

## ROZDZIAŁ VII

## KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

**§ 1. Przesunięcie i obrót ciała około osi.** W myśl określenia ciała sztywnego (str. 235) punkty jego nie zmieniają swych wzajemnych odległości podczas ruchu. Gdy punkt  $A$  przesunął się do punktu  $B$ , wektor  $\overline{AB}$  nazwaliśmy *przesunięciem* punktu (str. 34). Przy zmianie położenia ciała sztywnego punkty tego ciała doznają na ogół różnych przesunięć.

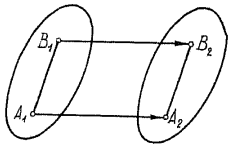
Poznamy najpierw pewne twierdzenia z geometrii, podające rozkład przesunięć punktów ciała. Twierdzenia te będą nam pomocne przy wyznaczaniu prędkości tych punktów.

Przesunięcie równoległe czyli translacja. Jeżeli przy zmianie położenia ciała przesunięcia wszystkich punktów są równe, mówimy, że ciało uległo *przesunięciu (równoległemu)* lub *translacji*.

Przesunięcie wspólne wszystkim punktom ciała nazywamy *wektorem przesunięcia* lub *przesunięciem ciała*.

Położenie ciała po przesunięciu jest więc wyznaczone przez położenie początkowe i wektor przesunięcia.

Przyjmijmy, że punkty  $A_1, B_1$  przeszły po przesunięciu równoległym w punkty  $A_2, B_2$ . Ponieważ przesunięcia obu punktów są równe, więc  $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$ . Wynika stąd, że  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ .



A więc: przy przesunięciu równoległym wektory związane z ciałem nie zmieniają kierunku ani zwrotu.

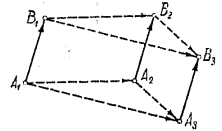
Na odwrót, łatwo dowieść, że jeżeli przy zmianie położenia ciała wektory w ciele zachowują kierunek i zwrot, to zmiana położenia jest przesunięciem równoległym.

Założmy bowiem, że dwa dowolne punkty  $A_1, B_1$  przeszły w punkty  $A_2, B_2$ . Ponieważ w myśl założenia jest  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ , więc  $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$ . Punkty  $A_1, B_1$  mają zatem równe przesunięcia czyli zmiana położenia ciała jest przesunięciem równoległym.

Łatwo zauważyć, że po przesunięciu równoległym proste i płaszczyzny w ciele pozostają do siebie równoległe.

Przypuśćmy, że ciało wykonało po kolei dwie translacje: najpierw z położenia I do położenia II, a następnie z położenia II do położenia III. Niech  $A_1, B_1$  będą dwoma dowolnymi punktami w położeniu I, zaś  $A_2, B_2$  i  $A_3, B_3$  odpowiadającymi im punktami w położeniach II i III. Z założenia jest  $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$  i  $\overline{A_2A_3} = \overline{B_2B_3}$ . Ponieważ  $\overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}$  i  $\overline{B_1B_3} = \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3}$ , więc  $\overline{A_1A_3} = \overline{B_1B_3}$ . Od położenia I możemy zatem przejść wprost do położenia III przy pomocy jednej translacji. Oznaczając przez  $\overline{u}_1, \overline{u}_2$  i  $\overline{u}$  przesunięcia przy przejściu z I do II, z II do III i z I do III, otrzymamy oczywiście

$$\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2.$$



A więc: jeżeli ciało wykonało kilka translacji kolejnych, wówczas położenie końcowe otrzymać możemy z położenia początkowego przy pomocy jednej translacji; przesunięcie ciała z położenia początkowego do końcowego równe jest sumie przesunięć przy poszczególnych translacjach.

Twierdzenie powyższe możemy nazwać *prawem składania przesunięć*.

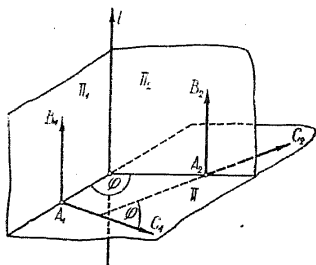
Ponieważ przesunięcie wypadkowe jest sumą przesunięć składowych, więc (na mocy przemienności sumy wektorów) przesunięcie wypadkowe nie zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało przesunięcia składowe.

Obrót około osi. Jeżeli przy zmianie położenia ciała dwa punkty, np.  $K$  i  $M$ , pozostały nieruchome, wówczas oczywiście, wszystkie punkty prostej  $l$ , przechodzącej przez  $K$  i  $M$ , również pozostaną nieruchome. Mówimy wtedy, że ciało wykonało *obróć około prostej  $l$* ; prostą tę nazywamy *osią obrotu*.

Jeżeli jakaś płaszczyzna  $\Pi_1$  przechodzi w położeniu początkowym ciała przez oś obrotu, to odpowiednia płaszczyzna  $\Pi_2$  w położeniu końcowym również przejdzie przez tę oś.

Nadajmy osi  $l$  dowolny zwrot. Kąt  $\varphi$ , o jaki należy obrócić płaszczyznę  $\Pi_1$  (w kierunku od ręki prawej ku lewej względem osi  $l$ ), tak aby padła na  $\Pi_2$  i aby odpowiednie punkty się nakryły, nazywamy *kątem obrotu*.

Obrót ciała około osi wyznaczony jest przez podanie osi i kąta obrotu. Przy obrocie punkty ciała pozostają w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu.



1.

Każdy wektor  $\overline{A_1B_1}$ , równoległy do osi obrotu, przechodzi przy obrocie w wektor  $\overline{A_2B_2}$ , równy wektorowi  $\overline{A_1B_1}$ . Łatwo udowodnić, że tylko wektory równoległe do osi nie zmieniają przy obrocie kierunku ani zwrotu.

Zauważmy, że jeżeli wektor  $\overline{A_1C_1}$  leży w płaszczyźnie  $\Pi$  prostopadłej do osi obrotu, to kąt jaki ten wektor tworzy z odpowiednim wektorem  $\overline{A_2C_2}$  jest (przy obranym zwrocie osi obrotu) równy kątowi obrotu (rys. 1).

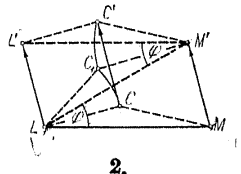
Jeżeli ciało wykona kilka obrotów około tej samej osi  $l$  o kąty  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , wówczas ostateczna zmiana położenia jest oczywiście również obrotem około osi  $l$  o kąt  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$ . Wynika stąd na mocy przemienności sumy, że położenie ostateczne nie zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało obroty częściowe.

Inaczej przedstawia się sprawa, gdy ciało wykonywa kolejne obroty wkoło różnych osi, jak o tym pociąga przykład na str. 317.

**Przykład.** Ciało sztywne wykonało po kolei dwa obroty około dwóch prostych równoległych  $l$  i  $m$ , sztywnie z ciałem związanych. Obroty miały zwroty przeciwne, kąty zaś równe. Udowodnić, że ciało można przeprowadzić z położenia początkowego w końcowe przy pomocy przesunięcia równoległego (translacji).

Niech  $C$  będzie dowolnym punktem ciała. Poprowadźmy przez  $C$  płaszczyznę  $\Pi$ , prostopadłą do danych osi obrotu  $l$  i  $m$ . Niechaj  $L$  i  $M$  oznaczają odpowiednie punkty przecięcia, zaś  $\varphi$  kąt obrotu (rys. 2).

Przy obrocie około osi  $l$  o kąt  $\varphi$  oś  $m$  przejdzie w prostą  $m'$ ; oznaczmy przez  $M'$  punkt przecięcia tej prostej z płaszczyzną  $\Pi$ . Następnie, po obrocie około osi  $m'$  o kąt  $\varphi$  oś  $l$  przyjmie położenie prostej  $l'$ ; oznaczmy przez  $L'$  jej punkt przecięcia z płaszczyzną  $\Pi$ .



2.

Wreszcie, niech  $C_1$  będzie położeniem punktu  $C$  po obrocie około prostej  $l$ , a  $C'$  położeniem punktu  $C_1$  po obrocie około prostej  $m'$ .

Trójkąt  $LMC$  przeszedł ostatecznie w położenie  $L'M'C'$ , przy czym  $\overline{LL'} = \overline{MM'} = \overline{CC'}$  (jak na rysunku). Ponieważ przesunięcia punktów położonych na osi  $l$  (lub  $m$ ) są równe, więc związek powyższy wskazuje, że przesunięcia wszystkich punktów są równe. Łatwo sprawdzić, że

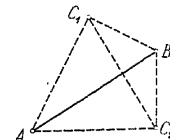
$$(1) \quad LL' = 2LM \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

## § 2. Przesunięcia punktów ciała w ruchu płaskim.

Ruch figury płaskiej poruszającej się w płaszczyźnie nazywamy *ruchem płaskim*.

Położenie figury w ruchu płaskim jest wyznaczone przez położenie dowolnych dwóch jej punktów.

Przypuśćmy bowiem, że możliwe są dwa położenia figury, w których dwa punkty  $A$  i  $B$  zajmowałyby to samo położenie. Weźmy pod uwagę dowolny punkt  $C$  figury, który w jednym położeniu jest w  $C_1$ , w drugim zaś w  $C_2$ . Trójkąty  $ABC_1$  i  $ABC_2$  przystają i są położone symetrycznie względem  $AB$ . Nie dadzą się zatem przeprowadzić w siebie bez oderwania od płaszczyzny. To zaś jest sprzeczne z założeniem, że trójkąt  $ABC$  zajmował w ruchu płaskim raz położenie  $ABC_1$ , a drugi raz położenie  $ABC_2$ .



Obrót około punktu. Jeżeli figurę leżącą w płaszczyźnie  $\Pi$  obrócić około prostej  $l$  prostopadłej do tej płaszczyzny, to figura pozostanie nadal w płaszczyźnie  $\Pi$ . Obrót taki nazywamy *obrotem figury około punktu* (przecięcia prostej  $l$  z płaszczyzną  $\Pi$ ).

**Twierdzenie.** Każdą figurę w ruchu płaskim można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy jednego przesunięcia równoległego i jednego obrotu.

Niech bowiem  $A_1, B_1$  będą dwoma punktami tej figury w położeniu pierwszym, zaś  $A_2, B_2$  odpowiednimi punktami w drugim. Przesunijmy najpierw figurę równolegle tak, by punkt  $A_1$  padł na  $A_2$ . Punkt  $B_1$  padnie po tym przesunięciu na pewien punkt  $B'_1$ . Obróćmy teraz figurę około  $A_2$  tak, by  $B'_1$  padł na  $B_2$ . Ponieważ po przesunięciu i obrocie dwa punkty  $A_1, B_1$  pokryły się z odpowiednimi punktami  $A_2, B_2$ , więc i pozostałe punkty się pokrywają. Przeprowadziliśmy zatem figurę z jednego położenia w drugie przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu, c. b. d. d.

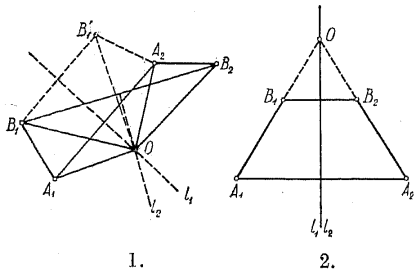
Udowodnimy teraz, że najogólniejsza zmiana położenia figury w ruchu płaskim jest albo przesunięciem albo obrotem.

**I Twierdzenie Eulera.** *Figurę z jednego położenia w drugie (jakie zajmuje w ruchu płaskim) można przeprowadzić bądź przy pomocy przesunięcia równoległego, bądź przy pomocy obrotu.*

Dowód. Niech  $A_1B_1$  będzie dowolnym odcinkiem figury w położeniu początkowym I, zaś  $A_2B_2$  tymże odcinkiem w położeniu końcowym II.

W przypadku gdy wektory  $\overline{A_1B_1}$  i  $\overline{A_2B_2}$  są równe, mamy  $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$ . Przy przesuwaniu więc figury równolegle, tak by punkt  $A_1$  padł na  $A_2$ , punkt  $B_1$  padnie na  $B_2$ . Ponieważ po tym przesunięciu figura będzie miała z położeniem II punkty  $A_2$  i  $B_2$  wspólne, więc będzie miała wszystkie punkty wspólne. W tym przypadku można zatem przeprowadzić figurę z położenia I w położenie II przy pomocy przesunięcia równoległego.

W przypadku gdy wektory  $\overline{A_1B_1}$  i  $\overline{A_2B_2}$  nie są równe, poprowadźmy symetralne  $l_1$  i  $l_2$  odcinków  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$ .



Przyjmijmy najpierw, że symetralne te są różne i że przecinają się w punkcie  $O$  (rys. 1). Trójkąty  $OA_1B_1$  i  $OA_2B_2$  są przystające. Oznaczmy przez  $B'_1$  punkt symetryczny do  $B_1$  względem symetralnej  $l_1$ . Oczywiście trójkąty  $OA_1B_1$  i  $OA_2B'_1$  są położone symetrycznie względem  $l_1$ .

Są zatem przystające i nienakładalne na siebie bez odrywania od płaszczyzny. Jeżeli więc figurę obrócimy około  $O$  tak, by punkt  $A_1$  padł na  $A_2$ , to ponieważ punkt  $B_1$  nie może paść na  $B'_1$ , punkt  $B_1$  padnie na  $B_2$ . Po tym obrocie figura będzie więc miała z położeniem II punkty  $A_2$  i  $B_2$  wspólne, a zatem i wszystkie inne punkty wspólne.

Przyjmijmy następnie, że symetralne odcinków  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$  są identyczne (rys. 2). W tym przypadku odcinki  $A_1B_1$  i  $A_2B_2$  są położone symetrycznie względem  $l_1$  (lub  $l_2$ ); środkiem obrotu będzie punkt przecięcia się prostej  $A_1B_1$  z  $l_1$  (lub  $A_2B_2$  z  $l_2$ ). W tym przypadku więc przeprowadzimy figurę z położenia I w położenie II przy pomocy obrotu, c. b. d. d.

Ciało płasko prowadzone. Jeżeli ciało może się tylko tak poruszać, że punkty jego pozostają stale w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny stałej  $\Pi$ , powiadamy, że ciało jest *płasko prowadzone*, a płaszczyznę  $\Pi$  nazywamy *płaszczyzną kierowniczą* (por. określenie i przykład na str. 276).

Przetnijmy ciało płasko prowadzone płaszczyzną  $\Pi'$ , równoległą do płaszczyzny kierowniczej  $\Pi$ . Niechaj  $C$  będzie figurą przekroju. Położenie figury  $C$  wyznacza oczywiście położenie całego ciała. Ponieważ figura płaska  $C$  musi pozostawać stale w jednej i tej samej płaszczyźnie  $\Pi'$ , więc na mocy I tw. Eulera możemy figurę tę przeprowadzić z dowolnego położenia, jakie zajmuje, w dowolne inne bądź przy pomocy przesunięcia, bądź przy pomocy obrotu około punktu leżącego na  $\Pi'$ .

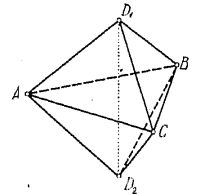
Wynika stąd, że *ciało płasko prowadzone możemy przeprowadzić z jednego położenia w drugie bądź przy pomocy translacji, bądź przy pomocy obrotu około osi prostopadłej do płaszczyzny kierowniczej*.

**§ 3. Przesunięcia punktów ciała.** Jeżeli ciało sztywne ma jeden punkt unieruchomiony, to może się obracać około tego punktu; jeżeli zaś ma unieruchomione dwa punkty, to może się obracać około osi przechodzącej przez te punkty. Podanie położenia jednego lub dwóch punktów ciała nie wystarcza zatem do wyznaczenia położenia wszystkich innych punktów ciała. Zachodzi jednak następujące

**Twierdzenie 1.** *Położenie wszystkich punktów ciała sztywnego wyznaczone jest przez położenie trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej.*

Dowód. Przypuśćmy bowiem, że istnieją dwa różne położenia ciała, w których trzy punkty  $A, B, C$ , nie leżące na jednej prostej, zajmowałyby położenia jednakowe. Weźmy pod uwagę dowolny punkt  $D$  tegoż ciała, który w pierwszym położeniu jest w  $D_1$ , w drugim zaś jest w  $D_2$ . Czworokątany  $ABCD_1$  i  $ABCD_2$  mają podstawę wspólną i krawędzie odpowiednio równe. Wynika stąd, że są położone symetrycznie względem płaszczyzny  $ABC$ .

Nie dadzą się zatem doprowadzić do zupełnego przystawania. To zaś jest sprzeczne z założeniem, że czworokątany  $ABCD$  raz zajmuje położenie  $ABCD_1$ , a drugi raz położenie  $ABCD_2$ .





Obrót około punktu ciała. Jeżeli przy zmianie położenia ciała jeden punkt ciała pozostał nieruchomy, powiadamy, że ciało wykonało *obrót* około tego punktu.

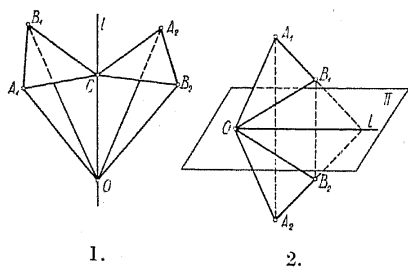
**II Twierdzenie Eulera.** *Obrót około punktu jest równoważny obrotowi około pewnej prostej, przechodzącej przez ten punkt.*

Dowód. Przypuśćmy, że ciało wykonało obrót około punktu  $O$ . Obierzmy w ciele w położeniu początkowym I dowolny odcinek  $A_1B_1$  (nie przechodzący przez  $O$ ) i niechaj  $A_2B_2$  będzie odpowiednim odcinkiem w położeniu końcowym II. Poprowadźmy płaszczyzny symetralne  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  odcinków  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$ .

Zakładamy najpierw, że  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  są różne i że przecinają się wzdłuż prostej  $l$  (rys. 1). Prosta  $l$  przechodzi przez  $O$ , gdyż  $l$  jest zbiorem punktów równoodległych od  $A_1$  i  $A_2$ , jako też od  $B_1$  i  $B_2$ , zaś  $OA_1=OA_2$  i  $OB_1=OB_2$ . Niech  $C$  będzie dowolnym punktem (różnym od  $O$ ) na prostej  $l$ .

Czworościany  $OCA_1B_1$  i  $OCA_2B_2$  są równe. Łatwo wykazać, że są także nakładalne na siebie. Wierzchołki bowiem  $O, C, A_1$  i  $O, C, A_2$  są położone symetrycznie względem  $\Pi_1$ . Gdyby więc czworościany  $OCA_1B_1$  i  $OCA_2B_2$  nie były nakładalne, wówczas wierzchołki  $B_1$  i  $B_2$  musiałyby leżeć symetrycznie względem  $\Pi_1$ , co niemożliwe, skoro  $B_1$  i  $B_2$  leżą symetrycznie względem  $\Pi_2$ , zaś  $\Pi_1 \neq \Pi_2$ . Udowodniliśmy więc, że czworościany  $OCA_1B_1$  i  $OCA_2B_2$  są równe i nakładalne.

Jeżeli teraz obrócimy ciało około osi  $l$  tak, by  $A_1$  padło na  $A_2$ , to czworościan  $OCA_1B_1$  padnie na czworościan  $OCA_2B_2$ . Po tym obrocie ciało będzie więc miało z ciałem w położeniu II trzy punkty wspólne (mianowicie  $O, A_2$  i  $B_2$ ), a zatem i wszystkie inne punkty wspólne. Przeprowadziliśmy więc ciało z położenia I w położenie II przy pomocy obrotu około prostej  $l$ .



1.

2.

