*

$$(6.3) \quad A \subset \sum_{n=1}^N G_n.$$

Dowód. Niech $R_n = \sum_{k=1}^n G_k$. Zbiory R_n tworzą ciąg wstępujący zbiorów otwartych, ich uzupełnienia OR_n tworzą tedy ciąg zstępujący zbiorów domkniętych (por. tw. 4.3), a zbiory $A \cdot OR_n$ ciąg zstępujący zbiorów domkniętych i zwartych. Załóżmy, iż $A \cdot OR_n \neq 0$ dla każdej wartości n . W myśl więc twierdzenia 6.1, stosując przekształcenia wedle wzorów de Morgana (§1), otrzymujemy

$$A \cdot C(\sum_{n=1}^{\infty} R_n) = A \cdot \prod_{n=1}^{\infty} OR_n = \prod_{n=1}^{\infty} A \cdot OR_n \neq 0,$$

co sprzeczne jest z założeniem, iż

$$A \subset \sum_{n=1}^{\infty} G_n = \sum_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Dla pewnej tedy wartości N mamy $A \cdot OR_N = 0$, zatem $A \subset R_N$, co równoważne jest związkowi (6.3).

Jeżeli przestrzeń H jest ośrodkowa, wówczas, opierając się na twierdzeniu Lindelöfa (tw. 4.5 (3^o)), zastąpić możemy w twierdzeniu Borela ciąg zbiorów otwartych przez dowolną rodzinę zbiorów otwartych. Otrzymujemy w ten sposób następujące

(6.4) **Twierdzenie Borela-Lebesgue'a.** Jeżeli w przestrzeni ośrodkowej rodzina zbiorów otwartych pokrywa zbiór domknięty i zwarty A , wówczas z rodziny tej wyjąć można skończoną ilość zbiorów, które również pokrywają zbiór A .

ĆWICZENIA. 1. W przestrzeni metrycznej (ob. §3, ćw.3) każdy zbiór zwarty posiada podzbiór, skończony lub przeliczalny, wszędzie gęsty (każda przeto przestrzeń metryczna zwarta jest ośrodkowa; ob. §4, ćw.3).

2. Pokazać, iż twierdzenie Borela-Lebesgue'a w postaci (6.4) prawdziwe jest w każdej przestrzeni metrycznej (niekoniecznie ośrodkowej).

3. Jeżeli w przestrzeni abstrakcyjnej ośrodkowej (lub w dowolnej przestrzeni metrycznej) $\mathfrak{F}$ jest rodziną zbiorów domkniętych i zwartych taką, iż iloczyn każdej skończonej ilości zbiorów tej rodziny jest niepusty, wówczas iloczyn wszystkich zbiorów tej rodziny jest również niepusty (F. Riesz, Sierpiński).

4. Jeżeli $\{A_n\}$ jest ciągiem zstępującym zbiorów niepustych, domkniętych, o średnicach dążących do zera, w dowolnej przestrzeni metrycznej zupełnej (ob. §4, ćw.7), wówczas iloczyn tych zbiorów również nie jest pusty (przez średnicę zbioru rozumiemy kres górny odległości jakiegokolwiek dwu punktów zbioru). Zwrócić uwagę, iż założenie domkniętości zbiorów A_n , jak również założenie, iż średnice tych zbiorów dążą do zera, są niezbędne.

§ 7. Przekształcenia ciągłe. Niech E będzie dowolnym zbiorem, a F funkcją, określoną w zbiorze E i przyporządkowującą każdemu elementowi $x \in E$ jednoznacznie pewien element $F(x)$. Oznaczając przez E^* zbiór wszystkich elementów $x^* = F(x)$ dla $x \in E$, mówimy wówczas, iż funkcja F jest *przekształceniem* albo *odwzorowaniem* zbioru E na zbiór E^* . Zbiór E^* oznaczamy przez $F(E)$ i nazywamy *obrazem* zbioru E w przekształceniu F . Jeśli dla każdego elementu $x^* \in F(E)$ istnieje tylko jeden element $x \in E$ taki, iż $x^* = F(x)$, wówczas funkcję F nazywamy *funkcją jednoznacznie odwzorowalną* na zbiorze E , albo *przekształceniem (odwzorowaniem) jednoznacznie odwzorowalnym* lub *jedno-jednoznacznym*, zbioru E na zbiór $E^* = F(E)$; funkcję określoną na zbiorze E^* i przyporządkowującą każdemu elementowi x^* tego zbioru element x , spełniający równość $x^* = F(x)$, oznaczamy wtedy przez F^{-1} ; funkcję tę nazywamy *funkcją odwrotną* (albo *przekształceniem — lub odwzorowaniem — odwrotnym*) względem funkcji F .

Przekształcenie F zbioru E takie, że $F(x) = x$ dla każdego $x \in E$, nazywa się *tożsamościowym*.

Jeżeli F jest przekształceniem pewnego zbioru E na pewien zbiór E^* , a G przekształceniem zbioru E^* na pewien zbiór E^{**} , to przekształcenie H zbioru E na E^{**} , określone przez wzór $H(z) = G[F(z)]$ dla $z \in E$, nazywamy *iloczynem* przekształceń F i G i oznaczamy przez GF .

Niech $\mathfrak{G}$ będzie rodziną przekształceń jednoznacznie odwzorowalnych pewnego zbioru E na ten sam zbiór. Rodzina taka nazywa się *grupą przekształceń* zbioru E , jeżeli iloczyn każdego dwu przekształceń należących do rodziny $\mathfrak{G}$, jak również i przekształcenie odwrotne względem każdego przekształcenia należącego do tej rodziny, należą także do rodziny $\mathfrak{G}$.

Niech H i H^* będą dwiema przestrzeniami topologicznymi abstrakcyjnymi (ob. §3), zaś F funkcją określoną na pewnym zbiorze $E \subset H$ i przekształcającą ten zbiór na pewien zbiór $E^* \subset H^*$.

Będziemy mówili, iż funkcja F jest *ciągła* na zbiorze E w punkcie $x \in E$, jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ punktów zbioru E , zbieżnego do x (w przestrzeni H), ciąg $\{F(x_n)\}$ jest zbieżny (w przestrzeni H^*) do punktu $F(x)$.

Definicję powyższą uważać można za uogólnienie definicji ciągłości, podanej przez Heinego dla funkcji zmiennej rzeczywistej. Można by również sformułować ją w postaci, uogólniającej definicję Cauchy'ego i opartej bezpośrednio na pojęciu otoczenia: funkcja F jest ciągła na zbiorze E w punkcie $x \in E$,

jeśli każdemu otoczeniu U^* , zawierającemu punkt $x^* = F(x)$, odpowiada takie otoczenie U punktu x , iż $F(U \cap E) \subset U^*$. O definicjach Heinego i Cauchy'ego, ob. W. Sierpiński, *Analiza*, t. I, cz. I (wyd. II), Warszawa, 1923, str. 102-104, 158-164.

Jeżeli funkcja F jest ciągła na zbiorze E w każdym punkcie tego zbioru, wówczas nazywa się funkcją ciągłą na zbiorze E lub przekształceniem — albo odwzorowaniem — ciągłym tego zbioru. Jeśli E i E^* są dwoma zbiorami (w tej samej lub w różnych przestrzeniach abstrakcyjnych) i istnieje przekształcenie ciągłe zbioru E na E^* , wówczas mówimy, że zbiór E^* jest obrazem ciągłym zbioru E .

Jeśli funkcja F jest jednoznacznie odwracalna i ciągła na zbiorze E , a jej funkcja odwrotna F^{-1} jest ciągła na zbiorze $E^* = F(E)$, wówczas funkcję F nazywamy funkcją odwracalnie ciągłą na E , albo przekształceniem homeomorficznym lub odwzorowaniem homeomorficznym zbioru E na zbiór E^* . Zbiór, który jest obrazem zbioru E w jakimś przekształceniu homeomorficznym tego zbioru, nazywamy obrazem homeomorficznym zbioru E albo wprost zbiorem homeomorficznym z E .

Twierdzenie następujące podaje najprostsze własności niezmiennicze zbiorów przy przekształceniach ciągłych:

(7.1) Jeśli F jest przekształceniem ciągłym zbioru E na zbiór E^* , to:

(a) dla każdego zbioru $A^* \subset E^*$, domkniętego w E^* , zbiór A tych wszystkich punktów $x \in E$, dla których $F(x) \in A^*$, jest domknięty w E ;

(b) dla każdego zbioru spójnego $B \subset E$, zbiór $F(B)$ jest również spójny;

(c) dla każdego zbioru domkniętego i zwartego $C \subset E$, zbiór $F(C)$ jest również domknięty i zwarty.

Dowód. *ad* (a): Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem punktów zbioru A , zbieżnym do pewnego punktu $a \in E$. Wówczas $F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) \in E^*$, a że $F(a_n) \in A^*$ dla $n=1, 2, \dots$ i zbiór A^* jest domknięty w E^* , więc $F(a) \in A^*$, i tym samym $a \in A$. Zbiór A jest więc domknięty w E .

ad (b): Możemy przyjąć, iż $B = E$, a więc, że

$$F(B) = F(E) = E^*.$$

Jeżeli zbiór E^* nie jest spójny, to jest sumą dwu zbiorów rozłącznych, niepustych i domkniętych w E^* ; wówczas, w myśl (a), zbiór E jest także sumą dwu zbiorów rozłącznych, niepustych i domkniętych w E , a przeto również nie jest spójny.

ad (c): Niech $\{c_n\}$ będzie dowolnym ciągiem punktów zbioru $F(C)$ i niech c_n oznacza dla każdego n punkt zbioru C taki, iż $F(c_n) = c_n^*$. Ponieważ zbiór C jest domknięty i zwarty, więc ciąg $\{c_n\}$ zawiera podciąg $\{c_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego punktu $c \in C$. Z uwagi więc na ciągłość funkcji F , mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} F(c_{n_k}) = F(c) \in F(C),$$

skąd wynika domkniętość i zwartość zbioru $F(C)$.

ĆWICZENIE. Jeżeli ϕ jest przekształceniem ciągłym przestrzeni H na przestrzeń H^* i A jest iloczynem ciągu zstępującego zbiorów domkniętych i zwartych $\{A_n\}$ w przestrzeni H , wówczas $\phi(A) = \bigcap_n \phi(A_n)$.

§ 8. Płaszczyzna. Zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywać będziemy płaszczyzną otwartą i oznaczać przez E_0 . Dołączając do E_0 jeszcze jeden element, który oznaczymy przez ∞ , otrzymujemy zbiór, który nazywać będziemy płaszczyzną Gaussa, płaszczyzną domkniętą albo wprost płaszczyzną i który oznaczać będziemy przez E . Elementy płaszczyzny nazywamy punktami: punkt ∞ — punktem w nieskończoności, pozostałe punkty — liczbami skończonymi albo punktami w skończoności. Punkt $z = x + iy$, gdzie x oraz y są liczbami rzeczywistymi skończonymi, oznaczać także będziemy przez (x, y) ; liczby x oraz y nazywają się częścią rzeczywistą i częścią urojoną punktu z i oznaczać je będziemy odpowiednio przez $\Re z$ oraz $\Im z$. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nazywamy osią rzeczywistą, a zbiór wszystkich liczb urojonych postaci iy , gdzie y jest dowolną liczbą rzeczywistą — osią urojoną płaszczyzny. Oś rzeczywistą oznaczać będziemy przez R , a oś urojoną — przez I . Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych i zbiór wszystkich liczb rzeczywistych niedodatnich nazywać będziemy odpowiednio dodatnią i ujemną półosią rzeczywistą. Analogicznie określamy dodatnią i ujemną półosią urojoną.

