



ROZDZIAŁ VI ¹⁾

STATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

I. Ciało swobodne

§ 1. Ciało sztywne. Ciało materialne, które mimo działania sił nie doznaje żadnych odkształceń (t.j. w którym odległości wzajemne punktów ciała nie ulegają zmianie), nazywamy *ciałem sztywnym*.

Ciał sztywnych w przyrodzie nie spotykamy, ponieważ każde ciało mniej lub więcej odkształca się pod wpływem działania sił. Jeżeli jednak jakieś ciało doznaje niewielkich tylko odkształceń pod wpływem sił nie przekraczających pewnej granicy, możemy za model takiego ciała przyjąć ciało sztywne i wnioski, jakie wyprowadzimy, będą w przybliżeniu zgadzały się z doświadczeniem (o ile siły są nieduże). Stąd pochodzi wielkie znaczenie teorii ciała sztywnego dla zastosowań praktycznych.

Zajmiemy się po kolei statyką, kinematyką i dynamiką ciała sztywnego.

Oprócz brył materialnych sztywnych spotkamy się w teorii ciała sztywnego z powierzchniami i liniami materialnymi sztywnymi (str. 171) jako modelami ciał, w których jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu z pozostałymi. Przykładami ciał takich są płyty, pręty, druty i t.p.

Układy sztywne punktów materialnych. Często okazuje się korzystnym uważać ciało sztywne za zbiór (układ) wielkiej liczby punktów materialnych. Zakładamy wówczas, że punkty materialne działają na siebie z pewnymi siłami, które sprawiają, że układ punktów jest sztywny, t. j. że wzajemne odległości jego punktów nie ulegają zmianie. Siły te nazywamy *siłami wewnętrznymi*.

¹⁾ Do zrozumienia tego rozdziału wystarczają wiadomości zawarte w rozdziałach I i III (od str. 70 do 76) oraz twierdzenia o środku ciężkości z rozdziału IV, zawarte w §§ 1, 2, 6, 7 i 8.

O siłach wewnętrznych zakładamy, że stosuje się do nich prawo akcji i reakcji Newtona (str. 74), t. zn. że dwa punkty działają na siebie z siłami równymi co do wielkości i wprost przeciwnie skierowanymi wzdłuż prostej łączącej te punkty.

Oprócz sił wewnętrznych działać mogą na punkty układu inne jeszcze siły, które nazywamy *siłami zewnętrznymi*.

Jeżeli więc ciało sztywne uważamy za układ sztywny punktów materialnych, to siły działające na ciało sztywne są siłami zewnętrznymi, działającymi na punkty układu.

Można mieć wątpliwość, czy dopuszczalną jest rzeczą uważać ciało sztywne za układ punktów materialnych. Założenie to możemy jednak usprawiedliwić w ten sposób, że dzieląc ciało sztywne na bardzo wiele drobnych części i zastępując każdą z nich punktem materialnym o tej samej masie, otrzymamy układ sztywny punktów materialnych, przedstawiający dane ciało ze znacznym przybliżeniem.

Jakkolwiek więc założenie, że ciało sztywne jest zbiorem punktów materialnych, nie jest poprawne, będziemy się nim posługiwali, ponieważ upraszcza ono rozumowania i prowadzi do wyników zadowalających. Właściwie jednak należy teorię ciała sztywnego i teorię sztywnych układów punktów materialnych traktować odrębnie.

§ 2. Siła. Punkt zaczepienia siły. W teorii ciała sztywnego przyjmujemy, że punkt zaczepienia (początek) siły, działającej na ciało sztywne, może do ciała należeć lub nie; w tym ostatnim przypadku zakładamy jednak, że punkt zaczepienia jest sztywnie z ciałem związany (wyobrażamy sobie np., że punkt zaczepienia jest połączony z ciałem przy pomocy sztywnych prętów bez masy). Działanie siły będzie więc wówczas takie, jak gdyby punkt zaczepienia do ciała należał.

Moment względem punktu. Jeżeli siła $\bar{P}$ zaczepiona jest w punkcie A o współrzędnych x, y, z , to moment siły względem punktu O o współrzędnych x_0, y_0, z_0 ma na osie układu rzuty (str. 17, (I)):

$$(1) \quad \begin{aligned} M_x &= P_y(z - z_0) - P_z(y - y_0), & M_y &= P_z(x - x_0) - P_x(z - z_0), \\ M_z &= P_x(y - y_0) - P_y(x - x_0). \end{aligned}$$

W szczególności, gdy O jest początkiem układu, t. j. gdy $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, dostajemy:

$$(2) \quad \begin{aligned} M_x &= P_y z - P_z y, & M_y &= P_z x - P_x z, & M_z &= P_x y - P_y x. \end{aligned}$$

Z określenia momentu (str. 17) wynika, że

$$(3) \quad |\bar{M}| = |\bar{P}| h,$$

gdzie h oznacza odległość punktu O od położenia siły $\bar{P}$ (t. j. od prostej, na której leży $\bar{P}$); odległość tę nazywamy *ramieniem siły $\bar{P}$ względem punktu O* .

Moment siły $\bar{P}$ względem osi l otrzymamy, obierając dowolny punkt O na l i tworząc następnie rzut na oś l momentu siły $\bar{P}$ względem O (str. 18).

Jeżeli na prostej l dany jest zwrot, to moment siły $\bar{P}$ względem osi l określony będzie przez podanie jego współrzędnej względem tej osi. Współrzędną tę nazywamy również (jeżeli nie ma obawy pomyłki) momentem siły $\bar{P}$ względem osi l .

Jeżeli oś l przechodzi przez punkt $O(x_0, y_0, z_0)$ i tworzy z osiami układu współrzędnych kąty α, β, γ , to oznaczając przez $\bar{M}$ moment siły $\bar{P}$ względem O , zaś przez M_l moment względem osi l , dostaniemy

$$(4) \quad M_l = M_x \cos \alpha + M_y \cos \beta + M_z \cos \gamma$$

czyli na mocy (1)

$$(5) \quad \begin{aligned} M_l &= P_x[(y - y_0) \cos \gamma - (z - z_0) \cos \beta] + \\ &+ P_y[(z - z_0) \cos \alpha - (x - x_0) \cos \gamma] + P_z[(x - x_0) \cos \beta - (y - y_0) \cos \alpha]. \end{aligned}$$

W szczególności, gdy punkt O , przez który przechodzi oś l , jest początkiem układu współrzędnych, t. j. gdy $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, otrzymamy

$$(6) \quad \begin{aligned} M_l &= P_x[y \cos \gamma - z \cos \beta] + \\ &+ P_y[z \cos \alpha - x \cos \gamma] + P_z[x \cos \beta - y \cos \alpha]. \end{aligned}$$

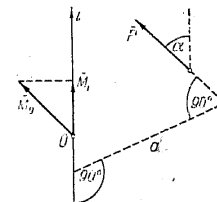
Rzuty M_x, M_y, M_z we wzorach (1) i (4) są momentami siły $\bar{P}$ względem osi równoległych do osi x, y, z i przechodzących przez O , zaś we wzorach (2) względem osi x, y, z .

Jeżeli przez d oznaczymy odległość osi l od siły $\bar{P}$ (ściślej: od położenia siły $\bar{P}$, t. j. prostej na której $\bar{P}$ leży), zaś przez α kąt między l a $\bar{P}$, otrzymamy (str. 18, wzór (III))

$$(7) \quad |M_l| = |\bar{P}| d \sin \alpha.$$

Jeżeli w szczególności $\bar{P} \perp l$, czyli $\alpha = \pi/2$, to

$$(8) \quad |M_l| = |\bar{P}| d.$$

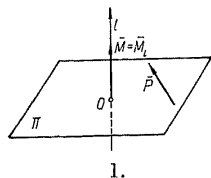


Znak momentu M_l otrzymujemy z reguły następującej:

$M_l > 0$, jeżeli siła $\vec{P}$ stara się obrócić ciało około osi l w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegarka (względem człowieka mającego stopy w dowolnym punkcie O osi l , głowę zaś zwróconą w kierunku osi l); w przeciwnym razie $M_l < 0$.

Przy pomocy powyższej reguły i wzoru (7) możemy wyznaczyć M_l , znając $|\vec{P}|$, d i a .

Jeżeli siła $\vec{P}$ i punkt O leżą w pewnej płaszczyźnie Π (rys. 1), to moment $\vec{M}$ siły $\vec{P}$ względem O jest prostopadły do płaszczyzny Π . Zatem $\vec{M}$ równa się wtedy momentowi siły $\vec{P}$ względem osi l , prostopadłej do Π i przechodzącej przez O :

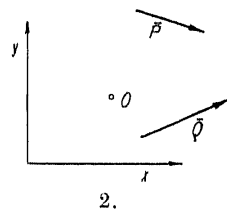


$$|\vec{M}| = |M_l|.$$

Jeżeli badamy np. układ sił leżących w płaszczyźnie xy , wówczas przyjmując, że O leży również w xy , mamy $M_x = 0$ i $M_y = 0$. Moment względem osi równoległej do z , t. j. M_z , nazywamy wówczas krótko momentem względem O i oznaczamy wprost przez M . Zatem

$$(8) \quad M = P_x(y - y_0) - P_y(x - x_0) \quad \text{lub} \quad M = P_x y - P_y x.$$

Przypuśćmy np., że wykreśliśmy osie x, y jak na rysunku 2. Należy zatem przyjąć oś z skierowaną pionowo w dół. Jeżeli więc chcemy wyznaczyć moment siły $\vec{P}$ względem jakiegoś punktu O , to należy pamiętać, że $M > 0$, gdy siła stara się obrócić kartkę papieru około O w kierunku wskazówek zegarka (t. j. tak jak na rys. 2); w przeciwnym razie będzie $M < 0$, jak dla siły $\vec{Q}$.



Mając dane ramię h , możemy więc ze wzoru (3) otrzymać M , wyznaczając znak w sposób wyżej podany.

Równowaga sił. Jeżeli ciało sztywne jest w spoczynku to mówimy, że jest w równowadze. O siłach zaś działających na ciało sztywne, pozostające w równowadze mówimy, że się równoważą (są w równowadze) lub że się znoszą.

Statyka zajmuje się badaniem warunków, jakim muszą czynić zadość siły, będące w równowadze.

Należy zwrócić uwagę na różnicę, jaka zachodzi między równowagą ciała a równowagą sił. Ciało jest w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy jest w spoczynku. Jeżeli ciało jest w równowadze, to i układ sił, działających na nie, jest w równowadze. Na odwrót jednak, jeżeli układ sił działających na ciało jest w równowadze, to nie wynika stąd jeszcze, by ciało musiało być w równowadze, ponieważ może się ono np. poruszać ruchem jednostajnym postępowym.

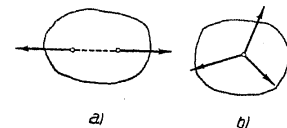
Warunki równowagi sił wyprowadzimy na razie niezależnie od zasad dynamiki, zakładając pewne hipotezy dość oczywiste. Okazemy później (w rozdz. IX), że warunki równowagi wynikają z t. zw. zasady prac przygotowanych.

§ 3. Hipotezy równowagi sił. Aby wyprowadzić warunki równowagi ciała sztywnego, przyjmujemy hipotezy następujące:

I. Do układu sił, działających na ciało sztywne znajdujące się w równowadze, możemy bez zachwiania równowagi dolożyć (lub z układu usunąć):

a) dwie siły równe co do wielkości, i działające wzdłuż tej samej prostej, lecz wprost przeciwnie skierowane;

b) kilka sił o wspólnym punkcie zaczepienia, których suma jest zerem.



II. Siły zerowe równoważą się; innymi słowy: jeżeli na ciało sztywne nie działają żadne siły, to ciało może pozostawać w równowadze.

Hipotezy powyższe można sprawdzić doświadczalnie. Wyprowadzimy z nich warunki konieczne i wystarczające dla równowagi sił. Na razie zajmujemy się pewnymi wnioskami, wypływającymi z przyjętych hipotez.

§ 4. Przekształcanie układów sił. Opierając się na określeniu przekształceń elementarnych (str. 29), możemy hipotezę I wypowiedzieć jak następuje:

I'. Jeżeli ciało sztywne jest w równowadze, to bez zachwiania równowagi możemy wykonać na układzie sił działających dowolne przekształcenia elementarne.

Zmiana punktu zaczepienia siły. Z twierdzenia 1), str. 29, wynika, że

¹⁰ punkt zaczepienia siły możemy obróć gdziekolwiek na prostej jej działania.

W przypadku równowagi działanie siły będzie więc określone, jeżeli podamy jej wielkość, kierunek, zwrot i położenie, zaś punkt zaczepienia siły jest rzeczą obojętną. Na mocy tw. ze str. 18.

wnosimy stąd, że działanie siły $\bar{P}$ będzie wyznaczone, jeżeli podamy jej rzuty i rzuty jej momentu $\bar{M}$ względem dowolnego punktu. Rzuty:

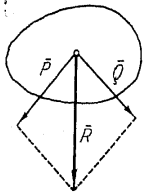
$$(1) \quad P_x, P_y, P_z, \quad M_x, M_y, M_z$$

określają więc działanie siły na ciało sztywne. Zauważmy, że ponieważ $\bar{M} \perp \bar{P}$, więc iloczyn skalarowy $\bar{M} \cdot \bar{P}$ jest zerem czyli

$$(2) \quad M_x P_x + M_y P_y + M_z P_z = 0.$$

Na ogół więc pięć spośród liczb (1) wystarcza do określenia siły; szóstą możemy otrzymać z równania (2).

Prawo składania i rozkładania sił. Z twierdzeń 2) i 3), str. 29, wnosimy, że:



2° kilka sił, zaczepionych w jednym punkcie, możemy zastąpić ich sumą, zaczepioną w tym samym punkcie.

3° każdą siłę możemy zastąpić kilkoma siłami o tym samym początku co siła dana i o sumie równej sile danej.

Twierdzenia powyższe noszą nazwę prawa składania i rozkładania sił.

Układy równoważne. Z hipotezy I i tw. 3, str. 31, wnosimy, że:

4° układ sił działających na ciało sztywne możemy zastąpić przez dowolny inny układ równoważny.

Innymi słowy: układy sił równoważne działają na ciało sztywne jednakowo; stąd znaczenie pojęcia równoważności układów. W twierdzeniu 4° zawarte są, jak łatwo widzieć, twierdzenia 1°, 2° i 3°.

Jak wiemy, dwa układy sił są równoważne, jeżeli mają równe sumy i równe momenty ogólne względem jednego punktu (str. 22). Na mocy tw. 4° działanie układu sił na ciało sztywne będzie więc określone, jeżeli podamy sumę $\bar{R}$ i moment ogólny $\bar{M}$ układu sił względem dowolnego punktu.

Niechaj na ciało sztywne działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ zaczepione w punktach $A_1, A_2, \dots$ o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$. Oznaczając przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{M}$ moment ogólny względem początku układu, otrzymamy ze wzoru (2), str. 236,

$$(3) \quad R_x = \sum P_{ix}, \quad R_y = \sum P_{iy}, \quad R_z = \sum P_{iz}$$

$$M_x = \sum (P_{iy} z_i - P_{iz} y_i), \quad M_y = \sum (P_{iz} x_i - P_{ix} z_i), \quad M_z = \sum (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i).$$

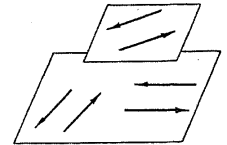
Działanie układu sił określone jest zatem przy pomocy sześciu liczb $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$.

Parametrem układu (str. 21) jest $K = \bar{R} \cdot \bar{M}$ czyli

$$(4) \quad K = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z.$$

Para sił. Układ złożony z dwóch sił równych co do wielkości, równoległych, lecz przeciwnie skierowanych nazywamy *parą sił* (str. 23). Moment pary nie zależy od wyboru punktu, względem którego moment wyznaczamy (str. 23). Ponieważ suma sił pary jest zerem, więc dwie pary są równoważne, jeżeli mają równe momenty. Zatem działanie pary sił na ciało sztywne jest określone przez podanie jej momentu.

Para sił stara się ciało obrócić. Działanie pary nie ulegnie zmianie, jeżeli dowolnie ją przesuniemy i skreścimy w jej płaszczyźnie (nie zmieniając zwrotu momentu). Parę możemy również dowolnie przesuwac w przestrzeni, byleby tylko w każdym położeniu pozostawała w płaszczyźnie równoległej i zwroty momentu były zgodne.



Para o momencie równym zeru równoważna jest wektorowi zerowemu. Parę taką nazywamy także *parą zerową*.

Redukcja układu sił. Twierdzenia dotyczące redukcji układów § 16, str. 24, pozwalają wyznaczyć najprostszy układ sił równoważny danemu (t. j. najprostszy układ sił, przez który możemy zastąpić układ dany). W szczególności, twierdzenie o redukcji możemy wypowiedzieć jak następuje:

Każdy układ sił działających na ciało sztywne możemy zastąpić:

- a) bądź przez jedną siłę równą sumie układu, zaczepioną w dowolnym punkcie O i parę sił o momencie równym momentowi układu względem O ,
- b) bądź przez dwie siły, z których jedna zaczepiona jest w dowolnie obranym punkcie.

W podobny sposób można wypowiedzieć twierdzenia podane na str. 25 i 26.

Niechaj na ciało sztywne działa siła $\bar{P}$ o początku w punkcie A . Obierzmy dowolny punkt O . Z twierdzenia o redukcji wynika (jeżeli za układ przyjmiemy siłę $\bar{P}$), że siłę $\bar{P}$ możemy zastąpić przez siłę jej równą, zaczepioną w O , i przez parę sił o momencie równym momentowi siły $\bar{P}$ względem O .

Układ płaski sił. Jeżeli siły układu leżą w jednej płaszczyźnie, to układ ich nazywamy *układem płaskim*. Na mocy tw. 3, str. 26, *układ płaski sił bądź ma wypadkową, bądź jest równoważny parze sił*.

Z tabelki podanej na str. 26 widzimy, że układ płaski ma wypadkową, gdy suma sił układu jest różna od zera lub gdy zarówno suma jak moment ogólny są równe zeru; jeżeli zaś suma jest zerem, a moment ogólny różny od zera, to układ jest równoważny parze.

Niechaj w płaszczyźnie xy dany będzie układ płaski sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$, zaczepionych w punktach $A_1, A_2, \dots$ o współrzędnych $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$

Rzuty sił P_{iz} na oś z są zerami, jak również współrzędne z_i punktów A_i . Zatem, oznaczając przez $\vec{R}$ sumę sił, a przez $\vec{M}$ moment ogólny względem początku układu, otrzymujemy ze wzorów (3), str. 240:

$$R_z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0.$$

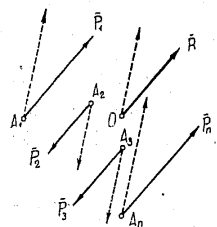
Działanie więc układu płaskiego sił wyznaczone jest przez trzy liczby: R_x, R_y i M_z .

Ze wzorów (3), str. 240, otrzymujemy też (pisząc M zamiast M_z):

$$(5) \quad R_x = \sum P_{ix}, \quad R_y = \sum P_{iy}, \quad M = \sum (P_{ix}y_i - P_{iy}x_i).$$

Układ równoległy sił. Z tw. 4, str. 26, wynika, że *układ równoległy sił ma wypadkową albo jest równoważny parze sił*.

Niech siły równoległe $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ mają początki w punktach $A_1, A_2, \dots$ o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$. Załóżmy, że suma sił $\vec{R}$ jest różna od zera. Zatem dany układ ma wypadkową.



Obierzmy zwrot dowolnej siły układu, np. zwrot siły $\vec{P}_1$, za dodatni. Oznaczmy dla $i=1, 2, \dots$ przez P_i liczbę, której bezwzględna wartość równa się $|\vec{P}_i|$, zaś znak jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy $\vec{P}_i$ ma zwrot dodatni (t. j. zgodny ze zwrotem siły $\vec{P}_1$) czy nie. Podobnie określamy R . Mamy $R = \sum P_i$.

Na str. 28 dowiedliśmy, że wypadkowa $\vec{R}$ przechodzi przez pewien punkt O , zwany *środkiem sił*. Współrzędne x_0, y_0, z_0 środka sił otrzymamy ze wzoru (4), str. 28, kładąc $a_i = P_i$:

$$(6) \quad x_0 = \sum P_i x_i / R, \quad y_0 = \sum P_i y_i / R, \quad z_0 = \sum P_i z_i / R.$$

Jeżeli siły obrócimy około ich punktów zaczepienia o ten sam kąt tak, że pozostaną nadal równoległe (jak np. wektory kreskowane na rysunku), to środek sił nie ulegnie zmianie. Wynika to ze wzorów (6), gdyż współrzędne x_0, y_0, z_0 zależą tylko od P_i, x_i, y_i i z_i , a nie zależą od kierunku sił. Nowa wypadkowa będzie więc również przechodziła przez O .

Jeżeli punkty zaczepienia sił leżą w jednej płaszczyźnie (lub na jednej prostej), to środek sił leży również na tej płaszczyźnie (lub na tej prostej).

Zakładając bowiem, że punkty zaczepienia leżą na płaszczyźnie Π i obierając tę płaszczyznę za płaszczyznę xy , otrzymamy $z_1 = z_2 = \dots = 0$; ze wzorów (6) dostaniemy więc $z_0 = 0$, co oznacza, że środek sił leży w płaszczyźnie Π .

Podobnie, jeżeli punkty zaczepienia leżą na jednej prostej l , to obierając ją za oś x , mamy $y_1 = y_2 = \dots = 0$ i $z_1 = z_2 = \dots = 0$, więc na mocy (6) $y_0 = 0$ i $z_0 = 0$; zatem środek sił leży na prostej l .

Niech na punkty materialne o masach $m_1, m_2, \dots$ działają siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ równoległe, zgodnie skierowane i proporcjonalne co do wielkości do mas poszczególnych punktów. Kładąc $P_1 = |\vec{P}_1|, P_2 = |\vec{P}_2|, \dots$, otrzymujemy:

$$(7) \quad P_1 = km_1, \quad P_2 = km_2, \dots \quad R = P_1 + P_2 + \dots = km,$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności, zaś $m = m_1 + m_2 + \dots$. Ze wzorów (6) i (7) dostaniemy po podstawieniu:

$$x_0 = \sum m_i x_i / m, \quad y_0 = \sum m_i y_i / m, \quad z_0 = \sum m_i z_i / m.$$

Porównując te równości ze wzorami (I), str. 154, widzimy, że środek sił jest środkiem masy danego układu punktów materialnych.

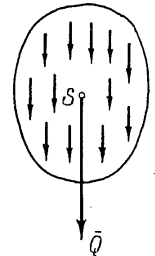
A więc: *środek masy układu punktów materialnych jest środkiem działających na te punkty sił, zgodnie skierowanych, równoległych, i proporcjonalnych co do wielkości do mas tych punktów*.

Siły ciężkości. Niech ciało sztywne znajduje się w polu siły ciężkości. Uważając ciało za układ punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \dots$, możemy przyjąć, że ciężary poszczególnych punktów są siłami równoległymi, skierowanymi zgodnie (pionowo w dół). Ciężary mają zatem wypadkową.

Wielkości ciężarów poszczególnych punktów wynoszą $Q_1 = m_1 g, Q_2 = m_2 g, \dots$ (gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie). Zatem wielkości ciężarów są proporcjonalne do mas punktów. Na mocy więc poprzedniego twierdzenia, środkiem sił ciężkości jest środek masy ciała. Wielkość wypadkowej jest

$$Q = m_1 g + m_2 g + \dots = (m_1 + m_2 + \dots) g = mg,$$

gdzie m oznacza masę ciała.



A więc: wypadkowa sił ciężkości przechodzi w każdym położeniu ciała przez środek ciężkości ciała. Ciężar ciała (t. j. wypadkowa sił ciężkości, działających na poszczególne jego punkty) wynosi

$$(8) \quad Q = mg,$$

gdzie m oznacza masę ciała, a g przyspieszenie ziemskie.

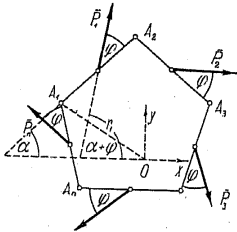
Opierając się na powyższym twierdzeniu możemy działanie siły ciężkości zastąpić jedną siłą, zaczepioną w środku ciężkości ciała.

Układy par. Układ złożony z kilku par ma sumę zero. Z tabelki na str. 26 wynika, że układ taki równoważny jest parze lub wektorowi zerowemu (t. j. parze zerowej). Niech $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots$ oznaczają momenty poszczególnych par. Wówczas moment ogólny będzie $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots$. Z twierdzenia o redukcji (str. 24) otrzymujemy więc twierdzenie następujące:

Układ złożony z kilku par równoważny jest jednej parze o momencie równym momentowi ogólnemu układu.