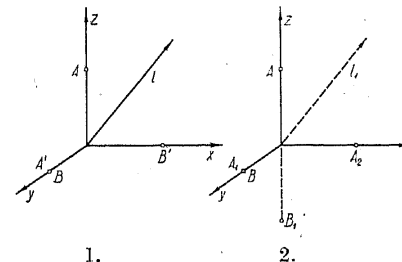
Zakładamy teraz, że odcinki  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$  mają wspólną płaszczyznę symetralną  $\Pi$  (rys. 2). Wówczas trójkąty  $OA_1B_1$  i  $OA_2B_2$  są położone symetrycznie względem  $\Pi$ . Oś obrotu będzie w tym przypadku krawędź przecięcia się płaszczyzny  $OA_1B_1$  (lub  $OA_2B_2$ ) z płaszczyzną  $\Pi$ .

Uwaga 1. Z II tw. Eulera wynika, że przy obrocie ciała około punktu istnieje w ciele pewna prosta o tej własności, że punkty jej nie zmieniają położenia.

Uwaga 2. Jeżeli ciało wykonywa dwa kolejne obroty wkoło dwóch osi, przechodzących przez jeden punkt  $O$ , to z położenia początkowego w położenie końcowe możemy przeprowadzić ciało przy pomocy jednego obrotu około osi, przechodzącej przez  $O$ , gdyż punkt  $O$  nie zmienił położenia. A więc złożenie dwóch obrotów około osi, przechodzących przez jeden punkt, jest obrotem około osi, również przechodzącej przez ten sam punkt.

**Przykład.** Ciało wykonało kolejno dwa obroty wkoło osi stałego układu współrzędnych: najpierw wkoło osi  $z$ , a następnie wkoło osi  $x$ , oba obroty o kąt prosty w kierunku od ręki prawej ku lewej.

Ponieważ przy obu obrotach początek układu  $O$  pozostał nieruchomy, możemy przeprowadzić ciało z położenia początkowego do położenia końcowego przy pomocy jednego obrotu około pewnej osi  $l$ , przechodzącej przez  $O$  (rys. 1).



1.

2.

Weźmy pod uwagę w położeniu początkowym punkt  $A(0,0,1)$  osi  $z$ . Po obrocie około tej osi punkt  $A$  nie zmienił położenia, a po obrocie około osi  $x$  przeszedł w położenie  $A'(0,1,0)$ .

Weźmy z kolei pod uwagę w położeniu początkowym punkt  $B(0,1,0)$  osi  $y$ . Po obrocie około osi  $z$  punkt  $B$  zajął położenie  $B'(1,0,0)$  na osi  $x$ , a następnie przy obrocie wkoło tej osi punkt  $B'$  nie zmienił już swego położenia. Szukana oś  $l$  będzie więc przekrojem płaszczyzn symetralnych odcinków  $AA'$  i  $BB'$ .

Płaszczyzna symetralna odcinka  $AA'$  ma równanie  $y=z$ , zaś płaszczyzna symetralna odcinka  $BB'$  ma równanie  $x=y$ . Oś  $l$  będąca przecięciem obu płaszczyzn ma zatem równanie

$$x = y = z.$$

Przypuśćmy teraz, że ciało wykonywało te same obroty w porządku odwrotnym, t. j. najpierw około osi  $x$ , a następnie około osi  $z$  (rys. 2). Punkty  $A(0,0,1)$  i  $B(0,1,0)$  zajmą po obrocie około osi  $x$  położenia  $A_1(0,1,0)$  i  $B_1(0,0,-1)$ , a następnie po obrocie około osi  $z$  przejdą w położenia  $A_2(1,0,0)$  i  $B_2(0,0,-1)$ . Płaszczyzny symetralne odcinków  $AA_2$  i  $BB_2$  mają równania  $x=z$  i  $y=-z$ . Oś  $l_1$ , około której należy obrócić ciało, aby przeszło z położenia początkowego w końcowe, będzie więc miała równanie

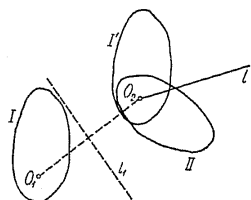
$$x = -y = z.$$

Widzimy stąd, że położenie końcowe zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało obroty.

**Twierdzenie Chasle'a.** Ciało można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu około osi.

Na ogół można to zrobić na nieskończenie wiele sposobów, zawsze jednak osie obrotu będą równoległe, a kąty obrotu równe (jeżeli osiom nadany będzie ten sam zwrot).

Dowód. Niechaj  $O_1$  będzie dowolnym punktem ciała w położeniu początkowym I, zaś  $O_2$  odpowiednim punktem w położeniu końcowym II. Przesuńmy ciało najpierw równoległe w położenie I', tak by  $O_1$  padło na  $O_2$ . Jeżeli położenie I' jest identyczne z II, to ciało przeprowadziliśmy z położenia I w położenie II przy pomocy jednego przesunięcia, zgodnie z wymogami twierdzenia.



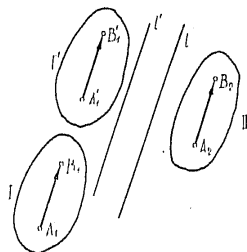
Przyjmijmy więc, że położenie I' jest różne od II. Ponieważ w położeniach II i I' ciało ma punkt  $O_2$  wspólny, więc na mocy II tw. Eulera możemy je przeprowadzić z położenia I' w położenie II przy pomocy obrotu około pewnej osi  $l$ , przechodzącej przez punkt  $O_2$ .

W każdym więc razie przeprowadziliśmy ciało z położenia I w położenie II przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu; udowodniliśmy zatem pierwszą część twierdzenia.

Gdybyśmy obrali na początku inny punkt  $O_1$ , to na ogół otrzymalibyśmy inne przesunięcie i inny obrót około innej osi. Wykażemy jednak, że we wszystkich przypadkach osie obrotu byłyby równoległe.

Weźmy pod uwagę w ciele dowolny wektor  $A_1B_1$  w położeniu I, równoległy do osi obrotu  $l$ . Odpowiedni wektor  $A_2B_2$  w położeniu II będzie miał ten sam kierunek i zwrot co wektor  $A_1B_1$ . Ani bowiem przesunięcie, ani obrót (około osi równoległej), nie zmienia kierunku ani zwrotu wektora.

Założmy teraz, że ciało przeprowadziliśmy z położenia I w położenie II przy pomocy innego przesunięcia oraz obrotu około innej osi  $l'$ . Niechaj przy tym przesunięciu wektor  $A_1B_1$  przejdzie w wektor  $A'_1B'_1$ . Oczywiście wektor  $A'_1B'_1$  przejdzie po obrocie około nowej



osi  $l'$  w wektor  $A_2B_2$ . Ponieważ przesunięcie nie zmienia kierunku ani zwrotu wektora, więc  $A'_1B'_1$  ma ten sam zwrot i kierunek co wektor  $A_1B_1$ . Wynika stąd, że wektor  $A'_1B'_1$  będzie miał również ten sam zwrot i kierunek co wektor  $A_2B_2$ . Zatem oś obrotu  $l'$  musi być równoległa do  $A_2B_2$  czyli do osi  $l$ .

Wykażemy wreszcie, że kąty obrotu około osi  $l$  i  $l'$  są równe, bylebyśmy nadali osiom  $l$  i  $l'$  jednakowe zwroty. Obierzmy w ciele w położeniu I dowolny wektor  $\bar{a}_1$  prostopadły do  $l$ , a zarazem oczywiście do  $l'$ . Kąt, jaki tworzy wektor  $\bar{a}_1$  z odpowiednim wektorem  $\bar{a}_2$  w położeniu II przy obranym zwrocie osi, jest kątem obrotu (str. 312). Kąt obrotu jest więc w obu przypadkach ten sam, c. b. d. d.

**Twierdzenie 2.** Ciało można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy dwóch obrotów kolejnych.

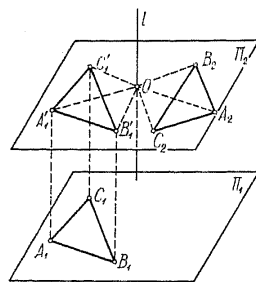
Dowód. Niech  $O_1$  będzie dowolnym punktem ciała w położeniu I, a  $O_2$  odpowiednim punktem ciała w położeniu II. Obróćmy ciało o kąt  $180^\circ$  około osi  $l_1$ , będącej symetryczną odcinka  $O_1O_2$ . Przy tym obrocie punkt  $O_1$  padnie na punkt  $O_2$ . Ciało przyjmie położenie II', które z położeniem II ma punkt  $O_2$  wspólny. Możemy zatem z położenia II' przejść do położenia II przy pomocy obrotu około pewnej prostej  $l$ , przechodzącej przez  $O_2$ . Przeprowadziliśmy w ten sposób ciało z położenia I w położenie II przy pomocy dwóch obrotów około prostych  $l_1$  i  $l$ , c. b. d. d.

**Skreślenie.** Jeżeli ciało wykonało przesunięcie, a następnie obrót około osi równoległej do przesunięcia, to powiadamy, że ciało wykonało skreślenie.

W szczególności przesunięcie lub obrót również nazywamy skreśleniem.

**Twierdzenie 3.** Ciało można zawsze przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy skreślenia i to tylko w jeden sposób.

Dowód. Weźmy pod uwagę w ciele w położeniu I dowolny trójkąt  $A_1B_1C_1$ , leżący w płaszczyźnie  $\Pi_1$  prostopadłej do możliwych osi obrotu. Oznaczmy przez  $A_2B_2C_2$  odpowiedni trójkąt, zaś przez  $\Pi_2$  odpowiednią płaszczyznę w położeniu II. Płaszczyzny  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  są zatem równoległe. Przeprowadźmy teraz ciało z położenia I w położenie I', nadając ciału takie przesunięcie prostopadłe do  $\Pi_1$ , by płaszczyzna  $\Pi_1$  przeszła w płaszczyznę  $\Pi_2$  (p. str. 320, rys. 1). Trójkąt  $A_1B_1C_1$  przejdzie przy tym przesunięciu w trójkąt  $A'_1B'_1C'_1$  leżący w płaszczyźnie  $\Pi_2$ , w której leży także trójkąt  $A_2B_2C_2$ .



1.

Z położenia I' możemy przeprowadzić ciało w położenie II najpierw przy pomocy translacji tak, by  $A_1'$  padło na  $A_2$ , a następnie przy pomocy obrotu około prostej prostopadłej do  $\Pi_2$  przechodzącej przez  $A_2$ . Wynika stąd, że trójkąt  $A_1'B_1'C_1'$  przejdzie w  $A_2B_2C_2$ , pozostając stale w płaszczyźnie  $\Pi_2$ . Na mocy więc II<sup>-</sup> tw. Eulera możemy trójkąt  $A_1'B_1'C_1'$  przeprowadzić w  $A_2B_2C_2$  przy pomocy translacji lub obrotu (około pewnego punktu  $O$  leżącego

w  $\Pi_2$ , czyli przy pomocy obrotu około osi  $l$  prostopadłej do  $\Pi_2$  w punkcie  $O$ ). Przy tej translacji (lub obrocie) ciało przejdzie z położenia I' w położenie II.

Wynika stąd, że przeprowadzimy ciało z położenia I w położenie II albo przy pomocy przesunięcia (jeżeli przejście z I' do II jest przesunięciem), albo przy pomocy przesunięcia i obrotu około osi  $l$ , równoległej do przesunięcia, c. b. d. d.

Oś  $l$  nazywamy *osią skrętu*.

Oś skrętu przesuwa się przy skręcie po sobie. Każda inna prosta zmienia przy skręcie swoje położenie. Wynika stąd, że nie możemy przeprowadzić ciała z położenia I w położenie II przy pomocy skrętu około innej osi  $l'$ .

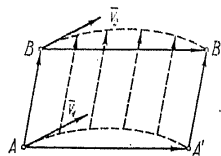
#### § 4. Ruch postępowy i ruch obrotowy około osi.

**Ruch postępowy.** Jeżeli każde położenie, jakie ciało przyjmuje w ciągu ruchu, możemy otrzymać z położenia początkowego przy pomocy translacji, to powiadamy, że ciało porusza się *ruchem postępowym*.

Z określenia ruchu postępowego wynika, że każde dwa położenia ciała w ruchu postępowym dają się otrzymać jedno z drugiego przy pomocy przesunięcia równoległego.

Niech  $A$  i  $B$  będą dwoma dowolnymi punktami ciała. W ruchu postępowym wektor  $\overline{AB}$  nie zmienia kierunku ani zwrotu. Jeżeli więc tor punktu  $A$  przesuniemy równolegle tak, że wszystkie jego punkty doznają przesunięcia równego wektorowi  $\overline{AB}$ , wówczas tor punktu  $A$  pokryje się z torem punktu  $B$  (rys. 2).

A więc: w ruchu postępowym tory wszystkich punktów są do siebie przystające i przechodzą jeden w drugi przy pomocy translacji.



2.

Ruch postępowy ciała jest więc wyznaczony przez ruch jednego jego punktu i położenie ciała w chwili początkowej. Jeżeli bowiem znamy ruch np. punktu  $A$ , to wektor przesunięcia ciała z położenia początkowego do położenia w chwili  $t$  będzie również wiadomy, gdyż równa się znanemu przesunięciu punktu  $A$ .

Na odwrót: jeżeli wektory związane z ciałem sztywnym nie zmieniają kierunku, to ciało porusza się *ruchem postępowym*.

Istotnie weźmy pod uwagę stały układ współrzędnych  $(x, y, z)$  oraz dwa punkty w ciele  $A(x_1, y_1, z_1)$  i  $B(x_2, y_2, z_2)$ . Z założenia wektor  $\overline{AB}$  nie zmienia kierunku (ani oczywiście długości); wykażemy, że nie zmienia również zwrotu. Rzuty wektora  $\overline{AB}$  na osie układu są podczas ruchu stałe co do wartości bezwzględnej. A więc  $|x_2 - x_1|$ ,  $|y_2 - y_1|$  i  $|z_2 - z_1|$  są pewnymi stałymi. Ponieważ  $x_2 - x_1$  jest funkcją ciągłą czasu  $t$ , więc z tego, że  $|x_2 - x_1| = \text{const.}$  wynika również, że  $x_2 - x_1 = \text{const.}$  Podobnie  $y_2 - y_1 = \text{const.}$  i  $z_2 - z_1 = \text{const.}$  Zatem wektor  $\overline{AB}$  nie zmienia zwrotu.

Oznaczając tedy przez  $A, B$  i  $A', B'$  położenia danych punktów w dowolnych dwóch chwilach  $t$  i  $t'$ , otrzymamy  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , skąd  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ . Przesunięcia dwóch dowolnych punktów są zatem równe, a więc możemy przeprowadzić ciało z położenia w chwili  $t$  do położenia w chwili  $t'$  przy pomocy przesunięcia. Ruch ciała jest więc ruchem postępowym.

Weźmy pod uwagę w ciele poruszającym się ruchem postępowym dwa dowolne punkty  $A_1, A_2$  w chwili  $t$  i położenia  $A_1', A_2'$  tych punktów w chwili  $t + \Delta t$ . Oznaczając przez  $\bar{v}_1$  i  $\bar{v}_2$  prędkości punktów  $A_1$  i  $A_2$ , otrzymamy (str. 35):

$$\bar{v}_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{A_1 A_1'}}{\Delta t}, \quad \bar{v}_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{A_2 A_2'}}{\Delta t}.$$

Ponieważ ciało porusza się ruchem postępowym, więc  $\overline{A_1 A_1'} = \overline{A_2 A_2'}$ , skąd  $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ .

A więc: w ruchu postępowym w dowolnej chwili  $t$  prędkości wszystkich punktów ciała są sobie równe.

Prędkością ruchu postępowego w chwili  $t$  nazywamy wspólną prędkość wszystkich punktów ciała w tej chwili.

Niech teraz ciało porusza się w taki sposób, że w każdej poszczególnej chwili  $t$  prędkości wszystkich punktów ciała są sobie równe. Obierzmy dwa dowolne punkty ciała  $A(x_1, y_1, z_1)$  i  $B(x_2, y_2, z_2)$ .



Ponieważ w jednej i tej samej chwili prędkość punktu  $A$  jest zawsze równa prędkości punktu  $B$ , więc:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_2, \quad \dot{z}_1 = \dot{z}_2, \quad \text{skąd} \quad \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0.$$

Zatem  $x_2 - x_1 = c_1$  i podobnie  $y_2 - y_1 = c_2$ ,  $z_2 - z_1 = c_3$ , gdzie  $c_1, c_2$  i  $c_3$  są pewnymi stałymi. Wynika stąd, że wektor  $\overline{AB}$  ma stałe rzuty na osie układu, nie zmienia więc podczas ruchu ani kierunku, ani zwrotu. Ruch jest przeto ruchem postępowym.

A więc: jeżeli wszystkie punkty ciała mają w każdej poszczególnej chwili prędkości równe, to ciało porusza się ruchem postępowym.

Ruch obrotowy około osi. Jeżeli ciało porusza się w ten sposób, że wszystkie punkty pewnej prostej  $l$  pozostają w spoczynku, to powiadamy, że ciało obraca się około osi  $l$  (str. 311).

W ruchu obrotowym wszystkie punkty krążą po kołach, leżących w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu; środki tych kół leżą na osi obrotu.

Promienie łączące punkty ciała ze środkami kół, po których punkty te krążą, zakreślają w równych czasach równe kąty. Wynika stąd, że w ruchu obrotowym około osi wszystkie punkty mają w każdej poszczególnej chwili równe prędkości kątowe. Ich wspólną prędkość kątową nazywamy *prędkością kątową* ruchu obrotowego około osi.

Z określenia wektora prędkości kątowej (str. 46) wynika, że w ruchu obrotowym ciała około osi wszystkie punkty mają ten sam wektor prędkości kątowej, leżący na osi obrotu. Wektor ten nazywamy *wektorem prędkości kątowej* obracającego się ciała.

**Przykład 1.** Jeżeli w równoległoboku  $ABCD$  wierzchołki  $A$  i  $D$  są unieruchomione, wówczas boki  $AB$  i  $DC$  mogą się obracać około wierzchołków  $A$  i  $D$ . Przy tych obrotach bok  $BC$  pozostaje stale równoległy do  $AD$ . Zatem  $BC$  porusza się wówczas ruchem postępowym.

**Przykład 2.** Koło o środku  $O'$  i promieniu  $r$  porusza się ruchem postępowym, pozostając stale stycznym do koła  $K$  o środku  $O$  i promieniu  $R$ . Wyznaczyć tor dowolnego punktu  $A$  (rys. str. 369).

Środek  $O'$  porusza się oczywiście po kole  $K'$  o środku  $O$  i promieniu  $a = R - r$ . Tor punktu  $A$  (kropkowany na rysunku) będzie zatem kołem o promieniu  $a$ . Środek  $O_1$  tego koła otrzymamy, nadając środkowi  $O$  przesunięcie  $\overline{OO_1}$  równe wektorowi  $\overline{O'A}$ .

## § 5. Rozmieszczenie prędkości w ciele sztywnym.

Gdy ciało sztywne się porusza, punkty jego mogą mieć w danej chwili na ogół prędkości różne.

Związki między prędkościami punktów ciała. Weźmy pod uwagę dwa punkty ciała  $A_1$  i  $A_2$  o prędkościach  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$ . Niech  $O$  będzie początkiem układu współrzędnych. Połóżmy:

$$\vec{r}_1 = \overline{OA_1}, \quad \vec{r}_2 = \overline{OA_2}, \quad \vec{r} = \overline{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Zatem (str. 35, (III)):

$$(1) \quad \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_2, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Mamy  $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2$ . Ponieważ  $|\vec{r}| = \text{const.}$ , więc tworząc pochodną, otrzymamy  $2\vec{r}\dot{\vec{r}} = 0$  czyli  $\vec{r}\dot{\vec{r}} = 0$ , skąd na mocy (1)  $\vec{r}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0$  czyli

$$(2) \quad \vec{r}\vec{v}_2 = \vec{r}\vec{v}_1.$$

Z określenia iloczynu skalarowego wynika, że

$$\vec{r}\vec{v}_1 = |\vec{r}| \text{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \vec{v}_1 \quad \text{i} \quad \vec{r}\vec{v}_2 = |\vec{r}| \text{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \vec{v}_2.$$

Na mocy więc (2) otrzymamy, dzieląc przez  $|\vec{r}|$ ,

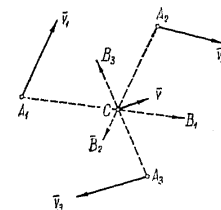
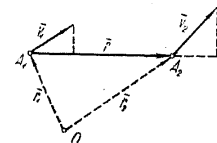
$$(3) \quad \text{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \vec{v}_1 = \text{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \vec{v}_2.$$

Udowodniliśmy więc, że w ciele sztywnym rzuty prędkości dwóch punktów na odcinek łączący te punkty są równe.