Pisząc liczby zespolone w postaci $x + yi$, $u + vi$ it.p., rozumiemy będziemy zawsze przez x, y, u, v , bez dodatkowych omówień, liczby rzeczywiste — o ile oczywiście inny charakter tych liczb nie wynika z całokształtu rozważań. Jeżeli $z = x + yi$ jest liczbą zespoloną, wówczas $\bar{z}$ oznaczać będzie liczbę $x - yi$, którą nazywamy sprzężoną z liczbą z . Liczby sprzężone są to więc punkty położone symetrycznie względem osi rzeczywistej

Jeżeli A jest dowolnym zbiorem na płaszczyźnie, wówczas OA oznaczać będzie jego *dopełnienie* względem płaszczyzny, t. j. zbiór $E - A$ (por. § 1, str. 2). Zbiór Z na płaszczyźnie nazywa się *ograniczonym*, jeśli nie zawiera punktu ∞ i jeśli zbiór wartości bezwzględnych punktów $z \in Z$ jest ograniczony, t. j. jeśli istnieje liczba rzeczywista skończona m taka, że $|z| < m$ dla $z \in Z$.

Wprowadzając punkt ∞ , uogólniamy nań działania nad liczbami zespolonymi¹⁾ przez przyjęcie konwencji następujących: $|\infty| = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$; $a \pm \infty = \infty$, $a/\infty = 0$, $\infty/a = \infty$ dla każdej liczby zespolonej a skończonej; $a \cdot \infty = \infty$, jeśli $a \neq 0$. Liczbę ∞ zaliczymy do liczb rzeczywistych wymiernych i uważać będziemy za większą od wszystkich liczb rzeczywistych skończonych.

Jeżeli z_1, z_2 są dwoma punktami w skończoności, wówczas odcinkiem $[z_1, z_2]$ nazywać będziemy zbiór punktów postaci

$$(8.1) \quad z = (1-t)z_1 + tz_2,$$

gdzie t jest liczbą rzeczywistą i $0 \leq t \leq 1$. Punkty z_1, z_2 nazywają się *krańcami* odcinka $[z_1, z_2]$. Jeśli w odcinku tym jeden z dwu krańców, np. z_1 , został wyróżniony jako *początek*, a drugi z_2 jako *koniec* odcinka, wówczas odcinek nazywać się będzie *zorientowanym* i ozna-

czać go będziemy przez $\overrightarrow{[z_1, z_2]}$; gdy jednak nie będzie obawy nieporozumienia, strzałka w symbolu powyższym będzie pomijana i zamiast „odcinek zorientowany” będziemy mówili wprost „odcinek”. Zbiór punktów z postaci (8.1), gdy t przebiega wszystkie wartości rzeczywiste skończone, a z_1, z_2 są dowolnie ustalonymi punktami w skończoności, nazywa się *prostą*.

Odcinek, którego krańce (a więc i wszystkie punkty) są rzeczywiste, będziemy nazywali *przedziałem*. Poza tym, *przedziałami nieskończonymi* będziemy także nazywali: 1^o oś rzeczywistą, 2^o zbiór punktów rzeczywistych $x \geq a$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą skończoną, 3^o zbiór punktów rzeczywistych $x \leq a$. Przedziały te oznaczać będziemy odpowiednio przez $[-\infty, +\infty]$, $[a, +\infty]$ oraz $[-\infty, a]$. Punkty przedziału, które nie są jego krańcami, nazywamy *punktami wewnętrznymi* przedziału.

¹⁾ Zakładamy tu znajomość arytmetyki liczb zespolonych (czterech działań arytmetycznych, własności wartości bezwzględnej). T. zw. „przedstawienie trygonometryczne” liczb zespolonych omówione będzie w rozdz. I.

Jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest dowolnym ciągiem skończonym punktów, różnych od punktu ∞ , wówczas ciąg odcinków zorientowanych $\overrightarrow{[a_1, a_2]}, \overrightarrow{[a_2, a_3]}, \dots, \overrightarrow{[a_{n-1}, a_n]}$ nazywać będziemy *linią łamaną* $\overrightarrow{[a_1, a_2, \dots, a_n]}$, punkty $a_1, a_2, \dots, a_n$ *wierzchołkami* tej łamanej, a odcinki $\overrightarrow{[a_k, a_{k+1}]}$, gdzie $k=1, 2, \dots, n-1$, jej *bokami*. Wierzchołek łamanej, który jest wspólnym krańcem więcej niż dwu jej boków, nazywać się będzie *wierzchołkiem wielokrotnym*. Jeśli łamana nie posiada wierzchołków wielokrotnych i ponadto żadne dwa jej boki nie mają punktów wspólnych, poza co najwyżej wspólnymi krańcami tych boków, wówczas mówimy, iż łamana *nie posiada punktów wielokrotnych*. Jeśli w łamanej $\overrightarrow{[a_1, a_2, \dots, a_n]}$ wierzchołki a_1 i a_n się pokrywają, łamana nazywa się *zamkniętą*. Łamana, która nie jest zamknięta i nie posiada punktów wielokrotnych, nazywa się *łamaną zwykłą*.

Należałoby w zasadzie odróżniać łamaną (określoną jako ciąg odcinków) od zbioru punktów tej łamanej. W wypadkach jednak nie budzących wątpliwości zamiast „zbiór punktów łamanej” będziemy mówili wprost „łamana”.

Jeśli a_1, b_1, a_2 oraz b_2 są liczbami rzeczywistymi skończonymi i jeśli $a_1 < b_1$ oraz $a_2 < b_2$, wówczas zbiór punktów (x, y) takich, iż $a_1 \leq x \leq b_1$ oraz $a_2 \leq y \leq b_2$, nazywać będziemy *prostokątem* $[a_1, b_1; a_2, b_2]$, punkty $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_1 i$, $z_3 = a_2 + b_2 i$, $z_4 = a_1 + b_2 i$ *wierzchołkami*, a odcinki $\overrightarrow{[z_1, z_2]}, \overrightarrow{[z_2, z_3]}, \overrightarrow{[z_3, z_4]}, \overrightarrow{[z_4, z_1]}$ *bokami* prostokąta $[a_1, b_1; a_2, b_2]$;

te same odcinki, jako zorientowane: $\overrightarrow{[z_1, z_2]}, \overrightarrow{[z_2, z_3]}$ i t. d., nazywać się będą bokami *zorientowanymi* prostokąta, lub *zorientowanymi zgodnie z prostokątem* $[a_1, b_1; a_2, b_2]$; wreszcie łamana zamknięta $\overrightarrow{[z_1, z_2, z_3, z_4, z_1]}$ (jak spostrzegamy natychmiast — bez punktów wielokrotnych) nazywać się będzie *obwodem* rozważanego prostokąta. Obwód prostokąta I oznaczać będziemy zwykle przez (I) .

Odległość $\varrho(a, b)$ dwu punktów a i b płaszczyzny E określamy — w przypadku, gdy obydwa punkty leżą w skończoności — przez wzór $\varrho(a, b) = |b - a|$, a w przypadku, gdy jeden lub obydwa leżą w nieskończoności, przez wzór $\varrho(a, \infty) = \varrho(\infty, a) = 1/|a|$. Widoczne jest, iż w ten sposób określona odległość spełnia warunki następujące:

1^o $\varrho(a, b) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$;

2^o $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$ dla każdej pary punktów a, b ;

3^o $\varrho(a, b) + \varrho(b, c) \geq \varrho(a, c)$, ilekroć a, b i c są punktami w skończoności.

Ostatnia nierówność przestaje być na ogół prawdziwa, gdy choćby jeden z punktów a , b i c jest punktem ∞ . Można by z tego powodu wątpić o właściwości podanego wyżej uogólnienia odległości dwu punktów na przypadku, gdy jeden z punktów leży w nieskończoności. Uogólnienie to jednak ułatwia sformułowanie twierdzeń z teorii szeregów potęgowych, gdy idzie o szeregi o środku w punkcie ∞ . Jest ono również dogodnie w sformułowaniach pewnych innych twierdzeń z teorii funkcji. Poniżej, w § 1 tego §, podajemy odwzorowanie homeomorficzne płaszczyzny Gaussa na powierzchnię kuli, na której odległość, rozumiana w sposób zwykły, spełnia już warunek 3° bez żadnych zastrzeżeń.

Warto zauważyć, iż w myśl przyjętej powyżej definicji odległość dwu punktów na płaszczyźnie jest nieskończona wtedy i tylko wtedy, gdy jednym z tych punktów jest 0, a drugim ∞ .

Odległością $\varrho(a, P)$ punktu a od zbioru P na płaszczyźnie E nazywamy kres dolny liczb $\varrho(a, p)$, gdy punkt p przebiega zbiór P , a odległością $\varrho(P, Q)$ dwu zbiorów P i Q kres dolny liczb $\varrho(p, q)$, gdy $p \in P$ i $q \in Q$. Wreszcie średnicą zbioru nazywamy kres górny odległości dwu jakichkolwiek punktów tego zbioru.

Jeśli a jest dowolnym punktem płaszczyzny i r dowolną liczbą rzeczywistą nieujemną (skończoną lub nieskończoną), wówczas przez $K(a; r)$ oznaczać będziemy — w przypadku, gdy $a \neq \infty$ — zbiór wszystkich punktów z , spełniających nierówność $\varrho(a, z) < r$ i różnych od ∞ , a w przypadku $a = \infty$ zbiór wszystkich punktów z (łącznie z punktem ∞), spełniających tę nierówność. Uogólniając definicję koła z geometrii elementarnej, wyróżnione powyżej zbiory $K(a; r)$ oraz całą płaszczyznę nazywać będziemy *kołami otwartymi* albo wprost *kołami*. Punkt a i liczba r nazywać się będą odpowiednio *środkiem* i *promieniem* koła $K(a; r)$. Koło o środku w punkcie a i promieniu $r > 0$ nazywać będziemy również *otoczeniem kołowym* — lub wprost *otoczeniem* — punktu a .

Koło $K(a; r)$ o środku $a \neq \infty$ jest tedy zbiorem wszystkich punktów $z \neq \infty$ takich, że $|z - a| < r$; w szczególności więc jest zbiorem pustym, jeśli $r = 0$, a płaszczyznę otwartą E_0 , jeśli $r = \infty$. Koło $K(\infty; r)$ o środku ∞ jest zbiorem wszystkich punktów z takich, iż $|z| > 1/r$; jest więc zbiorem pustym, gdy $r = 0$, a całą płaszczyznę E z wyłączeniem punktu 0, gdy $r = \infty$.

W dalszym ciągu, mówiąc o kołach otwartych, będziemy zawsze zakładali milcząco, że są to koła o promieniach dodatnich, a więc zbiory niepuste. Tam zaś, gdzie będą mogły występować koła o promieniu 0, będzie to wyraźnie zaznaczone.

Jeśli a jest punktem płaszczyzny, a r_1 i r_2 liczbami rzeczywistymi (skończonymi lub nieskończonymi) takimi, iż $0 \leq r_1 < r_2$, wówczas przez $P(a; r_1, r_2)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich punktów $z \neq \infty$

takich, iż $r_1 < \varrho(a, z) < r_2$. Zbiór $P(a; r_1, r_2)$ nazywać się będzie *pierścieniem otwartym* — albo wprost *pierścieniem* — o środku a , promieniu mniejszym r_1 i promieniu większym r_2 . Zauważmy, iż $P(\infty; r_1, r_2) = P(0; 1/r_2, 1/r_1)$; każdy tedy pierścień o środku ∞ jest zarazem pierścieniem o środku 0 i na odwrót.

Otoczeniem pierścieniowym punktu a nazywać będziemy każdy pierścień o środku w tym punkcie i o mniejszym promieniu 0, a więc każdy pierścień postaci $P(a; 0, r)$, gdzie $r > 0$. Jak widać natychmiast, otoczenie pierścieniowe $P(a; 0, r)$ różni się od otoczenia kołowego $K(a; r)$ punktu a jednym tylko punktem a , który należy do $K(a; r)$, lecz nie należy do $P(a; 0, r)$.