Zauważmy, że para sił (o momencie różnym od zera) nie może być równoważna jednej sile. Ze względu bowiem na to, że suma sił pary jest zerem, siła ta musiałaby być zerem, a jej moment różny od zera, co jest niemożliwe.

Przykład 1. W środkach boków wielokąta płaskiego $A_1, A_2, \dots, A_n$ zaczepione są siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$, leżące w płaszczyźnie wielokąta, tworzące z jego bokami $\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \dots, \vec{A_nA_1}$ kąt φ , skierowane na zewnątrz i proporcjonalne co do wielkości do boków wielokąta.



Łatwo zauważyć, że suma sił jest zerem. Tworząc bowiem sumę $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$, otrzymamy wielokąt podobny do danego, lecz skrócony względem niego o kąt φ .

Układ sił jest więc równoważny parze albo zeru.

Obierzmy dowolny układ współrzędnych $O(x, y)$ i oznaczmy przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ współrzędne punktów $A_1, A_2, \dots$. Punkt zaczepienia siły $\vec{P}_1$ ma współrzędne $(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2$. Zatem moment siły $\vec{P}_1$ względem O wynosi ((8), str. 238)

$$(9) \quad M_1 = P_{1x}(y_1 + y_2)/2 - P_{1y}(x_1 + x_2)/2.$$

Według założenia jest

$$(10) \quad |\vec{P}_1| = \lambda d_1,$$

gdzie $d_1 = A_1A_2$, zaś λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli $\vec{A_1A_2}$ tworzy z osią x kąt α , to siła $\vec{P}_1$ tworzy z osią x kąt $\alpha + \varphi$. Zatem:

$$P_{1x} = |\vec{P}_1| \cos(\alpha + \varphi), \quad P_{1y} = |\vec{P}_1| \sin(\alpha + \varphi).$$

Na mocy więc (10) jest $P_{1x} = \lambda d_1 [\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi]$. Lecz $d_1 \cos \alpha = x_2 - x_1$ i $d_1 \sin \alpha = y_2 - y_1$, więc

$$P_{1x} = \lambda [(x_2 - x_1) \cos \varphi - (y_2 - y_1) \sin \varphi].$$

Podobnie

$$P_{1y} = \lambda [(y_2 - y_1) \cos \varphi + (x_2 - x_1) \sin \varphi].$$

Wstawiając w (9), otrzymamy

$$(11) \quad M_1 = \frac{1}{2} \lambda [2(y_1 x_2 - y_2 x_1) \cos \varphi + (y_1^2 + x_1^2 - y_2^2 - x_2^2) \sin \varphi].$$

Kładąc $OA_1 = r_1, OA_2 = r_2, \dots$ i oznaczając przez $p_1, p_2, \dots$ pola trójkątów $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots$, dostaniemy $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, r_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \dots, p_1 = \frac{1}{2} (y_1 x_2 - y_2 x_1)$ i t. d. Zatem na mocy (11)

$$(12) \quad M_1 = \frac{1}{2} \lambda [4p_1 \cos \varphi + (r_1^2 - r_2^2) \sin \varphi].$$

Podobne wyrażenia otrzymamy na momenty pozostałych sił.

Ogólny moment sił względem O wynosi $M = M_1 + M_2 + \dots$. Więc w myśl (12)

$$M = \frac{1}{2} \lambda [4(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \cos \varphi + (r_1^2 - r_2^2 + r_2^2 - r_3^2 + \dots + r_n^2 - r_1^2) \sin \varphi].$$

Ponieważ $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ jest polem wielokąta $A_1A_2 \dots A_n$, więc

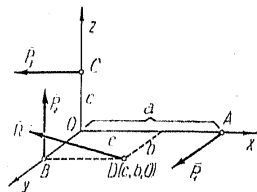
$$(13) \quad M = 2\lambda p \cos \varphi.$$

Moment ogólny jest zatem proporcjonalny do pola wielokąta i do cosinusa kąta φ .

W szczególności, gdy siły są prostopadłe do boków wielokąta, to $\varphi = \pi/2$ i $\cos \varphi = 0$, skąd na mocy (13) $M = 0$, czyli siły tworzą układ równoważny zeru.

Gdy zaś siły są skierowane wzdłuż boków (t. j. gdy $\varphi = 0$), mamy na mocy (13) $M = 2\lambda p$, więc moment jest wówczas proporcjonalny do pola wielokąta.

Przykład 2. W punktach $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ i $C(0, 0, c)$ na osiach układu współrzędnych (x, y, z) zaczepione są siły $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ i $\vec{P}_3$, równoległe do osi układu, równe co do wielkości i mające zwroty jak na rysunku. Jaki zachodzi związek między współrzędnymi a , b i c , jeżeli układ sił ma wypadkową?



Położmy $P = |\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{P}_3|$. Suma sił $\vec{R}$ ma zatem rzuty

$$(14) \quad R_x = -P, \quad R_y = P, \quad R_z = P.$$

Obliczmy moment ogólny $\vec{M}$ względem O . Moment sił $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_3$ względem osi x jest zerem; moment siły $\vec{P}_2$ względem osi x wynosi $-Pb$. Zatem $M_x = -Pb$; podobnie $M_y = Pc$ i $M_z = -Pa$. Parametr układu wynosi $K = \vec{R} \cdot \vec{M} = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z$, więc

$$K = P^2(b + c - a).$$

Jeżeli układ ma wypadkową, to $K = 0$ (str. 26). Zatem

$$(15) \quad b + c - a = 0.$$

Równanie (15) stanowi warunek dostateczny i, jak łatwo widać z tabelki na str. 26, również warunek konieczny na to, by układ miał wypadkową, gdyż $\vec{R} \neq 0$.

Za punkt zaczepienia wypadkowej możemy przyjąć punkt $D(x, y, z)$, względem którego moment ogólny jest zerem.

Oznaczmy przez $\vec{M}'$ moment ogólny względem D . Mamy:

$$M'_x = -Pz - P(b - y), \quad M'_y = -Px + P(c - z), \quad M'_z = -P(a - x) + Py.$$

Zakładając, że moment względem D jest zerem, dostaniemy:

$$y - z = b, \quad x + z = c, \quad x + y = a.$$

Z uwagi na (15) równania te są od siebie zależne. Dwa z nich są równaniami prostej, na której leży wypadkowa. Kładąc np. $z = 0$, otrzymamy $x = c$ i $y = b$. A więc za punkt zaczepienia wypadkowej możemy przyjąć punkt $D(c, b, 0)$.

Przykład 3. W punktach A i B zaczepione są siły równoległe $\vec{P}$ i $\vec{Q}$, przyczem $\vec{P} + \vec{Q} \neq 0$. Wyznaczyć środek sił.

Środek sił leży na prostej AB (str. 243). Obierzmy ją za oś x , przyjmując punkt A za początek osi x i nadając jej zwrot taki, by punkt B leżał na jej części dodatniej. Położmy $P = |\vec{P}|$ i oznaczmy

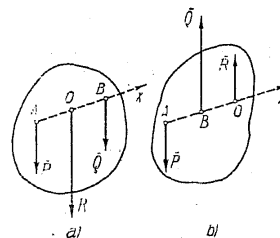
przez Q liczbę, której wartość bezwzględna równa się $|\vec{Q}|$, znak zaś jest $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy $\vec{Q}$ ma zwrot zgodny z siłą $\vec{P}$, czy przeciwny. Kładąc $AB = d$ i oznaczając przez x_0 współrzędną środka sił O , dostaniemy ze wzoru (6), str. 242,

$$x_0 = Qd/R, \quad \text{gdzie} \quad R = P + Q.$$

Jeżeli siły $\vec{P}$ i $\vec{Q}$ mają zwroty zgodne, to $Q > 0$, a zatem $0 < Q/R < 1$, skąd $0 < x_0 < d$. Środek sił znajduje się wówczas między punktami A i B .

Jeżeli zaś siły $\vec{P}$ i $\vec{Q}$ mają zwroty przeciwne i np. $|\vec{P}| < |\vec{Q}|$, to $Q < 0$ i $R < 0$, skąd $x_0 > 0$. Ponadto $|R| < |Q|$, zatem $x_0 > d$. Środek sił leży więc wówczas poza punktem B .

Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach jest $AO/BO = |\vec{Q}|/|\vec{P}|$.



A więc: *środek dwóch sił równoległych (o sumie $\neq 0$) znajduje się na prostej łączącej punkty zaczepienia tych sił.*

Jeżeli siły skierowane są zgodnie, to środek ich leży między punktami zaczepienia, w przeciwnym razie leży on poza punktem zaczepienia tej siły, której wartość bezwzględna jest większa.

Odległości środka sił od punktów zaczepienia są w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wielkości tych sił.

Przykład 4. Na pręt sztywny AB działają siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ o początkach w $A_1, A_2, \dots$ oraz siły $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots$ o początkach w $B_1, B_2, \dots$. Wszystkie siły są do siebie równoległe i prostopadłe do pręta, przyczem siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ mają zwrot przeciwny niż siły $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots$.

Niechaj $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \dots$. Oznaczmy przez $P_1, P_2, \dots$ i $Q_1, Q_2, \dots$ bezwzględne wartości sił, przez $a_1, a_2, \dots$ i $b_1, b_2, \dots$ odpowiednio długości odcinków $AA_1, AA_2, \dots$ i $AB_1, AB_2, \dots$. Przyjmijmy zwrot sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ za dodatni. Położmy

$$(16) \quad R = P_1 + P_2 + \dots - Q_1 - Q_2 - \dots$$

Oczywiście $|R| = |\vec{R}|$. Gdy $R > 0$, suma $\vec{R}$ ma zwrot zgodny z siłami $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$. Gdy zaś $R < 0$, to $\vec{R}$ ma zwrot zgodny z siłami $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots$.

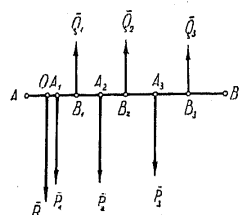
Obliczmy moment ogólny M sił względem A . Oznaczając przez $M_1, M_2, \dots$ i $M'_1, M'_2, \dots$ momenty sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ i $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots$ względem A , mamy (według umowy co do znaku momentu, przyjętej na str. 238):

$$M_1 = P_1 a_1, \quad M_2 = P_2 a_2, \quad \dots, \quad M'_1 = -Q_1 b_1, \quad M'_2 = -Q_2 b_2, \quad \dots$$

Zatem

$$(17) \quad M = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots - Q_1 b_1 - Q_2 b_2 - \dots$$

Założmy, że $\bar{R}=0$. Układ sił równoważny jest wówczas parze o momencie M według wzoru (17).



Gdy $M > 0$, to para będzie starała się obrócić pręt w kierunku wskazówek zegara, gdy zaś $M < 0$ — w kierunku przeciwnym. Gdy wreszcie $M = 0$, układ równoważny będzie zeru.

Założmy teraz, że $\bar{R} \neq 0$. Układ ma zatem wypadkową.

Niechaj O będzie początkiem wypadkowej $\bar{R}$, znajdującym się na prostej AB . Połóżmy $d = \pm AO$, przyjmując znak $+$, gdy punkt O jest po tej samej stronie punktu A , co początki sił, zaś znak $-$ w przypadku przeciwnym. Jak łatwo sprawdzić, moment wypadkowej względem O wynosi przy tym znakowaniu Rd . Ponieważ moment wypadkowej równa się momentowi ogólnemu, więc dostaniemy z (17)

$$d = \frac{1}{R} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots - Q_1 b_1 - Q_2 b_2 - \dots).$$

§5. Warunki równowagi sił. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie I. *Na to, by układ sił działających na ciało sztywne był w równowadze, potrzeba i wystarcza, by suma sił i moment ogólny były zerem, czyli by układ sił był równoważny zeru.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że warunek jest konieczny. Przyjmijmy, że ciało sztywne jest układem sztywnym punktów materialnych $A_1, A_2, \dots$ i że jest w równowadze pod działaniem danego układu sił. Weźmy pod uwagę dowolny punkt A_i . Oznaczmy przez $\bar{P}_i$ sumę sił zewnętrznych, a przez $\bar{W}_i$ sumę sił wewnętrznych, zaczepionych w A_i . Ponieważ punkt A_i jest w równowadze (gdyż cały układ sztywny jest w równowadze), więc $\bar{P}_i + \bar{W}_i = 0$. Zatem

$$(1) \quad \Sigma(\bar{P}_i + \bar{W}_i) = 0,$$

gdzie suma Σ rozciągnięta jest na wszystkie punkty A_i danego układu sztywnego.

Z prawa akcji i reakcji wynika, że suma sił, z jakimi działają na siebie dwa punkty, jest zerem. Ponieważ wszystkie siły wewnętrzne możemy ułożyć w pary, z jakimi działają na siebie dwa punkty, więc suma sił wewnętrznych jest zerem czyli $\Sigma \bar{W}_i = 0$, skąd na mocy (1)

$$(2) \quad \Sigma \bar{P}_i = 0.$$

Wynika stąd, że suma sił zewnętrznych, t. j. sił działających na ciało sztywne w równowadze, jest zerem.

Obierzmy teraz dowolny punkt O . Ponieważ siły $\bar{P}_i$ i $\bar{W}_i$ mają wspólny początek A_i , a ponadto $\bar{P}_i + \bar{W}_i = 0$, więc (str. 17) $\text{Mom}_O \bar{P}_i + \text{Mom}_O \bar{W}_i = 0$, skąd

$$(3) \quad \Sigma(\text{Mom}_O \bar{P}_i + \text{Mom}_O \bar{W}_i) = 0.$$

Moment ogólny sił wewnętrznych, z jakimi dwa punkty działają na siebie, jest — jak łatwo stwierdzić — zerem. Zatem moment ogólny wszystkich sił wewnętrznych jest zerem, czyli $\Sigma \text{Mom}_O \bar{W}_i = 0$, skąd na mocy (3)

$$(4) \quad \Sigma \text{Mom}_O \bar{P}_i = 0.$$

Dowiedliśmy więc, że zarówno suma jak i moment ogólny sił działających na ciało sztywne jest zerem. Konieczność warunku jest tym samym udowodniona.

Założmy teraz, że dany układ sił jest równoważny zeru. Ponieważ układ równoważny zeru jest równoważny sile zerowej, więc na mocy hipotezy II (str. 239) jest on w równowadze. Warunek jest więc zarazem wystarczającym, c. b. d. d.

Z tw. I wynika, że jeżeli układ sił działających na ciało sztywne nie jest równoważny zeru, to ciało nie może być w równowadze. W szczególności nie może więc pozostawać w równowadze ciało sztywne pod działaniem układu sił złożonego

- bądź z jednej siły różnej od zera,
- bądź z jednej pary sił o momencie różnym od zera,
- bądź z jednej siły różnej od zera i jednej pary o momencie różnym od zera.

Jak wiemy (str. 23), układ sił jest równoważny zeru, jeżeli momenty ogólne względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej są zerami. Opierając się na tw. I, otrzymujemy stąd następujące

Twierdzenie II. Na to, aby układ sił działających na ciało sztywne był w równowadze, potrzeba i wystarcza, by momenty układu względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej były równe zero.

W zastosowaniach korzystamy często z następującego twierdzenia:

Twierdzenie III. Jeżeli układ złożony z trzech sił jest w równowadze, to siły te leżą w jednej płaszczyźnie i bądź są równoległe, bądź ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie.

Tw. III wynika z twierdzenia rozdz. I, § 14 (str. 23), w którego dowodzie wykazano, że wektory leżą w jednej płaszczyźnie.

Postać analityczna warunków równowagi. Obierzmy dowolny układ współrzędnych $O(x, y, z)$. Niechaj na ciało sztywne działają siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ zaczepione w punktach $A_1, A_2, \dots$ o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$. Oznaczmy przez $\vec{R}$ sumę, a przez $\vec{M}$ moment ogólny układu względem O . Na mocy tw. I (str. 248) równania:

$$(5) \quad \vec{R} = 0, \quad \vec{M} = 0$$

stanowią warunek konieczny i wystarczający równowagi. Tworząc rzuty na osie układu, otrzymujemy z (5) i ze wzorów (3), str. 240:

$$(I) \quad \sum P_{ix} = 0, \quad \sum P_{iy} = 0, \quad \sum P_{iz} = 0,$$

$$(II) \quad \sum (P_{iy} z_i - P_{iz} y_i) = 0, \quad \sum (P_{iz} x_i - P_{ix} z_i) = 0, \quad \sum (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i) = 0.$$

Równania (I) noszą nazwę *warunku rzutów*, a równania (II) *warunku momentu*.

Równania (I) i (II) są postacią analityczną warunków równowagi układu sił. Z równań tych możemy na ogół wyznaczyć sześć niewiadomych.

Układ płaski sił. Warunki równowagi stosują się oczywiście także do układu płaskiego sił.

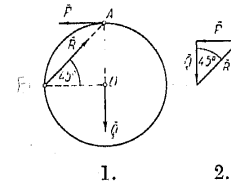
Niech siły leżą w płaszczyźnie xy . Z uwagi na to, że $P_{iz} = 0$ i $z_i = 0$, warunki równowagi (I) i (II) przyjmą postać:

$$(I') \quad \sum P_{ix} = 0, \quad \sum P_{iy} = 0,$$

$$(II') \quad \sum (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i) = 0.$$

W przypadku układu płaskiego otrzymujemy więc trzy równania. Możemy z nich na ogół wyznaczyć trzy niewiadome.

Przykład 1. Kula ciężka jest w równowadze pod działaniem trzech sił (rys. 1): ciężaru $\vec{Q}$ (zaczepionego w środku kuli O), siły poziomej $\vec{P}$ (zaczepionej w punkcie A , położonym na powierzchni kuli w końcu średnicy pionowej) i siły $\vec{R}$ (zaczepionej w punkcie B , położonym na powierzchni kuli w końcu średnicy poziomej). Dany jest ciężar $\vec{Q}$. Wyznaczyć siły $\vec{P}$ i $\vec{R}$.



Siły $\vec{P}$, $\vec{Q}$ i $\vec{R}$ są w równowadze, więc na mocy tw. III leżą w jednej płaszczyźnie i kierunki ich przecinają się w jednym punkcie, którym jest punkt A . Siła $\vec{R}$ ma więc kierunek prostej BA , która tworzy z poziomem kąt 45° . Ponieważ $\vec{Q} + \vec{P} + \vec{R} = 0$, więc znając siłę $\vec{Q}$ i kierunki sił $\vec{P}$ i $\vec{R}$, możemy utworzyć trójkąt sił (rys. 2). Z trójkąta tego otrzymujemy:

$$P = Q, \quad R = Q / \cos 45^\circ = \sqrt{2} Q,$$

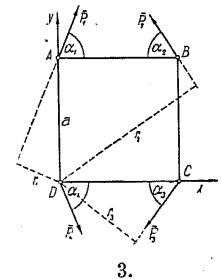
gdzie P , Q i R oznaczają wartości bezwzględne sił.

Przykład 2. W wierzchołkach kwadratu $ABCD$ o boku a zaczepione są cztery siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$, leżące w płaszczyźnie kwadratu i tworzące z jego bokami kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (rys. 3). Podać warunki równowagi.

Oznaczmy przez P_1, P_2, P_3, P_4 bezwzględne wartości sił. Obierzmy osie x i y wzdłuż boków kwadratu. Tworząc rzuty sił na osie x i y , dostaniemy w przypadku równowagi (przy zwrotach sił jak na rys. 3):

$$(6) \quad P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \cos \alpha_2 - P_3 \cos \alpha_3 + P_4 \cos \alpha_4 = 0,$$

$$(7) \quad P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 - P_3 \sin \alpha_3 - P_4 \sin \alpha_4 = 0.$$



Oznaczając przez r_1, r_2, r_3, r_4 ramiona sił względem wierzchołka D , otrzymamy:

$$r_1 = a \cos \alpha_1, \quad r_2 = \sqrt{2} a \sin (\alpha_2 + 45^\circ), \quad r_3 = a \sin \alpha_3.$$

Ponadto $r_4 = 0$. Ponieważ w przypadku równowagi moment ogólny względem D jest zerem, więc (przyjmując znak momentu podług reguły podanej na str. 238) dostaniemy po podzieleniu przez a

$$(8) \quad P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \sqrt{2} \sin (\alpha_2 + 45^\circ) + P_3 \sin \alpha_3 = 0.$$

Równania (6), (7) i (8) stanowią warunek równowagi konieczny i wystarczający.

Przykład 3. Na pręt AB , leżący w płaszczyźnie poziomej xy , działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$, leżące w tejże płaszczyźnie i zaczepione w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$. Podać warunki, jakim muszą czynić zadość siły, aby pręt był w równowadze w każdym położeniu na płaszczyźnie xy przy założeniu, że siły nie zmieniają swych wielkości, kierunków, zwrotów ani punktów zaczepienia (na przecie).

Wzemy pod uwagę dowolne położenie pręta AB w płaszczyźnie xy . Oznaczmy przez x_0, y_0 współrzędne punktu A , przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ współrzędne punktów $A_1, A_2, \dots$ i przez α kąt, jaki pręt AB tworzy z osią x -ów. Położmy: $d_1 = AA_1, d_2 = AA_2, \dots, d_n = AA_n$. Mamy:

$$(9) \quad x_i = x_0 + d_i \cos \alpha, \quad y_i = y_0 + d_i \sin \alpha \quad \text{dla } i=1, 2, \dots, n.$$

Z warunków równowagi (I') i (II'), str. 250, otrzymujemy:

$$(10) \quad \Sigma P_{ix} = 0, \quad \Sigma P_{iy} = 0,$$

$$(11) \quad \Sigma (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i) = \Sigma [P_{ix} (y_0 + d_i \sin \alpha) - P_{iy} (x_0 + d_i \cos \alpha)] = 0.$$

Warunek (11) możemy napisać w postaci

$$(12) \quad y_0 \Sigma P_{ix} - x_0 \Sigma P_{iy} + \sin \alpha \Sigma P_{ix} d_i - \cos \alpha \Sigma P_{iy} d_i = 0,$$

skąd na mocy (10)

$$(13) \quad \sin \alpha \Sigma P_{ix} d_i - \cos \alpha \Sigma P_{iy} d_i = 0.$$

Ponieważ związek (13) ma zachodzić dla każdego kąta α , więc dla $\alpha = \pi/2$, a następnie dla $\alpha = 0$ dostajemy:

$$(14) \quad \Sigma P_{ix} d_i = 0, \quad \Sigma P_{iy} d_i = 0.$$

Równania (10) i (14) są warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby pręt był w równowadze w każdym swym położeniu na płaszczyźnie.

Jeżeli bowiem zachodzą warunki (10) i (14), to łatwo widzieć, że zachodzi też warunek (13), a zatem na mocy (10) również i warunki (12) i (11).

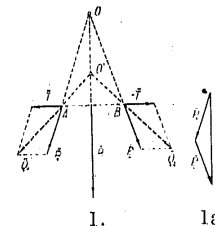
Warunki zaś (10) i (11) są, jak widzieliśmy, konieczne i wystarczające dla równowagi na mocy (I') i (II').

§ 6. Grafostatyka. Wielobok sznurowy. Zadania, z jakimi spotykamy się w statyce, prowadzą często do długich i żmudnych rachunków. Istnieją jednak metody graficzne (t. j. rysunkowe), pozwalające otrzymać w wielu przypadkach rozwiązania przybliżone wprawdzie, lecz wystarczająco dokładne dla zastosowań. Metody te mają wielkie znaczenie w technice, gdyż prowadzą do celu szybciej, z pominięciem zawiłych obliczeń.

Ta część statyki teoretycznej, która zajmuje się metodami graficznymi, nosi nazwę *grafostatyki*.

Poznamy tu tylko niektóre metody graficzne, jak np. wyznaczanie graficzne (przy pomocy wieloboku sznurowego) wypadkowej układu płaskiego sił, oraz pewne ich zastosowania. Później (w § 16) poznamy jeszcze metody graficzne, służące do wyznaczania napięć w prętach kratownicy.

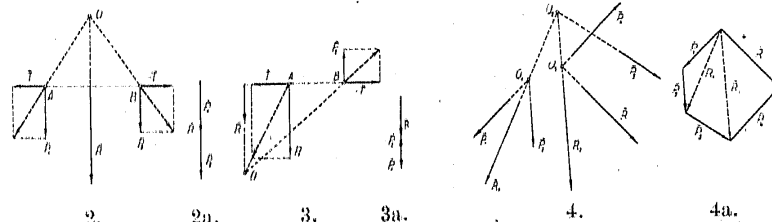
Składanie sił. Mając dwie siły $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$, których kierunki przecinają się w punkcie O , wyznaczamy obok sumę $\bar{R}$ (rys. 1a), a następnie rysujemy wypadkową przez punkt O (rys. 1).