Możemy także powiedzieć, że składowe prędkości dwóch punktów względem odcinka łączącego te punkty są równe.

**Przykład 1.** Niech dane będą prędkości  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  trzech punktów ciała  $A_1, A_2, A_3$ , nie leżących na jednej prostej. Obierzmy dowolnie punkt  $C$ , nie leżący w płaszczyźnie  $A_1A_2A_3$ , i oznaczmy jego prędkość przez  $\vec{v}$ . Wykreślmy z punktu  $C$  wektory  $\overline{CB_1}, \overline{CB_2}, \overline{CB_3}$  równe rzutom prędkości  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  na proste  $A_1C, A_2C, A_3C$ .

W myśl udowodnionego twierdzenia wektory te będą również rzutami wektora  $\vec{v}$  o początku  $C$  na proste  $A_1C, A_2C$  i  $A_3C$ . Jeżeli do tych prostych poprowadzimy płaszczyzny prostopadłe w punktach  $B_1, B_2$  i  $B_3$ , to punkt przecięcia tych płaszczyzn będzie końcem wektora  $\vec{v}$ .



Aby wyznaczyć prędkość punktu  $D$ , leżącego w płaszczyźnie  $A_1A_2A_3$ , wyznaczamy najpierw prędkość dowolnego punktu  $C$ , nie leżącego w płaszczyźnie  $A_1A_2A_3$ , a następnie prędkość punktu  $D$  jak poprzednio (biorąc spośród punktów  $A_1, A_2, A_3$  i  $C$  trzy punkty nie leżące wraz z  $D$  w jednej płaszczyźnie).

A więc: *prędkości wszystkich punktów ciała sztywnego wyznaczone są przez prędkości trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej.*

**Przykład 2.** Prędkości punktów linii prostej i płaszczyzny. Nadajmy poruszającej się prostej  $l$  dowolny zwrot i weźmy na niej punkt  $O$  o współrzędnych  $x_0, y_0, z_0$ . Oznaczmy przez  $\alpha, \beta, \gamma$  kąty, jakie oś  $l$  tworzy z osiami układu współrzędnych, i połączmy:

$$a = \cos \alpha, \quad b = \cos \beta, \quad c = \cos \gamma.$$

Dla dowolnego punktu  $A(x, y, z)$  osi  $l$ , o współrzędnej  $r$  na tej osi, jest:

$$(4) \quad x = x_0 + ar, \quad y = y_0 + br, \quad z = z_0 + cr.$$

Oznaczając przez  $\bar{v}$  prędkość punktu  $A$  i tworząc pochodną (4) względem czasu, otrzymamy (wobec tego, że  $r = \text{const.}$ ):

$$(5) \quad v_x = \dot{x} = \dot{x}_0 + a\dot{r}, \quad v_y = \dot{y} = \dot{y}_0 + b\dot{r}, \quad v_z = \dot{z} = \dot{z}_0 + c\dot{r}.$$

Wykreślmy z punktu  $A$  wektor  $\overrightarrow{AA'}$ , równy prędkości  $\bar{v}$  punktu  $A$ , i oznaczmy przez  $\xi, \eta, \zeta$  współrzędne punktu  $A'$ . Z uwagi na to, że  $\xi = x + v_x$  it.d., dostaniemy na mocy (4) i (5):

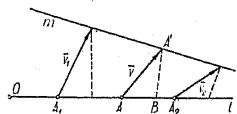
$$\xi = x_0 + \dot{x}_0 + (a + \dot{a})r, \quad \eta = y_0 + \dot{y}_0 + (b + \dot{b})r, \quad \zeta = z_0 + \dot{z}_0 + (c + \dot{c})r.$$

Jako równania pierwszego stopnia ze względu na parametr  $r$  są to równania prostej.

A więc: *jeżeli z punktów położonych na linii prostej wykreślić wektory prędkości, to końce tych wektorów leżą na linii prostej.*

Opierając się na tym twierdzeniu, można łatwo udowodnić, podobne twierdzenia dla płaszczyzny.

Mianowicie: *jeżeli z punktów położonych na płaszczyźnie wykreślić wektory prędkości, to końce tych wektorów leżą na jednej płaszczyźnie.*



Znając prędkości  $\bar{v}_1$  i  $\bar{v}_2$  dwóch punktów  $A_1$  i  $A_2$  prostej  $l$ , można wyznaczyć prędkość  $\bar{v}$  dowolnego punktu  $A$  tej prostej, w sposób następujący (p. rysunek):

Prowadzimy prostą  $m$  przez końce wektorów prędkości  $\bar{v}_1$  i  $\bar{v}_2$ , wykreślonych z punktów  $A_1$  i  $A_2$ . Na tej prostej leży koniec wektora prędkości  $\bar{v}$ , wykreślonego z  $A$ . Wyznaczamy na prostej  $l$  punkt  $B$  taki, by wektor  $\overrightarrow{AB}$  równy był rzutowi  $\bar{v}_1$  (lub  $\bar{v}_2$ ) na oś  $l$ . Wedle twierdzenia dowiedzonego na str. 323,  $\overrightarrow{AB}$  jest rzutem  $\bar{v}$  na  $l$ . Jeżeli przez  $B$  przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do  $l$ , to punkt  $A'$ , w którym płaszczyzna ta przecina prostą  $m$ , będzie końcem wektora  $\bar{v}$ , wykreślonego z  $A$ .

Ruch chwilowy ciała sztywnego. Weźmy pod uwagę w ciele sztywnym dowolny punkt  $A$  o współrzędnych  $x, y, z$  w pewnej chwili  $t$  i oznaczmy przez  $\bar{v}$  jego prędkość. Ponieważ  $\bar{v}$  zależy od punktu  $A$ , więc  $\bar{v}$  jest w chwili  $t$  funkcją współrzędnych  $x, y, z$ . Możemy zatem przyjąć, że

$$(6) \quad \bar{v} = \bar{F}(x, y, z).$$

Funkcja wektorowa (6) określa prędkość w chwili  $t$  w każdym punkcie ciała.

Rozmieszczenie prędkości w ciele w pewnej chwili nazywamy *ruchem chwilowym* ciała.

Ruch chwilowy ciała jest zatem wyznaczony przez podanie funkcji wektorowej (6).

W ruchu postępowym wszystkie punkty mają tę samą prędkość. Funkcja (6) przyjmie więc postać  $\bar{v} = \text{const.}$

W ruchu obrotowym około osi  $l$  mamy dla punktu  $A$ , oznaczając przez  $\bar{\omega}$  wektor prędkości kątowej, a przez  $O$  dowolny punkt na osi  $l$  (por. wzory (2) i (III), str. 46):

$$(7) \quad \bar{v} = \text{Mom}_A \bar{\omega} \quad \text{lub} \quad \bar{v} = \overrightarrow{OA} \times \bar{\omega}.$$

Ruch chwilowy ciała w chwili  $t$  nazywamy *ruchem chwilowym postępowym*, jeżeli wszystkie punkty ciała mają tę samą prędkość. Prędkość tę nazywamy *prędkością chwilową ruchu postępowego*.

Ruch chwilowy ciała w chwili  $t$  nazywamy *ruchem chwilowym obrotowym* około osi  $l$ , jeżeli prędkości punktów ciała wyrażają się wzorem (7), t. zn. jeżeli prędkości punktów ciała w chwili  $t$  są takie, jak gdyby ciało obracało się około osi  $l$ . Prędkość  $\bar{\omega}$  nazywamy wektorem *prędkości kątowej chwilowej*, a oś  $l$  osią *obrotu chwilowego*.

Jeżeli w każdej chwili czasu ruch chwilowy jest obrotem około prostej (nieruchomej)  $l$ , to jest on ruchem obrotowym około osi  $l$ .



Obierzmy bowiem stały układ współrzędnych  $O(x, y, z)$ , przyjmując oś  $l$  za oś  $z$ . Niechaj  $A$  będzie dowolnym punktem ciała o współrzędnych  $x, y, z$ , a  $\vec{w}$  wektorem prędkości chwilowej. Wówczas  $\omega_x = 0$  i  $\omega_y = 0$ . Według wzoru (7) rzuty prędkości  $\vec{v}$  punktu  $A$  wynoszą:

$$(8) \quad v_x = \dot{x} = y\omega_z, \quad v_y = \dot{y} = -x\omega_z, \quad v_z = \dot{z} = 0.$$

Ponieważ  $\dot{z} = 0$ , więc  $z = \text{const}$ . Punkty biegną zatem po płaszczyznach prostopadłych do osi  $l$ . Z równań (8) dostajemy  $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ , skąd po scałkowaniu  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \text{const}$ , czyli  $x^2 + y^2 = \text{const}$ . Punkty ciała krążą tedy po płaszczyznach prostopadłych do osi  $l$  w stałej odległości od  $l$ , a więc ciało wykonywa obrót około  $l$ .

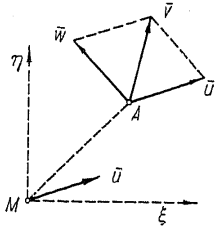
**§ 6. Ruch chwilowy płaski.** Niech figura płaska porusza się w płaszczyźnie  $\Pi$ . Obierzmy w tej płaszczyźnie dowolne dwa układy współrzędnych: jeden stały  $(x, y)$ , a drugi  $(\xi, \eta)$  poruszający się ruchem postępowym i mający początek w dowolnie obranym punkcie  $M$  danej figury.

Ruch chwilowy figury względem układu  $(\xi, \eta)$  będzie tedy obrotem około punktu  $M$  (czyli około osi  $l$  prostopadłej do  $\Pi$  w punkcie  $M$ ). Prędkości względne punktów w chwili  $t$  będą więc takie, jak gdyby figura obracała się około punktu  $M$  z pewną prędkością kątową  $\omega$ . Możemy zatem powiedzieć, że ruch chwilowy względny jest ruchem obrotowym około punktu  $M$ . Ponieważ ruch układu  $(\xi, \eta)$  jest postępowy, więc prędkość unoszenia jest jednakowa dla wszystkich punktów figury (str. 58) i równa się prędkości punktu  $M$ . Oznaczając przez  $\vec{v}$  prędkość (bezwzględną) dowolnego punktu  $A$ , przez  $\vec{w}$  prędkość względną punktu  $A$ , a przez  $\vec{u}$  prędkość unoszenia (t.j. prędkość punktu  $M$ ), otrzymamy zatem (str. 58)

$$(1) \quad \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}.$$

Możemy wobec tego powiedzieć, że prędkości punktów figury są takie, jak gdyby figura wykonywała dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością  $\vec{u}$  dowolnego punktu  $M$  figury, drugi zaś obrotowy około tegoż punktu  $M$ .

A więc: *ruch chwilowy figury w ruchu płaskim składa się z ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego; ruch postępowy ma prędkość dowolnego punktu figury, zaś ruch obrotowy jest obrotem około tegoż punktu.*



Ruch chwilowy figury można przedstawić na ogół na nieskończenie wiele sposobów jako złożenie ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego. Zależy to bowiem od wyboru punktu  $M$ .

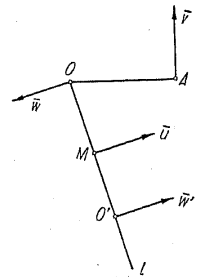
We wszystkich tych przedstawieniach jednak prędkości chwilowe katowe są równe. Obierzmy bowiem na figurze dowolną oś  $k$  w chwili  $t$  i niechaj  $k'$  oznacza położenie tej osi w chwili  $t + \Delta t$ . Kąt  $\Delta\varphi$ , jaki oś  $k'$  tworzy z osią  $k$ , jest równy kątowi, o jaki figura obróciła się około  $M$  w ruchu względnym. Widzimy stąd, że  $\Delta\varphi$  nie zależy od wyboru punktu  $M$ , a tym samym i  $\omega$ , bo  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi / \Delta t$ .

W szczególności ruch chwilowy może być ruchem chwilowym postępowym (jeżeli prędkość chwilowa katowa  $\omega$  jest zerem) lub ruchem chwilowym obrotowym (jeżeli punkt  $M$  ma prędkość  $\vec{u} = 0$ ).

Dla każdego punktu  $A$  figury prędkość  $\vec{w}$  (obrotu chwilowego) jest prostopadła do odcinka  $MA$ , przyczem  $|\vec{w}| = MA \cdot \omega$ . Znając zwrot obrotu chwilowego, możemy więc wyznaczyć zwrot  $\vec{w}$ , a następnie otrzymać ze wzoru (1) prędkość  $\vec{v}$  punktu  $A$ .

Niech teraz  $\vec{u} \neq 0$  i  $\omega \neq 0$ . Weźmy pod uwagę na prostej  $l$ , prostopadłej do  $\vec{u}$  i przechodzącej przez  $M$ , dwa punkty  $O$  i  $O'$  w odległości  $r$  od  $M$ , gdzie  $r = |\vec{u}| / \omega$ .

Prędkości obrotu chwilowego  $\vec{w}$  i  $\vec{w}'$  punktów  $O$  i  $O'$  są prostopadłe do  $l$ , zatem równoległe do  $\vec{u}$ . Mamy ponadto  $|\vec{w}| = MO \cdot \omega = r\omega = |\vec{u}|$  i podobnie  $|\vec{w}'| = |\vec{u}|$ . Ponieważ  $\vec{w}$  i  $\vec{w}'$  mają zwroty przeciwne, więc dla jednego z punktów  $O$  i  $O'$ , np. dla  $O$ , mamy  $\vec{w} = -\vec{u}$ . Zatem prędkość punktu  $O$  wynosi  $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} = 0$ . Jeżeli więc początek układu  $(\xi, \eta)$  umieścimy w punkcie  $O$ , to prędkość unoszenia będzie zerem, ruch chwilowy będzie zatem obrotem chwilowym około  $O$ .



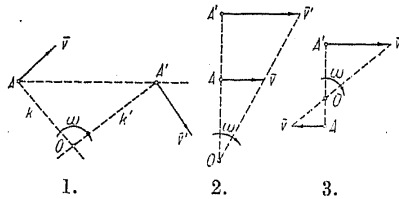
Punkt  $O$  nazywamy *środkiem obrotu chwilowego*.

Prędkość  $\vec{v}$  dowolnego punktu  $A$  jest prostopadła do odcinka  $OA$  i ma zwrot zależny od zwrotu obrotu chwilowego. Ponadto

$$(2) \quad |\vec{v}| = OA \cdot \omega.$$

A więc: *ruch chwilowy płaski jest albo ruchem chwilowym postępowym, albo ruchem chwilowym obrotowym około środka obrotu chwilowego.*

Wyznaczanie środka obrotu chwilowego. Środek obrotu chwilowego ma oczywiście prędkość 0. Każdy inny punkt ma według (2) prędkość  $\vec{v} \neq 0$  (jeżeli  $\omega \neq 0$ ). Istnieje zatem jeden tylko środek obrotu chwilowego (gdy  $\omega \neq 0$ ).



Jeżeli w dowolnym punkcie  $A$  wykreślimy prostą  $k$  do prędkości  $\vec{v}$  tego punktu, to środek obrotu chwilowego znajduje się na tej prostej (rys. 1).

Środek obrotu chwilowego można na ogół wyznaczyć, znając prędkość  $\vec{v}$  jednego punktu, np.  $A$ , oraz kierunek prędkości  $\vec{v}'$  drugiego punktu  $A'$ . Wykreślimy proste  $k$  i  $k'$  prostopadłe do  $\vec{v}$  i  $\vec{v}'$  w punktach  $A$  i  $A'$ . Punkt  $O$  przecięcia się tych prostych jest środkiem obrotu chwilowego. Ze wzoru (2) otrzymujemy  $\omega = |\vec{v}|/OA$ . Zwrot obrotu chwilowego otrzymamy ze zwrotu prędkości  $\vec{v}$ .

Gdy proste  $k$  i  $k'$  są równoległe, to ruch chwilowy jest ruchem chwilowym postępowym.

Gdy proste  $k$  i  $k'$  pokrywają się z sobą, musimy w celu wyznaczenia ruchu chwilowego znać jeszcze prędkość  $\vec{v}'$  punktu  $A'$ . Znajomość samego tylko kierunku prędkości  $\vec{v}'$  wówczas nie wystarcza.

Gdy  $\vec{v} = \vec{v}'$ , ruch chwilowy jest ruchem postępowym.

Gdy zaś  $\vec{v} \neq \vec{v}'$ , ruch chwilowy jest ruchem chwilowym obrotowym. Oznaczając wówczas przez  $O$  środek obrotu chwilowego (leżący oczywiście na prostych  $k$  i  $k'$ ), mamy na mocy (2)  $|\vec{v}| = OA \cdot \omega$  i  $|\vec{v}'| = OA' \cdot \omega$ . Zatem

$$(3) \quad \frac{OA}{OA'} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}'|}.$$

Jeżeli  $\vec{v}$  i  $\vec{v}'$  mają zwroty zgodne (rys. 2) i  $|\vec{v}| < |\vec{v}'|$ , to punkt  $O$  leży na przedłużeniu odcinka  $A'A$  poza punktem  $A$ . Mamy wtedy  $OA' - OA = A'A$ , skąd na mocy (3)

$$(4) \quad OA = A'A \cdot \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}'| - |\vec{v}|}.$$

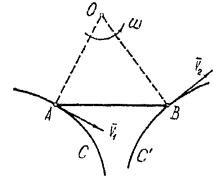
Jeżeli zaś  $\vec{v}$  i  $\vec{v}'$  mają zwroty przeciwne (rys. 3), punkt  $O$  leży na odcinku  $AA'$ . Mamy wtedy  $OA + OA' = AA'$ , skąd na mocy (3)

$$(5) \quad OA = AA' \cdot \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}| + |\vec{v}'|}.$$

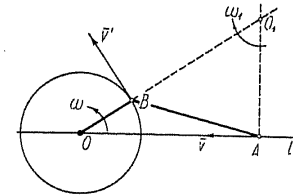
**Przykład 1.** Pręt  $AB$  porusza się w płaszczyźnie w ten sposób, że oba jego końce  $A$  i  $B$  poruszają się stale po krzywych  $C$  i  $C'$ . Prędkości  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  punktów  $A$  i  $B$  są styczne do krzywych  $C$  i  $C'$ .

Rysując w punktach  $A$  i  $B$  prostopadłe do stycznych, otrzymamy środek  $O$  chwilowego obrotu pręta  $AB$ , jako punkt przecięcia się tych prostopadłych. Oznaczając przez  $\omega$  prędkość chwilową kątową, otrzymamy:

$$|\vec{v}_1| = OA \cdot \omega, \quad |\vec{v}_2| = OB \cdot \omega \quad \text{ i } \quad |\vec{v}_1|/|\vec{v}_2| = OA/OB.$$



**Przykład 2.** W mechanizmie korbowym pręt  $AB$  porusza się w ten sposób, że jego koniec  $B$  połączony jest przegubowo z prętem  $OB$  unieruchomionym w  $O$ , drugi zaś koniec  $A$  porusza się po prostej  $l$  przechodzącej przez  $O$ . Pręt  $OB$  obraca się około punktu  $O$  z prędkością kątową  $\omega$ . Jaka jest prędkość punktu  $A$ ?