Jeśli a jest dowolnym punktem płaszczyzny i $r > 0$ liczbą rzeczywistą skończoną, wówczas *okręgiem* o środku a i promieniu r nazywać będziemy zbiór wszystkich punktów $z \neq \infty$ takich, iż $\varrho(a, z) = r$. Okrąg ten oznaczać będziemy przez $C(a; r)$. Mamy oczywiście zawsze $C(\infty; r) = C(0; 1/r)$.

Punkt ∞ oraz wszystkie punkty w skończoności, których część rzeczywista i urojona są liczbami wymiennymi, obejmujemy nazwą *punktów wymiennych* płaszczyzny. Zbiór tych punktów jest przeliczalny (por. § 1). Koła o środkach i promieniach wymiennych nazywać będziemy *kołami wymiennymi*. Ponieważ każde koło wymierne wyznaczone jest przez dwie liczby wymierne (środek i promień), więc zbiór tych kół jest także przeliczalny.

Przyporządkujemy płaszczyźnie E jako układ otoczeń $\mathfrak{E}$ zbiór wszystkich kół otwartych o promieniach dodatnich. Sprawdzamy bezpośrednio, iż postulat I, § 3, jest spełniony, gdy przyjmiemy $H = E$ oraz $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$; postulat II spełniony jest również, jak sprawdzamy, obierając np. za ciąg otoczeń $\{U_n\}$ dla ustalonego punktu a płaszczyzny ciąg kół $\{K(a; 1/n)\}$. Nadto, jak spostrzegamy natychmiast, koła wymierne tworzą ośrodek przeliczalny (por. § 3) układu otoczeń $\mathfrak{E}$. Płaszczyzna E , z przyporządkowanym jej układem otoczeń $\mathfrak{E}$, jest więc pewną przestrzenią ośrodkową. (Podobnie płaszczyznę otwartą E_0 uważać możemy także jako przestrzeń ośrodkową z rodziną kół otwartych o promieniach dodatnich i środkach w skończoności, przyjętą za układ otoczeń.)

Zbieżność ciągu $\{z_n\}$ na płaszczyźnie E do granicy z (por. § 4, str. 6) równoważna jest związkowi $\varrho(z_n, z) \rightarrow 0$, a więc w przypadku, gdy $z = \lim_n z_n \neq \infty$, związkowi $|z - z_n| \rightarrow 0$. Ponieważ dla każdej liczby zespolonej a jest:

$$|\Re a| \leq |a|, \quad |\Im a| \leq |a|, \quad |a| \leq |\Re a| + |\Im a|,$$

więc zbieżność ciągu $\{z_n\}$ punktów płaszczyzny E do granicy skończonej w sensie definicji ustalonej w § 4 dla przestrzeni abstrakcyjnej równoważna jest jednoczesnej zbieżności obydwu ciągów $\{\Re z_n\}$ i $\{\Im z_n\}$ w sensie definicji przyjętej w analizie dla ciągów rzeczywistych, a związek $\lim_n z_n = z \neq \infty$ równoważny jest parze związków $\Re z_n \rightarrow \Re z$, $\Im z_n \rightarrow \Im z$. Natomiast związek $\lim_n z_n = \infty$ równoważny jest rozbieżności do nieskończoności ciągu rzeczywistego $\{|z_n|\}$. Dla większej zgodności z terminologią analizy nazywać będziemy *rozbieżnymi* ciągi punktów, które nie są zbieżne do granicy skończonej. Terminy „rozbieżność do ∞ ” i „zbieżność do ∞ ” rozumieć więc należy jako równoważne.

Podamy parę najprostszych przykładów zbiorów domkniętych i otwartych na płaszczyźnie. Koła i pierścienie są zbiorami otwartymi (stąd nazwa „koła otwarte”, „pierścienie otwarte”); odcinki, prostokąty, okręgi są zbiorami domkniętymi. Prosta jest zbiorem domkniętym na płaszczyźnie otwartej E_0 , nie jest jednak zbiorem domkniętym na płaszczyźnie E , gdyż nie zawiera swego punktu skupienia w nieskończoności.

Kołem domkniętym o środku a i promieniu $r \geq 0$ nazywać będziemy, w przypadku gdy $r > 0$, domknięcie koła otwartego $K(a; r)$; w przypadku, gdy $r = 0$, a więc gdy $K(a; 0) = \emptyset$, przez koło domknięte o środku a i promieniu $r = 0$, rozumieć będziemy zbiór złożony z jednego punktu a . Koło domknięte o środku a i promieniu $r \geq 0$ oznaczać będziemy przez $\bar{K}(a; r)$.

Analogicznie, pierścień domknięty $\bar{P}(a; r_1, r_2)$ o środku a , promieniu mniejszym $r_1 \geq 0$ i promieniu większym $r_2 > r_1$, określamy jako domknięcie pierścienia otwartego $P(a; r_1, r_2)$. Pierścienie domknięte o promieniu mniejszym $r_1 = 0$ są kołami domkniętymi. Ogólniej, mamy zawsze:

$$\bar{P}(a; r_1, r_2) = \bar{K}(a; r_2) - K(a; r_1), \quad P(a; r_1, r_2) = K(a; r_2) - \bar{K}(a; r_1).$$

(8.2) Płaszczyzna E jest przestrzenią zwartą.

Dowód. Niech $\{z_n\}$ będzie dowolnym ciągiem punktów na płaszczyźnie E . Rozróżniamy dwa przypadki:

1° Ciąg $\{z_n\}$ jest nieograniczony. Wówczas dla każdej liczby naturalnej k istnieje wyraz z_{n_k} taki, iż $|z_{n_k}| > k$, przy czym wyrazy te wybrać możemy w ten sposób, iż $n_{k+1} > n_k$ dla $k = 1, 2, \dots$. Mamy więc $\lim_k z_{n_k} = \infty$ i ciąg $\{z_{n_k}\}$ jest podciągiem zbieżnym ciągu $\{z_n\}$.

2° Ciąg $\{z_n\}$ jest ograniczony. Przyjmując więc $x_n = \Re z_n$, $y_n = \Im z_n$, otrzymujemy dwa ciągi rzeczywiste $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, również ograniczone. Stosując do pierwszego z tych ciągów twierdzenie Bolzano-Weierstrassa możemy wyjąć zeń podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$; stosując ponownie to samo twierdzenie, tym razem do ciągu $\{y_{n_k}\}$, możemy wyjąć z tego ciągu znów pewien podciąg zbieżny $\{y_{n_{k_j}}\}$. Obydwa ciągi $\{x_{n_{k_j}}\}$ oraz $\{y_{n_{k_j}}\}$ są zbieżne, a tym samym zbieżny jest ciąg $\{z_{n_{k_j}}\} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}}$.

Z tw. 8.2 wynika zarazem, iż na płaszczyźnie otwartej E_0 , uważanej za przestrzeń, zbiory zwarte pokrywają się ze zbiorami ograniczonymi. Natomiast na płaszczyźnie E wszystkie zbiory są zwarte.

(8.3) Jeżeli P i Q są zbiorami domkniętymi na płaszczyźnie, wówczas istnieją dwa punkty $p \in P$ oraz $q \in Q$ takie, iż

$$(8.4) \quad \varrho(p, q) = \varrho(P, Q).$$

Odległość dwu zbiorów domkniętych jest więc równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te mają punkt wspólny.

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste, gdy $P \cdot Q \neq \emptyset$. Możemy tedy założyć, że zbiory P i Q są rozłączne. Jeden więc z nich przynajmniej, np. zbiór P , nie zawiera na pewno punktu ∞ . Niech $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ będą odpowiednio ciągami punktów ze zbiorów P i Q , takimi iż $\varrho(p_n, q_n) \rightarrow \varrho(P, Q)$. Z uwagi na zwartość płaszczyzny (por. tw. 8.2) możemy wyjąć z ciągu $\{p_n\}$ podciąg zbieżny $\{p_{n_k}\}$, a następnie z ciągu $\{q_{n_k}\}$ podciąg zbieżny $\{q_{n_{k_j}}\}$. Niech p oraz q będą granicami tych dwu ciągów. Pokażemy, iż punkty te czynią zadość równości (8.4).

Istotnie, przyjmując dla skrócenia $p_{n_{k_j}} = a_j$, $q_{n_{k_j}} = b_j$, mamy $a_n \in P$, $b_n \in Q$ dla $n = 1, 2, \dots$ oraz

$$(8.5) \quad p = \lim_n a_n \in P, \quad q = \lim_n b_n \in Q, \quad \lim_n \varrho(a_n, b_n) = \varrho(P, Q).$$

Rozróżnimy dwa przypadki:

1° $q \neq \infty$. Wówczas, poczynawszy przynajmniej od pewnej wartości wskaźnika n , jest również $b_n \neq \infty$, a więc

$$\varrho(P, Q) = \lim_n \varrho(a_n, b_n) = \lim_n |b_n - a_n| = |p - q| = \varrho(p, q),$$

gdyż punkt p oraz punkty a_n , jako należące do P , są z założenia różne od ∞ .

2^0 $q = \infty$. Począwszy od pewnej wartości n , mamy wówczas $b_n = \infty$. W przeciwnym bowiem razie, moglibyśmy wyjąć z ciągu $\{b_n\}$ podciąg $\{b_{n_k}\}$ taki, iż $b_{n_k} \neq \infty$ dla $k=1, 2, \dots$, a więc, wobec $b_{n_k} \rightarrow q = \infty$ mielibyśmy $\varrho(a_{n_k}, b_{n_k}) = |b_{n_k} - a_{n_k}| \rightarrow \infty$, co sprzeczne jest jednak z ostatnim ze związków (8.5). Mamy zatem dla wartości n dostatecznie wielkich $\varrho(a_n, b_n) = \varrho(a_n, \infty) = 1/|a_n|$, a więc $\varrho(P, Q) = \lim_n \varrho(a_n, b_n) = 1/|p| = \varrho(p, \infty) = \varrho(p, q)$, co należało udowodnić.

Udowodnimy na zakończenie tego § twierdzenie następujące, które wyróżnia na płaszczyźnie ważną klasę zbiorów nieprzeliczalnych:

(8.6) *Każdy zbiór doskonały na płaszczyźnie jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Załóżmy, iż punkty zbioru doskonałego A dają się ustawić w ciąg $\{a_n\}_{n=1, 2, \dots}$. Wyznamy przez indukcję ciąg kół $\{K_n\}_{n=1, 2, \dots}$, spełniających dla $n=1, 2, \dots$ warunki następujące:

- (a) $\bar{K}_n \subset K_{n+1}$ dla $n \geq 1$,
- (b) środek każdego koła K_n należy do zbioru A ,
- (c) koło domknięte $\bar{K}_n$ nie zawiera punktu a_n .

Obierzmy w tym celu za K_1 dowolne koło, którego środek należy do zbioru A i które nie zawiera wewnątrz, ani na brzegu, punktu a_1 . Założmy następnie, iż określonych zostało r kół $K_1, K_2, \dots, K_r$ w ten sposób, iż warunki (a), (b) i (c) spełnione są dla $n \leq r$.

Koło K_r , jako posiadające środek w punkcie należącym do zbioru doskonałego A , zawiera nieskończenie wiele punktów tego zbioru. Niech b będzie dowolnym punktem zbioru A , zawartym w K_r i różnym od punktu a_{r+1} . Możemy tedy wyznaczyć koło K_{r+1} o środku w punkcie b , tak by warunki (a), (b) i (c) spełnione były dla $n=r+1$. Ciąg $\{K_n\}$ jest w ten sposób określony.