Jeżeli punkt O leży poza granicą rysunku, możemy postąpić jak następuje: dodajemy dwie siły $\bar{T}$ i $-\bar{T}$, zaczepione w punktach A i B (t. j. w początkach sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$) i działające wzdłuż prostej AB . Układ $\bar{T}, -\bar{T}, \bar{P}_1, \bar{P}_2$ jest oczywiście równoważny układowi $\bar{P}_1, \bar{P}_2$, gdyż siły $\bar{T}$ i $-\bar{T}$ znoszą się nawzajem, a zatem wypadkowa nowego układu czterech sił jest ta sama co poprzednio.

Siły $\bar{T}$ i $\bar{P}_1$ zastępujemy siłą $\bar{Q}_1 = \bar{T} + \bar{P}_1$ o początku w A ; podobnie siły $-\bar{T}$ i $\bar{P}_2$ zastępujemy siłą $\bar{Q}_2 = -\bar{T} + \bar{P}_2$ o początku w B . Wypadkowa $\bar{R}$ przechodzi przez punkt przecięcia O' sił $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$.

Konstrukcję powyższą można również zastosować do przypadku dwóch sił równoległych, nie tworzących pary (rys. 2, 2a i 3, 3a).



W tenże sposób można otrzymać wypadkową (lub parę wypadkową) układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ (str. 253, rys. 4 i 4a). Tworzymy najpierw wypadkową $\bar{R}_1$ dwóch z tych sił (np. sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$) i otrzymujemy układ zawierający już tylko $n-1$ sił.

Szybciej prowadzi do celu metoda, którą poznamy obecnie.

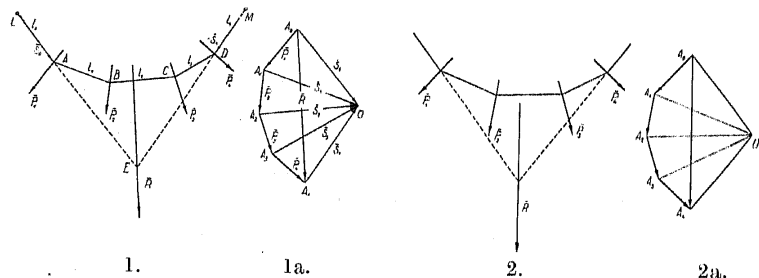
Wielobok sznurowy. Przypuśćmy, że mamy znaleźć wypadkową układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ (rys. 1).

Tworzymy najpierw sumę $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4$. Otrzymany wielobok nazywamy *wielobokiem sił*¹⁾.

Oznaczmy (w wieloboku sił) przez A_0 początek siły $\bar{P}_1$, zaś przez A_1, A_2, A_3, A_4 końce sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Obierzmy teraz dowolny punkt O poza wielobokiem sił. Punkt ten nazywamy *biegunem*.

Łączymy biegun O z punktami $A_0, A_1, \dots, A_4$. Z dowolnego punktu A , położonego na kierunku siły $\bar{P}_1$, kreślimy proste l_0 i l_1 , równoległe odpowiednio do prostych OA_0 i OA_1 . Prosta l_1 przedłużamy aż do punktu B jej przecięcia z kierunkiem siły $\bar{P}_2$. Prosta l_1 przetnie kierunek siły $\bar{P}_2$, gdyż l_1 jest równoległa do OA_1 , zaś OA_1 nie jest równoległa do $\bar{P}_2$ (rys. 1a).

Z punktu B kreślimy prostą $l_2 \parallel OA_2$ aż do punktu jej przecięcia C z kierunkiem siły $\bar{P}_3$. Z punktu C kreślimy prostą $l_3 \parallel OA_3$ aż do punktu jej przecięcia D z kierunkiem siły $\bar{P}_4$. Z punktu D kreślimy prostą $l_4 \parallel OA_4$.



Wyznaczamy teraz punkt przecięcia E prostych l_0 i l_4 . Przez punkt E przechodzi wypadkowa $\bar{R}$. Ponieważ $\bar{R}$ znamy z wieloboku sił, więc wypadkową tę wykreślić.

¹⁾ Na rys. 1, 2 i dalszych podane są tylko położenia sił, zaś wielkości sił zaznaczone są w wielobokach sił (rys. 1a, 2a i t.d.).

Przejdziemy teraz do uzasadnienia powyższej konstrukcji.

Oznaczmy wektory $A_0O, A_1O, \dots, A_4O$ odpowiednio przez $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_4$. Z wieloboku sił (str. 254, rys. 1a) otrzymujemy:

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{P}_1 + \bar{S}_1 + (-\bar{S}_0) &= 0, & \bar{P}_2 + \bar{S}_2 + (-\bar{S}_1) &= 0, \\ \bar{P}_3 + \bar{S}_3 + (-\bar{S}_2) &= 0, & \bar{P}_4 + \bar{S}_4 + (-\bar{S}_3) &= 0. \end{aligned}$$

Dodajmy do układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_0$, leżące na prostej l_0 , siły $\bar{S}_1$ i $-\bar{S}_1$, leżące na l_1 i t.d., wreszcie siły $\bar{S}_4$ i $-\bar{S}_4$, leżące na l_4 . Dodany układ jest oczywiście równoważny zeru, gdyż siły $\bar{S}_0, -\bar{S}_0, \bar{S}_1, -\bar{S}_1$ i t.d. znoszą się parami. Wypadkowa rozszerzonego układu jest więc ta sama co poprzednio.

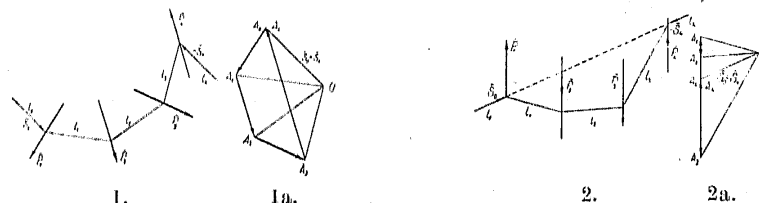
Na mocy (1) siły $\bar{P}_1, \bar{S}_1$ i $-\bar{S}_0$ znoszą się, gdyż suma ich równa się zeru, a kierunki ich przecinają się w A . Siły te możemy więc usunąć. Podobnie możemy usunąć siły $\bar{P}_2, \bar{S}_2$ i $-\bar{S}_1$, następnie, $\bar{P}_3, \bar{S}_3$ i $-\bar{S}_2$ i t.d. w końcu siły $\bar{P}_4, \bar{S}_4$ i $-\bar{S}_3$. Zostaną siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$, które tworzą zatem układ równoważny danemu. Przez punkt przecięcia E kierunków sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$ (t. j. prostych l_0, l_4) przechodzi więc wypadkowa $\bar{R}$, c. b. d. d.

Odcinki l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 tworzą t. zw. *wielobok sznurowy*; l_0 i l_4 nazywamy jego *bokami skrajnymi*.

A więc: *wypadkowa przechodzi przez punkt przecięcia skrajnych boków wieloboku sznurowego*.

Nazwa wieloboku sznurowego pochodzi stąd, że nie (sznur) nierozciągliwa i nieważka, utwierdzona w punktach L i M , położonych na prostych l_0 i l_4 w kierunkach $-\bar{S}_0$ i $\bar{S}_4$ (zresztą dowolnych), przyjmująca położenie wieloboku $LABCDM$, będzie w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$, zaczepionych odpowiednio w punktach A, B, C, D .

W praktyce opuszczamy oznaczenia zbędne i wykres przedstawia się jak na rys. 2 i 2a str. 254 oraz jak na rysunkach str. niniejszej.



Na str. 255 rys. 1 przedstawia układ sił, którego suma jest zerem. Mówimy wtedy, że *wielobok sił zamyka się* (rys. 1a).

Kreśląc zaś wielobok sznurowy przekonamy się, że skrajne jego boki nie przecinają się (są równoległe). Mówimy wtedy, że *wielobok sznurowy nie zamyka się*.

Układ sił równoważny jest w tym przypadku układowi sił $\vec{S}_0$ i $-\vec{S}_4$, które, jak widać z wieloboku sił, tworzą parę. Układ jest tedy równoważny parze sił $\vec{S}_0$ i $-\vec{S}_4$ leżących na bokach skrajnych wieloboku sznurowego.

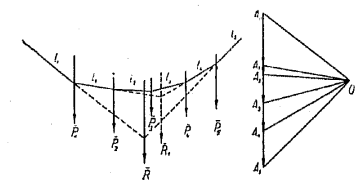
A więc: jeżeli wielobok sił zamyka się, zaś wielobok sznurowy nie zamyka się, to układ jest równoważny parze sił.

Na rys. 2 str. 255 widzimy układ sił, dla którego wielobok sił (rys. 2a) się zamyka, a boki skrajne wieloboku sznurowego leżą na jednej prostej. Mówimy wtedy, że *wielobok sznurowy zamyka się*.

Układ sił równoważny jest w tym przypadku układowi sił $\vec{S}_0$ i $-\vec{S}_4$, leżących na skrajnych bokach wieloboku sznurowego, a więc na jednej linii prostej. Ponieważ (jak widać z wieloboku sił) $\vec{S}_0 = \vec{S}_4$, więc siły $\vec{S}_0$ i $-\vec{S}_4$ znoszą się; dany układ jest tedy równoważny zeru.

A więc: jeżeli wielobok sił i wielobok sznurowy zamykają się, to układ sił jest równoważny zeru.

Wypadkowa części układu. Mając wielobok sznurowy pewnego układu sił, możemy łatwo wyznaczyć wypadkową dowolnej części tego układu, złożonej z sił występujących po sobie w wieloboku sił.



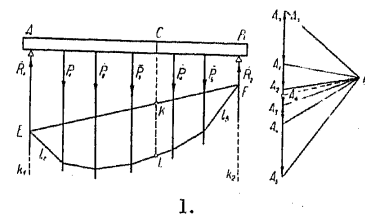
Niech dany będzie np. układ sił równoległych $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5$. Niech wyznaczona będzie wypadkowa $\vec{R}$ całego układu i wypadkowa $\vec{R}_1$ sił $\vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$. Z rysunku obok widać, że wielobok sznurowy dla układu $\vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$

jest częścią wieloboku sznurowego całego układu.

§ 7. Niektóre zastosowania wieloboku sznurowego.

Wyznaczanie reakcji w punktach podparcia belki. Dany jest układ sił równoległych $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_5$. Wyznaczyć dwie siły $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ równoległe do poprzednich i tworzące wraz z nimi układ równoważny zeru, przy czym dane są proste k_1 i k_2 , na których siły $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$ mają leżeć.

Z zadaniem tym spotykamy się w przypadku belki sztywnej poziomej, podpartej w punktach A i B i obciążonej siłami pionowymi $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_5$ (rys. 1). Jeżeli nie ma tarcia, to w punktach A i B występują reakcje pionowe, równoważące się z siłami $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_5$ (str. 267).

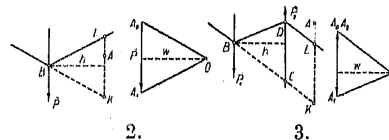


Aby wyznaczyć siły $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$, kreślimy wielobok sznurowy dla danego układu sił w porządku $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_5, \vec{R}_2, \vec{R}_1$. W wieloboku sił prosta A_6O łącząca koniec siły $\vec{R}_2$ z biegunem O jest na razie nieznana. Ponieważ wielobok sił zamyka się, więc punkt A_7 , t. j. koniec siły $\vec{R}_1$, schodzi się z początkiem siły $\vec{P}_1$, t. j. z punktem A_0 .

Kreślimy wielobok sznurowy, zaczynając od prostej $l_0 \parallel A_0O$ aż dojdziemy do prostej $l_5 \parallel A_5O$.

Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia się prostych l_0 i l_5 z kierunkami sił $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$, t. j. z prostymi danymi k_1 i k_2 . Rysując w wieloboku sił prostą OA_6 równoległą do prostej EF , otrzymujemy siły $\vec{R}_1 = \vec{A_5A_6}$ i $\vec{R}_2 = \vec{A_6A_7}$. Łatwo bowiem zauważyć, że kreśląc w dalszym ciągu wielobok sznurowy dla tak wyznaczonych sił $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$, otrzymamy wielobok sznurowy zamknięty.

Wyznaczanie momentu sił. Gdy mamy wyznaczyć moment siły $\vec{P}$ względem pewnego punktu A , kreślimy najpierw z dowolnego punktu B , położonego na kierunku siły $\vec{P}$, wielobok sznurowy, jak na rys. 2.



Prowadzimy następnie przez A prostą równoległą do $\vec{P}$. Oznaczmy przez L, K punkty przecięcia się tej prostej z bokami wieloboku sznurowego. Z podobieństwa trójkątów A_0A_1O i KLB otrzymujemy

$KL : |\vec{P}| = h : w$, gdzie h i w są wysokościami tych trójkątów. Stąd $|\vec{P}|h = KL \cdot w$. Oznaczając przez M moment siły $\vec{P}$ względem A , mamy $|M| = |\vec{P}|h$ czyli

$$(1) \quad |M| = KL \cdot w.$$

A więc: moment siły $\vec{P}$ względem punktu A jest (co do modułu) proporcjonalny do odcinka, jaki boki wieloboku sznurowego odcinają na prostej przechodzącej przez A równoległej do $\vec{P}$; współczynnikiem proporcjonalności jest odległość bieguna od siły w wieloboku sił.

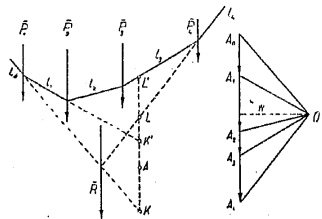
Niech dana będzie teraz para sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ (gdzie $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$). Wykreślmy wielobok sznurowy tej pary, jak na rys. 3, str. 257. Poprowadźmy przez dowolny punkt A prostą równoległą do sił i oznaczmy przez K i L punkty przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego z tą prostą.

Dowodziemy, że jeżeli oznaczmy przez M moment pary, przez w zaś odległość bieguna od sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ w wieloboku sił, to będzie zachodził wzór (1).

Weźmy bowiem pod uwagę trójkąt BCD , gdzie B jest punktem na kierunku siły $\bar{P}_1$, z którego zaczęliśmy kreślić wielobok sznurowy, C i D zaś są punktami przecięcia kierunku siły $\bar{P}_2$ ze skrajnymi bokami wieloboku sznurowego.

Niech h oznacza wysokość trójkąta BCD . Z podobieństwa trójkątów BCD i A_0A_1O mamy $CD:|\bar{P}_1| = h:w$, skąd $|\bar{P}_1|h = CD \cdot w$. Ponieważ $|M| = |\bar{P}_1|h$, zaś $CD = KL$, więc dostajemy istotnie wzór (1).

Zatem: *moment pary sił jest (co do wielkości) proporcjonalny do odcinka, jaki odcinają skrajne boki wieloboku sznurowego na dowolnej prostej równoległej do sił pary; współczynnikiem proporcjonalności jest odległość bieguna od sił w wieloboku sił.*



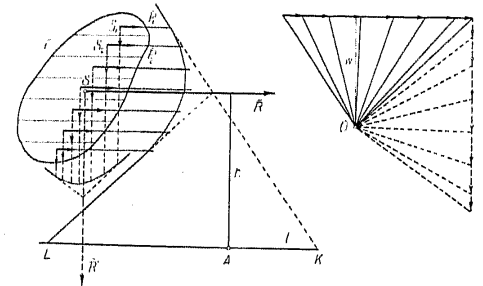
Podobne sposoby wyznaczania momentu są korzystne wówczas, gdy mamy do czynienia z kilkoma siłami równoległymi, wtedy bowiem możemy dla wszystkich sił przyjąć to samo w . Gdy zaś mamy wyznaczyć moment układu sił równoległych, wyznaczamy najpierw wypadkową (ewentualnie wypadkową parę sił), a następnie jej moment.

Nakreśliwszy wielobok sznurowy układu sił równoległych, możemy względem punktu A wyznaczyć moment dowolnej części układu, złożonej z sił następujących po sobie w takim porządku jak w wieloboku sił. Wielobok sznurowy tej części zawarty jest bowiem w wieloboku sznurowym całego układu. Na rysunku odcinek $K'L'$ jest proporcjonalny (co do modułu) do momentu układu sił $\bar{P}_2, \bar{P}_3$ względem A .

Niech wreszcie dany będzie układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_5, \bar{R}_1, \bar{R}_2$ równoważny zeru (rys. 1, str. 257). Prowadzimy przez dowolny punkt C prostą równoległą do sił. Odcinek LK tej prostej, leżący między bokami wieloboku sznurowego, jest proporcjonalny (co do modułu)

do momentu ogólnego względem C sił położonych po jednej stronie tej prostej (w naszym przypadku do momentu sił $\bar{R}_1, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ lub sił $\bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{R}_2$; momenty obu tych części układu względem C są równe co do modułu, ponieważ suma ich jest zerem, na skutek założenia, że układ jest równoważny zeru). Współczynnikiem proporcjonalności jest w , t.j. odległość bieguna O od sił w wieloboku sił.

Wyznaczanie środka ciężkości i momentu statycznego figur płaskich. Aby wyznaczyć środek ciężkości figury płaskiej F , dzielimy ją na wąskie paski przy pomocy prostych równoległych. Jeżeli w środkach ciężkości $S_1, S_2, \dots$ otrzymanych paszków zaczepimy siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ równoległe, zgodnie skierowane i proporcjonalne co do wielkości do pól $F_1, F_2, \dots$ tych paszków, to środek sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ będzie środkiem ciężkości figury F .



1.

1a.

Zauważmy bowiem, że środek ciężkości figury F jest środkiem masy układu punktów materialnych, jaki otrzymamy, zastępując każdy pasek punktem materialnym o masie równej masie paska (str. 156). Na mocy zaś twierdzenia dowiedzonego na str. 243 środek masy otrzymanego układu punktów materialnych jest środkiem układu sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$

Paski dostatecznie wąskie możemy uważać za trapezy; środki ciężkości trapezów wyznaczamy podług konstrukcji podanej na str. 180, rys. 1. Linie podziału figury prowadzimy zazwyczaj w równych odstępach (rys. 1). Zatem pola trapezów będą proporcjonalne do ich linii środkowych. Wielkości sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ możemy więc uważać za proporcjonalne do linii środkowych trapezów.

Wypadkowa $\bar{R}$ przechodzi przez środek ciężkości S ; wyznaczamy ją przy pomocy wieloboku sznurowego (rys. 1a).

Zmieniając kierunek sił i wyznaczając nową wypadkową $\bar{R}'$, otrzymamy środek ciężkości S jako punkt przecięcia się obu wypadkowych $\bar{R}$ i $\bar{R}'$.

Aby wyznaczyć moment statyczny figury F względem pewnej prostej l , rysujemy siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ równoległe do l .

Moment wypadkowej $\bar{R}$ względem dowolnego punktu A prostej l jest co do wielkości proporcjonalny do momentu statycznego figury F względem l .

Oznaczając bowiem, przez M moment siły $\bar{R}$ względem A , przez h odległość A od kierunku siły $\bar{R}$, przez M_s moment statyczny danej figury względem l , wreszcie przez F pole figury, mamy:

$$(2) \quad |M| = h|\bar{R}|, \quad |M_s| = hF,$$

gdyż środek ciężkości leży na kierunku wypadkowej.

Ponieważ wielkość sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ obraliśmy proporcjonalnie do pól $F_1, F_2, \dots$ poszczególnych pasków, więc

$$(3) \quad |\bar{P}_1| = \lambda F_1, \quad |\bar{P}_2| = \lambda F_2 \quad \text{it.d.,}$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Licz

$$|\bar{R}| = |\bar{P}_1| + |\bar{P}_2| + \dots,$$

skąd

$$|\bar{R}| = \lambda(F_1 + F_2 + \dots) = \lambda F.$$

Na mocy więc (2) jest $|M| = \lambda h F = \lambda |M_s|$ czyli

$$(4) \quad |M_s| = |M|/\lambda.$$

A więc: *moment statyczny figury jest (co do modułu) proporcjonalny do momentu wypadkowej.*

Momenty statyczne figur płaskich możemy zatem wyznaczać przy pomocy wieloboku sznurowego.

Na rys. 1, str. 259, jest $|\bar{M}| = w \cdot KL$, skąd na mocy (4)

$$(5) \quad |M_s| = w \cdot KL/\lambda.$$

Oznaczmy przez $d_1, d_2, \dots$ długość linii środkowych trapezów, a przez a odstęp między liniami podziału. Zatem $F_1 = ad_1, F_2 = ad_2, \dots$. Ponieważ przyjęto na rysunku $|\bar{P}_1| = kd_1, |\bar{P}_2| = kd_2, \dots$, gdzie $k = \frac{1}{a}$, więc $|\bar{P}_1| = kF_1/a, |\bar{P}_2| = kF_2/a, \dots$. Na mocy (3) będzie tedy $\lambda = k/a$, skąd na mocy (5)

$$|M_s| = aw \cdot KL/k = 3aw \cdot KL.$$

Mierząc a , w i KL na rysunku, otrzymujemy $|M_s|$ z powyższego wzoru.

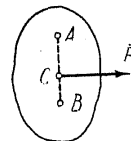
II. Ciało nieswobodne

§ 8. Warunki równowagi. Ciało sztywne nazywamy *nie-swobodnym*, jeżeli położenia lub ruchy tego ciała poddane są pewnym warunkom. Warunki te nazywamy *więzami*.

Np. jeżeli jeden punkt ciała jest unieruchomiony, ciało może się tylko obracać około tego punktu. Jeżeli dwa punkty A i B ciała są unieruchomione, ciało może się tylko obracać około prostej AB . Poznamy później inne jeszcze przykłady ciał sztywnych nieswobodnych.

Gdy ciało sztywne nieswobodne jest w równowadze, mówimy, że siły działające na to ciało *równoważą się* lub *są w równowadze*.

Ciało sztywne unieruchomione w dwóch punktach A, B i znajdujące się w równowadze pozostanie w równowadze, gdy dołączymy dowolną siłę $\bar{P}$ o początku w punkcie C , położonym na prostej AB . Intuicyjnie jest to jasne, gdyż ciało może się tylko obracać około osi AB , a więc siła $\bar{P}$, działająca na oś unieruchomioną, nie może ciała poruszyć. Gdyby ciało było swobodne, to pozostałoby w równowadze jedynie w przypadku, gdy $\bar{P} = 0$.



Widzimy stąd, że warunki równowagi sił przy ciele nieswobodnym są inne niż przy ciele swobodnym.

Badanie warunków równowagi w przypadku ciała sztywnego nieswobodnego możemy sprowadzić do przypadku ciała swobodnego. Przyjmować będziemy w tym celu, że na ciało sztywne nieswobodne działają oprócz sił danych siły dodatkowe zwane *reakcjami*, dzięki którym ciało zachowuje więzy. Reakcje pochodzą od tych ciał, które ograniczają swobodę ruchów danego ciała sztywnego nieswobodnego.

Jeżeli np. ciało ciężkie spoczywa na stole, wówczas nie jest swobodne, nie może bowiem przejść przez powierzchnię stołu. W tym przypadku reakcjami są siły z jakimi powierzchnia stołu ciśnie na ciało.

Inne siły, pod których działaniem znajduje się ciało sztywne nieswobodne, nazywać będziemy *siłami działającymi* (dla odróżnienia od reakcyj). Jeżeli do sił działających dołączymy reakcje, to możemy ciało sztywne nieswobodne uważać za swobodne.

Wynika stąd, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających jest, by siły działające równoważyły się z reakcjami*.

Powyższy warunek nie jest jednak dogodny, gdyż występują w nim siły reakcyjne, których na ogół nie znamy. W niektórych przypadkach, jak np. w przypadku ciała unieruchomionego w jednym punkcie lub w dwóch punktach, można jednak podać warunki równowagi sił działających, nie odwołując się do reakcyj (str. 274). Warunkiem równowagi, w którym nie występują reakcje, jest t. zw. *zasada prao* przygotowanych, którą poznamy w rozdziale IX.

§ 9. Reakcje ciał stykających się. Każde dwa ciała (bryły, powierzchnie lub linie) sztywne, stykające się z sobą, działają na siebie z pewnymi siłami. Siły te są reakcjami i pochodzą z wzajemnego oddziaływania na siebie punktów obu ciał. Reakcje stosują się do prawa akcji i reakcji.