Prędkość  $\vec{v}'$  punktu  $B$  jest prostopadła do  $OB$ , a prędkość  $\vec{v}$  punktu  $A$  ma kierunek prostej  $l$ . Kreśląc prostopadłe do  $\vec{v}'$  i  $\vec{v}$ , otrzymamy środek  $O_1$  chwilowego obrotu pręta  $AB$ . Jest  $OB \cdot \omega = |\vec{v}'| = O_1B \cdot \omega_1$ , zatem  $\omega_1 = OB \cdot \omega / O_1B$ , skąd

$$|\vec{v}| = O_1A \cdot \omega_1 = O_1A \cdot OB \cdot \omega / O_1B.$$

**Przykład 3.** Układ dwóch prętów  $AO$  i  $OB$ , połączonych przegubowo, porusza się w płaszczyźnie. Dane są prędkości  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  punktów  $A$  i  $B$ . Wyznaczyć prędkość punktu  $O$ .

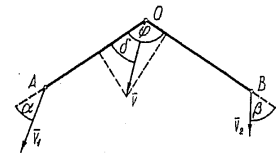
Oznaczmy przez  $\alpha$  i  $\beta$  kąty, jakie tworzą prędkości  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  z prętami  $OA$  i  $OB$ , przez  $\delta$  kąt, jaki prędkość  $\vec{v}$  punktu  $O$  tworzy z prętem  $OA$ , a przez  $\varphi$  kąt  $AOB$ .

Ponieważ rzuty prędkości  $\vec{v}$  na pręty  $OA$  i  $OB$  są odpowiednio równe rzutom  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  na te pręty, więc oznaczając przez  $v$ ,  $v_1$  i  $v_2$ , wartości bezwzględne tych prędkości, otrzymamy:

$$(6) \quad v_1 \cos \alpha = v \cos \delta, \quad v_2 \cos \beta = v \cos(\varphi - \delta),$$

skąd

$$\cos(\varphi - \delta) / \cos \delta = v_2 \cos \beta / v_1 \cos \alpha,$$

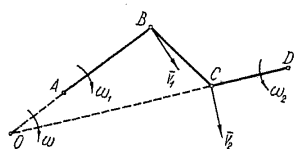


więc  $\cos \varphi + \operatorname{tg} \delta \sin \varphi = v_2 \cos \beta / v_1 \cos \alpha$  czyli

$$\operatorname{tg} \delta = (v_2 \cos \beta - v_1 \cos \alpha \cos \varphi) / v_1 \cos \alpha \sin \varphi.$$

Znając  $\delta$ , wyznaczamy  $v$  z równania (6).

**Przykład 4.** W płaszczyźnie leży układ trzech prętów  $AB$ ,  $BC$  i  $CD$ , połączonych przegubowo i unieruchomionych w  $A$  i  $D$ . Pręt  $AB$  obraca się około  $A$  z prędkością kątową  $\omega_1$ . Wyznaczyć prędkość kątową  $\omega_2$  pręta  $CD$  około  $D$ .



Punkty  $B$  i  $C$  krążą po kołach o środkach  $A$  i  $D$ ; ich prędkości  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  są zatem prostopadłe do  $AB$  i  $CD$ . Środek obrotu chwilowego pręta  $BC$  otrzymamy, prowadząc prostopadłe do  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$ , czyli przedłużając odcinki  $AB$  i  $DC$

do przecięcia się w punkcie  $O$ . Punkt  $O$  jest środkiem obrotu chwilowego pręta  $BC$ .

Oznaczmy przez  $\omega$  prędkość chwilową kątową pręta  $BC$ . Kładąc  $v_1 = |\vec{v}_1|$  i  $v_2 = |\vec{v}_2|$ , otrzymamy więc:

$$(7) \quad v_1 = OB \cdot \omega \quad \text{ i } \quad v_2 = OC \cdot \omega.$$

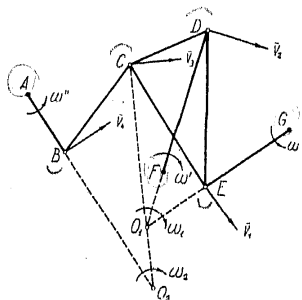
Pręt  $AB$  obraca się około  $A$  z prędkością kątową  $\omega_1$ ; zatem

$$(8) \quad v_1 = AB \cdot \omega_1 \quad \text{ i } \quad \text{podobnie} \quad v_2 = CD \cdot \omega_2.$$

Z (7) i (8) otrzymujemy  $AB \cdot \omega_1 = OB \cdot \omega$  czyli  $\omega = AB \cdot \omega_1 / OB$ , skąd na mocy (7)  $v_2 = AB \cdot OC \cdot \omega_1 / OB$ , a ponieważ na mocy (8) jest  $\omega_2 = v_2 / CD$ , więc

$$\omega_2 = \frac{AB \cdot OC}{OB \cdot CD} \omega_1.$$

**Przykład 5.** Dany jest układ prętów połączonych przegubowo w węzłach  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$ . Pręty  $AB$ ,  $FD$  i  $EG$  mogą się obracać około punktów  $A$ ,  $F$  i  $G$ , które są unieruchomione. Pręt  $GE$  obraca się około  $G$  z prędkością kątową  $\omega$ . Wyznaczyć prędkości kątowe  $\omega'$  i  $\omega''$  prętów  $FD$  i  $AB$  około  $F$  i  $A$ .



Oznaczmy przez  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$  i  $\vec{v}_4$  prędkości punktów  $E$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $B$ , zaś przez  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  i  $v_4$  ich wartości bezwzględne. Punkty  $E$  i  $D$  krążą po kołach o środkach  $G$  i  $F$ . Prędkości więc tych punktów są prostopadłe do  $EG$  i  $FD$ .

Niech  $O_1$  będzie punktem przecięcia prostopadłych do  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  (t. j. przedłużeń prętów  $GE$  i  $DF$ ). Punkt  $O_1$  będzie środkiem obrotu chwilowego pręta  $ED$ , a zarazem trójkąta  $EDC$ , gdyż pręty  $ED$ ,  $DC$  i  $CE$  tworzą układ sztywny.

Oznaczając przez  $\omega_1$  prędkość obrotu chwilowego około  $O_1$ , której zwrot wyznaczamy ze zwrotu  $\vec{v}_1$ , mamy:

$$(9) \quad v_1 = O_1 E \cdot \omega_1, \quad v_2 = O_1 D \cdot \omega_1.$$

Zwrot  $\vec{v}_2$  wyznaczamy ze zwrotu prędkości kątowej  $\omega_1$ .

Ponieważ  $v_1 = GE \cdot \omega$ , więc na mocy (9):

$$(10) \quad \omega_1 = \frac{GE}{O_1 E} \omega, \quad v_2 = \frac{O_1 D \cdot GE}{O_1 E} \omega.$$

Pręt  $FD$  obraca się około  $F$  z prędkością kątową  $\omega'$ , więc  $v_2 = FD \cdot \omega'$  czyli  $\omega' = v_2 / FD$ . Na mocy (10) jest zatem

$$(11) \quad \omega' = \frac{O_1 D \cdot GE}{O_1 E \cdot FD} \omega.$$

Zwrot  $\omega'$  wyznaczamy ze zwrotu  $\vec{v}_2$ .

Prędkość  $\vec{v}_3$  punktu  $C$  jest prostopadłą do  $O_1 C$ ; mamy więc

$$(12) \quad v_3 = O_1 C \cdot \omega_1.$$

Zwrot  $\vec{v}_3$  wyznaczamy ze zwrotu obrotu około  $O_1$ .

Aby wyznaczyć środek  $O_2$  obrotu chwilowego pręta  $BC$ , zauważmy, że prędkość  $\vec{v}_4$  punktu  $B$  jest prostopadłą do pręta  $AB$ . Kreślimy więc prostopadłe do prędkości  $\vec{v}_4$  i  $\vec{v}_3$ , czyli przedłużamy  $AB$  i  $CO_1$  do przecięcia się w  $O_2$ .

Oznaczając przez  $\omega_2$  prędkość kątową obrotu chwilowego około  $O_2$ , mamy:

$$(13) \quad v_3 = O_2 C \cdot \omega_2, \quad v_4 = O_2 B \cdot \omega_2.$$

Zwrot obrotu chwilowego otrzymujemy ze zwrotu  $\vec{v}_3$ .

Z (13) dostajemy:

$$(14) \quad \omega_2 = v_3 / O_2 C, \quad v_4 = O_2 B \cdot v_3 / O_2 C.$$

Zwrot  $\vec{v}_4$  otrzymujemy ze zwrotu obrotu około  $O_2$ .

Ponieważ pręt  $AB$  obraca się około  $A$  z prędkością kątową  $\omega''$ , więc  $v_4 = AB \cdot \omega''$  czyli  $\omega'' = v_4 / AB$ . Stąd na mocy (14), (12) i (10) dostajemy

$$\omega'' = \frac{O_2 B \cdot O_1 C \cdot GE}{AB \cdot O_2 C \cdot O_1 E} \omega.$$

Zwrot prędkości kątowej  $\omega''$  otrzymujemy ze zwrotu  $\vec{v}_4$ .



**§ 7. Ruch chwilowy przestrzenny.** Zajmiemy się najpierw przypadkiem szczególnym.

Obrót około punktu. Przypuśćmy, że ciało obracające się około punktu stałego  $O$ , zajmowało położenie I w chwili  $t$ , zaś położenie II w chwili  $t + \Delta t$ . Z położenia I w położenie II możemy więc przeprowadzić ciało przy pomocy obrotu o kąt  $\Delta\varphi$  około pewnej prostej  $l'$ . Założmy, że gdy  $\Delta t$  dąży do 0, prosta  $l'$  dąży do pewnej prostej  $l$ . Położmy

$$(1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi / \Delta t = \omega.$$

Oznaczmy przez  $A$  dowolny punkt ciała w położeniu I, a przez  $A'$  odpowiedni punkt w położeniu II. Niechaj  $S'$  będzie środkiem koła, po którym porusza się  $A$  przy obrocie około prostej  $l'$ , zaś  $S$  położeniem granicznym punktu  $S'$ , gdy  $\Delta t \rightarrow 0$ . Oznaczmy wreszcie przez  $\bar{v}$  prędkość punktu  $A$ . Mamy

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t},$$

zatem

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{AA'}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 AS' \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AS' \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

a ponieważ  $\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left( \sin \frac{\Delta\varphi}{2} / \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = 1$ , więc na mocy (1)

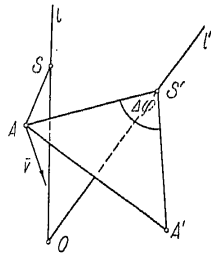
$$(2) \quad |\bar{v}| = AS \cdot \omega.$$

Zauważmy, że wektor  $\overline{AA'}/\Delta t$  jest prostopadły do  $l'$  i tworzy z odcinkiem  $S'A$  kąt  $90^\circ - \Delta\varphi/2$ ; wektor  $\bar{v}$  jest tedy w granicy prostopadły do  $l$  i  $AS$ . Prędkość punktu  $A$  w chwili  $t$  jest zatem taka, jak gdyby ciało obracało się około osi  $l$  z prędkością kątową  $\omega$ . Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

*Ruch chwilowy ciała, obracającego się wkoło pewnego punktu  $O$ , jest obrotem chwilowym wkoło osi, przechodzącej przez  $O$ .*

Prędkość  $\bar{v}$  punktu  $A$  jest prostopadła do płaszczyzny  $II$  przechodzącej przez  $l$  i  $A$ , skąd  $\bar{v} \perp OA$ , ponieważ  $OA$  leży w  $II$ .

A więc: przy obrocie ciała około punktu  $O$  prędkości punktów ciała są prostopadłe do prostych łączących te punkty z punktem  $O$ .



Oś  $l$  obrotu chwilowego leży w płaszczyźnie przechodzącej przez punkt  $A$  i prostopadłej do prędkości punktu  $A$ . Znając więc kierunki prędkości dwóch punktów ciała, otrzymamy oś obrotu chwilowego jako krawędź przecięcia płaszczyzn, przechodzących przez te punkty prostopadłe do kierunków prędkości. Prędkość chwilową kątową otrzymamy z równości (2).

**Przykład 1.** Kula  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  obraca się około środka  $O$ . Dana jest prędkość  $\bar{v}$  punktu  $A(1, 0, 0)$  w pewnej chwili  $t$  oraz kierunek prędkości  $\bar{w}$  punktu  $B(0, 1, 0)$  w tejże chwili. Wyznaczyć oś obrotu chwilowego, prędkość kątową i prędkość  $\bar{w}$  (w chwili  $t$ ).

Ponieważ prędkość  $\bar{v}$  jest prostopadła do  $OA$ , t. j. do osi  $x$ , więc  $v_x = 0$ . Oznaczmy przez  $a, b, c$  cosinusy kątów, jakie prędkość  $\bar{w}$  tworzy z osiami układu współrzędnych. Mamy oczywiście  $b = 0$ ; gdyż  $\bar{w}$  jest prostopadłe do  $OB$ , t. j. do osi  $y$ .

Oś chwilowego obrotu jest przecięciem płaszczyzn przeprowadzonych przez  $O$  oraz przez  $A$  i  $B$  prostopadłe do prędkości  $\bar{v}$  i  $\bar{w}$ . Równania tych płaszczyzn są następujące:

$$(3) \quad yv_y + zv_z = 0, \quad ax + cz = 0,$$

skąd

$$(4) \quad \frac{x}{c/a} = \frac{y}{v_z/v_y} = \frac{z}{-1}.$$

Równania (4) są równaniami osi obrotu chwilowego.

Niech  $\bar{\omega}$  oznacza prędkość chwilową kątową. Rzuty  $\bar{\omega}$  na osie układu są proporcjonalne do współczynników kierunkowych osi obrotu, t. j. do liczb  $c/a$ ,  $v_z/v_y$  i  $-1$ . Oznaczając przez  $\lambda$  współczynnik proporcjonalności, dostaniemy:

$$(5) \quad \omega_x = \lambda c/a, \quad \omega_y = \lambda v_z/v_y, \quad \omega_z = -\lambda.$$

Aby wyznaczyć  $\lambda$ , obliczamy prędkość  $\bar{v}$ , opierając się na wzorze  $\bar{v} = \overline{OA} \times \bar{\omega}$ . Otrzymujemy  $v_x = 0$ ,  $v_y = \lambda$  i  $v_z = \lambda v_z/v_y$ , skąd  $\lambda = v_y$ , więc na mocy (5):

$$(6) \quad \omega_x = cv_y/a, \quad \omega_y = v_z, \quad \omega_z = -v_y.$$

Ponieważ  $\bar{w} = \overline{OB} \times \bar{\omega}$ , więc na mocy (6) jest

$$w_x = -v_y, \quad w_y = 0, \quad w_z = -cv_y/a.$$

Ruch chwilowy w przypadku ogólnym. Umieścimy w dowolnym punkcie  $M$  danego ciała początek układu współrzędnych  $(\xi, \eta, \zeta)$ , poruszającego się ruchem postępowym. Ponieważ punkt  $M$  jest względem układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  nieruchomy, więc ruch ciała względem układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  jest obrotem około punktu  $M$ . Ruch chwilowy względny będzie więc obrotem chwilowym około osi obrotu chwilowego  $l$ , przechodzącej przez  $M$ .

Niechaj  $A$  będzie dowolnym punktem ciała. Oznaczmy przez  $\bar{v}$  prędkość bezwzględną punktu  $A$ , przez  $\bar{u}$  prędkość unoszenia, a przez  $\bar{w}$  prędkość względną. Zatem

$$(7) \quad \bar{v} = \bar{u} + \bar{w}.$$

Prędkość unoszenia  $\bar{u}$  równa się prędkości punktu  $M$ , gdyż układ  $(\xi, \eta, \zeta)$  porusza się ruchem postępowym. Prędkości punktów ciała są zatem takie, jak gdyby ciało wykonywało dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością  $\bar{u}$  dowolnego punktu  $M$  ciała, drugi zaś obrotowy około pewnej osi przechodzącej przez  $M$ .

A więc: *ruch chwilowy ciała składa się z ruchu chwilowego postępowego o prędkości dowolnego punktu  $M$  tego ciała i ruchu chwilowego obrotowego około osi obrotu chwilowego, przechodzącej przez punkt  $M$ .*

Ruch chwilowy ciała możemy na ogół przedstawić na nieskończenie wiele sposobów jako złożenie ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego. Zależy to bowiem od wyboru punktu  $M$ .

Wykażemy, że przy wszystkich możliwych przedstawieniach wektory prędkości chwilowych katowych są równe (t.zn. że osie obrotu chwilowego są równoległe i prędkości chwilowe katowe są równe).

Przypuśćmy, że punkt ciała  $M$  w chwili  $t$  przeszedł w punkt  $M'$  w chwili  $t + \Delta t$ . Względem układu stałego zmiana położenia ciała w czasie  $\Delta t$  jest złożeniem przesunięcia  $\overline{MM'}$  i obrotu o kąt  $\Delta\varphi$  około pewnej osi  $l'$ . Względem układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  zmiana położenia jest tylko obrotem o kąt  $\Delta\varphi$  około osi  $l'$ , układ bowiem  $(\xi, \eta, \zeta)$  wykonał w czasie  $\Delta t$  przesunięcie  $\overline{MM'}$ . Zatem położeniem granicznym osi  $l'$  jest oś  $l$  obrotu chwilowego, zaś prędkością chwilową katową jest  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi / \Delta t$ .

Z twierdzenia podanego na str. 318 wynika, że gdybyśmy w ciele obrali inny punkt  $M_1$ , to przy podobnych znakowaniach oś  $l'_1$  byłaby równoległa do  $l'$ , przy czym  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi$ . Zatem oś obrotu chwilowego  $l_1$  przechodząca przez  $M_1$  jest równoległa do  $l$  i prędkość chwilowa katowa  $\omega_1$  równa jest  $\omega$ . Zarówno więc dla  $M$  jak dla  $M_1$  wektory prędkości katowych będą równe.

Uwaga. Oznaczając przez  $\bar{\omega}$  wektor prędkości chwilowej katowej, otrzymamy na mocy (III), str. 46, dla dowolnego punktu  $A$   $\bar{w} = \overline{MA} \times \bar{\omega}$ , skąd na mocy (7)

$$(I) \quad \bar{v} = \bar{u} + \overline{MA} \times \bar{\omega}.$$

Prędkość unoszenia. Niech układ współrzędnych  $(\xi, \eta, \zeta)$  o początku  $M$  porusza się w przestrzeni względem stałego układu współrzędnych  $(x, y, z)$ . Układ  $(\xi, \eta, \zeta)$  (wraz z punktami sztywnie z nim związanymi) możemy uważać za ciało sztywne. Ruch chwilowy układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  będzie więc złożeniem ruchu chwilowego postępowego z prędkością  $\bar{v}_0$  początku  $M$  układu i ruchu obrotowego z prędkością chwilową katową  $\bar{\omega}$  około osi obrotu chwilowego, przechodzącej przez  $M$ . Prędkość unoszenia  $\bar{v}_u$  dowolnego punktu  $A$ , znajdującego się w ruchu względem układu  $(\xi, \eta, \zeta)$ , jest to prędkość, jakąby punkt  $A$  posiadał, gdyby był związany sztywnie z układem  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Zatem  $\bar{v}_u$  jest sumą prędkości  $\bar{v}_0$  i prędkości  $\bar{w}$  obrotu chwilowego. Wobec powyższego mamy na mocy (I)

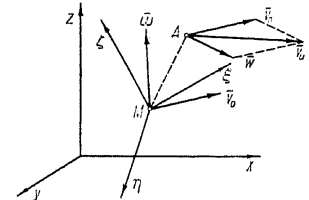
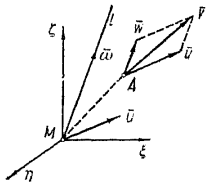
$$(8) \quad \bar{v}_u = \bar{v}_0 + \overline{MA} \times \bar{\omega}.$$

A więc: *prędkość unoszenia dowolnego punktu jest taka, jak gdyby punkt ten był związany sztywnie z układem ruchomym współrzędnych, a układ ten wykonywał dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością początku układu, drugi zaś obrotowy około osi, przechodzącej przez początek układu.*

Twierdzenie powyższe podaliśmy bez dowodu na str. 62.