Niech teraz b_n oznacza środek koła K_n . Ze względu na zwartość płaszczyzny (por. tw. 8.2) możemy wyjąć z ciągu $\{b_n\}$ podciąg zbieżny, którego granica — z uwagi na warunek (b) oraz na domkniętość zbioru A — należy również do tego zbioru. Z drugiej strony, ponieważ każde koło K_n zawiera, począwszy od pewnego miejsca, wszystkie wyrazy ciągu $\{b_n\}$, granica wyjątego podciągu należy do wszystkich kół domkniętych $\bar{K}_n$, a więc do ich iloczynu. Otrzymujemy w ten sposób sprzeczność, gdyż z uwagi na warunek (c) iloczyn kół domkniętych $\bar{K}_n$ nie może zawierać żadnego z punktów zbioru A .

Zbiór A jest więc nieprzeliczalny.

Pierwszy przykład zbioru nieprzeliczalnego podany został przez G. Cantora, który udowodnił, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Twierdzenie 8.6 stanowi uogólnienie tego wyniku.

ĆWICZENIA. 1. Oznaczmy przez S powierzchnię kuli $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ i przez N punkt $(0, 0, 2R)$ („biegun północny“) tej powierzchni. Przyporządkujmy punktowi ∞ płaszczyzny xy punkt N , każdemu zaś punktowi P tej płaszczyzny, położonemu w skończoności, punkt przecięcia powierzchni S z prostą PN , różny od N . Otrzymane odwzorowanie jedno-jednoznaczne i ciągłe płaszczyzny E na powierzchnię kuli nosi nazwę rzutu stereograficznego. Ponieważ powierzchnię kuli uważać możemy za przestrzeń metryczną (ze zwykłą definicją odległości przez wzór

$$\varrho(Q_1, Q_2) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \text{ dla } Q_1 = (x_1, y_1, z_1), Q_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

rozważany rzut stereograficzny stanowi przekształcenie homeomorficzne płaszczyzny E na przestrzeń metryczną zwartą.

Pokazać, iż w rzucie stereograficznym proste i okręgi płaszczyzny E przechodzą na okręgi na powierzchni S (proste przekształcają się na okręgi, przechodzące przez biegun N kuli).

2. Zbiór nie zawierający punktu ∞ nazywa się *wypukłym*, jeżeli każdy odcinek łączący dwa jakiegokolwiek punkty tego zbioru całkowicie zawiera się w tym zbiorze. Pokazać, iż jeżeli $z_1, z_2, \dots, z_n$ jest układem skończonym punktów na płaszczyźnie otwartej, to zbiór punktów postaci

$$[t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_n z_n] / (t_1 + t_2 + \dots + t_n),$$

gdzie $t_1, t_2, \dots, t_n$ są dowolnymi nie znikającymi jednocześnie liczbami rzeczywistymi nieujemnymi, jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym punkty $z_1, z_2, \dots, z_n$ (zbiór ten nazywamy zbiorem wypukłym *wyznaczonym* przez punkty $z_1, z_2, \dots, z_n$).

3. Zbiór punktów niewymiernych każdego przedziału, nie redukującego się do jednego punktu, jest nieprzeliczalny i tej samej mocy co zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

4. Zbiór, który przedstawić można jako sumę ciągu zbiorów nigdzie gęstych, nazywa się (według Baire'a) zbiorem *pierwszej kategorii*.

Udowodnić, iż w przestrzeni metrycznej zupełnej dopełnienie każdego zbioru pierwszej kategorii jest zbiorem wszędzie gęstym w przestrzeni (*twierdzenie Baire'a*); żadna więc przestrzeń metryczna zupełna nie może być przedstawiona jako suma ciągu zbiorów nigdzie gęstych w tej przestrzeni.

Ponieważ każdy zbiór domknięty w przestrzeni metrycznej zupełnej uważać można również za przestrzeń metryczną zupełną, wywnioskować stąd, iż każdy zbiór doskonały w przestrzeni metrycznej zupełnej jest nieprzeliczalny (uogólnienie tw. 8.6). Zwrócić uwagę na niezbędność założenia, że przestrzeń jest zupełna.

5. Dowieść, że w przestrzeni C_2 (ob. § 3, ćw. 5) funkcje ciągłe, ograniczone na całej prostej, tworzą zbiór pierwszej kategorii; funkcje ciągłe nieograniczone tworzą więc w przestrzeni tej zbiór wszędzie gęsty.

§ 9. Zbiory spójne na płaszczyźnie. *Liczba charakterystyczną* ciągu skończonego $a_1, a_2, \dots, a_n$ punktów płaszczyzny nazywać będziemy największą z odległości $\varrho(a_k, a_{k+1})$ kolejnych punktów tego ciągu. Jeśli wszystkie punkty ciągu skończonego $a = a_1, a_2, \dots, a_n = b$ należą do pewnego zbioru A , mówimy, iż ciąg ten łączy w A punkty a i b . Przy pomocy tych terminów sformułujemy podstawowy warunek na to, aby zbiór domknięty był kontynuum.

(9.1) *Na to, aby zbiór domknięty F na płaszczyźnie był kontynuum, konieczne jest i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ każde dwa punkty a oraz b tego zbioru można było połączyć w nim ciągiem skończonym punktów o liczbie charakterystycznej $< \varepsilon$ (warunek Cantora).*

Dowód. 1^o Warunek jest konieczny. Niech F będzie kontynuum, ε dowolną liczbą dodatnią, zaś a dowolnym punktem zbioru F . Oznaczmy przez F_1 zbiór tych punktów zbioru F , które można połączyć z a w F ciągiem skończonym punktów o liczbie charakterystycznej mniejszej niż ε i niech $F_2 = F - F_1$. Należy dowieść, iż $F_2 = \emptyset$.

W tym celu pokażemy najpierw, iż zbiory F_1 i F_2 są domknięte. Istotnie, jeśli $p \in F_1$, wówczas istnieje punkt $p_1 \in F_1$ taki, iż $\varrho(p_1, p) < \varepsilon$. Niech $a = a_1, a_2, \dots, a_n = p_1$ będzie ciągiem punktów zbioru F o liczbie charakterystycznej mniejszej niż ε ; ciąg $a = a_1, a_2, \dots, a_n = p_1, a_{n+1} = p$ jest wówczas ciągiem punktów o liczbie charakterystycznej mniejszej niż ε , łączącym w F punkt a z punktem p . Punkt p należy zatem do F_1 . Podobnie, jeśli $q \in F_2$, wówczas istnieje punkt $q_1 \in F_2$ taki, iż $\varrho(q_1, q) < \varepsilon$. Załóżmy, iż punkt q nie należy do F_2 , a więc że daje się połączyć z a w zbiorze F ciągiem skończonym punktów o liczbie charakterystycznej $< \varepsilon$; wówczas jednak punkt q_1 dałby się również połączyć z punktem a w F ciągiem punktów o liczbie charakterystycznej $< \varepsilon$, co sprzeczne jest wszakże z tym, iż $q_1 \in F_2$. Zatem $q \in F_2$, co oznacza, iż zbiór F_2 jest domknięty, podobnie jak zbiór F_1 .

Skoro więc zbiór F jest kontynuum, przeto jeden przynajmniej ze zbiorów F_1, F_2 jest pusty, a że $a \in F_1$, więc $F_2 = \emptyset$.

2^o Warunek jest dostateczny. Załóżmy, iż zbiór domknięty F nie jest kontynuum; jest on więc sumą dwu zbiorów niepustych, domkniętych i rozłącznych, P_1 oraz P_2 . W myśl tw. 8.3 mamy $\varrho(P_1, P_2) > 0$ i, oznaczając przez z_1, z_2 dwa dowolne punkty należące odpowiednio do zbiorów P_1 oraz P_2 , widzimy natychmiast, że punktów tych nie można połączyć w P ciągiem punktów o liczbie charakterystycznej mniejszej niż $\varrho(P_1, P_2)$. Zbiór F nie czyni więc zadość warunkowi twierdzenia.

Warunek Cantora (tw. 9.1) jest w wielu przypadkach dogodniejszy niż definicja bezpośrednia, podana w § 5. Np. widoczne jest od razu, iż warunkowi temu czyni zadość każdy odcinek. *Każdy odcinek jest tedy kontynuum lub redukuje się do punktu.* Z kolei przez łatwą indukcję, opierając się na tw. 5.2, dowodzimy, iż również *każdą łamaną o dowolnej ilości boków jest kontynuum lub redukuje się do punktu.* Pokażemy dalej, iż *każdy okrąg $C(z_0, r)$ jest kontynuum.* Możemy założyć oczywiście, że $z_0 \neq \infty$, gdyż okrąg o środku ∞ jest identyczny z pewnym okręgiem o środku 0. Przyjmując $z_0 = x_0 + iy_0$, gdzie x_0 oraz y_0 są liczbami rzeczywistymi, widzimy, że okrąg $C(z_0; r)$ jest zbiorem punktów $z = x + iy$, takich iż $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, i może być przeto przedstawiony jako suma dwu półokręgów, danych odpowiednio przez równania $y = y_0 + [r^2 - (x - x_0)^2]^{1/2}$ oraz $y = y_0 - [r^2 - (x - x_0)^2]^{1/2}$, gdzie $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$. Otóż każdy z tych półokręgów jest obrazem ciągłym przedziału $[x_0 - r, x_0 + r]$, a więc jest kontynuum w myśl tw. 7.1. Ponieważ zaś półokręgi te mają punkty wspólne, mianowicie punkty $(x_0 \pm r, y_0)$, zatem suma ich, t. j. okrąg $C(z_0; r)$, jest także kontynuum (por. tw. 5.2).

Możemy wyprowadzić stąd dalej spójność każdego pierścienia $P(z_0; r_1, r_2)$, przy czym znów założyć możemy (por. § 8, str. 21), iż $z_0 \neq \infty$. Niech z_1 i z_2 będą dowolnymi punktami tego pierścienia i niech dla skrócenia $R_1 = |z_1 - z_0|$, $R_2 = |z_2 - z_0|$.

W sumie trzech kontynuów

$$(9.2) \quad C(z_0; R_1) + [z_0 + R_1, z_0 + R_2] + C(z_0; R_2),$$

z których dwa są okręgami, a jeden odcinkiem, każdy składnik następny ma punkt wspólny z poprzednim; suma (9.2) jest przeto również kontynuum, a jak spostrzegamy od razu, zawiera punkty z_1 i z_2 , sama zaś zawiera się w pierścieniu $P(z_0; r_1, r_2)$. W myśl więc tw. 5.8 *każdy pierścień $P(z_0; r_1, r_2)$ jest zbiorem spójnym, a więc obszarem.* W szczególności *obszarami są wszystkie otoczenia pierścieniowe. Pierścienie domknięte, jako domknięcia pierścieni otwartych* (por. tw. 5.1), *są kontynuumami.*

Analogicznie dowodzimy, iż *koła otwarte są obszarami, a koła domknięte są kontynuumami lub redukują się do punktu* (przypadek koła o środku ∞ sprowadza się tu do przypadku koła o środku 0 przez przekształcenie homeomorficzne płaszczyzny $\zeta = 1/z$).