Siły, z jakimi jedno ciało działa na drugie, możemy w myśl twierdzenia o redukcji (str. 241) zawsze zastąpić jedną siłą $\vec{R}$ i parą o momencie $\vec{M}$. Na odwrót, na mocy prawa akcji i reakcji, ciało drugie działa na ciało pierwsze z siłami równoważnymi sile $-\vec{R}$ (o tym samym początku co $\vec{R}$) i parze o momencie $-\vec{M}$.

Wyznaczanie reakcji jest bardzo ważne w zagadnieniach związanych z techniką. Dotychczas nie mamy jeszcze teorii rozwiązującej tę sprawę w zupełności. W praktyce posługujemy się pewnymi hipotezami zgadzającymi się w przybliżeniu z doświadczeniem. Zajmiemy się tutaj niektórymi tylko zagadnieniami dotyczącymi reakcji ciał stykających się. Szerzej ujęta jest ta sprawa w podręcznikach mechaniki technicznej.

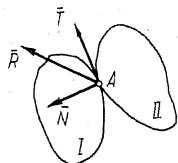
Doświadczenie wykazuje, że w ciałach sztywnych stykających się tylko te punkty działają na siebie, które położone są blisko punktów zetknięcia. Przyjmujemy tu hipotezę upraszczającą, że tylko punkty zetknięcia obu ciał działają na siebie; reakcje będą wówczas siłami zaczepionymi w punktach zetknięcia.

Hipoteza powyższa nie da się utrzymać w całej ogólności. Dla dwu ciał sztywnych, stykających się tylko w jednym punkcie, reakcje sprowadzałyby się według tej hipotezy do jednej siły, mającej początek w punkcie zetknięcia. Doświadczenie natomiast poucza, że prócz niej może w tym przypadku występować jeszcze para sił o momencie różnym od zera, co sprzeciwia się hipotezie.

Jeżeli np. sztywna kula ciężka opiera się o sztywną płytę poziomą, to może pozostawać w równowadze nawet wtedy, gdy będzie pod działaniem pary sił (leżącej w płaszczyźnie poziomej) o małym momencie. W stanie równowagi reakcje płyty równoważą zarówno ciężar kuli jak parę sił, co byłoby niemożliwe, gdyby reakcje płyty sprowadzały się do jednej tylko siły zaczepionej w punkcie styczności.

Reakcja normalna i styczna. Niech dwa ciała sztywne I i II stykają się w punkcie A. Oznaczmy przez $\vec{R}$ siłę z jaką ciało II działa na ciało I w punkcie A. Siła $\vec{R}$ ma początek w A. Na mocy prawa akcji i reakcji ciało I działa na ciało II z siłą $-\vec{R}$, mającą początek również w A.

Niech ciało I będzie bryłą lub powierzchnią posiadającą w punkcie A płaszczyznę styczną II.



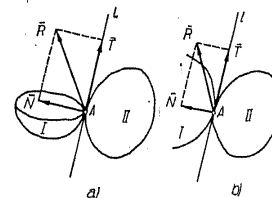
Rozłożmy reakcję $\vec{R}$ na dwie składowe: na składową $\vec{N}$ prostopadłą do ciała, t. j. do płaszczyzny II, i na składową $\vec{T}$ styczną do ciała, t. j. leżącą w II.

Składową $\vec{N}$ nazywamy reakcją *normalną*, składową zaś $\vec{T}$ reakcją *styczną* lub *tarcie*m. Reakcja normalna jest zazwyczaj skierowana względem ciała II w tę stronę, w której znajduje się ciało I; nazywamy ją wówczas *ciśnieniem*. Gdy w punktach zetknięcia tarcie nie występuje, ciała stykające się nazywamy *gładkimi*.

Rozpatrzmy jeszcze dwa przypadki:

1^o Ciało I jest powierzchnią, ograniczoną pewną linią, na której leży punkt zetknięcia A, przy czym linia ograniczająca ma w A prostą styczną l (rys. a).

2^o Ciało I jest linią posiadającą w A prostą styczną l , przy czym A nie jest końcem tej linii (rys. b).



Przykładem 1^o może być półkula sztywna ograniczona okręgiem, na którym leży punkt A; przykładem 2^o może być łuk okręgu o punkcie A leżącym w jego połowie. W przypadkach 1^o i 2^o reakcja normalna będzie składową reakcji $\vec{R}$ prostopadłą do stycznej l ; tarcie zaś będzie składową reakcji $\vec{R}$ leżącą na prostej l .

Dla dwu ciał gładkich stykających się w punkcie A kierunek i zwrot reakcji jest wyznaczony, jeżeli jedno z ciał jest bryłą lub powierzchnią posiadającą w A płaszczyznę styczną. Kierunek i zwrot reakcji jest wyznaczony również dla ciał 1^o i 2^o, jeżeli proste styczne do nich w punkcie ich zetknięcia nie pokrywają się z sobą. W tym bowiem przypadku reakcja musi być prostopadła do obu stycznych. Dla ciał, z których jedno jest ciałem 1^o lub 2^o, wiemy o reakcji tylko tyle, że leży ona w płaszczyźnie prostopadłej do prostej stycznej l .

Podpory. Ciało sztywne unieruchomione (np. związane sztywnie z ziemią) nazywamy *podporą*. W wielu zastosowaniach idzie o wyznaczenie reakcji podpór na inne ciała sztywne.

Jeżeli ciało sztywne opierające się na podporach jest w równowadze, to siły działające na to ciało równoważą się z reakcjami podpór. Jeżeli ciało gładkie opiera się na podporach gładkich, to przyjmujemy, że jeżeli są do pomyślenia reakcje (oczywiście normalne), równoważące siły, jakie działają na ciało, to reakcje takie rzeczywiście wystąpią.

Dzięki powyższej hipotezie możemy w wielu przypadkach podać warunki konieczne i wystarczające dla równowagi sił, jakie działają na ciało sztywne opierające się na podporach gładkich.

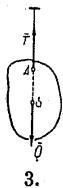
Środek ciśnień. Niech dwa ciała gładkie I i II stykają się w punktach leżących na pewnej płaszczyźnie II (rys. 1). Reakcje będą więc prostopadłe do płaszczyzny II. Reakcje działające na ciało I są zatem równoległe; założmy że są ciśnieniami. Mają więc ten sam zwrot. Wynika stąd, że mają wypadkową $\vec{F}$, o której możemy przyjąć, że zaczepiona jest w pewnym punkcie O płaszczyzny II. Punkt O nazywamy *środkiem ciśnień*.

Oczywiście reakcje działające na drugie ciało mają wypadkową $-\vec{F}$ i ten sam środek ciśnień.

Reakcje nici. Nić nierozciągliwa, przyczepiona do ciała, działa na nie tylko wtedy, gdy jest napięta. Jeżeli masa nici jest mała (tak, że można ją pominąć) i obydwie końce nici przyczepione są do ciała, to działa ona w obu końcach, z siłami równymi co do wielkości, także i wtedy, gdy jest nawinięta na jakieś ciało gładkie (rys. 2). Siły, z jakimi nić działa w swoich końcach, są styczne do nici i mają zwrot w kierunku nici. Siły te nazywamy *napięciami nici*.

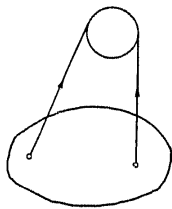
Przykład 1. Jeżeli ciało ciężkie, zawieszone na nici w punkcie A , jest w równowadze, to napięcie nici $\vec{T}$ o początku A równoważy się z ciężarem $\vec{Q}$, mającym początek w środku ciężkości S . Zatem $\vec{T} + \vec{Q} = 0$ czyli

$$(1) \quad |\vec{T}| = |\vec{Q}|.$$



3.

Ponadto siły $\vec{T}$ i $\vec{Q}$ muszą działać wzdłuż jednej prostej. Nić ma zatem kierunek pionowy i jej przedłużenie przechodzi przez środek ciężkości (rys. 3). Zawieszając więc ciało po kolei w dwóch punktach i zaznaczając kierunki nici w ciecie, otrzymamy jako punkt przecięcia środek ciężkości ciała.



2.

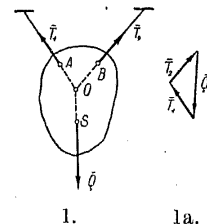
Przykład 2. Jeżeli ciało zawieszone na dwóch niciach w punktach A i B jest w równowadze, to napięcia nici $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$ o początkach w A i B równoważą się z ciężarem $\vec{Q}$, mającym początek w środku ciężkości S (rys. 1). Zatem

$$(2) \quad \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{Q} = 0.$$

Na mocy więc twierdzenia podanego na str. 250 kierunki sił przecinają się w jednym punkcie O lub siły są równoległe. W obu przypadkach możemy wyznaczyć siły $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$, tworząc moment względem dowolnego punktu, np. względem punktu A . Oznaczając przez a_2 i d ramiona sił $\vec{T}_2$ i $\vec{Q}$ względem A , dostaniemy $|\vec{T}_2|a = |\vec{Q}|d$ czyli

$$(3) \quad |\vec{T}_2| = |\vec{Q}|d/a.$$

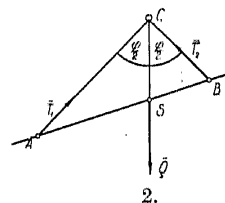
Podobnie otrzymamy $|\vec{T}_1|$, tworząc moment względem B . W przypadku, gdy siły $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$ nie są równoległe, możemy je wyznaczyć graficznie, tworząc trójkąt sił (rys. 1a).



1.

1a.

Przykład 3. Na nici nierozciągliwej bez masy, przewiniętej przez gładki pierścień w punkcie C , zawieszony jest w punktach A i B ciężki pręt sztywny (rys. 2). Wyznaczyć napięcia nici w położeniu równowagi.



2.



2a.

Oznaczmy przez l długość nici, przez φ kąt ACB , a przez S środek ciężkości pręta. Połóżmy:

$$AB = a, \quad AC = l_1, \quad BC = l_2, \quad AS = b.$$

Przypuśćmy, że dane są a, b, l i ciężar pręta $\vec{Q}$.

Ponieważ napięcia $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$ nici równoważą się z ciężarem $\vec{Q}$, więc siły te przecinają się w punkcie C (gdyż siły $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$ przechodzą przez punkt C (str. 250)) i ponadto

$$(4) \quad \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{Q} = 0.$$

Prócz tego (str. 264)

$$(5) \quad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|.$$

Gdy $\varphi=0$, pręt ma położenie pionowe i siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ mają kierunek pionowy. Na mocy (5) jest więc $\bar{T}_1=\bar{T}_2$, skąd na mocy (4)

$$|\bar{T}_1|=|\bar{T}_2|=|\bar{Q}|/2.$$

Zbadajmy w jakim przypadku może być $\varphi \neq 0$, jak na rysunku. Przyjmijmy więc, że $\varphi \neq 0$.

Oznaczając przez d_1 i d_2 odległości kierunków sił $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ od S i tworząc moment względem S , dostaniemy $|T_1|d_1=|T_2|d_2$; zatem, z uwagi na (5), $d_1=d_2$. Środek ciężkości S jest równo oddalony od boków AC i BC , czyli prosta CS jest symetralną kąta φ . Ze znane go twierdzenia geometrycznego o symetralnych kątów trójkąta, otrzymujemy $AC/BC=AS/BS$ czyli

$$(6) \quad l_1/l_2=b/(a-b).$$

Ponieważ

$$(7) \quad l_1+l_2=l,$$

więc rozwiązując układ równań (6) i (7), dostaniemy:

$$(8) \quad l_1=bl/a, \quad l_2=(a-b)l/a.$$

Aby boki l_1, l_2, a mogły tworzyć trójkąt, muszą zachodzić nierówności $l_1+l_2>a$, $l_1+a>l_2$, $l_2+a>l_1$, które możemy napisać w postaci:

$$l_1+l_2>a, \quad a>|l_1-l_2|,$$

skąd na mocy (8)

$$(9) \quad l>a>|a-2b|l/a.$$

Muszą być więc spełnione nierówności $a<l<a^2/|a-2b|$ czyli, kładąc $k=b/a$,

$$(10) \quad a<l<a/(1-2k).$$

A więc: równowaga zajdzie przy $\varphi \neq 0$, jeżeli długość nici l spełnia warunek (10).

Zauważmy, że jeżeli $k=b/a=1/2$ (t.j. gdy środek ciężkości S wypada w środku odcinka AB), to warunki (9) spełnione są dla każdego $l>a$. W tym więc przypadku możliwe jest zawsze położenie równowagi pręta przy $\varphi \neq 0$.

Kąt φ otrzymamy z twierdzenia Carnota

$$(11) \quad a^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\varphi.$$

Z trójkąta sił dostajemy

$$(12) \quad |\bar{T}_1|=|\bar{T}_2|=|\bar{Q}|/2\cos\frac{1}{2}\varphi.$$

Po łatwych przeróbkach, wyrażając $\cos\frac{1}{2}\varphi$ przez a, b, l ze wzorów (8) i (11), otrzymamy na mocy (12)

$$|\bar{T}_1|=|\bar{T}_2|=|\bar{Q}|\frac{l}{a}\sqrt{\frac{(a-b)b}{l^2-a^2}}.$$

W szczególności dla $b=a/2$ dostaniemy

$$|\bar{T}_1|=|\bar{T}_2|=|\bar{Q}|\frac{l}{2\sqrt{l^2-a^2}}.$$

Przykład 4. Belka pozioma spoczywa w punktach A i B na dwóch podporach gładkich. Na belkę działają siły pionowe (skierowane w dół) $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_5$ (str. 257, rys. 1). Wyznaczyć reakcje podpór.

Oznaczmy przez $x_1, x_2, \dots, x_5$ odległości punktów zaczepienia sił od A . Położmy $AB=d$. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w A i B są pionowe. Tworząc moment względem A i oznaczając przez $P_1, P_2, \dots, P_5, R_1, R_2$ wartości bezwzględne sił, otrzymamy $P_1x_1+P_2x_2+\dots+P_5x_5-R_2d=0$, skąd

$$(13) \quad R_2=(P_1x_1+P_2x_2+\dots+P_5x_5)/d.$$

Ponieważ $R_1+R_2=P_1+P_2+\dots+P_5$, więc

$$(14) \quad R_1=[P_1(d-x_1)+\dots+P_5(d-x_5)]/d.$$

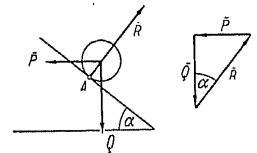
Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ można również wyznaczyć przy pomocy wieloboku sznurowego jak na str. 257.

Przykład 5. Kula ciężka o stałej gęstości dotyka płaszczyzny gładkiej Π , nachylonej do poziomu pod kątem α . Wyznaczyć siłę poziomą $\bar{P}$, utrzymującą kulę w równowadze.

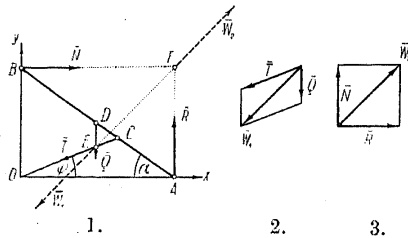
Ciężar $\bar{Q}$ kuli ma początek w jej środku O , a reakcja $\bar{R}$ płaszczyzny Π w punkcie styczności A ; jest ona prostopadła do Π . Siły $\bar{Q}$ i $\bar{R}$ przecinają się w punkcie O . Ponieważ siły $\bar{P}$, $\bar{Q}$ i $\bar{R}$ równoważą się, więc na mocy tw. III, str. 250, przecinają się one w punkcie O . Ponadto $\bar{P}+\bar{Q}+\bar{R}=0$, więc z trójkąta sił otrzymujemy siły $\bar{P}$ i $\bar{R}$. Mamy:

$$R=Q/\cos\alpha, \quad P=Q\tg\alpha,$$

gdzie P, Q i R oznaczają bezwzględne wartości odpowiednich sił.



Przykład 6. W płaszczyźnie pionowej Π leży pręt ciężki AB o gęstości stałej, oparty na dwóch płaszczyznach gładkich: poziomej Π_1 i pionowej Π_2 . Niechaj Ox i Oy będą prostymi przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2 z płaszczyzną Π . Pręt AB przywiązany jest nicią nierozciągliwą OC do punktu O . Pręt znajduje się w równowadze. Wyznaczyć reakcje, mając dane: $AB=2l$, kąt α między AB a osią x i kąt φ między OC a osią x (rys. 1).



Siłą działającą na pręt jest ciężar $\bar{Q}$ zaczepiony w środku pręta AB w punkcie D . Reakcjami są reakcje ścian $\bar{R}$ i $\bar{N}$, zaczepione w A i B i prostopadłe do ścian, oraz reakcja nici $\bar{T}$ zaczepiona w C i skierowana wzdłuż nici ku punktowi O . Siła

działająca równoważy się z reakcjami. Z warunku rzutów na osie x i y otrzymujemy:

$$(15) \quad N_x + T_x = 0, \quad R_y + Q_y + T_y = 0,$$

a z warunku momentu względem O :

$$(16) \quad -R_y \cdot 2l \cos \alpha + N_x \cdot 2l \sin \alpha - Q_y l \cos \alpha = 0.$$

Oznaczmy przez R, N, T, Q bezwzględne wartości odpowiednich sił. Mamy oczywiście $R_y = R$, $N_x = N$, $Q_y = -Q$ i $T_x = -T \cos \varphi$, $T_y = -T \sin \varphi$. Zatem z równań (15) i (16) otrzymujemy:

$$(17) \quad N - T \cos \varphi = 0, \quad R - Q - T \sin \varphi = 0,$$

$$(18) \quad -2R \cos \alpha + 2N \sin \alpha + Q \cos \alpha = 0.$$

Wyznaczając R i N z równań (17) i wstawiając w (18) otrzymamy

$$(19) \quad T = \frac{Q \cos \alpha}{2 \sin(\alpha - \varphi)},$$

skąd na mocy równań (17):

$$(20) \quad N = \frac{Q \cos \alpha \cos \varphi}{2 \sin(\alpha - \varphi)}, \quad R = Q \left(1 + \frac{\cos \alpha \sin \varphi}{2 \sin(\alpha - \varphi)} \right).$$

Ponieważ $T > 0$, więc na mocy (19) musi być $\alpha > \varphi$; zatem punkt C musi leżeć między A i D .

Zadanie możemy również rozwiązać graficznie (rys. 2 i 3).

Oznaczmy przez E punkt przecięcia sił $\bar{T}$ i $\bar{Q}$, zaś przez F sił $\bar{N}$ i $\bar{R}$. Wypadkowa $\bar{W}_1$ sił $\bar{T}$ i $\bar{Q}$ zaczepiona jest w E , zaś wypadkowa $\bar{W}_2$ sił $\bar{R}$ i $\bar{N}$ w F . Ponieważ układ sił $\bar{N}, \bar{R}, \bar{T}, \bar{Q}$ jest równoważny zeru, więc układ sił $\bar{W}_1, \bar{W}_2$ jest też równoważny zeru. Zatem siły działają wzdłuż prostej EF i $\bar{W}_1 + \bar{W}_2 = 0$. Siła $\bar{Q}$ oraz kierunki sił $\bar{T}$ i $\bar{W}_1 = \bar{T} + \bar{Q}$ są dane, więc możemy wyznaczyć siły $\bar{W}_1$ i $\bar{T}$ jak na rys. 2. Ponieważ $\bar{N} + \bar{R} = \bar{W}_2 = -\bar{W}_1$, więc siły $\bar{N}$ i $\bar{R}$ otrzymamy, rozkładając siłę $\bar{W}_2$ na składowe w kierunkach osi x i y (rys. 3).

Przykład 7. Pręt ciężki AB o środku ciężkości S opiera się w punkcie A o płaszczyznę poziomą gładką, a w punkcie B o kulę gładką. W punkcie A uczepiona jest nić nierozciągliwa, przewinięta przez blok C i obciążona w drugim końcu ciężarem $\bar{P}$. Wyznaczyć ciężar $\bar{P}$, reakcję $\bar{R}$ ściany poziomej i reakcję $\bar{N}$ kuli w położeniu równowagi, mając dane $a = AS$, $b = AB$, kąt α między prętem a płaszczyzną i ciężar pręta $\bar{Q}$.

Obierzmy osie x i y jak na rysunku. Ponieważ napięcie nici w punkcie A wynosi $\bar{P}$, więc oznaczając przez P, Q, R, N wartości bezwzględne sił i tworząc rzuty na osie x, y , dostaniemy:

$$(21) \quad P - N \sin \alpha = 0, \quad R - Q + N \cos \alpha = 0.$$

Moment ogólny względem A wynosi

$$(22) \quad Q a \cos \alpha - b N = 0.$$

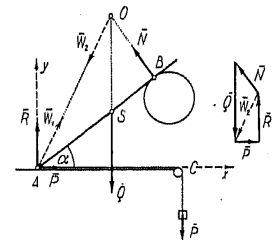
Z równań (21) i (22) otrzymamy:

$$N = Q \frac{a \cos \alpha}{b}, \quad P = Q \frac{a \sin 2\alpha}{2b},$$

$$R = Q \left(1 - \frac{a}{b} \cos^2 \alpha \right).$$

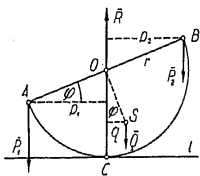
Zadanie możemy rozwiązać również graficznie. Oznaczmy w tym celu przez $\bar{W}_1$ wypadkową sił $\bar{R}$ i $\bar{P}$, a przez $\bar{W}_2$ wypadkową sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$. Siła $\bar{W}_1 = \bar{R} + \bar{P}$ zaczepiona jest w punkcie A , zaś $\bar{W}_2 = \bar{Q} + \bar{N}$ w punkcie O , w którym przecinają się kierunki sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$. Ponieważ znamy położenia sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$, więc punkt O możemy wyznaczyć.

Siły $\bar{P}, \bar{R}, \bar{Q}$ i $\bar{N}$ są w równowadze, więc i siły $\bar{W}_1$ i $\bar{W}_2$ równoważą się. Zatem $\bar{W}_1 + \bar{W}_2 = 0$; ponadto siły $\bar{W}_1$ i $\bar{W}_2$ leżą na



jednej prostej. Prosta tą jest oczywiście prosta AO . Ponieważ znamy już kierunek siły $\vec{W}_2$, więc możemy ze związku $\vec{W}_2 = \vec{Q} + \vec{N}$ wyznaczyć $\vec{W}_2$ i $\vec{N}$, rysując trójkąt sił. Mamy $\vec{W}_1 = -\vec{W}_2$ i $\vec{W}_1 = \vec{R} + \vec{P}$, więc siły $\vec{R}$ i $\vec{P}$ otrzymamy, rozkładając siłę $\vec{W}_1$ w kierunkach sił $\vec{R}$ i $\vec{P}$.

Przykład 8. Drut ciężki sztywny o stałej gęstości, w kształcie półokręgu, leży w płaszczyźnie pionowej, opierając się o prostą poziomą l . Na końcach pręta A i B zaczepione są siły $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$, skierowane pionowo w dół. Wyznaczyć kąt φ , jaki w położeniu równowagi tworzy średnica AB z poziomem, oraz reakcję $\vec{R}$ w punkcie styczności C (przy założeniu, że nie ma tarcia).



W położeniu równowagi siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ ciężar $\vec{Q}$, zaczepiony w środku S masy oraz reakcja $\vec{R}$, prostopadła do l , równoważą się. Ponieważ siły powyższe są równoległe, więc (oznaczając ich wartości bezwzględne przez P_1, P_2, Q i R) otrzymamy z warunku rzutów na oś y , skierowaną pionowo w górę, $-P_1 + R - Q - P_2 = 0$ czyli

$$(23) \quad R = P_1 + P_2 + Q.$$

Obliczmy moment ogólny sił względem punktu styczności C . Z warunku momentu otrzymamy

$$(24) \quad -P_1 p_1 + Q q + P_2 p_2 = 0,$$

gdzie p_1, p_2 i q oznaczają ramiona sił P_1, P_2 i Q względem C . Kładąc $r = OB$ (gdzie O jest środkiem średnicy AB), otrzymamy:

$$(25) \quad p_1 = p_2 = r \cos \varphi, \quad q = OS \cdot \sin \varphi,$$

a ponieważ $OS = 2r/\pi$ (str. 179), więc

$$(26) \quad q = \frac{2r \sin \varphi}{\pi}.$$

Z (25) i (26) dostaniemy przez podstawienie w (24)

$$(P_2 - P_1) r \cos \varphi + \frac{2rQ \sin \varphi}{\pi} = 0$$

czyli

$$(27) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{(P_1 - P_2) \pi}{2Q}.$$

§ 10. Tarcie. Niech dwa ciała I i II, będące w spoczynku, stykają się w punkcie A i niech mają w tym punkcie wspólną płaszczyznę styczną II . Oznaczmy przez $\vec{R}$ reakcję z jaką w punkcie A działa ciało II na ciało I. Jeżeli ciała nie są gładkie, to reakcja $\vec{R}$ nie jest do płaszczyzny II prostopadła.