Skręt chwilowy. Ruch chwilowy ciała nazywamy *skretem chwilowym* albo *ruchem śrubowym chwilowym*, jeżeli prędkość ruchu chwilowego postępowego jest równoległa do osi obrotu chwilowego.

W szczególności ruch chwilowy postępowy lub obrót chwilowy nazywamy również skretem chwilowym.



Oś skrętu chwilowego nazywamy *osią środkową* obrotu chwilowego.

Przy pomocy twierdzenia, podanego na str. 319, udowodnimy twierdzenie następujące:

*Ruch chwilowy ciała sztywnego można przedstawić, i to tylko w jeden sposób, jako skręt chwilowy.*

Dowód. Załóżmy, że przeprowadziliśmy ciało z położenia I w chwili  $t$  w położenie II w chwili  $t + \Delta t$  przy pomocy skrętu około osi  $l'$  (str. 319). Niechaj  $l$  będzie położeniem granicznym prostej  $l'$ , gdy  $\Delta t \rightarrow 0$ . Weźmy pod uwagę na  $l$  dowolny punkt  $O$  w chwili  $t$  i oznaczmy przez  $O'$  położenie punktu  $O$  w chwili  $t + \Delta t$ . Przy przeprowadzaniu ciała z położenia I w położenie II z pomocą skrętu, punkt  $O$  zajmie po przesunięciu położenie  $O_1$ , a następnie po obrocie około  $l'$  o kąt  $\Delta\varphi$  przejdzie w położenie  $O'$ . Oznaczając przez  $\bar{u}$  prędkość punktu  $O$ , mamy więc

$$(9) \quad \bar{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{OO'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{OO_1} + \overline{O_1O'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{OO_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t}.$$

Niech  $S$  będzie środkiem koła, po którym punkt  $O$  porusza się przy obrocie około osi  $l'$  o kąt  $\Delta\varphi$ . Zatem  $|\overline{O_1O'}| = 2SO_1 \cdot \sin \Delta\varphi/2$ ,

$$\text{skąd } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2SO_1 \cdot \left| \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} SO_1 \cdot \left| \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2} \right| \cdot \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right|.$$

$$\text{Ponieważ } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} SO_1 = 0, \text{ a } \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2} \right| = 1, \text{ więc } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t} \right| = 0.$$

Na mocy (9) jest więc  $\bar{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{OO_1}/\Delta t$ . Lecz  $\overline{OO_1} \parallel l'$ , więc z uwagi na to, że  $l'$  dąży do  $l$ , gdy  $\Delta t \rightarrow 0$ , prędkość  $\bar{u}$  ma kierunek osi  $l$ , która jest osią obrotu chwilowego, przechodzącą przez  $O$ . Ruch chwilowy jest więc skrętem, bo prędkość  $\bar{u}$  ruchu chwilowego postępowego ma kierunek osi  $l$  obrotu chwilowego.

Punkty położone na osi skrętu chwilowego mają prędkości równe  $\bar{u}$ , a przeto równoległe do osi skrętu. Punkty położone poza osią skrętu mają prędkości, które nie są równoległe do osi skrętu. Prędkość takiego punktu jest bowiem sumą prędkości  $\bar{u}$  i prę-

kości  $\bar{w}$  obrotowej, prostopadłej do  $\bar{u}$ . Zatem suma  $\bar{u} + \bar{w}$  nie jest nigdy równoległa do  $\bar{u}$  (a więc i do  $l$ ), chyba, że  $\bar{w} = 0$ , t. j. że punkt leży na osi skrętu.

Wynika stąd, że ruch chwilowy daje się przedstawić jako skręt chwilowy tylko w jeden sposób. Gdybyśmy bowiem przedstawili tenże ruch chwilowy jako skręt około innej osi  $l_1$ , to na mocy twierdzenia na str. 334, proste  $l$  i  $l_1$  byłyby równoległe, a wtedy prędkości punktów położonych na  $l_1$  byłyby równoległe do  $l_1$  i  $l$  co jest niemożliwe, ponieważ — jak dowiedliśmy przed chwilą — tylko punkty położone na osi  $l$  mają prędkości równoległe do  $l$ .

**Przykład 2.** Niech ciało porusza się w ten sposób, że ruch chwilowy jest skrętem o stałej prędkości postępowej  $\bar{u}$  i obrotowej  $\bar{\omega}$  około stałej osi  $l$ .

Obierzmy oś obrotu chwilowego za oś  $z$ . Oznaczmy przez  $\omega$  i  $u$  współrzędne  $\bar{\omega}$  i  $\bar{u}$  względem osi  $z$ . Prędkość  $\bar{v}$  punktu  $A$  ciała o współrzędnych  $x, y, z$  wyraża się na mocy (I), str. 335, wzorem

$$\bar{v} = \bar{u} + \overline{OA} \times \bar{\omega},$$

gdzie  $O$  jest początkiem układu. Ponieważ  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = \omega$  i  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = u$ , więc:

$$(10) \quad \dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = -\omega x, \quad \dot{z} = u.$$

Ostatnie z równań (10) daje po scałkowaniu

$$(11) \quad z = ut + c,$$

gdzie  $c$  jest stałą dowolną. Różniczkując pierwsze z równań (10), otrzymamy  $\ddot{x} = \omega \dot{y}$ . Podstawiając na  $\dot{y}$  wartość z równania drugiego, dostaniemy równanie  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$(12) \quad x = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi dowolnymi. Ponieważ  $y = \dot{x}/\omega$  więc

$$(13) \quad y = a \cos \omega t - b \sin \omega t.$$

Przyjmijmy, że w chwili  $t=0$  punkt  $A$  miał współrzędne  $x_0=r$ ,  $y_0=0$  i  $z_0=0$ . Podstawiając  $t=0$  w (11)-(13), dostaniemy  $a=0$ ,  $b=r$  i  $c=0$ , skąd:

$$x = r \cos \omega t, \quad y = -r \sin \omega t, \quad z = ut.$$

Punkt będzie więc poruszał się ruchem śrubowym (str. 55) po powierzchni walca o osi  $z$  (gdyż  $x^2 + y^2 = r^2$ ), zakreślając t. zw. *linię śrubową*. Jeżeli pobocznice walca rozwinie, to linia śrubowa przedstawi się jako prosta. Linia śrubowa przecina zatem wszystkie tworzące pod jednym i tym samym kątem  $\alpha$ . Odległość dwóch punktów sąsiednich linii śrubowej na tej samej tworzącej nazywamy *skokiem śruby* i oznaczamy przez  $h$ . Mamy więc

$$(14) \quad \operatorname{tg} \alpha = 2r\pi/h,$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy walca. Ponieważ czas obrotu wynosi  $2\pi/|\omega|$  lub  $h/|\vec{u}|$ , więc:

$$(15) \quad h = 2\pi|\vec{u}|/|\vec{\omega}|, \quad \operatorname{tg} \alpha = r|\vec{\omega}|/|\vec{u}|.$$

Wyznaczanie ruchu ciała. Obierzmy w ciele dowolny punkt  $O$  o współrzędnych  $x_0, y_0, z_0$  względem pewnego stałego układu współrzędnych  $(x, y, z)$ . Oznaczmy przez  $\vec{\omega}$  prędkość chwilową kątową, a przez  $\vec{u}$  prędkość punktu  $O$ . Punkt ciała  $A$  o współrzędnych  $x, y, z$  ma prędkość ((I), str. 335)

$$(16) \quad \vec{v} = \vec{u} + \vec{OA} \times \vec{\omega}.$$

Ponieważ:  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ ,  $v_z = \dot{z}$  i  $u_x = \dot{x}_0$ ,  $u_y = \dot{y}_0$ ,  $u_z = \dot{z}_0$ , więc dostajemy ze wzoru (16):

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 + (y - y_0)\omega_z - (z - z_0)\omega_y, & \dot{y} &= \dot{y}_0 + (z - z_0)\omega_x - (x - x_0)\omega_z, \\ \dot{z} &= \dot{z}_0 + (x - x_0)\omega_y - (y - y_0)\omega_x. \end{aligned}$$

Jeżeli ruch punktu  $O$  i prędkość kątowa  $\vec{\omega}$  dane są przy pomocy funkcji:

$$x_0 = f(t), \quad y_0 = \varphi(t), \quad z_0 = \psi(t); \quad \omega_x = \alpha(t), \quad \omega_y = \beta(t), \quad \omega_z = \gamma(t),$$

to (17) jest układem równań różniczkowych, w którym funkcjami niewiadomymi są funkcje  $x = F(t)$ ,  $y = \Phi(t)$  i  $z = \Psi(t)$ , określające ruch punktu  $A$ . Z równań (17) możemy wyznaczyć funkcje  $F, \Phi, \Psi$ , jeżeli znamy położenie początkowe punktu  $A$ , prędkość chwilową  $\vec{\omega}$  i ruch punktu  $O$ .

A więc: *ruch ciała sztywnego jest wyznaczony przez następujące dane:*

- położenie początkowe ciała,
- ruch jednego jego punktu,
- prędkość chwilową kątową obrotu  $\vec{\omega}$  w każdej chwili.

**§ 8. Toczenie i ślizganie.** Niech krzywa płaska  $C$ , poruszająca się w swej płaszczyźnie  $\Pi$ , będzie styczną w każdej chwili do pewnej krzywej nieruchomej  $C'$ , leżącej w  $\Pi$ .

Jeżeli ruch chwilowy krzywej  $C$  jest obrotem chwilowym około punktu styczności  $O$ , to jej ruch chwilowy nazywamy *toczeniem* się krzywej  $C$  po  $C'$ .

Wynika stąd, że przy toczeniu punkt styczności ma prędkość zero. Punkt styczności jest środkiem obrotu chwilowego.

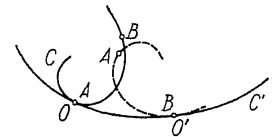
Jeżeli ruch chwilowy krzywej  $C$  jest ruchem postępowym, to jej ruch chwilowy nazywamy *ślizganiem* się krzywej  $C$  po  $C'$ .

Prędkość ruchu postępowego przy ślizganiu równa jest prędkości punktu styczności.

W przypadku ogólnym ruch chwilowy krzywej  $C$  możemy uważać za złożenie dwóch ruchów: jednego obrotowego około punktu styczności  $O$ , drugiego zaś postępowego z prędkością punktu styczności.

A więc: *ruch chwilowy jest złożeniem toczenia i ślizgania.*

Można udowodnić, że podczas toczenia się krzywej  $C$  po krzywej  $C'$  punkty styczności tworzą na obu krzywych łuki równej długości (łuki  $OO'$  i  $AB$  na rysunku). Gdy np. koło toczy się po prostej  $l$ , to odległość punktów styczności po całkowitym obrocie równa się obwodowi koła.



Toczenie i ślizganie powierzchni po powierzchni określamy analogicznie.

Niech mianowicie powierzchnia  $\Sigma$  porusza się w ten sposób, że stale jest styczną do pewnej powierzchni nieruchomej  $\Sigma'$ .

Jeżeli punkt styczności ma prędkość zero, powiadamy, że ruch chwilowy powierzchni  $\Sigma$  jest *toczeniem* po powierzchni  $\Sigma'$ .

Przy toczeniu ruch chwilowy jest obrotem około osi, przechodzącej przez punkt styczności. W szczególności, jeżeli powierzchnie  $\Sigma$  i  $\Sigma'$  są powierzchniami walcowymi lub stożkowymi, stykającymi się wzdłuż tworzących, wówczas przy toczeniu osią obrotu chwilowego jest tworząca, wzdłuż której powierzchnie się stykają.

Jeżeli ruch chwilowy powierzchni  $\Sigma$  jest ruchem postępowym, powiadamy, że ruch chwilowy powierzchni  $\Sigma$  jest *ślizganiem* po powierzchni  $\Sigma'$ .



Linia środków chwilowych. Niech figura  $K$  porusza się po płaszczyźnie  $\Pi$ . Weźmy pod uwagę w każdej chwili na płaszczyźnie  $\Pi$  środek obrotu chwilowego. Środki te utworzą na  $\Pi$  pewną linię  $C'$ , zwaną *linią stałą środków chwilowych*.

Weźmy teraz pod uwagę na figurze  $K$  w każdej chwili punkt, który w danej chwili schodzi się ze środkiem obrotu chwilowego. Punkty te utworzą na figurze  $K$  pewną linię  $C$ , poruszającą się wraz z figurą. Linię tę nazywamy *linią ruchomą środków chwilowych*.

Na ogół linie środków chwilowych: ruchoma  $C$  i stała  $C'$  są styczne do siebie w każdej chwili i w chwili tej punkt ich styczności jest środkiem obrotu chwilowego. Linia ruchoma porusza się zatem wraz z figurą  $K$  w taki sposób, że jej ruch chwilowy jest w każdej chwili obrotem około jej punktu styczności z linią stałą  $C'$ .

A więc: w ruchu płaskim linia ruchoma środków chwilowych toczy się po linii stałej środków chwilowych.

Stożek osi chwilowych. Niech ciało  $K$  obraca się około punktu  $O$ . Weźmy pod uwagę w przestrzeni oś obrotu chwilowego w każdej chwili. Osie te utworzą pewną powierzchnię stożkową  $\Sigma'$  o wierzchołku  $O$ ; nazywamy ją *stożkiem statycznym osi chwilowych*.

Weźmy następnie pod uwagę w ciele  $K$  w każdej chwili tę prostą, która w danej chwili schodzi się z osią obrotu chwilowego. Powierzchnię  $\Sigma$ , jaką utworzą te proste, nazywamy *stożkiem ruchomym osi chwilowych*.

Powierzchnia  $\Sigma$  porusza się wraz z ciałem i jest na ogół styczna do  $\Sigma'$ .

A więc: przy obrocie ciała około punktu powierzchnia ruchoma osi chwilowych toczy się po powierzchni stałej osi chwilowych.

Powierzchnia osi środkowych. Niech ciało  $K$  wykonywa w przestrzeni ruch dowolny. Weźmy pod uwagę w przestrzeni oś skrętu, t. j. oś środkową w każdej chwili. Osie te tworzą pewną powierzchnię  $\Sigma'$ , zwaną *powierzchnią stałą osi środkowych*.

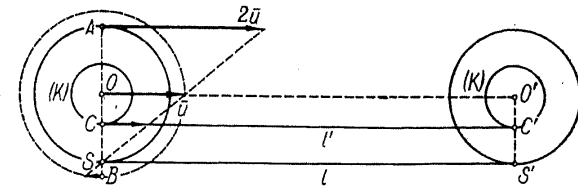
Weźmy także pod uwagę w ciele  $K$  w każdej chwili prostą, która w danej chwili schodzi się z osią środkową. Powierzchnię  $\Sigma$ , utworzoną przez te osie w ciele, nazywamy *powierzchnią ruchomą osi środkowych*.

Na ogół powierzchnia ruchoma osi środkowych styka się z powierzchnią stałą w każdej chwili wzdłuż osi środkowej. Ruch chwilowy powierzchni ruchomej jest skrętem około osi styczności.

**Przykład 1.** Koło  $K$  o promieniu  $r$  toczy się po prostej  $l$ , przyczem środek koła  $O$  porusza się ruchem jednostajnym z prędkością  $\bar{u}$ . Ponieważ punkt styczności  $S$  jest środkiem obrotu chwilowego, więc oznaczając przez  $\omega$  prędkość chwilową kątową, mamy  $u = r\omega$  (gdzie  $u = |\bar{u}|$ ) czyli

$$(1) \quad \omega = u/r.$$

Punkt  $A$  leżący na średnicy  $SO$  ma prędkość równą co do wielkości  $2r\omega = 2u$ ; punkt  $A$  ma więc prędkość  $2\bar{u}$ .



Koła wagonu kolejowego mają brzegi wystające od strony wewnętrznej szyn, by zapobiec wykojeniu się wagonu. Najniższy więc punkt koła wagonu kolejowego (na rysunku punkt  $B$ ) znajduje się poniżej punktu styczności  $S$ . Jego prędkość chwilowa ma zatem zwrot przeciwny niż prędkość pociągu (t. j. środka koła  $O$ ) i wynosi  $SB \cdot \omega = u \cdot SB/r$ .

Jeżeli np. pociąg porusza się z prędkością 50 km/godz, to istnieją na kołach pociągu w każdej chwili punkty mające prędkości chwilowe 100 km/godz (na rysunku punkt  $A$ ), a nawet takie, które biegą w przeciwnym kierunku niż pociąg (np. punkt  $B$ ).

Weźmy pod uwagę na kole  $K$  koło  $K'$  o środku  $O$  i promieniu  $OC = r'$ . Koło pozostaje stale stycznym do prostej  $l' \parallel l$ . Ponieważ punkt  $C$  nie jest środkiem obrotu chwilowego, więc koło to nie toczy się po  $l'$ . Ruch koła  $K'$  jest złożeniem toczenia i ślizgania po prostej  $l'$ . Toczenie odbywa się z prędkością kątową  $\omega$ , zaś ślizganie ma prędkość punktu  $C$ , t. j.  $SC \cdot \omega$ .

Ponieważ całe koło  $K$  o promieniu  $r$  toczy się po  $l$ , więc odcinek  $SS'$ , utworzony przez punkty styczności przy pełnym obrocie koła, równa się obwodowi koła, t. j.  $2\pi r$ . Odpowiedni odcinek  $CC'$  dla koła  $K$  wynosi również  $2\pi r$ . Nie jest on równy obwodowi  $2\pi r'$  koła  $K'$ , ponieważ ruch koła  $K$  po prostej  $l'$  nie jest toczaniem, lecz złożeniem toczenia i ślizgania wzdłuż tej prostej.

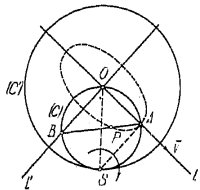
**Przykład 2.** Koło  $(C)$  o promieniu  $r$  toczy się po kole stałym  $(C')$  o promieniu  $2r$ . Koło  $(C)$  znajduje się wewnątrz koła  $(C')$  (p. str. 342, rys. 1). Wyznaczyć tory punktów koła  $(C)$ .

Niech  $A$  będzie dowolnym punktem na obwodzie koła  $(C)$ . Ponieważ punkt styczności  $S$  obu kół jest środkiem obrotu chwilowego, więc prędkość  $\vec{v}$  punktu  $A$  jest prostopadła do  $SA$ . Kierunek prędkości punktu  $A$  przechodzi zatem przez punkt  $O$ , leżący na kole  $(C)$  i na średnicy przechodzącej przez  $S$ . Ponieważ  $SO = 2r$ , więc  $O$  jest środkiem koła  $(C')$ . Prędkość punktu  $A$  jest zatem stale skierowana ku punktowi nieruchomemu  $O$ . Punkt  $A$  porusza się więc po prostej  $OA$ . Punkty położone na okręgu koła  $(C)$  poruszają się zatem po średnicach koła  $(C')$ .

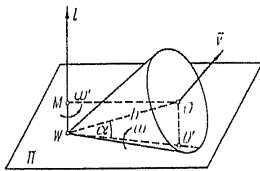
Niech teraz  $P$  będzie dowolnym punktem wewnątrz koła  $(C)$ . Przeprowadźmy przez  $P$  dowolną cięciwę  $AB$ . Punkty  $A$  i  $B$  poruszają się po prostych  $l$  i  $l'$ , przechodzących przez  $O$ . Ponieważ odcinek  $AB$  nie zmienia swej długości, więc na mocy znanego twierdzenia z geometrii analitycznej punkt  $P$  zakreśli elipsę.