W § 5 udowodniliśmy (tw. 5.5) dla przestrzeni abstrakcyjnych, że składowe zbiorów domkniętych są domknięte. Obecnie, możemy udowodnić dla płaszczyzny twierdzenie analogiczne o zbiorach otwar-

tych. Niech mianowicie a będzie punktem zbioru otwartego G . Istnieje przeto pewne otoczenie U tego punktu, zawarte w G . Ponieważ, jak pokazaliśmy wyżej, koło U jest zbiorem spójnym, zatem składowa zbioru G , która zawiera punkt a , zawiera zarazem jego otoczenie U . Wynika stąd, iż

(9.3) *Każda składowa zbioru otwartego jest zbiorem otwartym, a więc obszarem.*

W dowodzie tw. 9.3 korzystaliśmy ze spójności otoczeń kołowych. Opierając się na spójności otoczeń pierścieniowych, udowodnimy twierdzenie następujące:

(9.4) *Jeśli F jest zbiorem odosobnionym, domkniętym w obszarze G , to zbiór $G - F$ jest również obszarem; odwrotnie, jeśli F jest zbiorem odosobnionym, zawartym w zbiorze otwartym G , i zbiór $G - F$ jest spójny, to G jest obszarem.*

Dowód. Niech $F \subset G$ będzie zbiorem odosobnionym, domkniętym w obszarze G . Zbiór $G - F$ jest oczywiście otwarty. Załóżmy, iż zbiór ten nie jest obszarem; jest on więc (§ 5, str. 11) sumą dwu zbiorów otwartych, rozłącznych i niepustych H_1 i H_2 . Ponieważ zbiór F jest odosobniony, przeto każdemu punktowi $a \in F$ przyporządkować możemy pewne otoczenie pierścieniowe $P(a)$ tego punktu, zawarte w obszarze G i nie zawierające punktów zbioru F . Każde takie otoczenie zawarte jest całkowicie w jednym ze zbiorów H_1 i H_2 ; istotnie, w przeciwnym razie, pierścień otwarty $P(a)$ byłby sumą dwu zbiorów otwartych, rozłącznych i niepustych $H_1 \cdot P(a)$ i $H_2 \cdot P(a)$.

Możemy tedy rozbić zbiór F na dwa podzbiory rozłączne F_1 i F_2 , zaliczając punkt $a \in F$ do zbioru F_1 lub do zbioru F_2 , zależnie od tego, czy $P(a) \in H_1$, czy $P(a) \in H_2$. Zbiory $H_1 + F_1$ i $H_2 + F_2$ są otwarte, rozłączne i niepuste, suma zaś ich jest obszarem G . Dochodzimy tedy do sprzeczności wobec spójności obszaru G .

Druga część twierdzenia wynika natychmiast z tw. 5.1, ponieważ w przypadku, gdy zbiór $F \subset G$ jest zbiorem odosobnionym, $G - F \subset G \subset \overline{G} = \overline{G - F}$.

(9.5) *Na to, aby zbiór otwarty G był obszarem, konieczne jest i dostateczne, aby każde dwa punkty tego zbioru, różne od punktu ∞ , można było połączyć w G linią łamaną.*

Dowód. Z uwagi na tw. 9.4 usunąć możemy ze zbioru G punkt ∞ , o ile zbiór G punkt ten zawiera. Możemy tedy założyć, iż punkt ∞ nie należy do G .

Niech a będzie dowolnym punktem zbioru G . Będziemy mówili dla skrócenia, iż punkt posiada własność (W_a) , jeśli można go połączyć z a linią łamaną przebiegającą w G . Dla udowodnienia konieczności warunku twierdzenia wystarczy pokazać, iż w przypadku gdy zbiór G jest obszarem, wszystkie jego punkty posiadają własność (W_a) .

W tym celu zauważmy przede wszystkim, iż jeśli $K \subset G$ jest dowolnym kołem i pewien punkt b tego koła posiada własność (W_a) , wówczas wszystkie punkty koła K posiadają własność (W_a) . Istotnie, jeśli $c \in K$, to cały odcinek $[c, b]$ zawiera się w $K \subset G$ i przeto, jeśli punkt b daje się połączyć z a łamaną $[b, b_1, b_2, \dots, b_n = a]$ przebiegającą w G , to łamana $[c, b, b_1, b_2, \dots, b_n = a]$ również przebiega w G , łącząc punkt c z punktem a .

Niech teraz G_1 będzie zbiorem punktów posiadających własność (W_a) , a G_2 zbiorem pozostałych punktów obszaru G . Każdy z tych dwu zbiorów jest otwarty: istotnie, jeśli $z \in G_1$ i K jest dowolnym kołem, zawierającym punkt z i zawartym w obszarze G , wówczas w myśl poprzedniej uwagi koło to zawiera się całkowicie w G_1 lub G_2 , zależnie od tego, czy $z \in G_1$, czy $z \in G_2$. Jeden zatem ze zbiorów G_1 oraz G_2 jest na pewno pusty, a że $a \in G_1$, więc $G_2 = \emptyset$, co znaczy, iż wszystkie punkty obszaru G posiadają własność (W_a) .

Dostateczność warunku wynika natychmiast z tw. 5.8, ponieważ każda łamana jest zbiorem spójnym.

(9.6) *Jeżeli a i b są dwoma punktami zbioru domkniętego F , należącymi do różnych składowych tego zbioru, wówczas zbiór F przedstawia zawsze można jako sumę dwu zbiorów F_1 i F_2 domkniętych, rozłącznych i takich, iż $a \in F_1$ oraz $b \in F_2$.*

Twierdzenie to jest oczywiste w przypadku, gdy zbiór F posiada tylko skończoną ilość składowych. Istotnie, za zbiór F_1 możemy wtedy przyjąć tę składową, która zawiera punkt a , zaś za zbiór F_2 sumę składowych pozostałych. Metoda ta zawodzi jednak w przypadku ogólnym, gdyż określony w powyższy sposób zbiór F_2 mógłby nie być domknięty. Dowód twierdzenia wymaga wówczas rozumowania nieco subtelniejszego, którego główne ogniwa wyodrębnione będą w postaci dwu lematów.

(9.7) *Jeżeli Q_1 oraz Q_2 są dwoma zbiorami domkniętymi rozłącznymi, wówczas istnieją dwa zbiory otwarte G_1 oraz G_2 , takie iż*

$$(9.8) \quad Q_1 \subset G_1, \quad Q_2 \subset G_2, \quad \overline{G_1} \cdot \overline{G_2} = \emptyset.$$

Dowód. Niech $r = \varrho(Q_1, Q_2)$. W myśl tw. 8.3 mamy $r > 0$. Weźmy pod uwagę rodzinę wszystkich kół $K(z; r/2)$ o środkach $z \in Q_1$. Koła te pokrywają łącznie zbiór Q_1 i nie zawierają wewnątrz ani na brzegu punktów zbioru Q_2 . W myśl twierdzenia Borela-Lebesgue'a (tw. 6.4) z rodziny tych kół wyjąć możemy skończoną ich ilość $K_1, K_2, \dots, K_n$, które także pokrywają łącznie zbiór Q_1 . Oznaczając przez G_1 ich sumę, otrzymujemy zbiór otwarty G_1 , taki iż $Q_1 \subset G_1$ oraz $\bar{G}_1 \cdot Q_2 = (\bar{K}_1 + \dots + \bar{K}_n) \cdot Q_2 = \emptyset$. W ten sam sposób, zastępując tylko zbiór Q_1 przez Q_2 , a zbiór Q_2 przez $\bar{G}_1$, otrzymujemy zbiór otwarty G_2 taki, iż $Q_2 \subset G_2$ oraz $\bar{G}_2 \cdot \bar{G}_1 = \emptyset$. Zbiory G_1 i G_2 czynią zatem zadość warunkom (9.8).

(9.9) Jeżeli $\{T_n\}_{n=1,2,\dots}$ jest ciągiem zstępującym zbiorów domkniętych, takich iż każde dwa punkty zbioru T_n można połączyć w tym zbiorze ciągiem skończonym punktów o liczbie charakterystycznej $< 1/n$, wówczas iloczyn T zbiorów T_n jest zbiorem domkniętym i spójnym (t. zn. jest kontynuum lub redukuje się do punktu).

Dowód. Załóżmy, iż zbiór T (domknięty i niepusty w myśl twierdzeń 4.4, 8.2 i 6.1) jest sumą dwu zbiorów Q_1 i Q_2 rozłącznych, domkniętych i niepustych. Niech G_1 i G_2 będą zbiorami otwartymi, czyniącymi zadość związkowi (9.8). Ponieważ każdy punkt zbioru Q_1 daje się połączyć w T_n z każdym punktem zbioru Q_2 ciągiem skończonym punktów o liczbie charakterystycznej mniejszej niż $1/n$, zatem dla $1/n < \varrho(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$ każdy ze zbiorów T_n zawiera punkty z poza zbioru $\bar{G}_1 + \bar{G}_2$ i przeto $T_n \cdot C(G_1 + G_2) \supset T_n \cdot C(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) \neq \emptyset$. W myśl więc twierdzenia Cantora (tw. 6.1) również $T \cdot C(G_1 + G_2) \neq \emptyset$, co jednak stanowi oczywistą sprzeczność, gdyż $T = Q_1 + Q_2 \subset G_1 + G_2$.

Możemy przystąpić obecnie do dowodu tw. 9.6. Niech a i b będą punktami należącymi do różnych składowych zbioru domkniętego F . Pokażemy przede wszystkim, że istnieje taka liczba $\alpha > 0$, iż

(9.10) każdy ciąg punktów łączący punkty a i b w zbiorze F ma liczbę charakterystyczną $\geq \alpha$.

Założmy, iż tak nie jest. Istnieje więc dla każdej liczby całkowitej n ciąg skończony punktów C_n o liczbie charakterystycznej $< 1/n$, łączący w F punkty a i b . Niech

$$(9.11) \quad A_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k \quad \text{oraz} \quad (9.12) \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Każdy punkt z zbioru $\bar{A}_n$ można połączyć w tym zbiorze z punktem a łańcuchem punktów o liczbie charakterystycznej $< 1/n$. Istotnie, skoro $z \in \bar{A}_n$, to istnieje punkt $p \in A_n$, taki iż

$$(9.13) \quad \varrho(z, p) < 1/n.$$

Ze względu na (9.11) dla pewnej wartości $k \geq n$ mamy $p \in C_k$; punkty p i a można tedy połączyć w zbiorze $C_k \subset A_n \subset \bar{A}_n$ ciągiem punktów o liczbie charakterystycznej mniejszej niż $1/k \leq 1/n$. Z uwagi więc na (9.13) również i punkt z można połączyć z punktem a w $\bar{A}_n$ ciągiem punktów o liczbie charakterystycznej $< 1/n$, a przeto ciągiem takim połączyć można w zbiorze $\bar{A}_n$ każdą parę punktów tego zbioru.

W myśl tedy lematu 9.9 zbiór A , określony przez wzór (9.12), jest pewnym podzbiorem spójnym zbioru F ; ponieważ zaś $a \in A_n$ oraz $b \in A_n$ dla każdego n , zatem również $a \in A$ oraz $b \in A$ i dochodzimy do sprzeczności z założeniem, iż punkty a i b należą do różnych składowych zbioru F .

Istnieje więc liczba $\alpha > 0$ spełniająca warunek (9.10). Oznaczmy przez F_1 zbiór tych punktów zbioru F , które można połączyć z a w zbiorze F ciągiem punktów o liczbie charakterystycznej $< \alpha$, a przez F_2 zbiór punktów pozostałych. Mamy oczywiście $a \in F_1$ oraz $b \in F_2$. Z drugiej strony, stwierdzamy łatwo (por. np. dowód tw. 9.1), iż obydwie te zbiory są domknięte. Otrzymaliśmy więc żądany rozkład zbioru F . Twierdzenie 9.6 jest w ten sposób udowodnione.

O zbiorze otwartym mówimy, że *nie rozcina płaszczyzny*, jeżeli dopełnienie jego (względem płaszczyzny domkniętej) jest spójne. Obszar, który nie rozcina płaszczyzny, nazywa się *jednospójnym*. Ogólniej, jeżeli dopełnienie obszaru posiada dokładnie n składowych, wówczas obszar nazywa się *n-spójnym* (ilość n składowych może być nieskończona: obszar jest wtedy *nieskończenie spójny*); liczbę n , skończoną lub nieskończoną, nazywamy *stopniem spójności* obszaru.