Niechaj α będzie kątem, jaki $\vec{R}$ tworzy z normalną n do II .

Oznaczając przez $\vec{N}$ składową normalną, a przez $\vec{T}$ składową styczną czyli tarcie i kładąc $R = |\vec{R}|$, $N = |\vec{N}|$, $T = |\vec{T}|$, otrzymujemy:

$$(1) \quad T = R \sin \alpha, \quad N = R \cos \alpha,$$

skąd

$$(2) \quad T = N \operatorname{tg} \alpha.$$

Doświadczenie pokazuje, że kąt α nie może przekroczyć pewnej granicy, zależnej od natury powierzchni ciał I i II.

Oznaczmy przez φ maksymalną wartość kąta α w punkcie A dla danej pary ciał I i II w położeniu równowagi. Mamy więc $0 \leq \alpha \leq \varphi$ czyli $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi$, skąd na mocy (2)

$$(3) \quad T \leq N \operatorname{tg} \varphi.$$

Kładąc $f = \operatorname{tg} \varphi$, dostaniemy

$$(4) \quad T \leq N f.$$

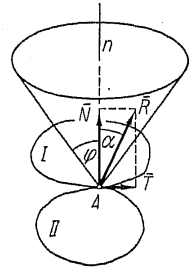
Liczbę f nazywamy *współczynnikiem statycznym tarcia* dla danej pary ciał I i II w punkcie styczności A .

Weźmy pod uwagę stożek obrotowy o wierzchołku A , a którego osią jest normalna n , nachylona do tworzących stożka pod kątem φ . Stożek ten nazywamy *stożkiem tarcia* w punkcie A .

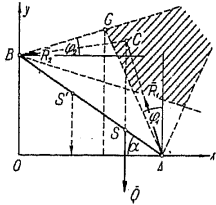
Ponieważ $\alpha \leq \varphi$, więc reakcja leży wewnątrz stożka tarcia lub na jego powierzchni.

Podobnie jak dla podpór gładkich (str. 263), przyjmujemy również w przypadku tarcia zasadę następującą:

Jeżeli ciało sztywne opiera się na podporach i są do pomysłenia reakcje (leżące wewnątrz stożków tarcia), równoważące się z siłami, jakie działają na ciało, to reakcje te wystąpią w rzeczywistości (jeżeli w chwili początkowej ciało było w spoczynku).



Przykład 1. Pręt ciężki AB , leżący na płaszczyźnie pionowej, opiera się na płaszczyznach poziomej i pionowej. Współczynniki tarcia w A i B są f_1 i f_2 . Zbadać warunki równowagi.



Weźmy pod uwagę stożki tarcia w A i B . Tworzące tych stożków są nachylone do normalnych w A i B pod kątami φ_1 i φ_2 , gdzie $\operatorname{tg} \varphi_1 = f_1$ i $\operatorname{tg} \varphi_2 = f_2$. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w A i B muszą leżeć wewnątrz lub na powierzchni tych stożków.

Na pręt AB działają trzy siły: $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i ciężar $\bar{Q}$, zaczepiony w środku ciężkości S .

Jeżeli pręt jest w równowadze, to kierunki tych sił przechodzą przez jeden punkt C (str. 250). Punkt ten musi oczywiście leżeć we wspólnym obszarze obu stożków tarcia (p. obszar zacieniowany na rysunku), gdyż kierunki reakcji $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ mogą się tylko przecinać w tym obszarze. Kierunek siły ciężkości musi zatem przechodzić przez obszar wspólny obu stożków tarcia.

Na odwrót, jeżeli kierunek ciężaru $\bar{Q}$ przechodzi przez wspólny obszar stożków tarcia, to pręt może pozostawać w równowadze. Obierzmy bowiem na pionie przechodzącym przez S dowolny punkt C wewnątrz wspólnego obszaru stożków tarcia. Łatwo widzieć, że mogą wystąpić reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, mające kierunek AC i BC i równoważące ciężar $\bar{Q}$. A więc pręt może w tym przypadku pozostawać w równowadze.

Gdyby środek ciężkości leżał w takim punkcie S' , że pion przechodzący przez ten punkt nie przecinałby wspólnego obszaru stożków tarcia, to równowaga pręta byłaby niemożliwa.

A więc: warunkiem koniecznym i wystarczającym dla równowagi pręta jest to, by kierunek ciężaru przechodził przez wspólny obszar stożków tarcia.

Położmy: $AB=l$, $AS=d$, $BS=d'$ i oznaczmy przez α kąt, jaki AB tworzy z poziomem. Obierzmy osie x i y układu współrzędnych jak na rysunku i założmy, że pręt jest w równowadze. Z warunków rzutów i momentu względem O otrzymamy:

$$(5) \quad R_{1x} + R_{2x} = 0, \quad R_{1y} + R_{2y} - Q = 0,$$

$$\text{oraz } -R_{1y} \cos \alpha + R_{2x} l \sin \alpha + Q d' \cos \alpha = 0 \text{ czyli}$$

$$(6) \quad -R_{1y} \frac{l}{\cos \alpha} + R_{2x} l \operatorname{tg} \alpha + Q d' = 0.$$

Mamy ponadto nierówności następujące:

$$(7) \quad |R_{1x}| \leq R_{1y} f_1, \quad |R_{2y}| \leq R_{2x} f_2.$$

Ze wzorów (5) i (6) nie możemy reakcji wyznaczyć. Związek (5)-(7) pozwalają nam tylko podać granice, których nie mogą przekroczyć składowe reakcji.

Oznaczmy przez x_0 odcięta punktu S , a przez ξ odcięta punktu C , w którym przecinają się tworzące skrajne stożków tarcia. Równowaga nastąpi, jeżeli

$$(8) \quad \xi \leq x_0.$$

Aby wyznaczyć ξ , napiszmy równania prostych BG i AG :

$$y = f_1 x + l \sin \alpha, \quad y = -(x - l \cos \alpha) / f_1.$$

Punkt G jest punktem przecięcia tych prostych, więc

$$(9) \quad \xi = \frac{1 - f_1 \operatorname{tg} \alpha}{1 + f_1 f_2} l \cos \alpha.$$

Ponieważ zaś $x_0 = d' \cos \alpha$, więc nierówność (8) przyjmuje postać

$$(10) \quad (1 - f_1 \operatorname{tg} \alpha) / (1 + f_1 f_2) \leq d' / l.$$

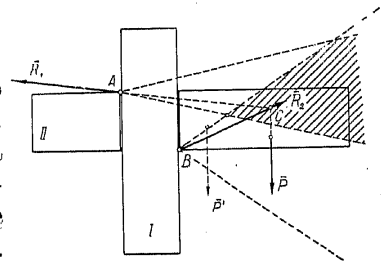
Równowaga nastąpi, jeżeli lewa strona tej nierówności jest liczbą ujemną lub zerem. W tym przypadku jest $1 - f_1 \operatorname{tg} \alpha \leq 0$, więc $1 / f_1 \leq \operatorname{tg} \alpha$ czyli $\operatorname{ctg} \varphi_1 \leq \operatorname{tg} \alpha$, zatem $\pi/2 - \varphi_1 \leq \alpha$.

Jeżeli więc $\pi/2 - \varphi_1 \leq \alpha$, to równowaga nastąpi. Jeżeli zaś $\pi/2 - \varphi_1 > \alpha$, to lewa strona nierówności (10) będzie dodatnia i równowaga nie znajdzie przy zbyt małym d' .

Wyniki te łatwo sprawdzić na rysunku (str. 272).

Przykład 2. Belka I przechodzi luźno przez wycięcie w belce II. Na belkę II działa siła $\bar{P}$ równoległa do belki I. Belki są przyciśnięte do siebie w punktach A i B .

Wyznamy stożki tarcia w A i B . Jeżeli kierunek siły $\bar{P}$ przejdzie przez obszar wspólny stożków tarcia, to w A i B wystąpią działające na belkę II reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, które zrównoważą siłę $\bar{P}$. Wówczas belka II się nie poruszy: nastąpi t. zw. *zacinanie*.



Z rys. łatwo widzieć, że zacinania nie będzie, jeżeli siła $\bar{P}'$ będzie miała początek w pobliżu belki I i będzie do niej równoległa. Wtedy bowiem kierunek siły $\bar{P}'$ nie przejdzie przez wspólną część obu stożków tarcia; równowaga nie będzie więc możliwa.

§ 11. Warunki równowagi nie zawierające reakcji.

Warunek równowagi sił działających na ciało sztywne, podany na str. 261, wyraża związek zachodzący między siłami działającymi a reakcjami. Obecnie podamy kilka przykładów, w których warunki równowagi sił działających można będzie odnieść do samych tylko sił działających z pominięciem reakcji.

Ciało o punkcie nieruchomym. Niech ciało sztywne ma jeden punkt unieruchomiony, np. punkt O . Możemy więc przyjąć, że ciało jest swobodne i że w punkcie O działa reakcja $\bar{R}$, przytrzymująca punkt O .

Założmy dalej, że ciało jest w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$. Siły te równoważą się zatem z reakcją $\bar{R}$. Z warunków równowagi wynika, że zarówno suma sił, jak i moment względem punktu O , są równe zeru czyli:

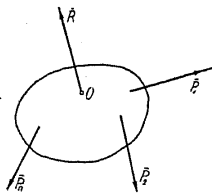
$$(1) \quad \bar{R} + \Sigma \bar{P}_i = 0,$$

$$(I) \quad \Sigma \text{Mom}_O \bar{P}_i = 0.$$

W równaniu (I) nie występuje reakcja $\bar{R}$, gdyż moment jej względem O (jako siły o początku O) jest zerem. Z równania (I) możemy wyznaczyć $\bar{R}$. Mamy

$$(2) \quad \bar{R} = -\Sigma \bar{P}_i.$$

Równanie (I) stanowi warunek konieczny, jaki muszą spełniać siły działające $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ w przypadku równowagi.



Dowodniemy teraz, że warunek (I) jest również warunkiem wystarczającym równowagi.

Założmy, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ spełnia równanie (I), czyli że moment układu tych sił względem O jest zerem. Wynika stąd, że siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ mają wypadkową $\bar{P} = \Sigma \bar{P}_i$ o początku w O (str. 26). Otóż siła $\bar{P}$, zaczepiona w O , nie może poruszyć danego ciała, będącego w spoczynku, gdyż punkt O jest nieruchomy. Układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ (równoważny sile $\bar{P}$) jest zatem w równowadze.

A więc: warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił, działających na ciało sztywne unieruchomione w jednym punkcie O , był w równowadze, jest, by moment ogólny sił działających względem punktu O był zerem (czyli aby układ miał wypadkową przechodzącą przez O).

Ciało o osi nieruchomej. Niech ciało sztywne ma unieruchomioną pewną prostą l (wystarczy w tym celu np. unieruchomić dwa punkty tej prostej). Ciało sztywne może się wówczas tylko obracać około osi l . Możemy przyjąć, że ciało jest swobodne i że w punktach położonych na osi zaczepione są siły reakcyjne, dzięki którym oś jest nieruchoma.

Założmy, że ciało jest w równowadze pod działaniem sił $\{\bar{P}_i\}$. Zatem siły $\{\bar{P}_i\}$ równoważą się z siłami reakcyjnymi. Z warunków równowagi wynika, że moment ogólny tych sił względem osi l jest równy zeru. Ponieważ moment sił reakcyjnych względem osi l , jako sił o początkach położonych na osi, jest zerem, więc moment ogólny sił $\{\bar{P}_i\}$ względem osi l jest zerem czyli

$$(II) \quad \Sigma \text{Mom}_l \bar{P}_i = 0.$$

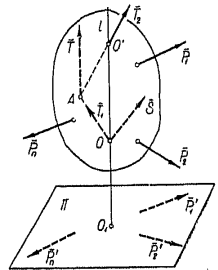
W równaniu (II) siły reakcyjne nie występują. Równanie to jest zatem warunkiem koniecznym, jaki musi spełniać dany układ sił $\{\bar{P}_i\}$, by ciało było w równowadze.

Udowodnimy teraz, że warunek (II) jest również warunkiem wystarczającym równowagi.

Założmy więc, że dowolny układ sił $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$ spełnia warunek (II). Obierzmy dowolny punkt O na osi l . Na mocy twierdzenia o redukcji (str. 241), dany układ sił jest równoważny układowi złożonemu z dwóch sił $\bar{S}$ i $\bar{T}$, z których $\bar{S}$ ma początek w O . Ponieważ moment ogólny sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ względem l jest zerem, więc moment ogólny sił $\bar{S}$ i $\bar{T}$ względem l jest również zerem. Z uwagi na to, że $\text{Mom}_l \bar{S} = 0$ (gdyż siła $\bar{S}$ zaczepiona jest w punkcie O , położonym na l), musi też być $\text{Mom}_l \bar{T} = 0$. Zatem siła $\bar{T}$ bądź przecina l , bądź jest równoległa do l .

Weźmy pod uwagę na osi l dowolny punkt $O' \neq O$. Niechaj A będzie początkiem siły $\bar{T}$. Ponieważ siła $\bar{T}$ leży w płaszczyźnie przechodzącej przez l i A , więc możemy rozłożyć $\bar{T}$ na dwie siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ o kierunkach OA i $O'A$, a następnie przesunąć ich punkty zaczepienia do O i O' . Wykazaliśmy w ten sposób, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ równoważny jest układowi sił, zaczepionych w punktach osi l .

Ponieważ jest oczywistym, że siły zaczepione w punktach osi l , unieruchomionej z założenia, nie poruszają ciała będącego w spoczynku, więc dany układ sił działających $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ jest w równowadze.



Zatem: warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił działających na ciało sztywne, mające oś nieruchomą, był w równowadze, jest to, by moment ogólny układu sił względem tej osi był zerem.

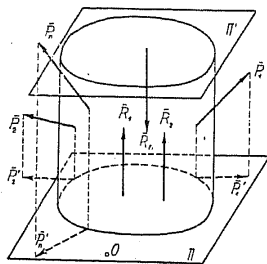
Uwaga. Niech Π będzie dowolną płaszczyzną prostopadłą do prostej l , a O_1 punktem przebicia płaszczyzny Π osią l . Oznaczmy przez $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ rzuty na płaszczyznę Π sił działających $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$. Z określenia momentu względem osi (str. 237) wynika, że moment siły $\bar{P}_i$ względem O_1 równa się momentowi siły $\bar{P}_i$ względem l . Zatem moment ogólny sił $\{\bar{P}_i\}$ względem punktu O_1 równy jest momentowi ogólnemu sił $\{\bar{P}_i\}$ względem osi l .

A więc: warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił $\{\bar{P}_i\}$ jest to, by moment ogólny sił $\{\bar{P}_i\}$ względem O_1 był zerem.

Warunek ten ma taką postać, jak gdyby rzut ciała na płaszczyznę Π miał punkt O_1 unieruchomiony i jak gdyby na rzut ciała działały rzuty sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$.

Aby wiedzieć, czy układ sił działających na ciało sztywne, mające oś nieruchomą, jest w równowadze, wystarczy więc znać tylko rzuty sił działających na płaszczyznę prostopadłą do osi i punkt przecięcia osi z tą płaszczyzną.

Ciało płasko prowadzone. Niechaj ciało sztywne może się poruszać tylko w ten sposób, że tor każdego punktu jest płaski i leży w płaszczyźnie równoległej do pewnej płaszczyzny stałej Π .



Mówimy wówczas, że ciało może odbywać jedynie ruch płaski lub że jest płasko prowadzone, a płaszczyznę Π nazywamy płaszczyzną kierowniczą.

Przykładem ciała płasko prowadzonego jest walec, którego podstawy leżą na dwóch płaszczyznach równoległych Π i Π' . Jeżeli nie ma tarcia, to reakcje płaszczyzn Π i Π' są do tych płaszczyzn prostopadłe.

Założymy ogólnie, że ilekroć nie ma tarcia, reakcje, dzięki którym ciało wykonywać może tylko ruch płaski, są prostopadłe do płaszczyzny kierowniczej Π .

Oczywistym jest zatem, że układ sił prostopadłych do płaszczyzny kierowniczej jest w równowadze, t. zn. że siły prostopadłe do Π nie mogą poruszyć ciała płasko prowadzonego, będącego w spoczynku.

Niechaj ciało płasko prowadzone będzie w równowadze pod działaniem układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$. Siły działające równoważą się więc z reakcjami $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots$, czyli tworzą układ równoważny zeru. Wynika stąd, że rzuty sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ i reakcyj $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots$ na płaszczyznę kierowniczą Π tworzą również układ równoważny zeru. Ponieważ rzuty reakcyj są zerami (gdyż reakcje są prostopadłe do Π), więc same rzuty $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ na płaszczyznę kierowniczą też tworzą układ równoważny zeru.

Niech O będzie dowolnym punktem płaszczyzny Π . Jeżeli siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ są w równowadze, otrzymamy:

$$(3) \quad \Sigma \bar{P}_i = 0, \quad \Sigma \text{Mom}_O \bar{P}_i = 0.$$

Warunek (3) jest więc warunkiem koniecznym równowagi układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$. Udowodnimy, że jest on również warunkiem dostatecznym.

Założmy w tym celu, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ spełnia równania (3). Na mocy twierdzenia o redukcji układ ten jest równoważny układowi złożonemu z siły $\bar{P} = \Sigma \bar{P}_i$ i pewnej pary $\bar{U}, -\bar{U}$. Oznaczmy przez $\bar{P}'$, $\bar{U}'$ i $-\bar{U}'$ rzuty tych sił na płaszczyznę Π . Na mocy (3) otrzymamy:

$$\bar{P}' = 0, \quad \text{Mom}(\bar{U}', -\bar{U}') = 0.$$

Zatem $\bar{P}$ jest prostopadłe do Π ; para zaś $\bar{U}, -\bar{U}$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do Π . Możemy więc parę $\bar{U}, -\bar{U}$ obrócić w jej płaszczyźnie (nie zmieniając momentu) tak, aby w nowym położeniu obie siły były prostopadłe do Π . Oznaczając przez $\bar{V}, -\bar{V}$ nową parę równowążną dawnej, widzimy, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ równoważny jest układowi sił $\bar{P}$, $\bar{V}$ i $-\bar{V}$, prostopadłych do Π . Wynika stąd, że układ $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ jest w równowadze.

A więc: warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił działających na ciało sztywne płasko prowadzone był w równowadze, jest by rzuty tych sił na płaszczyznę kierowniczą tworzyły układ równoważny zeru.

Aby więc zbadać, czy układ sił działających na ciało płasko prowadzone jest w równowadze, wystarczy znać tylko rzuty sił działających na płaszczyznę kierowniczą.

Przykład 1. Dźwignia. Belkę mającą unieruchomioną oś poziomą, do niej prostopadłą, nazywamy *dźwignią*.

Zakładamy, że siły działające na dźwignię leżą w jednej płaszczyźnie *II*, prostopadłej do osi obrotu i przechodzącej przez środek ciężkości.

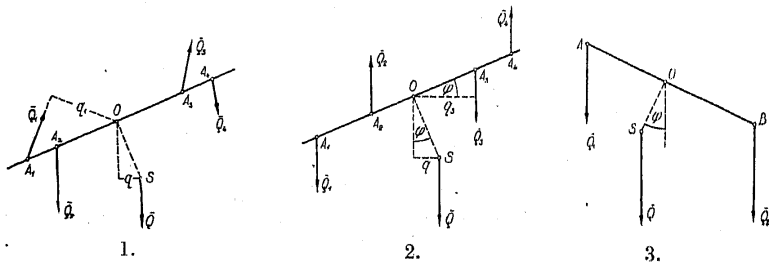
Oznaczmy przez $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}$ siły działające na belkę, zaczepione w punktach $A_1, A_2, \dots$, przez $\bar{Q}$ ciężar belki, zaczepiony w jej środku ciężkości S , przez $Q_1, Q_2, \dots, Q$ wartości bezwzględne, a przez $q_1, q_2, \dots, q$ ramiona tych sił względem punktu przebicia O płaszczyzny *II* osią obrotu (rys. 1).

Moment układu sił $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}$ względem osi obrotu jest w tym przypadku równy momentowi tego układu względem O . Siły działające będą zatem w równowadze, jeżeli suma ich momentów względem O będzie zerem. Warunek równowagi możemy więc napisać w postaci

$$(4) \quad \pm Q_1 q_1 \pm Q_2 q_2 \pm \dots \pm Q q = 0,$$

gdzie znaki $+$ i $-$ przyjmujemy według reguły podanej na str. 238.

Założmy, że środek ciężkości leży pod osią obrotu, gdy belka ma położenie poziome. Wynika stąd oczywiście, że dla belki, na którą nie działają żadne siły (oprócz ciężkości), położenie poziome jest położeniem równowagi. Założmy ponadto, że siły działające mają kierunek pionowy (rys. 2).



Niech φ oznacza kąt, jaki belka tworzy z poziomem. Ponieważ OS jest prostopadłe do belki, więc OS tworzy z pionem również kąt φ . Mamy zatem:

$$q_1 = OA_1 \cos \varphi, \quad q_2 = OA_2 \cos \varphi, \quad \dots, \quad q = OS \sin \varphi,$$

skąd przez podstawienie w (4)

$$(\pm Q_1 \cdot OA_1 \pm Q_2 \cdot OA_2 \pm \dots) \cos \varphi \pm Q \cdot OS \sin \varphi = 0,$$

czyli, dzieląc przez $\cos \varphi$,

$$(5) \quad \pm Q_1 \cdot OA_1 \pm Q_2 \cdot OA_2 \pm \dots \pm Q \cdot OS \tan \varphi = 0.$$

Znając siły $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}$, możemy obliczyć z równania (5) kąt φ , jaki belka tworzy z poziomem w położeniu równowagi.

W szczególności, gdy na belkę działają tylko dwie siły $\bar{Q}_1$ i $\bar{Q}_2$, skierowane w dół i uciepione po przeciwnych stronach belki (jak na rys. 3, str. 278), otrzymamy z (5) $-Q_1 \cdot OA + Q_2 \cdot OB - Q \cdot OS \tan \varphi = 0$ czyli

$$(6) \quad \tan \varphi = (Q_2 \cdot OB - Q_1 \cdot OA) / Q \cdot OS.$$

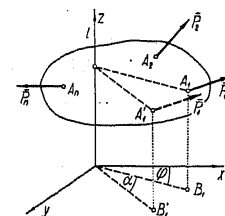
Jeżeli $\varphi = 0$ (t. j. jeżeli belka jest w równowadze w położeniu poziomym), otrzymamy

$$Q_1 \cdot OA = Q_2 \cdot OB.$$

W szczególności więc, jeżeli $OA = OB$, to $Q_1 = Q_2$.

Na tej zasadzie polega przyrząd zwany *wagą*, służący do porównywania ciężarów dwóch ciał, a pośrednio ich mas.

Przykład 2. Ciało sztywne, mające oś l unieruchomioną, jest w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ o punktach zaczepienia $A_1, A_2, \dots, A_n$. Podać warunki konieczne i dostateczne, jakie muszą spełniać te siły, by ciało pozostawało nadal w równowadze, jeżeli obrócimy je około osi l o dowolny kąt α , nie zmieniając przy tym kierunków, zwrotów, wielkości, ani punktów zaczepienia (w ciele) tych sił.



Przyjmijmy oś l za oś z układu współrzędnych i oznaczmy przez $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ współrzędne punktów zaczepienia $A_1, A_2, \dots$, a przez $x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, \dots$ współrzędne punktów $A'_1, A'_2, \dots$, w które przeszły punkty $A_1, A_2, \dots$ przy obrocie ciała o kąt α wokół osi l . Niech B_1 i B'_1 będą rzutami punktów A_1 i A'_1 na płaszczyznę xy , a φ kątem między OB a osią x . Kładąc $r_1 = OB_1 = OB'_1$, mamy:

$$(7) \quad x_1 = r_1 \cos \varphi, \quad y_1 = r_1 \sin \varphi,$$

$$(8) \quad x'_1 = r_1 \cos (\varphi + \alpha), \quad y'_1 = r_1 \sin (\varphi + \alpha), \quad z_1 = z'_1.$$

Zatem $x'_1 = r_1 \cos \varphi \cos \alpha - r_1 \sin \varphi \sin \alpha$, skąd na mocy (7)

$$(9) \quad x'_1 = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \quad \text{i podobnie} \quad y'_1 = y_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha.$$

Analogiczne wzory otrzymamy dla pozostałych punktów $A'_2, A'_3, \dots$

Ponieważ po obrocie o kąt α ciało ma zachować równowagę, więc moment sił względem osi z musi być zerem czyli

$$\Sigma(P_{ix}y'_i - P_{iy}x'_i) = 0.$$

Podstawiając zamiast x'_i, y'_i wyrażenia ze wzorów (9), otrzymamy

$$(10) \quad \cos \alpha \Sigma(P_{ix}y_i - P_{iy}x_i) + \sin \alpha \Sigma(P_{ix}x_i + P_{iy}y_i) = 0.$$

Ponieważ równowaga zachodzi dla $\alpha = 0$, więc wstawiając $\alpha = 0$ do wzoru (10), otrzymamy

$$(11) \quad \Sigma(P_{ix}y_i - P_{iy}x_i) = 0.$$

Z (10) mamy dla $\alpha = \pi/2$

$$(12) \quad \Sigma(P_{ix}x_i + P_{iy}y_i) = 0.$$

Na odwrót, jeżeli zachodzą warunki (11) i (12), to zachodzi oczywiście warunek (10) dla każdego α . Równania (11) i (12) są więc szukanymi warunkami koniecznymi i wystarczającymi.