**Przykład 3.** Stożek obrotowy toczy się po płaszczyźnie  $\Pi$  (rys. 2). Ruch chwilowy stożka jest więc obrotem chwilowym około tworzącej, wzdłuż której styka się on z płaszczyzną  $\Pi$ .

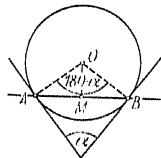
Wierzchołek  $W$  stożka leży zawsze na osi obrotu chwilowego, ma zatem stale prędkość zero, czyli pozostaje w spoczynku.



1.



2.



3.

Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt między tworzącymi a wysokością  $h$  stożka, przez  $O$  środek podstawy stożka, a przez  $O'$  rzut  $O$  na płaszczyznę  $\Pi$ . Ponieważ  $O'O = h \sin \alpha = \text{const.}$ , więc punkt  $O$  porusza się po płaszczyźnie równoległej do  $\Pi$ .

Odległość punktu  $O$  od prostej  $l$ , prostopadłej do  $\Pi$  w punkcie  $W$ , wynosi  $MO = WO' = h \cos \alpha = \text{const.}$  Wynika stąd, że punkt  $O$  krąży po kole o środku  $M$ , w płaszczyźnie prostopadłej do  $l$ , a więc obraca się około prostej  $l$ .

Niech  $\omega$  będzie prędkością kątową toczenia się stożka, a  $\omega'$  prędkością kątową środka  $O$  przy obrocie około osi  $l$ . Niech wreszcie  $\vec{v}$  będzie prędkością punktu  $O$ . Mamy zatem  $|\vec{v}| = O'O \cdot \omega$  i  $|\vec{v}| = MO \cdot \omega'$ , skąd  $\omega' = \omega \cdot O'O / MO = \omega \cdot O'O / WO'$ , a więc

$$(2) \quad \omega' = \omega \tan \alpha.$$

**Przykład 4.** Kula toczy się w rynnie utworzonej przez dwie płaszczyzny (rys. 3).

Ponieważ punkty styczności  $A$  i  $B$  mają prędkość zero, więc osią obrotu chwilowego jest prosta  $AB$ .

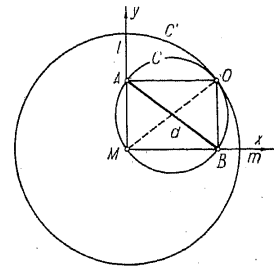
Oznaczmy przez  $r$  promień kuli, przez  $\alpha$  kąt między płaszczyznami rynny, przez  $\omega$  prędkość kątową toczenia, wreszcie przez  $\vec{v}$  prędkość środka kuli  $O$ .

Odległość środka kuli od osi obrotu jest  $OM = r \sin \frac{\alpha}{2}$ . Kładąc  $v = |\vec{v}|$ , otrzymujemy zatem

$$(3) \quad v = r \omega \sin \frac{\alpha}{2}.$$

**Przykład 5.** Odcinek  $AB$  o długości  $d$  porusza się w ten sposób, że końce jego pozostają stale na prostych  $l$  i  $m$ , prostopadłych do siebie i przecinających się w punkcie  $M$ .

Środek obrotu chwilowego  $O$  otrzymamy, prowadząc prostopadłe do  $l$  i  $m$  w punktach  $A$  i  $B$ . Ponieważ  $MO = AB = d$ , więc środki obrotu chwilowego tworzą koło  $C'$  o środku  $M$  i promieniu  $d$ . Koło  $C'$  jest więc linią stałą środków chwilowych. Ponieważ w każdym położeniu odcinka  $AB$  kąt  $AOB$  równa się  $\pi/2$ , więc linia ruchoma środków chwilowych będzie kołem  $C$  o średnicy  $AB$  (por. przykład 2).



**§ 9. Składanie ruchów ciała.** Dwa obroty równoczesne. Niech ruch chwilowy ciała  $K$  względem ciała  $K_1$  (t. j. względem układu współrzędnych, związanego sztywnie z ciałem  $K_1$ ) będzie obrotem około osi  $l_1$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$ , zaś ruch chwilowy ciała  $K_1$  względem ciała  $K'$  obrotem około osi  $l_2$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_2$ . Mówimy wówczas, że ciało  $K$  wykonywa względem ciała  $K'$  dwa obroty chwilowe równoczesne około osi  $l_1$  i  $l_2$  z prędkościami kątowymi  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$ .

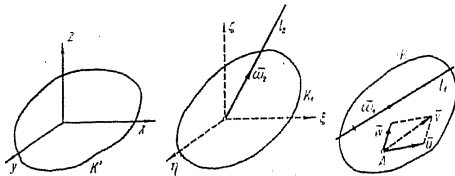
Ruch chwilowy ciała  $K$  względem ciała  $K'$  nazywamy *ruchem wypadkowym* tych dwóch obrotów chwilowych; mówimy także, że jest on *równoważny* układowi obu obrotów.

Przyjmijmy w ciele  $K_1$  układ współrzędnych  $(\xi, \eta, \zeta)$ , zaś w ciele  $K'$  układ współrzędnych  $(x, y, z)$  (rys. str. 344). Niech  $A$  będzie dowolnym punktem ciała  $K$ . Prędkość  $\vec{v}$  punktu  $A$  względem układu  $(x, y, z)$  jest sumą jego prędkości względnej  $\vec{w}$  względem układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  oraz prędkości unoszenia  $\vec{u}$ :

$$(1) \quad \bar{v} = \bar{w} + \bar{u}.$$

Ponieważ ruch chwilowy ciała  $K$  względem układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  jest obrotem około osi  $l_1$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$ , więc (str. 325)

$$(2) \quad \bar{w} = \text{Mom}_A \bar{\omega}_1.$$



Prędkość unoszenia  $\bar{u}$  punktu  $A$  otrzymamy, zakładając, że punkt  $A$  jest związany sztywnie z układem  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Układ  $(\xi, \eta, \zeta)$  obraca się około osi  $l_2$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_2$ , więc

$$(3) \quad \bar{u} = \text{Mom}_A \bar{\omega}_2.$$

Z (1), (2) i (3) otrzymujemy

$$(4) \quad \bar{v} = \text{Mom}_A \bar{\omega}_1 + \text{Mom}_A \bar{\omega}_2.$$

Jak widać z tego wzoru, ruch chwilowy ciała  $K$  względem  $K'$  wyznaczony jest przez prędkości kątowe  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$ . Nie potrzeba przy tym podawać, która z nich jest prędkością obrotu ciała  $K$  względem  $K_1$ , a która prędkością obrotu ciała  $K_1$  względem  $K'$ .

Przypuśćmy, że osie  $l_1$  i  $l_2$  przecinają się w punkcie  $O$ . Weźmy pod uwagę wektor  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$  o początku  $O$ . Mamy (str. 17)

$$(5) \quad \text{Mom}_A \bar{\omega} = \text{Mom}_A \bar{\omega}_1 + \text{Mom}_A \bar{\omega}_2,$$

skąd na mocy (4)

$$(6) \quad \bar{v} = \text{Mom}_A \bar{\omega}.$$

Ruch chwilowy ciała  $K$  względem  $K'$  jest zatem obrotem chwilowym około osi, przechodzącej przez punkt  $O$ , z prędkością kątową równą sumie prędkości kątowych  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  obrotów składowych.

A więc: układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi, przecinających się w punkcie  $O$ , jest równoważny obrotowi około osi, przechodzącej przez  $O$ , z prędkością kątową równą sumie prędkości kątowych obrotów składowych.

Przypuśćmy teraz, że osie  $l_1$  i  $l_2$  są równoległe, przyczem  $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \neq 0$ . Wektory  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  mają wówczas wektor wypadkowy  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ , dla którego zachodzą równości (5) i (6).

A więc: układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi równoległych, o prędkościach kątowych mających sumę różną od zera, jest równoważny obrotowi około osi równoległej do poprzednich; położenie tej osi i prędkość kątowa obrotu naokoło niej wyznaczona jest przez wypadkową prędkości kątowych obrotów składowych.

Przypuśćmy wreszcie, że osie  $l_1$  i  $l_2$  są równoległe, ale  $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0$ , t. zn. że zwroty obrotów są przeciwne, a wartości bezwzględne prędkości kątowych są równe. W tym przypadku wektory  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  tworzą parę. Ponieważ moment pary jest wektorem stałym, więc na mocy (4) wszystkie punkty ciała  $K$  mają jedną i tę samą prędkość, równą momentowi pary  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ . Ruch chwilowy ciała  $K$  względem ciała  $K'$  jest zatem ruchem postępowym.

A więc: układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi równoległych o prędkościach kątowych różnych co do wielkości, lecz mających zwroty przeciwne, jest równoważny ruchowi chwilowemu postępowemu.

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego. Niech  $O$  będzie dowolnym punktem ciała  $K$ . Układ wektorów  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  jest na mocy twierdzenia o redukcji (str. 24) równoważny układowi, złożonemu z wektora  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$  o początku  $O$  i pary  $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$  o momencie równym momentowi układu  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  względem  $O$ . Dla każdego punktu  $A$  ciała  $K$  mamy więc  $\text{Mom}_A \bar{\omega}_1 + \text{Mom}_A \bar{\omega}_2 = \text{Mom}_A \bar{\omega} + \bar{u}$ , gdzie  $\bar{u}$  jest momentem pary  $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$ . Na mocy (4) jest tedy

$$(7) \quad \bar{v} = \text{Mom}_A \bar{\omega} + \bar{u}.$$

Zatem ruch chwilowy ciała  $K$  względem  $K'$  jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości  $\bar{u}$  punktu  $O$  i obrotowego o prędkości kątowej  $\bar{\omega}$  około osi przechodzącej przez  $O$ .

A więc: układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych równoważny jest złożeniu ruchu obrotowego około osi przechodzącej przez dowolny punkt  $O$  ciała i ruchu postępowego o prędkości punktu  $O$ ; wektor prędkości kątowej ruchu wypadkowego równy jest sumie wektorów prędkości kątowych obrotów składowych.

Składanie kilku obrotów równoczesnych. Otrzymane wyniki można uogólnić na kilka obrotów równoczesnych. Ruch wypadkowy określamy podobnie jak dla dwóch obrotów.

Powiemy więc np., że ciało  $K$  wykonywa obroty równoczesne około osi  $l_1, l_2$  i  $l_3$  z prędkościami  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  i  $\bar{\omega}_3$  względem pewnego ciała  $K'$ , jeżeli ciało  $K$  obraca się około osi  $l_1$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$  względem pewnego ciała  $K_1$ , to zaś ciało obraca się około osi  $l_2$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_2$  względem pewnego ciała  $K_2$ , a to ostatnie obraca się około osi  $l_3$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_3$  względem ciała  $K'$ .

Podobnie ruch chwilowy ciała  $K$  względem  $K'$  nazywamy ruchem wypadkowym obrotów chwilowych około osi  $l_1, l_2, l_3$  z prędkościami kątowymi  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ .

Niech ciało  $K$  wykonywa kilka obrotów równoczesnych z prędkościami kątowymi  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$ . Podobnie jak w przypadku dwóch obrotów, dowodzi się, że prędkość  $\bar{v}$  dowolnego punktu  $A$  ciała  $K$  względem ciała stałego  $K'$  wynosi

$$(8) \quad \bar{v} = \text{Mom}_A \bar{\omega}_1 + \text{Mom}_A \bar{\omega}_2 + \dots$$

Prędkość  $\bar{v}$  punktu  $A$  jest momentem ogólnym układu wektorów prędkości kątowych  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$ :

$$(9) \quad \bar{v} = \text{Mom}_A (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots).$$

Jeżeli więc dla dwu układów obrotów równoczesnych układy prędkości kątowych

$$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots \quad \text{ i } \quad \bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2, \dots$$

są równoważne (str. 22), to ruchy wypadkowe tych obrotów są te same.

Pozwala nam to interpretować twierdzenia rozdziału I o układach wektorów jako twierdzenia o układach obrotów równoczesnych.

Twierdzeniu o redukcji układów wektorów (str. 26) możemy więc nadać brzmienie następujące:

*Układ kilku obrotów równoczesnych o prędkościach kątowych  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$  jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości dowolnego punktu  $O$  ciała i ruchu obrotowego o prędkości kątowej  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots$  około osi przechodzącej przez  $O$ .*

Twierdzenia 1-4, podane na str. 26, przybiorą w tej interpretacji postać:

1. *Układ obrotów równoczesnych z prędkościami kątowymi  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$  około osi przechodzących przez jeden punkt  $O$  jest równoważny jednemu obrotowi z prędkością kątową  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots$  około osi przechodzącej przez  $O$ .*

2. *Układ obrotów równoczesnych z prędkościami  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$  około osi równoległych (około osi leżących w jednej płaszczyźnie  $\Pi$ ) jest równoważny ruchowi obrotowemu około osi równoległej (około osi leżącej w płaszczyźnie  $\Pi$ ), gdy  $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots \neq 0$ , zaś ruchowi postępowemu, gdy  $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots = 0$ .*

W myśl określenia parametru układu wektorów (str. 21), parametr układu prędkości kątowych  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$  wyraża się iloczynem skalarowym  $K = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots) \cdot \text{Mom}_A (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots)$ , gdzie  $A$  jest dowolnym punktem ciała. Oznaczając przez  $\bar{\omega}$  sumę prędkości kątowych, mamy na mocy (9)

$$(10) \quad K = \bar{\omega} \cdot \bar{v},$$

gdzie  $\bar{v}$  jest prędkością wypadkową punktu  $A$ .

Z twierdzenia 4, str. 20, wynika, że iloczyn skalarowy  $\bar{\omega} \cdot \bar{v}$  ma wartość stałą. W szczególności dla  $K=0$  układ obrotów równoczesnych jest równoważny jednemu obrotowi lub ruchowi postępowemu (por. tabelkę na str. 28).

Jak wiemy, każdy ruch ciała jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości  $\bar{u}$  dowolnego punktu  $O$  ciała i ruchu obrotowego o prędkości kątowej  $\bar{\omega}$  (str. 334). Ruch chwilowy możemy więc przedstawić jako złożenie obrotu  $\bar{\omega}$  z parą  $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$  o momencie równym  $\bar{u}$ .

Przypuśćmy, że ruch ciała przedstawiliśmy w inny sposób jako złożenie ruchu obrotowego  $\bar{\omega}_1$  i pary obrotów  $\bar{\omega}'_1, -\bar{\omega}'_1$ . Ponieważ układy  $\bar{\omega}, \bar{\omega}', -\bar{\omega}'$  i  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}'_1, -\bar{\omega}'_1$  są równoważne, gdyż przedstawiają ten sam rozkład prędkości w ciele, więc sumy ich są równe, czyli  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1$ . Otrzymujemy więc i na tej drodze twierdzenie (udowodnione na str. 334), według którego przy wszelkich przedstawieniach ruchu chwilowego osie obrotu chwilowego są równoległe i prędkości chwilowe kątowe są równe.

Zauważmy przytem, że parametr układu  $\bar{\omega}, \bar{\omega}', -\bar{\omega}'$  wynosi  $K = \bar{\omega} \cdot \text{Mom}_O (\bar{\omega}', -\bar{\omega}') = \bar{\omega} \cdot \bar{u}$ . Jeżeli więc  $\bar{\omega} \cdot \bar{u} = 0$ , to ruch chwilowy jest obrotem chwilowym.

W szczególności, jeżeli  $\bar{\omega} \perp \bar{u}$ , a więc jeżeli oś chwilowego obrotu jest prostopadła do prędkości ruchu postępowego, to ruch chwilowy jest równoważny obrotowi chwilowemu.



Na str. 27 udowodniliśmy, że każdy układ wektorów jest równoważny skrętnikowi. Z określenia skrętnika wynika, że ruch chwilowy ciała sztywnego jest skrętem. Otrzymaliśmy zatem nowy dowód twierdzenia podanego na str. 336.

Ruch względny ciała. Niech dane będą ruchy chwilowe dwu ciał  $K_1$  i  $K_2$  względem stałego układu współrzędnych  $(x, y, z)$ . Wyznamy ruch chwilowy ciała  $K_2$  względem  $K_1$ , t. j. względem układu ruchomego współrzędnych  $(\xi, \eta, \zeta)$ , związanego sztywnie z ciałem  $K_1$ .

Oznaczmy przez  $\bar{\omega}_1$  wektor prędkości chwilowej kątowej ciała  $K_1$ . Ruch zaś postępowy przedstawmy jako złożenie pary obrotów o prędkościach kątowych  $\bar{\omega}'_1, -\bar{\omega}'_1$ . Podobnie przedstawimy ruch chwilowy ciała  $K_2$ , jako złożenie obrotu  $\bar{\omega}_2$  z parą obrotów  $\bar{\omega}'_2, -\bar{\omega}'_2$ .

Prędkości bezwzględna  $\bar{v}_b$  i unoszenia  $\bar{v}_u$  dowolnego punktu  $A$  ciała  $K_2$  wynoszą:

$$\bar{v}_b = \text{Mom}_A(\bar{\omega}_2, \bar{\omega}'_2, -\bar{\omega}'_2), \quad \bar{v}_u = \text{Mom}_A(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}'_1, -\bar{\omega}'_1).$$

Ponieważ  $\bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{v}_u$  (I, str. 58), więc

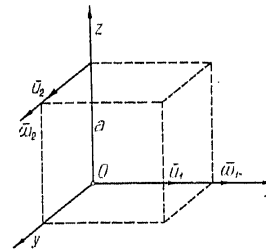
$$(11) \quad \bar{v}_w = \text{Mom}_A(\bar{\omega}_2, \bar{\omega}'_2, -\bar{\omega}'_2, -\bar{\omega}_1, -\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_1).$$

Ruch chwilowy ciała  $K_2$  względem ciała  $K_1$  jest złożeniem sześciu obrotów równoczesnych. Na mocy twierdzenia o redukcji (str. 24) odnośny układ wektorów jest równoważny jednemu wektorowi  $\bar{\omega}$  i parze  $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$ . Wektor  $\bar{\omega}$  jest prędkością chwilową kątową ruchu względnego, zaś moment pary  $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$  równy jest prędkości ruchu chwilowego postępowego.

A więc: *ruch chwilowy względny ciała  $K_2$  względem ciała  $K_1$  otrzymamy, dodając do układu prędkości kątowych, określających ruch chwilowy ciała  $K_2$ , układ prędkości kątowych ze zwrotami przeciwnymi, określających ruch chwilowy ciała  $K_1$ .*

Twierdzenie to wysławiamy zwykle krócej, mówiąc, że ruch ciała  $K_2$  względem ciała  $K_1$  otrzymujemy, składając ruch chwilowy ciała  $K_2$  z ruchem chwilowym ciała  $K_1$  o zwrocie przeciwnym.

**Przykład 1.** Sześcian wykonywa dwa równoczesne skręty około dwóch krawędzi wchrowatych. Niechaj  $\bar{u}_1, \bar{\omega}_1$  i  $\bar{u}_2, \bar{\omega}_2$  oznaczają prędkości chwilowe kątowe ruchu postępowego i obrotowego tych skrętów. Zajmiemy się wyznaczeniem skrętu wypadkowego.



Obierzmy układ współrzędnych w ten sposób, by jedna z krawędzi (około których odbywają się skręty) leżała na osi  $x$ , druga zaś na płaszczyźnie  $yz$  i była do osi  $y$  równoległa.