Płaszczyzna domknięta, płaszczyzna otwarta, koło, zbiór punktów z takich, że $a < \Re z < b$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi skończonymi, półpłaszczyzna $\Re z > 0$ i t. p. są przykładami obszarów jednospójnych. Pierścienie, a w szczególności — otoczenia pierścieniowe, są obszarami dwuspójnymi. Płaszczyzna otwarta, po usunięciu z niej ciągu punktów $1, 2, \dots, n, \dots$, staje się obszarem nieskończenie spójnym.

(9.14) Każda składowa zbioru otwartego G nie rozcinającego płaszczyzny jest obszarem jednospójnym.

Dowód. Na mocy tw. 9.3 każda składowa zbioru otwartego jest obszarem, a z uwagi na tw. 4.5 (4^o) mnogość tych składowych jest co najwyżej przeliczalna. Niech H będzie którąkolwiek z tych składowych i niech $\{H_n\}$ oznacza ciąg składowych pozostałych. Mamy, jak łatwo spostrzec,

$$(9.15) \quad CH = CG + \sum_n H_n = CG + \sum_n \bar{H}_n.$$

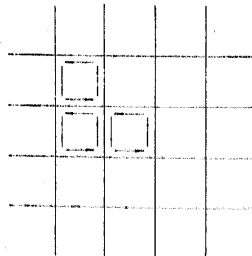
Zbiór CG jest tu kontynuuum z założenia, a zbiory $\bar{H}_n$ są kontynuami na mocy tw. 5.1. Nadto każdy zbiór $\bar{H}_n$ posiada punkty wspólne z CG i przeto, z uwagi na tw. 5.7, cały człon ostatni równości (9.15) jest zbiorem spójnym. Zbiór CH jest więc kontynuuum, co należało udowodnić.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli P i Q są zbiorami domkniętymi, to suma tych składowych zbioru P , które posiadają punkty wspólne z Q , jest również zbiorem domkniętym.

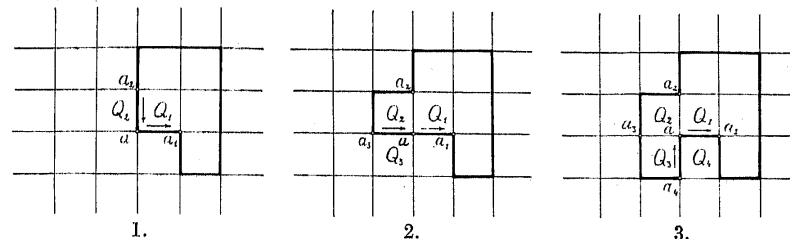
2. Jeżeli S jest składową zbioru domkniętego P , rozłączną z pewnym zbiorem domkniętym Q , to S jest również składową zbioru $P+Q$.

§ 10. Siatki kwadratowe na płaszczyźnie. Nazywać będziemy *siatką kwadratową rzędu n* — i oznaczać przez $\mathfrak{Q}^{(n)}$ — rodzinę przeliczalną kwadratów $Q_{h,k}^{(n)} = [h/2^n, (h+1)/2^n; k/2^n, (k+1)/2^n]$, gdzie h i k przebiegają niezależnie liczby całkowite (dodatnie, ujemne i 0). Siatkę tę — która pokrywa całą płaszczyznę otwartą — otrzymujemy, przeprowadzając na płaszczyźnie dwa pęki prostych, równoległych do osi rzeczywistej i osi urojonej: $y = k/2^n$ oraz $x = h/2^n$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Boki i wierzchołki kwadratów $Q_{h,k}^{(n)}$ nazywać będziemy *bokami* i *wierzchołkami siatki $\mathfrak{Q}^{(n)}$* . Każde dwa kwadraty siatki są bądź rozłączne, bądź posiadają bok wspólny — i wówczas nazywają się *przyległymi wzdłuż tego boku* — bądź wreszcie posiadają tylko jeden wierzchołek wspólny — i wówczas nazywają się *przeciwległymi*.

Należy zauważyć, że wspólny bok dwu kwadratów przyległych jest w kwadratach tych zorientowany przeciwnie (por. § 8, str. 19), t. zn. początek i koniec tego boku ulegają przestawieniu, gdy przechodzimy od jednego z tych kwadratów do drugiego (p. rysunek).



Niech $\mathfrak{S}$ będzie dowolnym skończonym układem kwadratów siatki $\mathfrak{Q}^{(n)}$, a S sumą tych kwadratów. Nazywać będziemy *bokiem układu $\mathfrak{S}$* każdy odcinek, który jest bokiem przynajmniej jednego z kwadratów układu; w szczególności zaś odcinek, który jest bokiem dokładnie jednego kwadratu układu, nazywać się będzie *bokiem brzegowym*. Bok taki, zorientowany zgodnie z tym kwadratem układu, do którego należy, nazywać będziemy *bokiem brzegowym zorientowanym* (boki nakreślone grubszą kreską na rys. 1, 2 i 3). Wierzchołki kwadratów układu $\mathfrak{S}$ nazywać będziemy krótko *wierzchołkami układu*; wierzchołek układu $\mathfrak{S}$, który należy do trzech co najwyżej kwadratów układu, nazywać się będzie *wierzchołkiem brzegowym*. Widać, że jest, iż brzeg zbioru S jest sumą odcinków brzegowych układu $\mathfrak{S}$, na to zaś, aby wierzchołek tego układu był wierzchołkiem brzegowym, konieczne jest i wystarcza, aby leżał na brzegu zbioru S .



Niech a będzie dowolnym wierzchołkiem brzegowym układu $\mathfrak{S}$, a więc kraniec przynajmniej jednego boku brzegowego tego układu. Założmy, że a jest np. początkiem boku brzegowego $[a, a_1]$; pokażemy, iż wówczas a jest także końcem pewnego innego boku brzegowego. Istotnie, odcinek $[a, a_1]$ jest bokiem zorientowanym pewnego kwadratu $Q_1 \in \mathfrak{S}$. Punkt a jest więc końcem pewnego boku zorientowanego tego kwadratu. Niech $[a_2, a]$ będzie tym bokiem i niech Q_2 będzie kwadratem siatki, przyległym do Q_1 wzdłuż boku $[a_2, a]$. Jeśli kwadrat ten nie należy do układu $\mathfrak{S}$ (rys. 1), to odcinek $[a_2, a]$ jest żądanym bokiem brzegowym o końcu w punkcie a . W przypadku przeciwnym, zważywszy, iż odcinek $[a, a_2]$ jest bokiem zorientowanym kwadratu Q_2 , kwadrat ten posiada również bok zorientowany o końcu w punkcie a . Oznaczmy bok ten przez $[a_3, a]$, a przez Q_3 kwadrat przyległy do Q_2 wzdłuż boku $[a_3, a]$. Jeśli kwadrat ten nie należy do $\mathfrak{S}$ (por. rys. 2), wówczas odcinek zorientowany

$\overrightarrow{[a_3, a]}$ jest żądanym bokiem brzegowym o końcu w punkcie a . W przeciwnym przypadku, zważywszy, iż $\overrightarrow{[a, a_3]}$ jest bokiem zorientowanym kwadratu Q_3 , oznaczmy przez $\overrightarrow{[a_4, a]}$ bok zorientowany tego kwadratu o końcu w punkcie a , zaś przez Q_4 kwadrat przyległy do Q_3 wzdłuż boku $[a_4, a]$. Skoro jednak kwadraty Q_1, Q_2 i Q_3 należą do układu $\mathfrak{S}$ i ich wspólny wierzchołek a jest z założenia punktem brzegowym, przeto kwadrat Q_4 na pewno już nie należy do układu $\mathfrak{S}$ i odcinek $\overrightarrow{[a_4, a]}$ jest żądanym bokiem brzegowym układu o końcu w punkcie a (rys. 3).

Analogicznie, zakładając, iż punkt a jest końcem pewnego boku brzegowego zorientowanego, wyznaczyć można bok brzegowy, dla którego punkt a jest początkiem. Udowodniliśmy więc, iż

(10.1) *Każdy wierzchołek brzegowy skończonego układu kwadratów siatki $\mathfrak{Q}^{(n)}$ jest początkiem przynajmniej jednego boku brzegowego tego układu oraz końcem przynajmniej jednego takiego boku.*

Wierzchołek brzegowy układu skończonego kwadratów siatki nazywać będziemy *wielokrotnym*, jeśli jest wspólnym krawędziem więcej niż dwu boków brzegowych układu. Z tw. 10.1 wynika łatwo twierdzenie następujące:

(10.2) *Jeśli S jest sumą układu skończonego $\mathfrak{S}$ kwadratów siatki i jeśli układ $\mathfrak{S}$ nie posiada wierzchołków brzegowych wielokrotnych, wówczas brzeg zbioru S jest sumą skończonej ilości łamanych zamkniętych rozłącznych, utworzonych z boków brzegowych zorientowanych układu $\mathfrak{S}$.*

Dowód. Niech $\overrightarrow{[a, b]}$ będzie dowolnym bokiem brzegowym zorientowanym układu $\mathfrak{S}$. Na mocy tw. 10.1 określić możemy przez indukcję ciąg punktów $a_1 = a, a_2 = b, a_3, \dots, a_n, \dots$, taki iż dla każdego n odcinek $\overrightarrow{[a_n, a_{n+1}]}$ jest bokiem brzegowym zorientowanym układu $\mathfrak{S}$. Ponieważ jednak układ ten posiada oczywiście tylko skończoną ilość wierzchołków, zatem istnieje na pewno taka para różnych wskaźników n, m , iż $a_n = a_m$. Niech n_0 będzie najniższym z takich wskaźników n dla których istnieją punkty $a_m = a_n$ o wskaźnikach $m > n$; niech z kolei m_0 będzie najmniejszym ze wskaźników $m > n_0$, dla których $a_m = a_{n_0}$. Powiadamy, iż $n_0 = 1$; gdyby bowiem $n_0 > 1$, wówczas punkt $a_{n_0} = a_{m_0}$ byłby wspólnym krawędziem trzech boków brzegowych

$[a_{n_0-1}, a_{n_0}]$, $[a_{n_0}, a_{n_0+1}]$ i $[a_{m_0-1}, a_{m_0}]$, a więc wierzchołkiem brzegowym wielokrotnym. Zatem $a_{m_0} = a_1 = a$ i przeto łamana $[a = a_1, b = a_2, a_3, \dots, a_{m_0}]$ jest zamknięta.

Każdy więc bok brzegowy $\overrightarrow{[a, b]}$ układu $\mathfrak{S}$ należy do pewnej łamanej zamkniętej, utworzonej z boków brzegowych zorientowanych, i — jak łatwo zauważyć — do jednej tylko takiej łamanej. Z drugiej strony, łamanych takich może być tylko ilość skończona. Wreszcie łamane te są rozłączne, w przeciwnym bowiem razie spotkałyby się w wierzchołku brzegowym wielokrotnym.