Wyznaczanie reakcyj działających na oś nieruchomą. Niech ciało sztywne ma prostą l unieruchomioną w dwóch punktach O i O' . Możemy wówczas przyjąć, że siły reakcyjne zaczepione są w punktach O i O' .

Założmy, że układ $\{P_i\}$ sił działających na ciało jest w równowadze.

Niech punkt O będzie początkiem układu współrzędnych, a oś l osią z -ów. Oznaczmy przez x_i, y_i, z_i współrzędne punktów zaczepienia sił $\{P_i\}$, przez $\bar{R}$ i $\bar{N}$ reakcje w punktach O i O' , a przez d długość odcinka OO' .

Ponieważ układ sił $\{P_i\}$ wraz z reakcjami $\bar{R}$ i $\bar{N}$ jest w równowadze, więc tworząc rzuty sumy i momentu ogólnego względem O na osie układu współrzędnych, otrzymamy sześć równań:

$$(I) \quad \Sigma P_{ix} + R_x + N_x = 0,$$

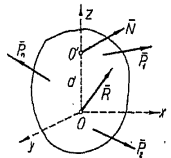
$$(II) \quad \Sigma P_{iy} + R_y + N_y = 0,$$

$$(III) \quad \Sigma P_{iz} + R_z + N_z = 0,$$

$$(IV) \quad \Sigma(P_{iy}z_i - P_{iz}y_i) + N_y d = 0,$$

$$(V) \quad \Sigma(P_{iz}x_i - P_{ix}z_i) - N_x d = 0,$$

$$(VI) \quad \Sigma(P_{ix}y_i - P_{iy}x_i) = 0.$$



Z równań (IV) i (V) możemy wyznaczyć N_x i N_y . Następnie wyznaczamy R_x i R_y z równań (I) i (II). Wreszcie obliczamy $R_z + N_z$ z równania (III).

Widzimy więc, że równania powyższe nie pozwalają wyznaczyć reakcji. Niewiadomych jest wprawdzie sześć (R_x, R_y, R_z i N_x, N_y, N_z), t. j. tyle ile równań, występują one jednak tylko w pięciu równaniach. Równanie (VI) wyraża warunek równowagi sił działających. Z równań (I)-(V) możemy wyznaczyć tylko składowe reakcji, prostopadłe do osi l , i sumę składowych równoległych do osi l .

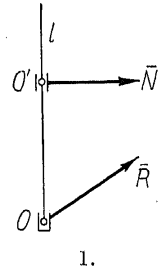
Zadania, w których siły reakcyjne nie dają się wyznaczyć z warunków równowagi, nazywamy *statycznie niewyznaczalnymi*.

A więc obliczenie reakcyj ciała sztywnego, unieruchomionego w dwóch punktach jest statycznie niewyznaczalne.

Jeżeli założymy, że dane ciało nie jest ciałem sztywnym, lecz ciałem mogącym ulegać zniekształceniom, to opierając się na teorii sprężystości, moglibyśmy siły reakcyjne obliczyć.

Zadanie nasze możemy uczynić statycznie wyznaczalnym, przyjmując, że punkt O' jest unieruchomiony w t. zw. *łożysku sztywnym* bez tarcia.

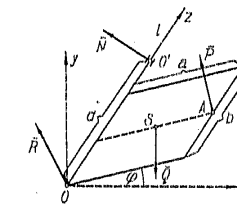
Reakcja $\bar{N}$ jest wtedy prostopadła do osi l . Mamy w tym przypadku $N_z = 0$, możemy więc wyznaczyć R_z z równania (III).



1.

Przykład 3. Płyta ciężka prostokątna ma oś poziomą l unieruchomioną w punktach O i O' (łożysko sztywne). Środek boku równoległego do osi jest punktem zaczepienia siły $\bar{P}$ prostopadłej do płyty. Dane są: ciężar $\bar{Q}$ o początku w środku S prostokąta, boki

prostokąta a i b oraz długość $d = OO'$. Wyznaczyć w położeniu równowagi reakcje $\bar{R}$ i $\bar{N}$ (w O i O') oraz kąt φ , jaki płyta tworzy z poziomem.



2.

Niech O będzie początkiem, a oś l osią z układu współrzędnych; nadajmy osi x kierunek poziomy, a osi y kierunek pionowy ku górze. Będziemy mogli zastosować równania (I)-(VI), str. 280.

Punkt S ma współrzędne $\frac{1}{2}a \cos \varphi, \frac{1}{2}a \sin \varphi, \frac{1}{2}b$; punkt A zaś $a \cos \varphi, a \sin \varphi, \frac{1}{2}b$. Mamy:

$$Q_x=0, \quad Q_y=-Q, \quad Q_z=0, \quad \text{gdzie} \quad Q=|Q|;$$

$$P_x=-P \sin \varphi, \quad P_y=P \cos \varphi, \quad P_z=0, \quad \text{gdzie} \quad P=|\vec{P}|.$$

Z uwagi, że $N_z=0$, dostaniemy na mocy wzorów (I)-(VI), str. 280:

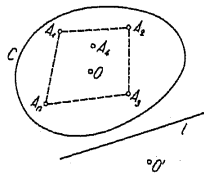
$$\begin{aligned} -P \sin \varphi + R_x + N_x &= 0, & P \cos \varphi - Q + R_y + N_y &= 0, & R_z &= 0, \\ \frac{1}{2} b P \cos \varphi - \frac{1}{2} Q b + N_y d &= 0, & \frac{1}{2} b P \sin \varphi - N_x d &= 0, & -P a + \frac{1}{2} Q a \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\cos \varphi = 2P/Q$, a z pozostałych równań wyznaczamy R_x, R_y i N_x, N_y . Mamy $R_z = N_z = 0$.

Oczywiście równowaga jest możliwa, jeżeli $2P/Q \leq 1$, t. j. jeżeli $P \leq Q/2$.

§ 12. Równowaga ciał ciężkich podpartych. Jeżeli ciało sztywne, na które nie działają żadne siły prócz siły ciężkości, opiera się na płaszczyźnie poziomej Π i jest w równowadze, to siły reakcyjne z jakimi płaszczyzna działa na ciało (w punktach podparcia) równoważą się z siłami ciężkości.

Założmy, że płaszczyzna podpierająca Π jest gładka. Reakcje są wtedy prostopadłe do płaszczyzny; mają więc wypadkową $\vec{F}$, zaczepioną w pewnym punkcie O płaszczyzny Π . Punkt O nazwalimy *środkiem ciśnień* (str. 264). Siły ciężkości działające na dane ciało sztywne mają wypadkową $\vec{Q}$, zaczepioną w środku ciężkości S .



Gdy ciało jest w równowadze, siły $\vec{F}$ i $\vec{Q}$ równoważą się nawzajem. Zatem $\vec{F} + \vec{Q} = 0$, a ponadto $\vec{F}$ i $\vec{Q}$ leżą na jednej prostej. Wobec tego środek ciśnień leży w punkcie przecięcia się kierunku siły $\vec{Q}$ z płaszczyzną Π . Środek ciśnień O jest więc rzutem środka ciężkości S na płaszczyznę podpierającą Π .

Jeżeli ciało opiera się na płaszczyźnie Π tylko w jednym punkcie O i jest w równowadze, to reakcja zaczepiona jest w O . Zatem środek ciężkości leży wówczas nad punktem oparcia.

Niech teraz ciało opiera się na płaszczyźnie Π w punktach $A_1, A_2, \dots$ i niech C będzie dowolną linią zamkniętą wypukłą, otaczającą wszystkie punkty oparcia $A_1, A_2, \dots$. Udowodnimy, że wówczas środek ciśnień O leży również bądź wewnątrz, bądź na samej linii C .

Przypuśćmy bowiem, że środek ciśnień leży zewnątrz linii C w punkcie O' . Poprowadźmy dowolną prostą l w płaszczyźnie Π , tak by punkt O' i linia C leżały po przeciwnych stronach prostej l .

Momenty sił reakcyjnych względem prostej l byłyby więc skierowane przeciwnie niż moment siły $\vec{F}$. Jest to jednak niemożliwe, gdyż moment ogólny sił reakcyjnych jest równy momentowi siły $\vec{F}$. Istotnie więc środek ciśnień musi leżeć wewnątrz obwodu wypukłego C . Jeżeli K jest najmniejszą linią wypukłą (na rysunku łamana A_1, A_2, A_3, A_n), w obrębie której leżą punkty oparcia¹⁾, to środek ciśnień leży także w obrębie tej linii. Ponieważ założyliśmy, że ciało jest w równowadze, więc kierunek siły ciężkości przechodzi przez środek ciśnień, trafia zatem również w obręb linii K .

Udowodnimy teraz, że jeżeli ciężar trafia w obręb linii K , to wystąpią reakcje, które zrównoważą ciężar.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1^o Ciało podparte jest w dwóch punktach A i B . W tym przypadku linią K jest odcinek AB . Jeżeli kierunek siły ciężkości przechodzi przez punkt G odcinka AB , to istnieją dwie siły reakcyjne $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$ o początkach w A i B , skierowane pionowo w górę. Siły te można wyznaczyć graficznie jak na str. 257, lub rachunkowo jak w przykładzie 4, str. 267. Wynika stąd na mocy zasady podanej na str. 263, że reakcje zrównoważą ciężar.

2^o Ciało podparte jest w $n > 2$ punktach. Jeżeli punkty te leżą na jednej prostej, to oznaczając przez A i B skrajne punkty oparcia, możemy postąpić jak w przypadku 1^o. Przypuśćmy więc, że punkty oparcia nie leżą wszystkie na jednej prostej. Jeżeli siła ciężkości trafia w obręb linii K w punkcie O , to możemy znaleźć takie trzy punkty oparcia, że punkt O leżeć będzie w obrębie trójkąta, którego punkty te są wierzchołkami (punkty A_1, A_3, A_n na rysunku). Jak wykażemy za chwilę (str. 284, przykład 4), można wówczas wyznaczyć reakcje, zaczepione w wierzchołkach tego trójkąta i równoważące siłę ciężkości.

Mamy więc twierdzenie następujące:

Jeżeli ciężkie ciało sztywne opiera się na płaszczyźnie poziomej gładkiej, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby reakcje płaszczyzny mogły zrównoważyć ciężar ciała jest, by siła ciężkości trafiała w obręb najmniejszej linii wypukłej K , obejmującej wszystkie punkty oparcia.

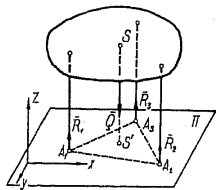
¹⁾ W geometrii dowodzi się, że linia taka zawsze istnieje i mieści się wewnątrz każdej linii wypukłej, obejmującej punkty oparcia.

Ogólniej: niech ciało sztywne opiera się na powierzchni poziomej gładkiej i niech oprócz siły ciężkości działają na nie inne jeszcze siły. Jeżeli ciało jest w równowadze, to wypadkowa reakcyj $\vec{F}$ równoważy siły działające. Wynika stąd, że siły działające na ciało mają wypadkową pionową $-\vec{F}$, której kierunek przechodzi przez środek ciężkości O , a więc trafia w obręb linii K . Na odwrót, jeżeli siły działające mają wypadkową pionową, skierowaną w dół i trafiającą w obręb linii K , to wystąpią reakcje, równoważące siły działające na ciało. Dowód przeprowadza się jak poprzednio.

Przykład 4. Stolek o trzech nogach opiera się na podłodze Π . Wyznaczyć reakcje w punktach oparcia A_1, A_2, A_3 przy założeniu, że nie ma tarcia.

Oznaczmy przez S środek ciężkości stolika, przez S' rzut S na Π , przez $\bar{Q}$ ciężar stolika, a przez $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ reakcje (rys. 1).

Zadanie rozwiążemy najprościej, obliczając momenty ogólne sił względem prostych A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 ; oczywiście momenty te są zerami.



1.

Niech h_3 oznacza odległość A_3 od A_1A_2 , a w_3 odległość S' od A_1A_2 . Tworząc moment względem osi A_1A_2 , otrzymamy:

$$R_3 h_3 - Q w_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad R_3 = |\bar{R}_3| \quad \text{i} \quad Q = |\bar{Q}|,$$

gdyż momenty sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ są zerami. Zatem

$$R_3 = Q w_3 / h_3.$$

Analogicznie otrzymamy:

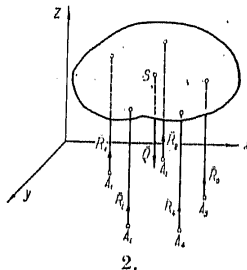
$$R_1 = Q w_1 / h_1 \quad \text{i} \quad R_2 = Q w_2 / h_2.$$

Przykład 5. Niech ciało sztywne spoczywa na płaszczyźnie poziomej Π na n punktach oparcia $A_1, A_2, \dots, A_n$. Przyjmijmy płaszczyznę Π za płaszczyznę xy układu współrzędnych (x, y, z) i oznaczmy przez $x_1, y_1, 0, x_2, y_2, 0, \dots, x_n, y_n, 0$ współrzędne punktów oparcia $A_1, A_2, \dots, A_n$, zaś przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości S (rys. 2).

Niechaj $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n$ oznaczają reakcje, $\bar{Q}$ ciężar, zaś $R_1, R_2, \dots, R_n$ i Q wartości bezwzględne tych sił.

Tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy dla rzutu na oś z

$$(13) \quad R_1 + R_2 + \dots + R_n - Q = 0.$$



2.

Pozostałe dwa równania odpadają, gdyż dają tożsamościowo 0.

Tworząc następnie momenty względem początku układu współrzędnych, otrzymamy tylko dwa równania:

$$(14) \quad -R_1 y_1 - R_2 y_2 - \dots + Q y_0 = 0, \quad R_1 x_1 + R_2 x_2 + \dots - Q x_0 = 0,$$

gdyż moment sił względem osi z jest zerem.

Mamy wobec tego trzy tylko równania dla wyznaczenia reakcyj. Jeżeli więc $n > 3$, to reakcyj nie będziemy mogli wyznaczyć. Zadanie wyznaczenia reakcyj w przypadku np. stołu opierającego się na czterech nogach jest więc statycznie niewyznaczalnym (p. str. 281).

Jeżeli natomiast ciało podparte w $n > 3$ punktach nie jest sztywne, to reakcje można wyznaczyć, opierając się na teorii sprężystości. Okażemy to na przykładzie następnym.

Przykład 6. Stół prostokątny opiera się na czterech nogach w punktach A_1, A_2, A_3, A_4 płaszczyzny poziomej gładkiej Π .

Oznaczmy przez $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4$ reakcje, przez $\bar{Q}$ ciężar, a przez R_1, R_2, R_3, R_4, Q wartości bezwzględne tych sił. Załóżmy, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami prostokąta i połączmy:

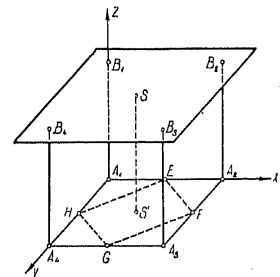
$$(15) \quad A_1 A_2 = A_3 A_4 = a, \quad A_1 A_4 = A_2 A_3 = b.$$

Przyjmijmy A_1 za początek układu współrzędnych, a proste $A_1 A_2$ i $A_1 A_4$ za osie x i y , nadając osi z zwrot ku górze. Oznaczmy wreszcie przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości S płyty danego stołu.

Tworząc rzuty sił na osie układu współrzędnych, oraz momenty sił względem tych osi, otrzymamy (por. równania (13) i (14) przykładu 5):

$$(16) \quad R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - Q = 0,$$

$$(17) \quad -(R_3 + R_4)b + Q y_0 = 0, \quad (R_2 + R_3)a - Q x_0 = 0.$$



Z równań tych wyznaczyć reakcyj nie można.

Założmy jednak, że płyta stołu i płaszczyzna Π (na której opierają się nogi stołu) są sztywne, natomiast, że nogi stołu sztywne nie są, lecz ulegają ściśnieniu, i że reakcje są proporcjonalne (co do wielkości) do skrócenia poszczególnych nóg.

Jeżeli więc przez l oznaczymy pierwotną długość nóg, zaś przez z_1, z_2, z_3, z_4 ich długości po ściśnieniu, to skrócenia wyniosą $l - z_1, l - z_2, l - z_3, l - z_4$, skąd w myśl założenia:

$$(18) \quad R_1 = m(l - z_1), \quad R_2 = m(l - z_2), \quad R_3 = m(l - z_3), \quad R_4 = m(l - z_4),$$

gdzie m jest współczynnikiem proporcjonalności.

Równania (16), (17) i (18) stanowią układ siedmiu równań o ośmiu niewiadomych R_1, R_2, R_3, R_4 i z_1, z_2, z_3, z_4 . Ósme równanie otrzymamy, wyrażając, że punkty B_1, B_2, B_3, B_4 , w których płyta stołu opiera się na nogach, leżą w jednej płaszczyźnie; założyliśmy bowiem, że płyta stołu jest sztywna.

Punkty B_1, B_2, B_3 i B_4 mają współrzędne $0, 0, z_1, a, 0, z_2, a, b, z_3$ i $0, b, z_4$. Jak wiadomo z geometrii analitycznej, warunek by punkty te leżały w jednej płaszczyźnie, wyraża się wzorem

$$\begin{vmatrix} 0, 0, z_1, 1 \\ a, 0, z_2, 1 \\ a, b, z_3, 1 \\ 0, b, z_4, 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczając wyznacznik, otrzymamy:

$$(19) \quad z_1 - z_3 + z_3 - z_4 = 0.$$

Z równań (16)-(19) możemy już wyznaczyć niewiadome reakcje. Otrzymamy:

$$(20) \quad \begin{aligned} z_1 &= l + \frac{1}{4m} Q \left[-3 + 2 \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \right], & z_2 &= l + \frac{1}{4m} Q \left[-1 - 2 \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \right], \\ z_3 &= l + \frac{1}{4m} Q \left[1 - 2 \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \right], & z_4 &= l + \frac{1}{4m} Q \left[-1 + 2 \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \right], \end{aligned}$$

$$(21) \quad \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4} Q \left[3 - 2 \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \right], & R_2 &= \frac{1}{4} Q \left[1 + 2 \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \right], \\ R_3 &= \frac{1}{4} Q \left[-1 + 2 \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \right], & R_4 &= \frac{1}{4} Q \left[1 - 2 \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \right]. \end{aligned}$$

Na to, by wzory (21) dawały na $R_1, \dots, R_4$ wartości nieujemne, muszą zachodzić związki następujące:

$$(22) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \leq \frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

Wynika stąd, że rzut środka ciężkości na płaszczyznę poziomą, t. j. punkt $S'(x_0, y_0, 0)$, musi leżeć w obrębie równoległoboku $EFHH$, którego wierzchołki są środkami boków prostokąta $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Przypuśćmy, że punkt S' wypada w obrębie trójkąta $A_1 EH$ (poza bokiem EH). Wówczas byłoby

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} < \frac{1}{2} \quad \text{czyli} \quad 1 - 2 \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) > 0,$$

skąd na mocy (20) $z_3 > l$; znaczy to, że noga $A_3 B_3$ się wydłużyła, co oczywiście niemożliwe.

Musimy zatem przyjąć, że *stół opiera się tylko na trzech nogach*, mianowicie w punktach A_1, A_2, A_4 . Kładąc $R_3 = 0$, otrzymamy więc z równań (17):

$$R_4 = Q y_0 / b, \quad R_2 = Q x_0 / a,$$

z równania zaś (16)

$$R_1 = Q \left[1 - \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \right].$$

Przykład 7. Walec ciężki opiera się na płaszczyźnie poziomej gładkiej. Na walec działa para sił $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ leżących w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek ciężkości S . Jaka może być maksymalna wielkość momentu pary, gdy walec jest w równowadze?

Oznaczmy przez $\bar{M}$ moment pary, przez $\bar{Q}$ ciężar walca, przez $\bar{F}$ wypadkową sił reakcyjnych, zaczepioną w O , a przez r promień podstawy walca.

Jeżeli walec jest w równowadze, to suma sił jest zerem, więc $\bar{F} + \bar{Q} = 0$ czyli $\bar{F} = -\bar{Q}$.

Zakładając, że S leży na osi walca i kładąc $d = AO$, dostaniemy z obliczenia momentu względem A :

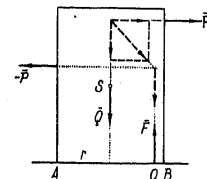
$$|\bar{M}| + |\bar{Q}|r - |\bar{F}|d = 0.$$

Ponieważ, $|\bar{Q}| = |\bar{F}|$, więc

$$|\bar{M}| = Q(d - r),$$

gdzie $Q = |\bar{Q}|$. Ponieważ maksymalną wartością d jest $d = 2r$, więc maksymalną wartością $|\bar{M}|$ jest Qr .

Jeżeli więc $|\bar{M}| > Qr$, równowaga jest niemożliwa. Jeżeli zaś $|\bar{M}| \leq Qr$, to, jak łatwo stwierdzić, wypadkowa sił $\bar{Q}, \bar{P}$ i $-\bar{P}$ jest równa $\bar{Q}$ i trafia płaszczyznę poziomą w obrębie podstawy walca. Walec może więc pozostawać w równowadze.



§ 13. Siły wewnętrzne. Przeprowadźmy przez dowolny punkt O osi obranej w danym ciele sztywnym, np. w belce, płaszczyznę Π , prostopadłą do tej osi. Płaszczyzna podzieli ciało na dwie części I i II. Załóżmy, że ciało poddane jest działaniu pewnych sił i że jest w równowadze. W wielu zagadnieniach mechaniki technicznej dogodnym jest rozpatrywać części I i II tak, jak gdyby tworzyły odrębne ciała sztywne, stykające się wzdłuż płaszczyzny przekroju Π .

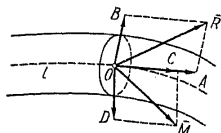
Z takiego ujęcia wynika, że część II działa na część I z pewnymi siłami. Siły te nazywamy *napięciami*.

Przyjmując punkt O za środek redukcji, możemy zastąpić napiecia przez jedną siłę $\bar{R}$ o początku O i parę sił o momencie $\bar{M}$.

Składową $\overline{OA}$ siły $\bar{R}$, prostopadłą do przekroju, nazywamy *ściskaniem* wypadkowym lub *rozciąganiem* w O , zależnie od tego, czy składowa jest skierowana do wewnątrz, czy na zewnątrz części I.

Składową $\overline{OB}$ siły $\bar{R}$, styczną do przekroju, nazywamy siłą wypadkową *zginającą* lub *ścinającą* w O .

Składową $\overline{OC}$ momentu $\bar{M}$, prostopadłą do płaszczyzny przekroju Π , nazywamy *momentem skręcającym* w O , składową zaś $\overline{OD}$ styczną do powierzchni *momentem zginającym* w O .



1.

Moment skręcający możemy uważać za moment pewnej pary sił, leżących w płaszczyźnie przekroju, zaś moment zginający za moment pary sił, leżących w płaszczyźnie stycznej do osi w punkcie O . Działanie tych par, z których pierwsza stara się ciało skrócić, a druga zgąć, tłumaczą nam nazwy momentów.

Jeżeli ciało jest w równowadze, to siły zewnętrzne działające na część I równoważą się z napięciami. Zatem $-\bar{R}$ i $-\bar{M}$ równają się odpowiednio sumie i momentowi ogólnemu względem O sił zewnętrznych działających na część I. Znając siły zewnętrzne, możemy więc wyznaczyć $\bar{R}$ i $\bar{M}$.

Znajomość siły $\bar{R}$ i momentu $\bar{M}$ ma wielkie znaczenie w nauce o wytrzymałości. Na ogół wytrzymałość ciała jest tym bardziej zagrożona, im $\bar{R}$ i $\bar{M}$ są większe.