Ruchy postępowe zastąpić możemy parami obrotów  $\bar{\omega}'_1, -\bar{\omega}'_1$  i  $\bar{\omega}'_2, -\bar{\omega}'_2$  o momentach  $\bar{u}_1$  i  $\bar{u}_2$ . Ruch chwilowy wypadkowy jest zatem równoważny złożeniu sześciu obrotów równoczesnych:

$$(12) \quad \bar{\omega}'_1, -\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}'_2, -\bar{\omega}'_2, \bar{\omega}_2.$$

Suma układu (12) równa jest  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ , zatem:

$$(13) \quad \omega_x = \omega_1, \quad \omega_y = \omega_2, \quad \omega_z = 0,$$

gdzie  $\omega_1$  i  $\omega_2$  oznaczają odpowiednio rzuty wektorów  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  na oś  $x$  i  $y$ .

Aby obliczyć moment obrotów (12) względem początku  $O$  układu, zauważmy, że momenty par  $\bar{\omega}'_1, -\bar{\omega}'_1$  i  $\bar{\omega}'_2, -\bar{\omega}'_2$  wynoszą odpowiednio  $\bar{u}_1$  i  $\bar{u}_2$ . Moment  $\bar{\omega}_1$  jest zerem, gdyż  $\bar{\omega}_1$  leży na osi  $x$ . Moment  $\bar{\omega}_2$  jest prostopadły do płaszczyzny  $yz$  i rzut jego na oś  $x$  wynosi  $a\omega_2$ , gdzie  $a$  jest długością krawędzi sześcianu. Oznaczając więc przez  $\bar{u}$  moment obrotów (12) względem  $O$ , otrzymamy:

$$(14) \quad u_x = u_1 + a\omega_2, \quad u_y = u_2, \quad u_z = 0,$$

gdzie  $u_1$  oznacza rzut  $\bar{u}_1$  na oś  $x$ , zaś  $u_2$  rzut  $\bar{u}_2$  na oś  $y$ . Równania (14) przedstawiają oczywiście rzuty prędkości początku układu.

Ruch chwilowy jest więc złożeniem ruchu postępowego z prędkością  $\bar{u}$  i ruchu obrotowego z prędkością  $\bar{\omega}$  około osi przechodzącej przez  $O$ .

Prędkość dowolnego punktu  $A(x, y, z)$  wynosi według wzoru (I), str. 335,  $\bar{v} = \bar{u} + \bar{OA} \times \bar{\omega}$ , skąd na mocy (13) i (14)

$$(15) \quad v_x = u_1 + a\omega_2 - z\omega_2, \quad v_y = u_2 + z\omega_1, \quad v_z = x\omega_2 - y\omega_1.$$

Aby wyznaczyć oś środkową skrętu, musimy znaleźć punkt  $A$  taki, by jego prędkość miała kierunek wektora  $\bar{\omega}$ , t. zn. by  $\bar{v} = \lambda \bar{\omega}$  przy odpowiedniej wartości liczbowej współczynnika  $\lambda$ . Muszą więc być spełnione równania  $v_x = \lambda\omega_1$ ,  $v_y = \lambda\omega_2$  i  $v_z = 0$  czyli  $v_x/\omega_1 = v_y/\omega_2$  i  $v_z = 0$ . Wobec (15) dostajemy stąd następujące równania osi środkowej:

$$(16) \quad (u_1 + a\omega_2 - z\omega_2)/\omega_1 = (u_2 + z\omega_1)/\omega_2, \quad x\omega_2 - y\omega_1 = 0.$$

Prędkość ruchu postępowego skrętu równa się prędkości dowolnego punktu osi środkowej, np. punktu  $A(0,0,z)$ ; wartość  $z$  obliczamy z pierwszego z równań (16), a następnie prędkość punktu  $A$  ze wzorów (15). Dostaniemy:

$$v_x = k\omega_1, \quad v_y = k\omega_2, \quad v_z = 0,$$

gdzie  $k = [(u_1 + a\omega_2)\omega_1 + u_2\omega_2]/(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \bar{u} \cdot \bar{\omega}/|\bar{\omega}|^2$ .

**Przykład 2.** Precesja regularna. Jeżeli ciało porusza się w ten sposób, że ruch chwilowy jest w każdej chwili złożeniem dwóch obrotów równoczesnych około dwóch przecinających się osi, z których pierwsza  $l$  jest nieruchoma w przestrzeni, druga zaś  $m$  ma stałe położenie w ciele, przyczem prędkości kątowe  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  tych obrotów są stałe co do wielkości, to ruch ciała nazywamy *precesją regularną*.

Ponieważ z założenia osie  $l$  i  $m$  się przecinają, więc ruch chwilowy ciała jest obrotem z prędkością kątową  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$  około osi  $p$  przechodzącej przez punkt przecięcia osi  $l$  i  $m$ . Zauważmy, że ruch chwilowy osi  $m$  jest obrotem chwilowym około osi  $l$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$  (obrotowi bowiem osi  $m$  około siebie samej nie wchodzi w rachubę). Zatem oś  $m$  obraca się około osi  $l$  ze stałą prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$ . Punkt przecięcia  $O$  obu osi jest więc nieruchomy i kąt między osiami  $l$  i  $m$  jest stały. Wynika stąd, że wektor  $\bar{\omega}$ , a więc i oś  $p$  obrotu chwilowego, tworzy stałe kąty z osiami  $l$  i  $m$ .

Oś  $p$  zakreśla w przestrzeni stożek obrotowy  $\Sigma$ . Ślad osi  $p$  w ciele jest również stożkiem obrotowym  $\Sigma'$ .

A więc: *stożki osi obrotów chwilowych, stały i ruchomy, są stożkami obrotowymi o osiach  $l$  i  $m$ .*

Oś ziemi nie zachowuje stałego kierunku w przestrzeni, lecz opisuje stożek obrotowy około prostej prostopadłej do ekliptyki i przechodzącej przez środek ziemi. Czas obrotu osi ziemskiej trwa około 26.000 lat, zaś kąt między osią ziemską a osią prostopadłą do ekliptyki wynosi  $23\frac{1}{2}^\circ$ .

Przyjmijmy środek ziemi za początek układu współrzędnych, poruszającego się ruchem postępowym, i nadajmy osi  $z$  kierunek prostopadły do ekliptyki. Osie  $x$  i  $y$  będą wówczas leżały w ekliptyce. Względem tego układu współrzędnych ziemia wykonywa ruch precesyjny regularny. Osią stałą w przestrzeni jest oś  $z$ , osią stałą w ciele jest oś ziemską.

**Przykład 3.** Dwa koła  $K_1$  i  $K_2$ , leżące w płaszczyźnie  $\Pi$ , obracają się około swoich środków z prędkościami kątowymi  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Wyznaczyć ruch chwilowy względny koła  $K_2$  względem koła  $K_1$  (rys. 1).

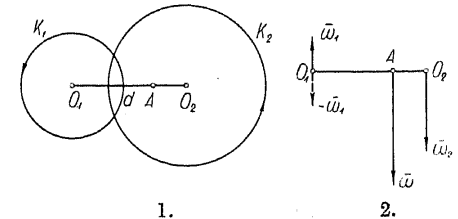
Niech  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  oznaczają wektory prędkości kątowych, prostopadłych oczywiście do  $\Pi$  (rys. 2). Ruch chwilowy koła  $K_2$  względem  $K_1$  jest złożeniem dwóch obrotów równoczesnych  $\bar{\omega}_2$  i  $-\bar{\omega}_1$ .

Jeżeli  $\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 = 0$ , to ruch chwilowy względny koła  $K_2$  jest ruchem postępowym z prędkością  $\bar{u}$ , równą momentowi pary  $(\bar{\omega}_2, -\bar{\omega}_1)$ . Oznaczając przed  $d$  odległość środków, mamy  $|\bar{u}| = d\omega_2 = d\omega_1$ . Prędkość  $\bar{u}$  jest prostopadła do prostej  $O_1O_2$ , łączącej środki kół  $K_1$  i  $K_2$ .

Jeżeli zaś  $\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \neq 0$ , to wektory  $\bar{\omega}_2$  i  $-\bar{\omega}_1$  mają wypadkową  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$  o początku  $A$ , który leży na prostej  $O_1O_2$  w punkcie, względem którego moment układu  $\bar{\omega}_2, -\bar{\omega}_1$  jest zerem. Ruch chwilowy względny koła  $K_2$  jest więc obrotem chwilowym około punktu  $A$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}$ .

Jeśli  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  mają zwroty przeciwne (jak na rys. 2), to oznaczając przez  $\omega_1, \omega_2$  i  $\omega$  wartości bezwzględne prędkości kątowych, otrzymamy:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \\ O_1A = O_1O_2 \cdot \omega_2/(\omega_1 + \omega_2).$$



## §10. Przedstawienie analityczne ruchu ciała sztywnego.

**Prędkość chwilowa kątowa.** Przypuśćmy, że badamy ruch ciała sztywnego względem układu współrzędnych  $(x, y, z)$ . Obierzmy układ współrzędnych  $(\xi, \eta, \zeta)$  o początku  $M$ , związany sztywnie z ciałem. Położenie ciała względem układu  $(x, y, z)$  będzie wyznaczone, jeżeli podamy położenie układu  $(\xi, \eta, \zeta)$ , t. zn. współrzędne  $x_0, y_0, z_0$  punktu  $M$  i kąty  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  i  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , jakie osie  $\xi, \eta, \zeta$  tworzą z osiami  $x, y, z$ .

Niech  $A$  będzie dowolnym punktem ciała. Oznaczmy jego współrzędne względem układu ruchomego przez  $\xi, \eta, \zeta$ , zaś względem stałego przez  $x, y, z$ .

Znając współrzędne  $\xi, \eta, \zeta$  i położenie układu ruchomego, możemy wyznaczyć współrzędne  $x, y, z$  przy pomocy wzorów (II), str. 54. Jeżeli  $\cos \alpha_i, \cos \beta_i$  i  $\cos \gamma_i$  oznaczmy przez  $a_i, b_i$  i  $c_i$  (gdzie  $i=1, 2, 3$ ), to wzory te przyjmą postać:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, & y &= y_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z &= z_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta. \end{aligned}$$

Niech  $\bar{v}$  będzie prędkością punktu  $A$  względem układu  $(x, y, z)$ . Ponieważ z założenia układ  $(\xi, \eta, \zeta)$  jest z ciałem związany sztywnie, więc współrzędne  $\xi, \eta, \zeta$  punktu  $A$  są stałe (niezależne od czasu). Różniczkując (1) (i pamiętając o tym, że  $a_1, a_2, \dots, c_3$  są funkcjami czasu  $t$ ), otrzymamy:

$$(2) \quad \begin{aligned} v_x = \dot{x} &= \dot{x}_0 + \dot{a}_1 \xi + \dot{a}_2 \eta + \dot{a}_3 \zeta, & v_y = \dot{y} &= \dot{y}_0 + \dot{b}_1 \xi + \dot{b}_2 \eta + \dot{b}_3 \zeta, \\ v_z = \dot{z} &= \dot{z}_0 + \dot{c}_1 \xi + \dot{c}_2 \eta + \dot{c}_3 \zeta. \end{aligned}$$

Z geometrii analitycznej wiadomo, że:

$$(3) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$$

$$(4) \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, \quad a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0, \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0.$$

Różniczkując równania (3) i (4), otrzymamy:

$$(5) \quad a_1 \dot{a}_1 + a_2 \dot{a}_2 + a_3 \dot{a}_3 = 0, \quad b_1 \dot{b}_1 + b_2 \dot{b}_2 + b_3 \dot{b}_3 = 0, \quad c_1 \dot{c}_1 + c_2 \dot{c}_2 + c_3 \dot{c}_3 = 0,$$

$$(6) \quad \begin{aligned} a_1 \dot{a}_2 + b_1 \dot{b}_2 + c_1 \dot{c}_2 &= -\dot{a}_1 a_2 - \dot{b}_1 b_2 - \dot{c}_1 c_2, \\ a_1 \dot{a}_3 + b_1 \dot{b}_3 + c_1 \dot{c}_3 &= -\dot{a}_1 a_3 - \dot{b}_1 b_3 - \dot{c}_1 c_3, \\ a_2 \dot{a}_3 + b_2 \dot{b}_3 + c_2 \dot{c}_3 &= -\dot{a}_2 a_3 - \dot{b}_2 b_3 - \dot{c}_2 c_3. \end{aligned}$$

Niech  $\bar{\omega}$  oznacza wektor, którego rzuty na osie układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  wyrażają się wzorami:

$$(7) \quad \omega_\xi = a_2 \dot{a}_3 + b_2 \dot{b}_3 + c_2 \dot{c}_3, \quad \omega_\eta = a_3 \dot{a}_1 + b_3 \dot{b}_1 + c_3 \dot{c}_1, \quad \omega_\zeta = a_1 \dot{a}_2 + b_1 \dot{b}_2 + c_1 \dot{c}_2.$$

Utwórzmy rzuty  $v_\xi, v_\eta, v_\zeta$  prędkości  $\bar{v}$  na osie  $\xi, \eta, \zeta$ ; dostaniemy  $v_\xi = a_1 v_x + b_1 v_y + c_1 v_z$ , skąd przez podstawienie wartości  $v_x, v_y, v_z$  ze wzorów (2):

$$\begin{aligned} v_\xi &= (a_1 \dot{x}_0 + b_1 \dot{y}_0 + c_1 \dot{z}_0) + (a_1 \dot{a}_1 + b_1 \dot{b}_1 + c_1 \dot{c}_1) \xi + \\ &+ (a_1 \dot{a}_2 + b_1 \dot{b}_2 + c_1 \dot{c}_2) \eta + (a_1 \dot{a}_3 + b_1 \dot{b}_3 + c_1 \dot{c}_3) \zeta. \end{aligned}$$

Współczynnik przy  $\xi$  jest równy zeru na mocy (5). Współczynniki przy  $\eta$  i  $\zeta$  są na mocy (6) i (7) równe odpowiednio  $\omega_\zeta$  i  $-\omega_\eta$ . Zatem

$$(8) \quad v_\xi = (a_1 \dot{x}_0 + b_1 \dot{y}_0 + c_1 \dot{z}_0) + \omega_\zeta \eta - \omega_\eta \zeta.$$

Dla rzutów prędkości  $\bar{u}$  punktu  $M$  na osie  $x, y, z$  dostaniemy  $u_x = \dot{x}_0, u_y = \dot{y}_0, u_z = \dot{z}_0$ , a dla rzutów tej prędkości na osie  $\xi, \eta, \zeta$

$$u_\xi = a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u_z = a_1 \dot{x}_0 + b_1 \dot{y}_0 + c_1 \dot{z}_0 \quad \text{i t. d.}$$

Na mocy więc (8) otrzymamy na  $v_\xi$  (i podobnie na  $v_\eta, v_\zeta$ ) wzory:

$$(9) \quad v_\xi = u_\xi + \omega_\zeta \eta - \omega_\eta \zeta, \quad v_\eta = u_\eta + \omega_\xi \zeta - \omega_\zeta \xi, \quad v_\zeta = u_\zeta + \omega_\eta \xi - \omega_\xi \eta.$$

Ze wzorów (9) wynika, że prędkość  $\bar{v}$  jest sumą dwóch prędkości:  $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ , z których pierwsza jest prędkością punktu  $M$ , a druga ma rzuty na osie  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$(10) \quad w_\xi = \omega_\zeta \eta - \omega_\eta \zeta, \quad w_\eta = \omega_\xi \zeta - \omega_\zeta \xi, \quad w_\zeta = \omega_\eta \xi - \omega_\xi \eta.$$

Porównując te wzory ze wzorami (V), str. 46, widzimy, że  $\bar{w}$  jest to prędkość, jaką miałby punkt  $A$ , gdyby ciało obracało się z prędkością kątową  $\bar{\omega}$  około osi przechodzącej przez  $M$ . Wynika stąd, że wektor  $\bar{\omega}$ , określony wzorami (7), jest wektorem prędkości chwilowej katowej.

Uwaga. Wzory (7) ulegają uproszczeniu, jeżeli założyć, że w danej chwili  $t$  układy współrzędnych  $(x, y, z)$  i  $(\xi, \eta, \zeta)$  schodzą się. Przy tym założeniu mamy  $a_1 = b_2 = c_3 = 0$ , pozostałe zaś kąty są równe  $\pi/2$ . Zatem  $a_1 = b_3 = c_2 = 1$ , a pozostałe cosinusy są zerami. Na mocy (7) i (6) jest wówczas:

$$\omega_\xi = -\dot{c}_2, \quad \omega_\eta = -\dot{a}_3, \quad \omega_\zeta = -\dot{b}_1.$$

Ponieważ  $c_2 = \cos \gamma_2$ , więc  $\dot{c}_2 = -(\sin \gamma_2) \dot{\gamma}_2 = -\dot{\gamma}_2$ , zatem  $\omega_\xi = \dot{\gamma}_2$ . Postępując podobnie, otrzymamy:

$$\omega_\xi = \omega_x = \dot{\gamma}_2, \quad \omega_\eta = \omega_y = \dot{\alpha}_3, \quad \omega_\zeta = \omega_z = \dot{\beta}_1.$$

A więc: jeżeli osie układu ruchomego współrzędnych schodzą się w chwili  $t$  z osiami układu stałego, to rzuty wektora prędkości chwilowej katowej na osie układu ruchomego są pochodnymi kątów  $\gamma_2, \alpha_3, \beta_1$ .

Oś środkowa. Aby otrzymać oś środkową, należy wyznaczyć punkty, których prędkości mają kierunek wektora  $\bar{\omega}$ . Jeżeli więc punkt  $A(\xi, \eta, \zeta)$  leży na osi środkowej, to jego prędkość równa się  $\bar{v} = \lambda \bar{\omega}$ , gdzie  $\lambda$  jest pewną liczbą stałą. Przez podstawienie w równania (9), otrzymamy stąd równania osi środkowej:

$$(12) \quad \begin{aligned} \lambda \omega_\xi &= u_\xi + \omega_\zeta \eta - \omega_\eta \zeta, & \lambda \omega_\eta &= u_\eta + \omega_\xi \zeta - \omega_\zeta \xi, \\ \lambda \omega_\zeta &= u_\zeta + \omega_\eta \xi - \omega_\xi \eta, \end{aligned}$$

skąd

$$(13) \quad \frac{u_\xi + \omega_\zeta \eta - \omega_\eta \zeta}{\omega_\xi} = \frac{u_\eta + \omega_\xi \zeta - \omega_\zeta \xi}{\omega_\eta} = \frac{u_\zeta + \omega_\eta \xi - \omega_\xi \eta}{\omega_\zeta}.$$

Aby otrzymać prędkość  $\bar{v}$  ruchu chwilowego postępowego przy skręcie, pomnożmy obie strony równań (12) odpowiednio przez  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ . Dodając je, otrzymamy

$$(14) \quad \lambda(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2) = u_\xi \omega_\xi + u_\eta \omega_\eta + u_\zeta \omega_\zeta = \bar{u} \cdot \bar{\omega}.$$

Ponieważ  $\bar{v} = \lambda \bar{\omega}$ , więc kładąc  $\omega = |\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$ , dostaniemy na mocy (14)  $\bar{v} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{\omega}}{\omega^2} \bar{\omega}$ , skąd

$$(15) \quad |\bar{v}| = |\bar{u} \cdot \bar{\omega}| / \omega.$$

Jeżeli  $\bar{u} \perp \bar{\omega}$ , to  $\bar{u} \cdot \bar{\omega} = 0$ , skąd na mocy (15)  $\bar{v} = 0$ .

A więc: jeżeli prędkość ruchu chwilowego postępowego jest prostopadła do osi chwilowej obrotu, to ruch chwilowy jest obrotem chwilowym około osi środkowej.