(10.3) *Jeżeli F_1 i F_2 są zbiorami domkniętymi rozłącznymi i zbiór F_1 nie zawiera punktu ∞ , wówczas każda siatka $\mathfrak{Q}^{(n)}$ dostatecznie wysokiego rzędu zawiera układ skończony kwadratów $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ bez punktów brzegowych wielokrotnych, taki że*

$$F_1 \subset \left(\sum_{k=1}^p Q_k \right)^{\circ} \quad \text{oraz} \quad F_2 \subset \left(\sum_{k=1}^p Q_k \right).$$

Dowód. Niech m będzie dowolną liczbą całkowitą, taką iż

$$(10.4) \quad 1/2^{m-1} < \varrho(F_1, F_2).$$

Ponieważ zbiór F_1 jest domknięty i nie zawiera punktu ∞ , przeto jest ograniczony i siatka $\mathfrak{Q}^{(m)}$ zawiera tylko skończoną ilość kwadratów, posiadających punkty wspólne ze zbiorem F_1 . Niech $R_1, R_2, \dots, R_s$ będą tymi kwadratami. Zbiór F_1 zawiera się oczywiście wewnątrz ich sumy. Nadto, ponieważ z uwagi na (10.4) średnice kwadratów siatki $\mathfrak{Q}^{(m)}$ są mniejsze niż $\varrho(F_1, F_2)$, żaden z tych kwadratów nie posiada punktów wspólnych z obydwoma zbiorami F_1 i F_2 jednocześnie, a przeto kwadraty R_k są wszystkie rozłączne ze zbiorem F_2 . Zatem

$$(10.5) \quad F_1 \subset \left(\sum_{k=1}^s R_k \right)^{\circ} \quad \text{oraz} \quad (10.6) \quad F_2 \cdot \left(\sum_{k=1}^s R_k \right) = 0.$$

Tak określony układ kwadratów $R_1, R_2, \dots, R_s$ siatki $\mathfrak{Q}^{(m)}$ zawierać jednak może punkty brzegowe wielokrotne. W celu uniknięcia takich punktów, oznaczmy przez r odległość zbioru F_2 od $R_1 + R_2 + \dots + R_s$ i weźmy pod uwagę siatkę $\mathfrak{Q}^{(n)}$ rzędu n dostatecznie wysokiego, tak by

$$(10.7) \quad n \geq m + 2 \quad \text{oraz} \quad (10.8) \quad 1/2^{n-1} < r.$$

Podzielmy każdy z kwadratów R_k na 4^{n-m} kwadratów równych i do otrzymanych w ten sposób kwadratów siatki $\mathcal{Q}^{(m)}$ dołączmy jeszcze te wszystkie kwadraty tej siatki, które zawierają wierzchołki brzegowe wielokrotne układu $R_1, R_2, \dots, R_s$ (por. rysunek). Otrzymujemy więc pewien układ skończony $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ kwadratów siatki $\mathcal{Q}^{(n)}$ który, jak łatwo zauważyć na mocy (10.7), nie posiada już z pewnością punktów wielokrotnych.

Nadto, z uwagi na (10.5)

$$F_1 \subset \left(\sum_{k=1}^s R_k \right)^\circ \subset \left(\sum_{k=1}^p Q_k \right)^\circ;$$

wreszcie z (10.6) i (10.8) wynika

$$F_2 \cdot \left(\sum_{k=1}^p Q_k \right) = 0, \text{ t. j. iż}$$

$$F_2 \subset C \left(\sum_{k=1}^p Q_k \right).$$

Układ kwadratów $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ spełnia więc żądane warunki.

§ 11. Funkcje zespolone i rzeczywiste. Funkcje, określone na zbiorze H w dowolnej przestrzeni abstrakcyjnej H (ob. §§ 3, 7, i przyjmującą wartości zespolone, t. j. wartości należące do płaszczyzny E (ob. § 8), nazywamy *funkcją zespoloną na zbiorze H* . Jeżeli funkcja zespolona F nie przyjmuje nigdzie na zbiorze H wartości ∞ , wówczas nazywa się *skończoną* na tym zbiorze, a jeśli istnieje liczba skończona M taka, iż $|F(z)| < M$ w każdym punkcie $z \in H$, wówczas mówimy, iż funkcja F jest na zbiorze H *ograniczona*.

Funkcja zespolona, która przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, nazywa się *rzeczywistą*.

Podstawowe twierdzenie Weierstrassa o funkcjach ciągłych w przedziale możemy uogólnić na przestrzenie abstrakcyjne w sposób następujący:

(11.1) *Jeżeli funkcja F rzeczywista, skończona i ciągła na zbiorze spójnym H w dowolnej przestrzeni abstrakcyjnej przyjmuje na zbiorze tym dwie wartości różne a oraz b , wówczas przyjmuje na nim wszystkie wartości przedziału $[a, b]$. W szczególności więc funkcja ciągła, przyjmująca na zbiorze spójnym tylko wartości rzeczywiste i całkowite, jest na tym zbiorze stała.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja nie przyjmuje na H pewnej wartości c takiej, iż $a < c < b$. Oznaczając przez H_1^* i H_2^* zbiory tych punktów zbioru $H^* = F(H)$, które leżą odpowiednio na lewo i na prawo od c , stwierdzamy natychmiast, iż zbiory te są rozłączne i domknięte w H^* oraz iż $H^* = H_1^* + H_2^*$; nadto, żaden ze zbiorów H_1^* i H_2^* nie jest pusty, gdyż $a \in H_1^*$ i $b \in H_2^*$. Zbiór H^* nie jest więc spójny, a przeto na mocy tw. 7.1(b) nie jest również spójny i zbiór H . Dochodzimy w ten sposób do sprzeczności.

(11.2) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją rzeczywistą, ciągłą na zbiorze H w dowolnej przestrzeni abstrakcyjnej, wówczas dla każdej liczby rzeczywistej a zbiór tych punktów $z \in H$, w których $F(z) \leq a$, jest domknięty w H .*

Twierdzenie to wynika natychmiast z tw. 7.1(a), gdyż zbiór tych punktów zbioru $F(H)$, które zawarte są w przedziale $[-\infty, a]$, jest oczywiście domknięty w zbiorze $F(H)$.

Rozpatrzmy — dla przykładu oraz ze względu na dalsze zastosowania — pewne funkcje rzeczywiste, określone na płaszczyźnie.

Niech F będzie dowolnym zbiorem domkniętym na płaszczyźnie E , nie redukującym się do punktu ∞ . Oznaczmy dla każdego punktu z płaszczyzny przez $\varrho_1(z, F)$ kres dolny liczb $|z - x|$, gdy punkt x przebiega zbiór F .

Niech z_1 i z_2 będą dwoma punktami płaszczyzny, różnymi od ∞ , a ε dowolną liczbą dodatnią. Istnieje więc taki punkt $x_1 \in F$, iż $|z_1 - x_1| \leq \varrho_1(z_1, F) + \varepsilon$. Zatem

$$\varrho_1(z_2, F) \leq |z_2 - x_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1 - x_1| \leq \varrho_1(z_1, F) + |z_2 - z_1| + \varepsilon,$$

a więc, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią,

$$\varrho_1(z_2, F) - \varrho_1(z_1, F) \leq |z_2 - z_1|.$$

Przestawiając punkty z_1 i z_2 , otrzymujemy

$$|\varrho_1(z_2, F) - \varrho_1(z_1, F)| \leq |z_2 - z_1|$$

dla każdej pary punktów $z_1 \neq \infty$, $z_2 \neq \infty$. Z oszacowania tego wynika natychmiast, iż funkcja $\varrho_1(z, F)$ jest dla każdego zbioru domkniętego F , nie redukującego się do punktu ∞ , skończona i ciągła na płaszczyźnie otwartej E_0 .

Zbadamy teraz odległość $\varrho(z, F)$ punktu z od zbioru domkniętego F (por. § 8, str. 20). Jeśli zbiór F nie zawiera punktu ∞ , wówczas $\varrho(z, F) = \varrho_1(z, F)$ dla każdego punktu $z \neq \infty$; funkcja $\varrho(z, F)$

jest więc ciągła na płaszczyźnie otwartej E_0 . Jeśli zbiór F redukuje się do punktu ∞ , wówczas $\varrho(z, F) = \varrho(z, \infty) = 1/|z|$ i funkcja $\varrho(z, F)$ jest oczywiście ciągła na całej płaszczyźnie E . Pozostaje więc do zbadania przypadek, gdy zbiór F zawiera punkt ∞ , ale nie redukuje się do tego punktu. Wówczas

$$(11.3) \quad \varrho(z, F) = \min\{\varrho_1(z, F), 1/|z|\},$$

gdzie przez $\min\{a, b\}$ rozumiemy dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b mniejszą z tych liczb, gdy liczby te są różne, a wspólną ich wartość, gdy są równe. Jeśli $g_1(z), g_2(z)$ są funkcjami rzeczywistymi i ciągłymi na pewnym zbiorze, to — jak łatwo zauważyć — funkcja $g(z) = \min\{g_1(z), g_2(z)\}$ jest także ciągła na tym zbiorze. Ze wzoru (11.3) wynika zatem, iż funkcja $\varrho(z, F)$ jest ciągła w całej płaszczyźnie otwartej. Ponieważ zaś zbiór F zawiera punkt ∞ , przeto $\varrho(\infty, F) = 0$, przy czym $\varrho(z, F) \leq 1/|z| \rightarrow 0$, gdy $z \rightarrow \infty$. Funkcja $\varrho(z, F)$ jest więc ciągła również i w nieskończoności. Reasumując, stwierdzamy, iż

(11.4) Dla każdego zbioru domkniętego F na płaszczyźnie E funkcja $\varrho(z, F)$ jest ciągła na płaszczyźnie otwartej E_0 ; w przypadku zaś, gdy zbiór F zawiera punkt ∞ , jest ciągła na całej płaszczyźnie E .

ĆWICZENIA. 1. Jeśli $\mathfrak{F}$ jest rodziną funkcji rzeczywistych ciągłych w przestrzeni abstrakcyjnej H , a M dowolną liczbą rzeczywistą, wówczas zbiór tych punktów $z \in H$, w których $F(z) \leq M$ dla każdej funkcji F rodziny $\mathfrak{F}$, jest zbiorem domkniętym.

2. Jeżeli $\mathfrak{F}$ jest rodziną funkcji rzeczywistych, ciągłych w przestrzeni metrycznej zupełnej A , i jeśli górny kres wartości funkcji tej rodziny jest skończony w każdym punkcie tej przestrzeni (t. j. jeśli dla każdego punktu $z \in A$ istnieje liczba skończona $M(z)$ taka, iż $F(z) \leq M(z)$ dla każdej funkcji F rodziny $\mathfrak{F}$), wówczas istnieje taka kula K w przestrzeni A oraz taka liczba skończona M niezależna od z , że $F(z) \leq M$ dla każdego punktu z kuli K oraz dla każdej funkcji F rodziny $\mathfrak{F}$.

[Wsk. Ob. § 8, ów. 4.]

§ 12. Krzywe. Jeżeli $z(t)$ jest funkcją ciągłą w przedziale skończonym $[a, b]$, przyjmującą wartości należące do przestrzeni abstrakcyjnej H , wówczas równanie

$$(12.1) \quad z = z(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leq t \leq b,$$

nazywać będziemy często *równaniem krzywej* albo wprost *krzywą* *przebiegającą w przestrzeni H i określoną w przedziale $[a, b]$* . Zmienną t nazywamy *parametrem krzywej* (12.1). O punktach $z(t)$, gdzie $a \leq t \leq b$, mówimy, iż *leżą na krzywej* (12.1), albo iż *są punktami tej krzywej*,

w szczególności punkty $z(a)$ i $z(b)$ nazywają się odpowiednio *po-czątkiem* i *końcem* krzywej. Jeśli $z(t_1) \neq z(t_2)$ ilekroć $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, wówczas krzywa (12.1) nazywa się *łukiem zwykłym*. Jeśli $z(a) = z(b)$, krzywa (12.1) nazywa się *zamkniętą*. Wreszcie jeśli $z(a) = z(b)$ i jeśli, wyjąwszy przypadek $t_1 = a, t_2 = b$, mamy zawsze $z(t_1) \neq z(t_2)$ ilekroć $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, wówczas krzywa (12.1) nazywa się *krzywą zamkniętą bez punktów wielokrotnych* albo *krzywą zamkniętą zwykłą*.