Napięcia, z jakimi część I działa na II, dają się zastąpić w myśl prawa akcji i reakcji sumą $-\bar{R}$ o początku O i parą o momencie $-\bar{M}$.

Przykład 1. Belka podparta w punktach A i B obciążona jest siłami $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_5$ skierowanymi pionowo w dół i zaczepionymi w odległościach $x_1, x_2, \dots, x_5$ od A (str. 257, rys. 1). Zakładając, że podpory są gładkie, otrzymamy (por. wzory (13) i (14), str. 267):

$$R_2 = (P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_5 x_5) / d, \quad R_1 = [P_1 (d - x_1) + \dots + P_5 (d - x_5)] / d,$$

gdzie $AB = d$, a P_i, R_i i R_2 oznaczają wartości bezwzględne sił i reakcji.

Utwórzmy przekrój belki płaszczyzną prostopadłą do osi w punkcie C , odległym o x od A . Oznaczmy przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{M}$ moment względem C napięć części CB na część AC . Przyjmując, że przekrój wypada między siłą P_3 a P_4 , otrzymamy:

$$-\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3, \quad -\bar{M} = \text{Mom}_C \bar{R}_1 + \text{Mom}_C \bar{P}_1 + \text{Mom}_C \bar{P}_2 + \text{Mom}_C \bar{P}_3.$$

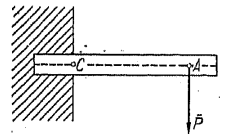
Nadając osi y kierunek pionowy ze zwrotem ku górze, otrzymamy:

$$R_y = R_1 - P_1 - P_2 - P_3, \quad M = x R_1 - (x - x_1) P_1 - (x - x_2) P_2 - (x - x_3) P_3.$$

Ponieważ $\bar{R}$ i $\bar{M}$ leżą w płaszczyźnie przekroju, więc $\bar{R}$ jest siłą zginającą, $\bar{M}$ zaś momentem zgięcia. Siła ściskająca (lub rozciągająca) i moment skręcający są zerami. Siłę $\bar{R}$ i moment $\bar{M}$ możemy również wyznaczyć przy pomocy wieloboku sznurowego jak na str. 257 i 258.

Przykład 2. Belka, wmurowana jak na rysunku, obciążona jest w A siłą $\bar{P}$. Utwórzmy przekrój belki przez punkt C i oznaczmy przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{M}$ moment względem C napięć części lewej na prawą. Mamy zatem:

$$-\bar{R} = \bar{P}, \quad -\bar{M} = \text{Mom}_C \bar{P}.$$



Część prawa działa więc na część lewą (wmurowaną) napięciami o sumie $-\bar{R}$ i momencie $-\bar{M}$. Reakcje muru, równoważące te napięcia, mają tedy sumę $\bar{R} = -\bar{P}$ i moment $\bar{M} = -\text{Mom}_C \bar{P}$.

III. Układy ciał

§ 14. Warunki równowagi. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych (swobodnych lub nie) jest, by każde ciało układu było w równowadze. Wynika stąd, że warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych jest, by dla każdego ciała z osobna siły działające na to ciało równoważyły się z reakcjami.

Siły, z jakimi dwa ciała układu działają na siebie, nazywamy siłami wewnętrznymi układu. Pozostałe siły nazywamy zewnętrznymi.

Jeżeli np. dwa ciała układu stykają się z sobą, to reakcje w punktach zetknięcia są siłami wewnętrznymi. Natomiast te siły działające i reakcje, które pochodzą od ciał nie należących do układu (np. od podpór), są siłami zewnętrznymi.

Siły wewnętrzne występują parami i podlegają prawu akcji i reakcji, zatem suma i moment ogólny sił wewnętrznych jest zerem.

Jeżeli układ ciał jest w równowadze, to dla każdego ciała siły zewnętrzne, działające na to ciało, równoważą się z siłami wewnętrznymi. Wynika stąd, że siły zewnętrzne, działające na cały układ, równoważą się z siłami wewnętrznymi układu. Ponieważ (jak wyżej wspomnieliśmy) siły wewnętrzne mają sumę i moment ogólny równe zeru, więc jeżeli układ ciał sztywnych jest w równowadze, to suma i moment ogólny sił zewnętrznych są zerami.

Warunek ten jest tylko koniecznym, ale nie wystarczającym do równowagi układu ciał sztywnych.

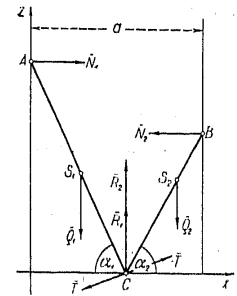
Każda część układu ciał sztywnych, będącego w równowadze, jest oczywiście sama w równowadze. Siłami zewnętrznymi względem pewnej części układu są:

- te siły zewnętrzne całego układu, które działają na daną jego część,
- reakcje, wywierane na tę część przez pozostałe ciała układu.

Wynika stąd, że warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych jest, by siły zewnętrzne, działające na jakąkolwiek część układu, równoważyły się z reakcjami, wywieranymi na tę część przez pozostałe ciała układu.

Możemy bowiem obrać za części układu poszczególne ciała układu.

Przykład. Dwa pręty ciężkie AC i BC , leżące w płaszczyźnie pionowej i stykające się w punkcie C , opierają się w A i B o ściany pionowe, zaś w C o ścianę poziomą. Dane są ciężary prętów $\bar{Q}_1$ i $\bar{Q}_2$, zaczepione w środkach ciężkości, oraz długości $l_1 = AC$, $l_2 = BC$, $a_1 = S_1C$, $a_2 = S_2C$ i odległość d ścian pionowych od siebie. Wyznaczyć w położeniu równowagi kąty α_1 i α_2 , jakie pręty tworzą z poziomem, przy założeniu, że nie ma tarcia.



Oznaczmy: przez $\bar{N}_1$ i $\bar{N}_2$ reakcje ścian pionowych (reakcje te mają więc kierunek poziomy), przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje ścian poziomej (mające więc kierunek pionowy), wreszcie przez $\bar{T}$ siłę, z jaką pręt CB działa na pręt AC w punkcie C . Na mocy prawa akcji i reakcji pręt AC działa wówczas na pręt CB z siłą $-\bar{T}$. O kierunku siły $\bar{T}$ nie możemy nic z góry powiedzieć.

Obierzmy osie x i z w płaszczyźnie prętów, nadając osi x kierunek poziomy, zaś osi z kierunek pionowy w górę. Gdy pręt AC jest w równowadze, siły działające na ten pręt równoważą się. Tworząc zatem ich rzuty na osie x, z i obliczając moment względem C , otrzymamy:

$$(1) \quad N_1 + T_x = 0, \quad -Q_1 + R_1 + T_y = 0,$$

$$(2) \quad N_1 l_1 \sin \alpha_1 - Q_1 a_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

gdzie N_1 , R_1 i Q_1 oznaczają wartości bezwzględne odpowiednich sił. Podobnie dla pręta CB dostaniemy:

$$(3) \quad -N_2 - T_x = 0, \quad -Q_2 + R_2 - T_y = 0,$$

$$(4) \quad -N_2 l_2 \sin \alpha_2 + Q_2 a_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Z równań (2) i (4) mamy:

$$(5) \quad N_1 = Q_1 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 / l_1, \quad N_2 = Q_2 a_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 / l_2,$$

z pierwszych zaś równań (1) i (3) $N_1 = N_2$, skąd na mocy (5)

$$(6) \quad Q_1 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 / l_1 = Q_2 a_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 / l_2.$$

Ponadto, jak widać z rysunku,

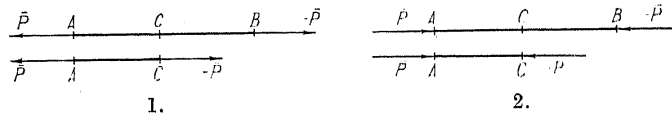
$$(7) \quad l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 = d.$$

Z równań (6) i (7) możemy wyznaczyć kąty α_1 i α_2 .

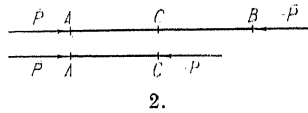
Uwaga. Z równań (1)-(4) nie możemy wyznaczyć sił $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i $\bar{T}$. Możemy natomiast otrzymać siłę $\bar{T}' = \bar{R}_1 + \bar{T}$ i $\bar{T}'' = \bar{R}_2 - \bar{T}$. Są to wypadkowe reakcyj, działających w C na pręty. Dostaniemy:

$$\begin{aligned} T'_x &= T_x = -N_1, & T'_y &= R_1 + T_y = Q_1, \\ T''_x &= -T_x = N_2, & T''_y &= R_2 - T_y = Q_2. \end{aligned}$$

§ 15. Układy prętów. Jeżeli na pręt sztywny działają dwie siły, zaczepione w jego końcach A i B , i pręt jest w równowadze, to siły te (z uwagi na to, że ich suma i moment ogólny równają się zeru) działają wzdłuż pręta, są równe co do wielkości i skierowane przeciwnie. Oznaczmy te siły przez $\bar{P}$ i $-\bar{P}$.



1.



2.

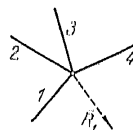
Napięcia w prętach. Przetnijmy pręt w jakimś punkcie C i usuńmy prawą jego część CB (rys. 1). Aby teraz lewa część pręta pozostała w równowadze, należałoby dołączyć siłę $-\bar{P}$ o początku w C . Możemy zatem przyjąć, że część prawa CB oddziaływa na część lewą AC z siłą $-\bar{P}$. Siłę tę nazywamy *napięciem* pręta.

Gdy siły $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ skierowane są ku sobie, napięcie nazywamy *ściskaniem* (rys. 2), w przeciwnym razie *rozciąganiem* (rys. 3).

Napięcie ma w każdym punkcie pręta tę samą wielkość i kierunek; zwrot zaś napięcia będzie zależał od tego, czy idzie o oddziaływanie części prawej na lewą, czy przeciwnie. Co do końca pręta, to możemy mówić tylko o oddziaływaniu całego pręta na koniec. Jeżeli więc podamy wielkość napięcia i jego rodzaj (t. zn. czy jest ono ściskaniem czy rozciąganiem), to napięcia w końcach prętów będą w zupełności określone.

Połączenia przegubowe. Wyobraźmy sobie kilka prętów sztywnych tak ze sobą połączonych, że muszą się one stale ze sobą stykać pewnymi punktami, np. końcami. Jeżeli poza tym połączenie to nie powoduje innych ograniczeń ruchu prętów, powiadamy, że pręty są *połączone przegubowo*, a punkty, w których pręty stykają się jeden z drugim, nazywamy *przegubami*.

Połączenie przegubowe możemy otrzymać w przybliżeniu, łącząc np. końce prętów bardzo krótką nicią nierozciągliwą.



3.

Reakcje, z jakimi jeden pręt działa na drugi, możemy zastąpić w myśl twierdzenia o redukcji przez jedną siłę $\bar{R}$, zaczepioną w punkcie styku oraz przez parę sił o momencie $\bar{M}$.

Dla prostoty zakładamy będziemy, że $\bar{M} = 0$. Mówimy wówczas, że *przegub jest gładki*.

Zaznaczyć należy, że nie zawsze możemy założyć gładkość przegubu; przykłady na to podamy później (str. 297).

W przypadku przegubu gładkiego reakcja, z jaką jeden pręt oddziaływa na drugi, jest siłą zaczepioną w punkcie zetknięcia, t. j. w przegubie. W szczególności, jeżeli w przegubie gładkim schodzi się kilka prętów, to reakcja wywierana na pewien pręt przez pozostałe będzie siłą zaczepioną w punkcie przegubu (np. reakcja $\bar{R}_1$ prętów 2, 3, 4 na pręt 1, przedstawiona na rysunku).

Układy prętów. Weźmy pod uwagę układ prętów połączonych w końcach. Jeżeli jakaś siła zewnętrzna zaczepiona jest w przegubie, to należy wówczas zaznaczyć wyraźnie, na który pręt działa ta siła.

Gdy układ prętów jest w równowadze, siły działające na każdy pręt muszą się oczywiście równoważyć z reakcjami wywieranymi na ten pręt.

Na rys. 1, str. 294, przedstawiony jest układ prętów, w którym na pręt AB działają siły zewnętrzne $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$. Siła $\bar{P}_3$ zaczepiona jest w końcu A pręta. Siły te równoważą się z reakcjami $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w końcach A i B .

Często dogodnym jest uważać przegub za odrębny punkt materialny (za odrębne ciało), połączony z końcami prętów schodzących się w tym przegubie. Innymi słowy, zakłada się wówczas, że końce prętów nie są połączone z sobą bezpośrednio, lecz za pośrednictwem przegubu. Przy tym założeniu reakcje stykających się prętów zastępuje się reakcjami przegubu na te pręty, a siły zaczepione w przegubie uważa się za siły działające na przegub, a nie na pręty. Jedyne siły wewnętrzne układu prętów będą wtedy reakcje przegubów na pręty i prętów na przeguby.

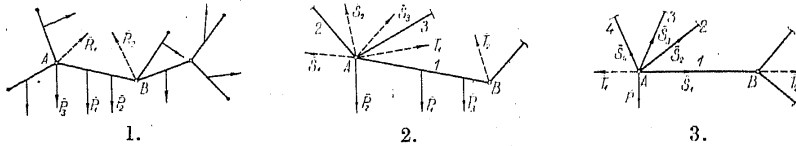
W przypadku równowagi układu każdy pręt i przegub jest w równowadze, zatem (str. 290):

1^o siły zewnętrzne, działające na dowolny pręt (nie zaczepione w przegubie) równoważą się z reakcjami, jakie przeguby na ten pręt wywierają;

2^o siły zewnętrzne, zaczepione w którymkolwiek przegubie, równoważą się z reakcjami prętów na ten przegub.

Na rys. 2 siła $\bar{P}_2$ o początku w przegubie A równoważy się z reakcjami $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ prętów 1, 2, 3 na przegub A . Siły zaś zewnętrzne $\bar{P}_1, \bar{P}_3$ działające na pręt AB równoważą się z reakcjami $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ przegubów A i B na ten pręt.

O kierunkach reakcji przegubów na pręty nie możemy na ogół nic z góry powiedzieć. Inaczej jednak przedstawia się sprawa, gdy siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach.



Weźmy pod uwagę taki właśnie układ prętów, pozostający w równowadze (rys. 3). Niech $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ oznaczają reakcje przegubów A i B na pręt łączący te przeguby. Ponieważ na pręt nie działają żadne siły zewnętrzne, więc reakcje $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ muszą się równoważyć (wynika to z warunku 1^o). Reakcje działają więc wzdłuż pręta i mamy $\bar{T}_1 = -\bar{T}_2$.

A więc: jeżeli układ prętów połączonych przegubowo jest w równowadze, a siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach, to reakcje przegubów na pręty są siłami skierowanymi wzdłuż prętów; reakcje, z jakimi oddziałują na pręt przeguby, które ten pręt łączy, są równe co do wielkości i kierunku, a zwroty mają przeciwne.

Reakcje przegubów A i B wywołują w pręcie napięcie, które może być rozciąganiem lub ściskaniem (w naszym przypadku napięcie jest rozciąganiem). Na mocy prawa akcji i reakcji pręt AB działa na przegub A z siłą $\bar{S}_1 = -\bar{T}_1$. Siła $\bar{S}_1$ jest więc napięciem pręta w końcu A . Reakcje prętów na przeguby są tedy równe napięciom tych prętów. Z warunku 2^o wynika więc tw. następujące:

Siły zewnętrzne zaczepione w przegubie równoważą się z napięciami prętów (schodzących się w tym przegubie).

Na rys. 3 napięcia $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4$ prętów 1, 2, 3, 4 równoważą się z siłą $\bar{P}$, zaczepioną w przegubie A ; jest więc $\bar{P} + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4 = 0$.

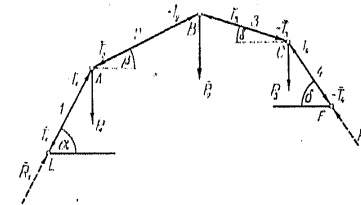
Przykład 1. Trzy pręty AB, BC i CD , połączone przegubowo w punktach B i C , unieruchomione zaś (również przegubowo) w punktach A i D , pozostają w równowadze w płaszczyźnie pionowej pod działaniem sił pionowych $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ o początkach E i F . Dane są: siła $\bar{P}$ oraz punkty zaczepienia E i F . Wyznaczyć siłę $\bar{Q}$.

Na pręt AB działa w punkcie A reakcja $\bar{R}_1$ i w punkcie B reakcja $\bar{T}_1$ pręta BC . Mamy $\bar{R}_1 + \bar{T}_1 = 0$, reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{T}_1$ działają więc wzdłuż pręta AB .

Na pręt BC działa reakcja $-\bar{T}_1$, siła $\bar{P}$ i reakcja $\bar{T}_2$ pręta CD w punkcie C . Ponieważ pręt BC jest w równowadze, więc kierunki tych sił przecinają się w jednym punkcie G , który znajdziemy jako punkt przecięcia prostej AB i kierunku siły $\bar{P}$. Mając punkt G , możemy otrzymać kierunek CG reakcji $\bar{T}_2$. Ponieważ $-\bar{T}_1 + \bar{P} + \bar{T}_2 = 0$, więc znając kierunki sił $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ i siłę $\bar{P}$, możemy wyznaczyć z trójkąta sił siły $\bar{T}_1, \bar{T}_2$.

Na pręt CD działają reakcje $-\bar{T}_2$ i $\bar{R}_2$ oraz siła $\bar{Q}$. Siły te przecinają się w jednym punkcie H , który otrzymamy, jako punkt przecięcia się kierunków sił $-\bar{T}_2$ i $\bar{Q}$. Mając punkt H , otrzymamy kierunek siły $\bar{R}_2$. Ponieważ $-\bar{T}_2 + \bar{Q} + \bar{R}_2 = 0$, więc znając $\bar{T}_2$, otrzymujemy z trójkąta sił siły $\bar{Q}$ i $\bar{R}_2$.

Przykład 2. Cztery pręty 1, 2, 3 i 4 są połączone przegubowo w A, B i C , zaś unieruchomione w łożyskach przegubowych E i F . Pręty są nachylone do poziomu pod kątami α, β, γ i δ . W przegubach A, B i C zaczepione są siły pionowe $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$. Dana jest siła $\bar{P}_1$. Wyznaczyć siły $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$ oraz reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w E i F .



Ponieważ siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach, więc w każdym przegubie napięcia prętów równoważą się z siłami zewnętrznymi zaczepionymi w tym przegubie.

W przegubie E napięcie $\bar{T}_1$ pręta 1 równoważy się z reakcją $\bar{R}_1$: $\bar{T}_1 + \bar{R}_1 = 0$.

W przegubie A napięcia $-\bar{T}_1$ pręta 1 i $\bar{T}_2$ pręta 2 równoważą się z siłą $\bar{P}_1$: $-\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{P}_1 = 0$. Oznaczając przez T_1, T_2 i P_1 wartości bezwzględne tych sił i tworząc ich rzuty na kierunki pionowy i poziomy, otrzymamy:

$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0, \quad T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta - P_1 = 0.$$

Z równań tych obliczamy T_1 i T_2 .

W przegubie B dla napięcia $\bar{T}_3$ pręta 3 dostaniemy związek $-\bar{T}_2 + \bar{T}_3 + \bar{P}_2 = 0$. Tworząc rzuty na kierunek poziomy i pionowy oraz kładąc $T_3 = |\bar{T}_3|$ i $P_2 = |\bar{P}_2|$, otrzymamy:

$$T_2 \cos \beta - T_3 \cos \gamma = 0, \quad T_2 \sin \beta + T_3 \sin \gamma - P_2 = 0.$$

Z równań tych wyznaczamy T_3 i P_2 .

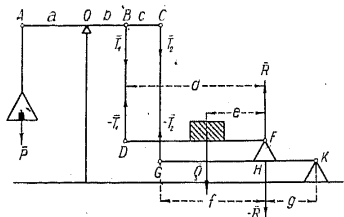
W przegubie C dostaniemy przy analogicznym znakowaniu:

$$T_3 \cos \gamma - T_4 \cos \delta = 0, \quad -T_3 \sin \gamma + T_4 \sin \delta - P_3 = 0,$$

skąd obliczymy T_4 i P_3 .

W przegubie F otrzymamy wreszcie $-\bar{T}_4 + \bar{R}_2 = 0$ czyli $\bar{R}_2 = \bar{T}_4$.

Przykład 3. Waga dziesiętna. Belka AC , podparta w O , połączona jest w punktach B i C z belkami DF i GK przy pomocy prętów BD i CG . Belka DF , podparta w punkcie F , opiera się w punkcie H na belce GK , podpartej w K . W punktach B , C , G i D połączenia są przegubowe.



Na belce DF kładziemy ciężar $\bar{Q}$, który mamy zważyć, i równoważymy go ciężarkiem $\bar{P}$, położonym na szalce zawieszanej w A . Ciężary belek i prętów pomijamy. Wyznaczyć związek między ciężarami $\bar{P}$ i $\bar{Q}$.

Oznaczmy przez $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ napięcia prętów BD i CG w punktach B i C .

Gdy belka AC jest w równowadze, suma momentów sił na nią działających względem O równa jest zeru:

$$(8) \quad -Pa + bT_1 + (b+c)T_2 = 0,$$

gdzie $P = |\bar{P}|$, $T_1 = |\bar{T}_1|$ i $T_2 = |\bar{T}_2|$, zaś długości a, b i c mają znaczenie takie jak na rysunku.

Na belkę DF działają: napięcie $-\bar{T}_1$ pręta BD w punkcie D , ciężar $\bar{Q}$ oraz reakcja $\bar{R}$ w punkcie F . Tworząc rzuty na kierunek pionowy oraz moment względem F , otrzymamy w położeniu równowagi belki DF :

$$(9) \quad T_1 + R - Q = 0, \quad T_1 d - Qe = 0,$$

gdzie $R = |\bar{R}|$ i $Q = |\bar{Q}|$, zaś długości d i e mają znaczenie podane na rysunku.

Na belkę GK działa napięcie $-\bar{T}_2$ pręta CG w punkcie G oraz reakcja $-\bar{R}$ belki DF w punkcie H . Tworząc moment tych sił względem punktu oparcia K , otrzymamy

$$(10) \quad T_2(f+g) - Rg = 0.$$

Z równań (9) otrzymujemy:

$$T_1 = Q \cdot \frac{e}{d}, \quad R = Q \cdot \frac{d-e}{d},$$

skąd na mocy równania (10)

$$T_2 = Q \cdot \frac{d-e}{d} \cdot \frac{g}{f+g}.$$

Podstawiając otrzymane wartości w równanie (8) zamiast T_1 i T_2 , otrzymujemy

$$(11) \quad P = Q \cdot \frac{(bf - cg)e + (b+c)gd}{ad(f+g)}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że $bf - cg = 0$ czyli

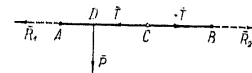
$$(12) \quad b/c = g/f,$$

to P będzie niezależne od e , t. zn. od tego, w którym miejscu dźwigni DF umieścimy ciężar $\bar{Q}$. Na mocy (11) i (12) jest wtedy

$$P = Q \cdot \frac{b}{a}.$$

Dla $b/a = 1/10$ mamy wagę *decymalną* czyli *dziesiętną*.

Przykład 4. Dwa pręty unieruchomione w końcach A i B , zaś połączone przegubowo w C , leżą na jednej prostej. Na pręt AC działa siła $\bar{P}$ o początku D , prostopadła do AC . Układ prętów jest w równowadze, ponieważ punkt C nie może zmienić swego położenia.



Przypuśćmy na chwilę, że pręt AC działa na CB z siłą $\bar{T}$ o początku w C . Zatem pręt CB działałby na pręt AC z siłą $-\bar{T}$, również zaczepioną w C .

Oznaczmy przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje w A i B .

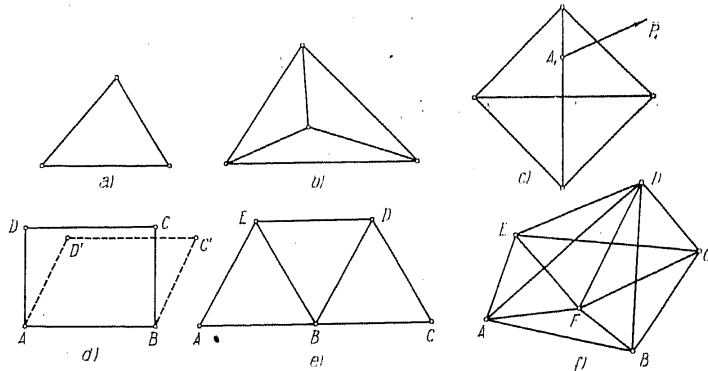
Ponieważ pręt CB jest w równowadze, więc siły $\bar{R}_2$ i $\bar{T}$ działają wzdłuż pręta AB . Wynika stąd, że pręt AC nie może być w równowadze, bo siły $-\bar{T}$, $\bar{R}_1$ i $\bar{P}$, działające na ten pręt, nie równoważą się, gdyż ich moment ogólny względem A równy jest różnemu od zera momentowi siły $\bar{P}$ względem A . Doszliśmy więc do sprzeczności.