Ruch płaski. Przypuśćmy, że badamy ruch figury w płaszczyźnie  $\Pi$ . Obierzmy układ współrzędnych stały  $(x, y)$  oraz ruchomy  $(\xi, \eta)$  o początku  $M$ , związany sztywnie z figurą. Oznaczmy przez  $x_0, y_0$  współrzędne punktu  $M$ , zaś przez  $\varphi$  kąt między osiami  $\xi$  a  $x$ . Niechaj wreszcie  $A$  będzie dowolnym punktem figury o współrzędnych  $x, y$  względem układu stałego, zaś  $\xi, \eta$  względem układu ruchomego. Związki między tymi współrzędnymi podają wzory (II), str. 54:

$$(16) \quad x = x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad y = y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.$$

Niech  $\bar{v}$  będzie prędkością punktu  $A$ . Ponieważ punkt  $A$  jest związany sztywnie z układem ruchomym, więc  $\xi$  i  $\eta$  są stałe. Różniczkując (16), otrzymamy

$$(17) \quad v_x = \dot{x} = \dot{x}_0 - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \dot{\varphi}, \quad v_y = \dot{y} = \dot{y}_0 + (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \dot{\varphi}.$$

Porównując (17) ze wzorami (16) i kładąc

$$(18) \quad \omega = \dot{\varphi},$$

dostaniemy:

$$(19) \quad v_x = \dot{x}_0 - (y - y_0)\omega, \quad v_y = \dot{y}_0 + (x - x_0)\omega.$$

A więc: prędkość  $\bar{v}$  jest sumą dwóch prędkości:  $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ , z których pierwsza jest prędkością punktu  $M$ , druga zaś ma rzuty na osie układu stałego:

$$(20) \quad w_x = -(y - y_0)\omega, \quad w_y = (x - x_0)\omega.$$

Widzimy stąd, że  $\bar{w}$  jest to prędkość jaką miałby punkt  $A$ , gdyby figura obracała się około punktu  $M(x_0, y_0)$  z prędkością kątową  $\omega$  (przyczem zwrot dodatni obrotu jest zgodny ze zwrotem dodatnim kąta). Zatem  $\omega = \dot{\varphi}$  jest prędkością chwilową kątową.

Aby otrzymać środek obrotu chwilowego, należy wyznaczyć punkt o prędkości  $\bar{v} = 0$ . Oznaczając współrzędne środka obrotu chwilowego przez  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$ , otrzymamy z (4):

$$0 = \dot{x}_0 - (\bar{y} - y_0)\omega, \quad 0 = \dot{y}_0 + (\bar{x} - x_0)\omega,$$

skąd

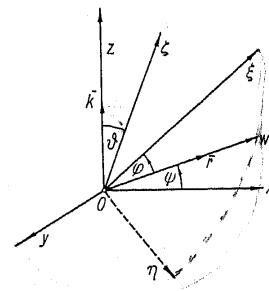
$$(21) \quad \bar{x} = x_0 - \dot{y}_0/\omega, \quad \bar{y} = y_0 + \dot{x}_0/\omega.$$

Kąty Eulera. Wygodnym jest w niektórych rozważaniach określić położenie ciała przy pomocy t. zw. kątów Eulera.

Niech ciało obraca się około punktu  $O$ . Obierzmy dwa układy współrzędnych o wspólnym początku  $O$ : stały  $(x, y, z)$  i ruchomy  $(\xi, \eta, \zeta)$ , związany sztywnie z ciałem. Położenie układu ruchomego wyznaczymy, jak następuje.

Niech  $w$  oznacza linię przecięcia płaszczyzn  $xy$  i  $\xi\eta$ . Linię tę nazywamy *linią węzłów*.

Linia  $w$  jest prostopadła do osi  $z$  i  $\zeta$ . Nadajmy linii  $w$  taki zwrot, by układ osi  $(\zeta, z, w)$  był lewostronny, t. j. zgodny z przyjętymi zwrotami układów  $(x, y, z)$  i  $(\xi, \eta, \zeta)$ .



Oznaczmy przez  $\vartheta$  kąt, o jaki należy obrócić oś  $z$  około osi  $w$  w kierunku dodatnim (t. j. od ręki prawej ku lewej), aby kierunek dodatni osi  $z$  pokrył kierunek dodatni osi  $\zeta$ . Podobnie, przez  $\varphi$  oznaczmy kąt, o jaki należy obrócić oś  $w$  około osi  $\zeta$  w kierunku dodatnim, aby kierunek dodatni osi  $w$  pokrył kierunek dodatni osi  $\xi$ . Wreszcie przez  $\psi$  oznaczmy kąt, o jaki należy obrócić oś  $x$  około osi  $z$  w kierunku dodatnim, aby kierunki dodatnie osi  $x$  i  $w$  pokryły się z sobą.

Kąty  $\vartheta, \varphi, \psi$  nazywamy *kątami Eulera*.

Kąty te wyznaczają położenie osi  $\xi, \eta, \zeta$ , z wyjątkiem przypadku, gdy  $\vartheta = 0$  lub  $\vartheta = \pi$ , wówczas bowiem położenie osi  $w$ , a więc i kąty  $\varphi, \psi$ , są nieokreślone.

Jeżeli zaś  $\vartheta \neq 0$  i  $\vartheta \neq \pi$ , to kąt  $\psi$  określa położenie osi  $w$  w płaszczyźnie  $xy$ . Znając już położenie osi  $w$ , otrzymujemy położenie osi  $\zeta$ , obracając oś  $z$  o kąt  $\vartheta$  (w kierunku dodatnim) około osi  $w$ . Wreszcie, oś  $\xi$  otrzymamy, obracając oś  $w$  około osi  $\zeta$  w kierunku dodatnim o kąt  $\varphi$ .



Kąty Eulera zmieniają się w następujących granicach:

$$0 < \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Ruch chwilowy układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  jest obrotem około pewnej osi. Niech  $\bar{\omega}$  będzie wektorem jego prędkości chwilowej kątowej. Rozłożmy  $\bar{\omega}$  na trzy składowe  $\bar{\omega}_z$ ,  $\bar{\omega}_w$  i  $\bar{\omega}_\zeta$  w kierunku osi  $z$ ,  $w$  i  $\zeta$ . Zatem

$$(21) \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_z + \bar{\omega}_w + \bar{\omega}_\zeta.$$

Oznaczmy przez  $o_z$ ,  $o_w$  i  $o_\zeta$  współrzędne odpowiednich wektorów względem osi  $z$ ,  $w$  i  $\zeta$ . Zauważmy, że jeżeli układ  $(\xi, \eta, \zeta)$  obraca się około osi  $z$ , to kąty  $\vartheta$  i  $\varphi$  nie zmieniają się, zaś kąt  $\psi$  jest kątem obrotu. Zatem przy obrocie około osi  $z$  prędkość chwilowa kątowa układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  ma wielkość  $\dot{\psi}$ . Ponieważ  $o_z$  jest wektorem prędkości kątowej przy obrocie około osi  $z$ , więc

$$(22) \quad o_z = \dot{\psi} \text{ i podobnie } o_w = \dot{\vartheta}, \quad o_\zeta = \dot{\varphi}.$$

Pochodne zatem  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\varphi}$  określają wektor chwilowej prędkości kątowej  $\bar{\omega}$ , jeżeli znamy położenie układu  $(\xi, \eta, \zeta)$ , t. j. kąty  $\psi$ ,  $\vartheta$  i  $\varphi$ .

Wyprowadzimy teraz wzory na rzuty wektora  $\bar{\omega}$  na osie układu  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

Obierzmy na osiach  $z$  i  $w$  wektory jednostkowe  $\bar{k}$  i  $\bar{r}$ . Zatem  $\bar{\omega}_z = o_z \bar{k}$  i  $\bar{\omega}_w = o_w \bar{r}$ , więc według (22):

$$(23) \quad \bar{\omega}_z = \dot{\psi} \bar{k}, \quad \bar{\omega}_w = \dot{\vartheta} \bar{r}.$$

Rzut wektora  $\bar{k}$  na oś  $\zeta$  wynosi  $\cos \vartheta$ . Wektor  $\bar{k}$  tworzy z płaszczyzną  $\xi\eta$  kąt  $\pi/2 - \vartheta$ , więc rzut  $\bar{k}$  na płaszczyznę  $\xi\eta$  ma długość  $\sin \vartheta$  i jest prostopadły do  $w$  (ponieważ oś  $z$  jest prostopadła do  $w$ ). Rzut  $\bar{k}$  tworzy z osiami  $\xi$  i  $\eta$  kąty  $\pi/2 - \varphi$  i  $\pi - \varphi$ , więc:

$$(24) \quad k_\xi = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad k_\eta = -\sin \vartheta \cos \varphi, \quad k_\zeta = \cos \vartheta.$$

Rzuty wektora  $\bar{r}$  na osie  $\xi$  i  $\eta$  wynoszą  $\cos \varphi$  i  $\sin \varphi$ , zaś rzut na oś  $\zeta$  jest zerem. Zatem:

$$(25) \quad r_\xi = \cos \varphi, \quad r_\eta = \sin \varphi, \quad r_\zeta = 0.$$

Rzuty wektora  $\bar{\omega}_z$  na osie  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  wynoszą na mocy (23) i (24):  $\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $-\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi$  i  $\dot{\psi} \cos \vartheta$ , zaś rzuty wektora  $\bar{\omega}_w$  na osie  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  są na mocy (23) i (25) równe odpowiednio  $\dot{\vartheta} \cos \varphi$ ,  $\dot{\vartheta} \sin \varphi$  i 0; wreszcie rzuty wektora  $\bar{\omega}_\zeta$  na osie  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  wynoszą oczywiście 0, 0 i  $\dot{\varphi}$ . Stąd dostajemy na mocy (21):

$$(I) \quad \omega_\xi = \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \omega_\eta = \dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta.$$

Wyznaczając z (I)  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\psi}$  i  $\dot{\varphi}$ , otrzymujemy:

$$(II) \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_\xi \cos \varphi + \omega_\eta \sin \varphi, & \dot{\psi} &= (\omega_\xi \sin \varphi - \omega_\eta \cos \varphi) / \sin \vartheta, \\ \dot{\varphi} &= \omega_\zeta - (\omega_\xi \sin \varphi - \omega_\eta \cos \varphi) \cot \vartheta. \end{aligned}$$

Znając w każdej chwili rzuty  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$  i  $\omega_\zeta$  prędkości kątowej  $\bar{\omega}$  na osie  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  układu ruchomego, możemy więc wyznaczyć  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\varphi}$  i  $\dot{\psi}$  jako funkcje czasu, rozwiązując układ równań różniczkowych (II).

Postępując podobnie, otrzymujemy wzory następujące na rzuty prędkości kątowej  $\bar{\omega}$  na osie  $x, y, z$  układu stałego:

$$(I') \quad \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, & \omega_y &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta, \end{aligned}$$

$$(II') \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_x \cos \psi - \omega_y \sin \psi, & \dot{\varphi} &= \frac{\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi}{\sin \vartheta}, \\ \dot{\psi} &= \omega_z - (\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi) \cot \vartheta. \end{aligned}$$

Kąty Eulera w precesji regularnej. Załóżmy, że podczas ruchu ciała jest stale:

$$(26) \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\psi} = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \text{const}.$$

Ruch chwilowy ciała jest więc w każdej chwili złożeniem dwóch obrotów równoczesnych około osi  $z$  i  $\zeta$  z prędkościami kątowymi  $\dot{\psi}$  i  $\dot{\varphi}$  o stałej wielkości. Oś  $z$  ma stałe położenie w przestrzeni, oś  $\zeta$  zaś jest związana sztywnie z ciałem. W tych warunkach ruch ciała jest precesją regularną (por. str. 350).

**§ 11. Rozkład przyspieszeń.** Ruch płaski. Jeżeli figura płaska obraca się około punktu stałego  $M$  z prędkością kątową zmienną  $\omega$ , wówczas każdy punkt figury krąży po okręgu koła. Przyspieszenie  $\bar{p}$  dowolnego punktu  $A$  figury jest więc sumą przyspieszenia normalnego  $\bar{p}_n$ , skierowanego ku  $M$ , oraz przyspieszenia stycznego  $\bar{p}_t$ , prostopadłego do  $MA$ . Przyspieszenia normalne i styczne określone są wzorami (I) i (II), str. 45:

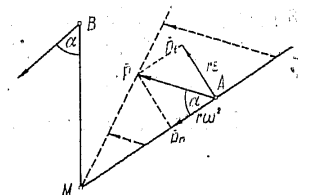
$$(1) \quad p_n = r\omega^2, \quad p_t = r\varepsilon,$$

gdzie  $r = MA$ , zaś  $\varepsilon = \dot{\omega}$  jest przyspieszeniem kątowym.

Niech  $\alpha$  oznacza kąt, jaki przyspieszenie  $\bar{p}$  punktu  $A$  tworzy z prostą  $MA$ . Wówczas

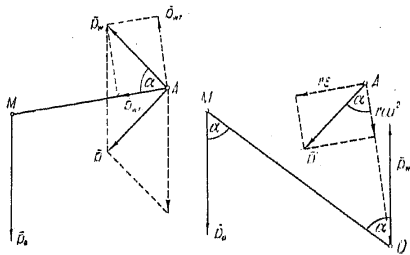
$$(2) \quad \text{tg } \alpha = p_t / p_n = \varepsilon / \omega^2.$$

Widzimy stąd, że  $\alpha$  jest jednakowe dla wszystkich punktów. *w danej chwili*



A więc: w ruchu obrotowym figury około punktu stałego przyspieszenia punktów figury są proporcjonalne do ich odległości od środka obrotu i tworzą kąty równe z prostą łączącą te punkty ze środkiem obrotu.

Założmy teraz, że figura porusza się w płaszczyźnie zupełnie dowolnie (rys. 1). Przyjmijmy dowolny punkt  $M$  figury za początek



1.

2.

z prędkością kątową zmienną  $\omega$ . Możemy więc przyspieszenie względne  $\bar{p}_w$  rozłożyć na sumę przyspieszeń (względnych): normalnego  $\bar{p}_{wn}$  i stycznego  $\bar{p}_{wt}$ . Zatem

$$(3) \quad \bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}_w = \bar{p}_0 + \bar{p}_{wn} + \bar{p}_{wt}.$$

A więc: w ruchu płaskim przyspieszenia punktów figury są sumami przyspieszenia dowolnego punktu  $M$  figury i przyspieszeń, jakie miałyby te punkty przy obrocie figury około punktu  $M$  (jako punktu stałego) z prędkością kątową (obrotu chwilowego figury)  $\omega$  i z przyspieszeniem kątowym  $\varepsilon = \dot{\omega}$ .

Jeżeli  $\omega \neq 0$  lub  $\varepsilon \neq 0$ , to przyspieszenie względne  $\bar{p}_w$  tworzy z prostą  $MA$  kąt  $\alpha$  określony wzorem (2) i kąt ten jest stały dla wszystkich punktów figury.

Przeprowadźmy w tym przypadku przez punkt  $M$  prostą  $l$ , tworzącą kąt  $\alpha$  z kierunkiem przyspieszenia  $\bar{p}_0$  punktu  $M$  (rys. 2). Przyspieszenia względne punktów położonych na prostej  $l$  będą miały kierunek przyspieszenia  $\bar{p}_0$ . Ponieważ przyspieszenia względne są proporcjonalne do odległości od  $M$ , więc na prostej  $l$  znajdziemy punkt  $O$ , którego przyspieszenie względne będzie równe  $-\bar{p}_0$ . Przyspieszenie punktu  $O$  będzie więc zerem.

Punkt  $O$  nazywamy *środkiem chwilowym przyspieszeń*.

Jeżeli zaś  $\omega = 0$  i  $\varepsilon = 0$ , to przyspieszenia wszystkich punktów figury są równe (mianowicie, równe przyspieszeniu punktu  $M$ ).

A więc: jeżeli przyspieszenia punktów w ruchu płaskim figury nie są równe, to istnieje punkt, którego przyspieszenie jest równe zeru.

Przyspieszenia punktów są zatem takie, jak gdyby figura obracała się około środka chwilowego przyspieszeń (jako punktu stałego) z prędkością kątową  $\omega$  i z przyspieszeniem kątowym  $\varepsilon = \dot{\omega}$ .

Przyspieszenia punktów figury są proporcjonalne do odległości od środka chwilowego przyspieszeń i tworzą kąty równe z prostymi, łączącymi te punkty ze środkiem chwilowym przyspieszeń.

Ruch w przestrzeni. Jeżeli ciało obraca się około punktu stałego  $O$  z prędkością chwilową kątową  $\bar{\omega}$ , wówczas prędkość dowolnego punktu  $A$  ciała wynosi

$$(4) \quad \bar{v} = \bar{r} \times \bar{\omega},$$

gdzie  $\bar{r} = \overrightarrow{OA}$ . Tworząc pochodną i oznaczając przez  $\bar{p}$  przyspieszenie punktu  $A$ , otrzymamy

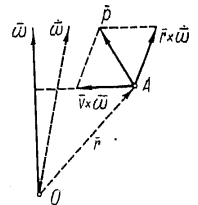
$$\bar{p} = \dot{\bar{r}} \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}.$$

Ponieważ  $O$  jest z założenia punktem stałym, więc  $\dot{\bar{r}} = \bar{v}$ ; zatem

$$(5) \quad \bar{p} = \bar{v} \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}.$$

Jeżeli ciało obraca się około osi stałej z prędkością kątową stałą  $\bar{\omega}$ , to  $\dot{\bar{\omega}} = 0$ ; skąd na mocy (5)  $\bar{p} = \bar{v} \times \bar{\omega}$ . Z drugiej strony, każdy punkt ma wówczas przyspieszenie dośrodkowe  $q|\bar{\omega}|^2$ , gdzie  $q$  oznacza odległość tego punktu od osi obrotu. Iloczyn  $\bar{v} \times \bar{\omega}$  jest więc przyspieszeniem, z jakim poruszałyby się punkty ciała, gdyby ciało obracało się około osi stałej z prędkością kątową stałą  $\bar{\omega}$ . Iloczyn zaś  $\bar{r} \times \dot{\bar{\omega}} = \text{Mom}_A \dot{\bar{\omega}}$  przedstawia prędkość, jaką miałby punkt  $A$ , gdyby ciało obracało się około osi stałej z prędkością kątową  $\dot{\bar{\omega}}$ . Pochodna  $\dot{\bar{\omega}}$  ma na ogół inny kierunek niż  $\bar{\omega}$ . Jeżeli  $\bar{\omega}$  ma kierunek stały (t. zn. gdy oś obrotu jest stała), to  $\dot{\bar{\omega}}$  ma kierunek  $\bar{\omega}$ , zatem  $\bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}$  ma kierunek prędkości  $\bar{v}$ . W tym przypadku  $\bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}$  jest przyspieszeniem stycznym, zaś  $\bar{v} \times \bar{\omega}$  przyspieszeniem normalnym.

Założmy teraz, że ciało wykonywa w przestrzeni ruch dowolny. Rozkład przyspieszeń otrzymamy wówczas, przyjmując do-



wolny punkt  $O$  ciała za początek układu współrzędnych  $(\xi, \eta, \zeta)$ , poruszającego się ruchem postępowym. Przyspieszenia punktów będą sumami: przyspieszenia unoszenia (t. j. przyspieszenia punktu  $O$ ) i przyspieszenia względnego. Ruch względny będzie obrotem około punktu  $O$ . Zatem przyspieszenie względne dowolnego punktu  $A$  wyrazi się w myśl (5) wzorem

$$(6) \quad \bar{p}_w = \bar{v}_w \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}},$$

gdzie  $\bar{r} = \overline{OA}$ , zaś  $\bar{v}_w$  oznacza prędkość względną punktu  $A$ .

Interpretacja iloczynów  $\bar{v}_w \times \bar{\omega}$  i  $\bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}$  jest podobna jak przy obrocie ciała około punktu stałego. Oznaczając przez  $\bar{p}_0$  przyspieszenie, a przez  $\bar{v}_0$  prędkość punktu  $O$ , zaś przez  $\bar{v}$  prędkość punktu  $A$ , otrzymamy  $\bar{v}_w = \bar{v} - \bar{v}_0$ , a więc przyspieszenie punktu  $A$  wyniesie na mocy (6)

$$(7) \quad \bar{p} = \bar{p}_0 + (\bar{v} - \bar{v}_0) \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}.$$