Jeśli $\varphi(\tau)$ jest funkcją rzeczywistą ciągłą, przyjmującą wartości przedziału $[a, b]$, gdy τ przebiega pewien przedział skończony $[a, \beta]$, wówczas podstawiając $t = \varphi(\tau)$ w równanie (12.1), otrzymujemy nową krzywą

$$(12.2) \quad z = z[\varphi(\tau)], \quad \text{gdzie} \quad a \leq \tau \leq \beta.$$

Będziemy mówili, iż krzywe (12.1) i (12.2) *nie różnią się od siebie istotnie*, albo że w krzywej (12.1) została dokonana *nieistotna zmiana parametru*, jeżeli:

1^o funkcja $\varphi(\tau)$ jest rosnąca i ciągła w całym przedziale $[a, \beta]$,

2^o $\varphi(a) = a$ oraz $\varphi(\beta) = b$,

3^o przedział $[a, \beta]$ rozbić można na skończoną ilość niezachodzących na siebie podprzedziałów tak, by w każdym z nich funkcja $\varphi(\tau)$ posiadała pochodną skończoną, dodatnią i ciągłą (na krańcach tych podprzedziałów funkcja może jednak posiadać tylko pochodne jednostronne).

Jeśli dwie krzywe C oraz Γ nie różnią się od siebie istotnie, wówczas piszemy $C = \Gamma$. Widoczne jest, iż dla każdej krzywej C mamy $C = C$; dalej, że, jeśli $C_1 = C_2$, wówczas także $C_2 = C_1$; wreszcie, jeśli $C_1 = C_2$ i $C_2 = C_3$, wówczas $C_1 = C_3$.

W dalszym ciągu krzywe, które nie różnią się od siebie istotnie, będziemy oznaczali często tymi samymi literami. Wyróżniać będziemy przy tym tylko takie własności krzywych, które, ilekroć przysługują pewnej krzywej C_0 , wówczas przysługują również i każdej krzywej $C = C_0$. O własnościach tych będziemy mówili, iż *nie zależą od sposobu przedstawienia parametrycznego krzywej*. Własnościami takimi są np. wyżej wyróżnione własności, polegające na tym, iż krzywa jest łukiem zwykłym, krzywą zamkniętą i t. p.

Jeśli krzywa C dana jest przez równanie $z = z(t)$ w przedziale $[a, b]$ parametru t i jeśli C_1 i C_2 są krzywymi danymi przez to samo równanie odpowiednio w przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$, gdzie $a < c < b$, lub ogólniej, jeśli są krzywymi nie różniącymi się istotnie od tych

krzywych, wówczas mówimy, iż krzywa C jest *sumą* krzywych C_1 oraz C_2 , i piszemy $C = C_1 + C_2$. Związek $C = C_1 + C_2$ pociąga więc, że koniec krzywej C_1 jest początkiem krzywej C_2 . Odwrotnie, jeśli dwie krzywe C_1 i C_2 dane są przez równania $z = z_1(t)$ i $z = z_2(t)$ w przedziałach $[a_1, b_1]$ i $[a_2, b_2]$ i jeśli $z_1(b_1) = z_2(a_2)$, to przyjmując $z(t) = z_1(t)$ dla $a_1 \leq t \leq b_1$ oraz $z(t) = z_2(t - b_1 + a_2)$ dla $b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2$, otrzymujemy krzywą C , która w przedziale $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ określona jest przez równanie $z = z(t)$ i która jest sumą krzywych C_1 i C_2 (gdyż równanie $z = z(t)$ w przedziale $[b_1, b_1 + b_2 - a_2]$ określa krzywą, która nie różni się istotnie od danej krzywej C_2). Przez indukcję rozszerzamy natychmiast definicję sumy krzywych na każdy skończony układ krzywych $C_1, C_2, \dots, C_n$; na to, aby suma ich była określona, konieczne jest i wystarcza, aby początek każdej następnej krzywej był końcem bezpośrednio poprzedzającej. Wreszcie, jeśli C oznacza krzywą daną przez równanie (12.1), wówczas $-C$ oznaczać będzie krzywą $z = z(-t)$ w przedziale $[-b, -a]$, jak również i każdą krzywą nieistotnie różniącą się od niej. Przejście od krzywej C do $-C$ polega na zmianie „zwrotu” krzywej i w szczególności pociąga za sobą przestawienie początku i końca krzywej.

Należy oczywiście odróżniać na ogół krzywą od zbioru punktów krzywej, który nazywać będziemy jej *obrazem geometrycznym*; w przypadkach wszakże, nie prowadzących do nieporozumienia, będziemy dla skrócenia mówili „krzywa” zamiast „obraz geometryczny krzywej”. Podobnie, krzywą na płaszczyźnie, określoną przez równanie (8.1) w przedziale $[0, 1]$, nazywać będziemy — tak samo, jak jej obraz — *odcinkiem* lub — *odcinkiem zorientowanym* $[z_1, z_2]$ (ponieważ na każdej krzywej mamy wyróżniony jej początek i koniec). Krzywą, która jest sumą skończonej ilości odcinków, nazywać będziemy *łamaną*.

W dalszym ciągu (ob. [Rozdz. I, §§ 16-18]) rozważać będziemy prawie wyłącznie krzywe na płaszczyźnie. Funkcja $z(t)$ w równaniu (12.1) jest wówczas pewną funkcją zespoloną; oznaczając przez $x(t)$ oraz $y(t)$ odpowiednio jej część rzeczywistą oraz urojoną, piszemy często równanie krzywej (12.1) w postaci dwu równań rzeczywistych:

$$(12.3) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{gdzie} \quad a \leq t \leq b,$$

jak przyjęte jest w analizie rzeczywistej; w tej postaci jednak piszemy równanie krzywej (12.1) wtedy tylko, gdy funkcja $z(t)$ nie przyjmuje wartości ∞ .

§ 13. Iloczyn kartezjański zbiorów. *Iloczynem kartezjańskim* (albo *kombinatorycznym*) zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_m$ nazywamy zbiór wszystkich układów postaci $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, gdzie $a_1, a_2, \dots, a_m$ są elementami odpowiednio zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_m$. Iloczyn ten oznaczać będziemy przez $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$, a w przypadku, gdy $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$, przez A^m ; zbiór A^m będziemy nazywali *m-tą potęgą kartezjańską* (a więc np. w przypadku $m=2$ *kwadratem kartezjańskim*) zbioru A .

Jeżeli $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$ są przestrzeniami abstrakcyjnymi z przyporządkowanymi im rodzinami otoczeń $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \dots, \mathfrak{U}^{(m)}$, spełniającymi postulaty I i II § 3, wówczas iloczyn kartezjański $A = A^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots \times A^{(m)}$ będziemy uważali za przestrzeń abstrakcyjną, przyporządkowując mu jako układ otoczeń rodzinę $\mathfrak{U}$ wszystkich zbiorów postaci $V = V^{(1)} \times V^{(2)} \times \dots \times V^{(m)}$, gdzie $V^{(1)} \in \mathfrak{U}^{(1)}, V^{(2)} \in \mathfrak{U}^{(2)}, \dots, V^{(m)} \in \mathfrak{U}^{(m)}$. Określony w ten sposób układ otoczeń $\mathfrak{U}$ spełnia oczywiście w stosunku do przestrzeni A postulat I § 3. W celu sprawdzenia postulatu II weźmy pod uwagę dowolny punkt $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}) \in A$. W każdej z rodzin $\mathfrak{U}^{(k)}$, gdzie $k=1, 2, \dots, m$, istnieje ciąg zstępujący otoczeń $\{U_n^{(k)}\}_{n=1, 2, \dots}$ zawierających $a^{(k)}$, taki, że jeśli $V^{(k)}$ jest dowolnym otoczeniem z rodziny $\mathfrak{U}^{(k)}$, zawierającym punkt $a^{(k)}$, wówczas $U_n^{(k)} \subset V^{(k)}$, [począwszy od pewnej wartości wskaźnika n . Przyjmując

$$U_n = U_n^{(1)} \times U_n^{(2)} \times \dots \times U_n^{(m)},$$

otrzymujemy ciąg zstępujący otoczeń $\{U_n\}$ należących do rodziny $\mathfrak{U}$ i zawierających punkt a . Niech $U = U^{(1)} \times U^{(2)} \times \dots \times U^{(m)}$ będzie dowolnym otoczeniem należącym do $\mathfrak{U}$ i zawierającym punkt a . Wówczas, dla dostatecznie wielkich wartości n , mamy jednocześnie

$$U_n^{(1)} \subset U^{(1)}, U_n^{(2)} \subset U^{(2)}, \dots, U_n^{(m)} \subset U^{(m)},$$

a więc również $U_n \subset U$. Rodzina otoczeń $\mathfrak{U}$ spełnia zatem postulat II, § 3.

Wymienimy parę własności podstawowych iloczynu kartezjańskiego przestrzeni:

(13.1) Niech A będzie iloczynem kartezjańskim m przestrzeni abstrakcyjnych $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$. Wówczas:

(a) dla każdego ciągu $\{a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(m)})\}$ punktów przestrzeni A związek $a = \lim_n a_n$, gdzie $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)})$, równoważny jest zespółowi m związków $a^{(1)} = \lim_n a_n^{(1)}, a^{(2)} = \lim_n a_n^{(2)}, \dots, a^{(m)} = \lim_n a_n^{(m)}$ odpowiednio w przestrzeniach $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$;

(b) jeśli $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$ są zbiorami domkniętymi w odpowiednich przestrzeniach $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$, to zbiór $A = A^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots \times A^{(m)}$ jest zbiorem domkniętym w przestrzeni A ;

(c) jeśli $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$ są zbiorami zwartymi w odpowiednich przestrzeniach $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$, to zbiór $B = B^{(1)} \times B^{(2)} \times \dots \times B^{(m)}$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni A .

Dowód. Część (a) twierdzenia jest oczywista, zaś część (b) wynika natychmiast z części (a). W celu udowodnienia części (c) przyjmijmy dla prostoty $m=2$ i niech $\{b_n = (b_n^{(1)}, b_n^{(2)})\}$ będzie dowolnym ciągiem punktów zbioru B . Z ciągu $\{b_n^{(1)}\}_{n=1,2,\dots}$, który składa się z punktów zbioru $B^{(1)}$, wyjąć możemy podciąg $\{b_{n_k}^{(1)}\}_{k=1,2,\dots}$ zbieżny w przestrzeni $A^{(1)}$. Z kolei, z ciągu $\{b_{n_k}^{(2)}\}_{k=1,2,\dots}$, którego punkty należą do zbioru $B^{(2)}$, wyjąć możemy podciąg $\{b_{n_{k_j}}^{(2)}\}_{j=1,2,\dots}$ zbieżny w przestrzeni $A^{(2)}$. Ciąg $\{(b_{n_{k_j}}^{(1)}, b_{n_{k_j}}^{(2)})\}_{j=1,2,\dots}$, wyjęty z danego ciągu $\{(b_n^{(1)}, b_n^{(2)})\}_{n=1,2,\dots}$, jest zatem (na mocy (a)) zbieżny w przestrzeni A . Zbiór BCA jest więc zwarty.]

Jako przykład iloczynu kartezjańskiego przestrzeni uważać możemy m -tą potęgę kartezjańską E^m płaszczyzny E . Układ otoczeń dla przestrzeni E^m tworzą iloczyny kartezjańskie postaci

$$K(z^{(1)}; r_1) \times K(z^{(2)}; r_2) \times \dots \times K(z^{(m)}; r_m),$$

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_m$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(m)}$ punktami płaszczyzny. W przypadku $m=2$ otoczenie $K(z_1; r_1) \times K(z_2; r_2)$ nazywać będziemy także otoczeniem dwukółowym o środku (z_1, z_2) lub otoczeniem dwukółowym punktu (z_1, z_2) .

Przez odległość $\varrho(z_1, z_2)$ dwu punktów $z_1 = (z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_1^{(m)})$ oraz $z_2 = (z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_2^{(m)})$ w przestrzeni E^m rozumiemy największą z liczb $\varrho(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})$ dla $k=1, 2, \dots, m$. Z tw. 13.1(a) wynika natychmiast, iż związek $\lim_k \varrho(z_k, z) = 0$ w przestrzeni E^m równoważny jest związkowi $\varrho(z_k, z) \rightarrow 0$.