Musimy zatem przyjąć, że pręt AC działa na pręt CB z siłą równoważną jednej sile i parze sił o momencie różnym od zera.

§ 16. Kratownice. Układ prętów sztywnych, połączonych przegubowo i tworzących jako całość ciało sztywne, nazywamy *kratownicą przestrzenną*.

Przykładem kratownicy (przestrzennej) jest układ trzech prętów, połączonych przegubowo i tworzących trójkąt (rys. a)), lub układ sześciu prętów, tworzących krawędzie czworościanu (rys. b)). Natomiast układ prętów, tworzących krawędzie prostopadłościanu i połączonych przegubowo w wierzchołkach, nie jest kratownicą, gdyż pręty mogą zmieniać położenie względem siebie.

Przeguby kratownicy nazywamy także *węzłami*.



Kratownica płaska. Jeżeli układ prętów sztywnych, połączonych przegubowo, leży w jednej płaszczyźnie i pręty nie mogą w tej płaszczyźnie zmieniać wzajemnego położenia, to układ taki nazywamy *kratownicą płaską*.

Przykłady kratownic płaskich przedstawiają rys. a), b), c), e) i f).

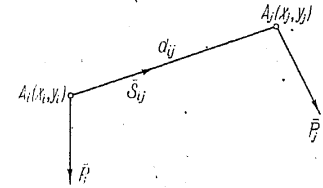
Układ prętów na rys. d) nie tworzy kratownicy, nawet płaskiej, bo pręty mogą zmieniać położenie względem siebie; mogą np. przyjmując położenie oznaczone kreską przerywaną.

Kratownica płaska nie musi tworzyć układu sztywnego, jeżeli dopuścimy ruchy prętów w przestrzeni. Jeżeli np. w kratownicy na rys. e) unieruchomimy przeguby B, C, D i E, to możemy pręty AE i AB obracać w przestrzeni około EB. Natomiast w płaszczyźnie kratownicy pręty AE i AB nie mogą się poruszyć.

Jeżeli w kratownicy przedstawionej na rys. f) usuniemy pręt AB, to w płaszczyźnie jej układ prętów pozostanie nadal utworem sztywnym, t. j. kratownicą. Pręt taki nazywamy prętem *nadliczbowym*.

Kratownica przedstawiona na rys. e) nie ma prętów nadliczbowych.

Wyznaczanie napięć w kratownicy (przy pomocy rachunku). Kratownica płaska ma p prętów i w węzłów $A_1, A_2, \dots, A_w$, w których zaczepione są siły zewnętrzne $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_w$. Gdy węzeł A_i , jest połączony prętem z węzłem A_j , oznaczamy przez d_{ij} długość tego pręta, a przez S_{ij} liczbę, której wartość bezwzględna równa się wielkości napięcia w tym pręcie, znak zaś jest + lub - zależnie od tego, czy napięcie jest rozciąganiem czy ściskaniem (str. 292).



Obierzmy dowolny układ współrzędnych i oznaczmy przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_w, y_w$ współrzędne węzłów $A_1, A_2, \dots, A_w$. Z określenia liczby S_{ij} wynika, że dla $i=1, 2, \dots, w$ napięcie pręta w węźle A_i ma na osie układu rzuty:

$$\frac{x_j - x_i}{d_{ij}} S_{ij}, \quad \frac{y_j - y_i}{d_{ij}} S_{ij}.$$

Ponieważ w węźle A_i siła zewnętrzna $\bar{P}_i$ równoważy się z napięciami prętów stykających się w tym węźle (str. 294), więc:

$$P_{ix} + \sum_j \frac{x_j - x_i}{d_{ij}} S_{ij} = 0, \quad P_{iy} + \sum_j \frac{y_j - y_i}{d_{ij}} S_{ij} = 0$$

czyli

$$(1) \quad P_{ix} = - \sum_j \frac{x_j - x_i}{d_{ij}} S_{ij}, \quad P_{iy} = - \sum_j \frac{y_j - y_i}{d_{ij}} S_{ij},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie takie wskaźniki j , dla których węzeł A_j jest połączony prętem z węzłem A_i . Ponieważ z założenia jest w węzłów, więc układ (1) składa się z $2w$ równań.

Równania (1) służą do wyznaczania napięć S_{ij} , gdy dane są siły $\bar{P}_i$. Może się jednak zdarzyć, że układ (1) rozwiązania nie posiada lub że równań jest za mało do wyznaczenia niewiadomych S_{ij} .

Np. w kratownicy przedstawionej na rys. c), str. 298, pręty stykające się w węźle A_1 leżą na jednej prostej, zaś siła zewnętrzna $\bar{P}_1$ zaczepiona w tym węźle nie leży na tej prostej. Napięcia w tych prętach nie mogą zrównoważyć siły $\bar{P}_1$. Układ równań (1) dla tej kratownicy nie ma więc rozwiązania (str. 297).

W kratownicy na rys. f), str. 298, prętów mamy 13, a wierzchołków 6. Niewiadomych napięć jest zatem 13, a równań w układzie (1) jest tylko $2 \cdot 6 = 12$. A więc równań jest za mało.

Oznaczmy w równaniach (1) prawe strony pierwszych równań przez R_i , a drugich przez T_i . Równania (1) przyjmą wtedy postać:

$$(2) \quad P_{ix} = E_i, \quad P_{iy} = F_i.$$

Łatwo można sprawdzić rachunkowo, że:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^w E_i = 0, \quad \sum_{i=1}^w F_i = 0, \quad \sum_{i=1}^w (E_i y_i - F_i x_i) = 0.$$

Równości (3) są tożsamościami, t. zn. zachodzą dla wszelkich wartości S_{ij} .

Tożsamości (3) można wyprowadzić również bez rachunku w sposób następujący:

Obierzmy S_{ij} zupełnie dowolnie, a P_{ix} i P_{iy} wyznaczmy z równań (1). Ponieważ równania te wyrażają, że w każdym węźle napięcia prętów równoważą się z siłami zewnętrznymi, więc tak wyznaczone siły będą w równowadze (str. 293). Zatem siły zewnętrzne będą w równowadze, t. j. będą zachodziły równości:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^w P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^w P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^w (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i) = 0.$$

Wynika stąd na mocy (2), że związki (3) muszą być spełnione tożsamościowo dla wszelkich wartości S_{ij} .

Założmy teraz, że dla pewnej kratownicy równania (1) mają rozwiązanie dla każdego układu sił $\{\bar{P}_i\}$ równoważnego zeru. Założmy dalej, że prawe strony równań (1) spełniają tożsamościowo jakiś związek liniowy kształtu

$$(5) \quad a_1 E_1 + a_2 E_2 + \dots + b_1 F_1 + b_2 F_2 + \dots = 0,$$

gdzie $a_1, a_2, \dots$ i $b_1, b_2, \dots$ są pewnymi stałymi.

Niech układ sił $\{\bar{P}_i\}$ będzie równoważny zeru; równania (1) mają więc rozwiązanie. Na mocy (2) i (5) siły $\{\bar{P}_i\}$ muszą zatem spełniać związek

$$(6) \quad a_1 P_{1x} + a_2 P_{2x} + \dots + a_w P_{wx} + b_1 P_{1y} + b_2 P_{2y} + \dots + b_w P_{wy} = 0.$$

A więc, jeżeli siły $\{\bar{P}_i\}$ spełniają równania (4), to spełniają również równanie (6). Związek (6) jest tedy zależny od związków (4). Wynika stąd, że związek (5) jest zależny od związków (3).

Prawe strony równań (1) spełniają zatem tylko trzy związki niezależne (3). Układ równań (1) ma więc $2w-3$ równań niezależnych (trzy zaś równania są zależne od pozostałych). Niewiadomych musi być co najmniej tyle, ile równań niezależnych, a więc $\geq 2w-3$. Ponieważ niewiadomych S_{ij} jest tyle ile prętów, czyli p , więc

$$(7) \quad p \geq 2w-3.$$

W przypadku, gdy $p > 2w-3$, równań niezależnych jest mniej niż niewiadomych; istnieje wtedy nieskończenie wiele rozwiązań. W przypadku zaś, gdy $p = 2w-3$, niewiadomych jest tyle, ile równań liniowo niezależnych; zatem napięcia S_{ij} są wówczas wyznaczone jednoznacznie.

Kratownicę nazywamy *wyznaczalną statycznie*, jeżeli równania (1) wyznaczają jednoznacznie napięcia S_{ij} prętów dla każdego układu sił $\{\bar{P}_i\}$ będącego w równowadze. Udowodniliśmy zatem twierdzenie:

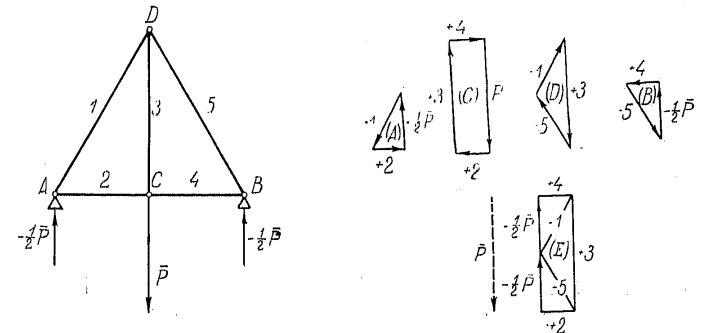
I. Jeżeli kratownica jest wyznaczalna statycznie, to $p = 2w-3$ (gdzie p oznacza liczbę prętów, a w liczbę węzłów).

Można dowieść twierdzenia:

II. Kratownica wyznaczalna statycznie nie posiada prętów nadliczbowych.

Warunki wypowiedziane w tw. I i II są koniecznymi, ale nie dostatecznymi na to, aby kratownica była wyznaczalna statycznie (p. rys. c), str. 298).

Wyznaczanie napięć w kratownicy (przy pomocy planów sił). Mamy wyznaczyć napięcia prętów w kratownicy przedstawionej na rysunku. Węzły oznaczone są literami A, B, C i D, a pręty liczbami 1, 2, 3, 4 i 5. Kratownica obciążona jest siłą pionową $\bar{P}$ w węźle C i spoczywa na podporach gładkich A i B.



Wyznamy najpierw reakcje w A i B. Ze względu na symetrię, każda z reakcyj wynosi $-\bar{P}/2$.

Na węzeł A działa siła zewnętrzna $-\bar{P}/2$ i napięcia prętów 1 i 2. Ponieważ siły te równoważą się, więc tworzą wielobok zamknięty, który możemy narysować, znając siłę $-\bar{P}/2$ i kierunki napięć. Wielobok ten przedstawiony jest na rys. (A); napięcia oznaczone są liczbami 1 i 2, a znaki przed liczbami oznaczają czy napięcie jest rozciąganiem (+) czy ściskaniem (-).

Na węzeł C działają napięcia prętów 2, 3 i 4, równoważące się z siłą $\bar{P}$. Ponieważ nieznane są tylko dwie siły, mianowicie napięcia prętów 3 i 4, więc możemy narysować wielobok sił, pamiętając o tym, że napięcie pręta 2 w węźle C ma zwrot przeciwny niż w węźle A . Wielobok ten przedstawiony jest na rysunku (C).

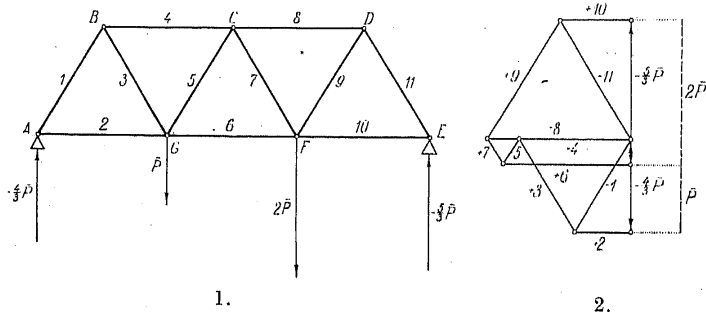
Na węzeł D nie działają żadne siły zewnętrzne, zaczepione w tym węźle, zatem napięcia się równoważą. Tworzą więc one wielobok zamknięty, który możemy narysować (rys D), pamiętając o tym, że napięcia prętów 1 i 3 w węźle D mają zwroty przeciwne niż w A i C .

Wyznaczyliśmy napięcia we wszystkich prętach. Dla sprawdzenia można jeszcze zbudować wielobok dla węzła B (rys. (B)).

Postępując w ten sposób, nakreśliśmy każdą siłę dwa razy. Można jednak wprowadzić uproszczenie, polegające na tym, że wszystkie wieloboki (A), (B), (C) i (D) rysujemy łącznie, jak na rys. (E).

W rysunku tym każda siła występuje raz tylko; rysunek taki nazywamy *planem sił Cremony* dla danej kratownicy.

Pewne wskazówki, jak można otrzymać plan sił Cremony, podamy na przykładzie następującym:



Rys. 1 przedstawia kratownicę, a rys. 2 jej plan sił Cremony. Kratownica obciążona jest w węzłach G i F siłami $\bar{P}$ i $2\bar{P}$. W węzłach A i E spoczywa ona na podporach gładkich. Pręty 2, 6 i 10 są poziome i równej długości. Obliczając moment sił zewnętrznych względem E i A , otrzymamy, że reakcja w A wynosi $-\frac{1}{2}\bar{P}$, zaś w E wynosi $-\frac{1}{2}\bar{P}$.

Kreślmy teraz wielobok sił zewnętrznych w takim porządku, w jakim występują one na obwodzie kratownicy. Idąc np. w kierunku wskazówek zegara, kreślmy po kolei $-\frac{1}{2}\bar{P}$, $-\frac{1}{2}\bar{P}$, $2\bar{P}$ i $\bar{P}$.

Następnie budujemy wielobok dla węzła A . Zauważmy, że pręt 2 łączy węzły A i G , w których zaczepione są siły zewnętrzne $-\frac{1}{2}\bar{P}$ i $\bar{P}$. Na planie sił napięcie pręta 2 rysujemy z początku siły $-\frac{1}{2}\bar{P}$ i końca siły $\bar{P}$. Zwrot sił w wieloboku dla węzła A określa siła $-\frac{1}{2}\bar{P}$. Otrzymujemy napięcia prętów 1 i 2 i zaznaczamy, że w pręcie 1 jest ściskanie ($-$) zaś w 2 rozciąganie ($+$).

Przechodzimy teraz do węzła, gdzie są dwa tylko napięcia niewiadome. Węzłem takim jest B . Wyznaczamy wielobok napięć w węzłach 1, 3 i 4. Zwrot sił otrzymamy, wiedząc z poprzedniego wieloboku, że w pręcie 1 występuje ściskanie.

Przechodzimy następnie do węzła G , w którym są tylko dwa napięcia niewiadome, mianowicie napięcia prętów 5 i 6. Postępując tak dalej, przechodzimy kolejno węzły C , F , D i E .

Przy sporządzaniu planu sił Cremony należy trzymać się dwóch reguł następujących:

1. Siły zewnętrzne w wieloboku sił rysujemy na planie w takim porządku, w jakim występują one na obwodzie kratownicy.
2. Jeżeli pręt na obwodzie kratownicy łączy węzły, które są początkami sił zewnętrznych, to napięcie pręta rysujemy na planie sił z punktu, w którym koniec jednej siły zewnętrznej schodzi się z początkiem drugiej.

Zauważmy, że plan sił Cremony, przedstawiony na rys. 2, str. 302, ma jeszcze następujące dwie własności:

- (a) siły działające na węzeł tworzą na planie wielobok zamknięty,
- (b) jeżeli trzy pręty tworzą trójkąt, to na planie napięcia ich wychodzą z jednego punktu.

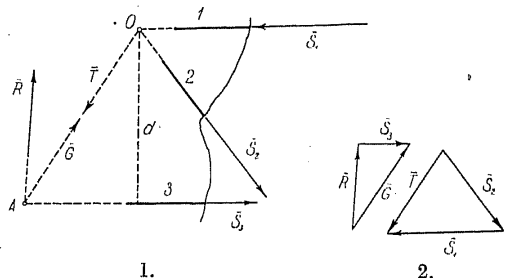
Plan sił Cremony, mający powyższe dwie własności, nazywa się *planem sił odwrotnym*.

Nazwa ta stoi w związku z t. zw. teorią figur odwrotnych.

Należy zwrócić uwagę, że nie dla każdej kratownicy wyznaczalnej statycznie można zbudować plan sił Cremony.

Wyznaczanie napięć z pomocą przekrojów. Przypuśćmy, że kratownica daje się przeciąć przez trzy pręty nie wychodzące z jednego węzła, w taki sposób, by rozpadła się na dwie części. Jeżeli choć dwa z przeciętych prętów nie są równoległe, to w prętach przeciętych można wyznaczyć napięcia bez obliczania napięć w pozostałych prętach.

Oznaczmy pręty przecięte przez 1, 2, 3. Jeżeli usunąć jedną część kratownicy, np. prawą, to lewa pozostanie w równowadze po dołączeniu napięć $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$.



Niech pręty 1 i 2 przecinają się w punkcie O (rys. 1). Ponieważ lewa część kratownicy jest w równowadze, więc siły zewnętrzne działające na tę część równoważą się z napięciami $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$. Oznaczając przez $\bar{M}$ moment sił zewnętrznych (działających na lewą część kratownicy) względem O , a przez d odległość O od pręta 3, dostaniemy $|\bar{M}| = |\bar{S}_3|d$ czyli $|\bar{S}_3| = |\bar{M}|/d$.

Zwrot siły $\bar{S}_3$ obieramy tak, by $\bar{M}$ i moment siły $\bar{S}_3$ względem O miały znaki przeciwne. Moment $\bar{M}$ możemy otrzymać, wyznaczając najpierw wypadkową $\bar{R}$ (ewentualnie parę wypadkową) sił zewnętrznych, działających na lewą część, a następnie obliczając moment wypadkowy $\bar{R}$ (lub parę wypadkową) względem O . Podobnie obliczamy $\bar{S}_2$ oraz $\bar{S}_1$, tworząc moment względem punktu przecięcia prętów 1 i 3 oraz 2 i 3.

Gdyby pręty 1 i 3 były równoległe, to siłę $\bar{S}_2$ otrzymalibyśmy, tworząc rzuty sił na prostą prostopadłą do prętów 1 i 3 (rzuty sił $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_3$ będą bowiem zerami).

Opisana powyżej metoda obliczania napięć podana została przez J. W. Rittera. Napięcia $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$ można również wyznaczyć graficznie metodą podaną przez K. Culmanna.

Niech pręty 1 i 2 przecinają się w O , niech siły zewnętrzne mają wypadkową $\bar{R}$ i niech $\bar{R}$ i $\bar{S}_3$ przecinają się w punkcie A . Oznaczmy przez $\bar{T}$ wypadkową sił $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_2$, a przez $\bar{G}$ wypadkową sił $\bar{R}$ i $\bar{S}_3$.

Ponieważ siły $\bar{R}$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$ są w równowadze, więc siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ również są w równowadze. Wynika stąd, że $\bar{T} = -\bar{G}$ i że siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ leżą na jednej prostej. Ponieważ $\bar{T}$ ma początek w O , zaś $\bar{G}$ w A ,

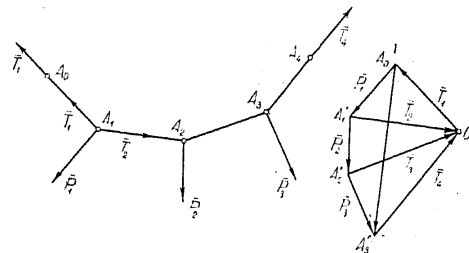
więc siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ leżą na prostej OA . Znając już kierunek sił $\bar{T}$ i $\bar{G}$, wyznaczamy trójkąt sił $\bar{R}$, $\bar{S}_3$ i $\bar{G}$, skąd otrzymujemy siły $\bar{S}_3$ i $\bar{G}$. Ponieważ $\bar{T} = -\bar{G}$, więc możemy utworzyć trójkąt sił $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{T}$, skąd dostaniemy $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_2$.

Gdyby wypadkowa $\bar{R}$ była równoległa do pręta 3, siła $\bar{G}$ byłaby również równoległa do 3 i przechodziłaby przez O . Ponieważ $\bar{R}$ jest wypadkową sił $\bar{G}$ i $-\bar{S}_3$, więc zadanie sprowadziłoby się wówczas do rozłożenia siły $\bar{R}$ na dwie siły $\bar{G}$ i $-\bar{S}_3$, których położenia są dane. Zadanie takie zostało rozwiązane przy pomocy wieloboku sznurowego na str. 257.

Gdyby wreszcie siły zewnętrzne redukowały się do pary $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, mielibyśmy $\bar{R}_1 = -\bar{R}_2$ i wypadkowa $\bar{G}$ sił $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i $\bar{S}_3$ równałaby się $\bar{S}_3$ i miałaby początek w O . Zadanie sprowadzałoby się wtedy do rozłożenia układu sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ na dwie siły $\bar{G}$ i $-\bar{S}_3$, których położenia są dane (por. str. 257).

§ 17. Równowaga lin ciężkich. Łańcuch. Układ prętów sztywnych połączonych przegubowo, nazywamy *łańcuchem*, jeżeli w każdym przegubie stykają się tylko dwa pręty. Pręty łańcucha nazywamy także *ogniwami*.

Załóżmy, że łańcuch złożony z ogniw A_0A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 i A_3A_4 , połączonych przegubami A_1 , A_2 i A_3 , pozostaje w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$, zaczepionych w przegubach, oraz sił $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_4$, zaczepionych w A_1 i A_4 . Siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_4$ mają oczywiście kierunki prętów A_0A_1 i A_3A_4 (str. 294).



Łatwo okazać, że łańcuch w równowadze przybiera postać wieloboku sznurowego układu sił $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$.

Zbudujmy w tym celu wielobok sił $A'_0A'_1A'_2A'_3$ dla układu $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$. Za biegun O obierzmy punkt przecięcia linii wykreślonych z punktu A'_0 i A'_3 równoległe do skrajnych prętów łańcucha.

Ponieważ łańcuch jest w równowadze, więc suma sił jest zerem:

$$\bar{T}_1 + \bar{T}_4 + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = 0.$$

Ponieważ $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = \bar{A}'_0\bar{A}'_3$, zaś $O\bar{A}'_0$ i $\bar{A}'_3O$ są równoległe do $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_4$, więc z trójkąta $A'_0A'_3O$ otrzymujemy:

$$(1) \quad \bar{T}_1 = \overline{OA'_1}, \quad \bar{T}_3 = \overline{A'_3O}.$$

Weźmy teraz pod uwagę przegub A_1 . Napięcie ogniwa A_0A_1 w przegubie A_1 jest $\bar{T}_1$; oznaczmy przez $\bar{T}_2$ napięcie ogniwa A_1A_2 w przegubie A_1 . Mamy oczywiście

$$(2) \quad \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{P}_1 = 0.$$

Z wieloboku sznurowego otrzymujemy $\overline{OA'_0} + \bar{P}_1 + \overline{A'_1O} = 0$, skąd na mocy (1) $\bar{T}_1 + \bar{P}_1 + \overline{A'_1O} = 0$, a stąd na mocy (2) $\overline{A'_1O} = \bar{T}_2$. Odcinek A'_1O jest więc równoległy do pręta A_1A_2 .

Podobnie przekonujemy się, że odcinki A'_2O i A'_3O są równoległe do prętów A_2A_3 i A_3A_4 .

Wynika stąd, że wielobok sznurowy, jaki otrzymamy, rysując go z punktu A_1 , przyjmie postać łańcucha.

Lina. *Sznurem* albo *liną* (wiotką i nierozciągliwą) nazywamy linię materialną, która daje się dowolnie zginać, nie zmieniając przy tym swojej długości ani długości swoich części.

Sznur może więc przyjąć kształt dowolnej linii krzywej o tej samej długości. Linę możemy uważać w przybliżeniu za łańcuch złożony z bardzo wielu drobnych ogniów.

Niech ciężka lina (wiotka i nierozciągliwa) zawieszona będzie w punktach A i B . Załóżmy, że gęstość liny $\rho = \text{const}$. Ciężar kawałka liny długości s cm wynosi zatem

$$(3) \quad Q = s\rho g = s\delta,$$

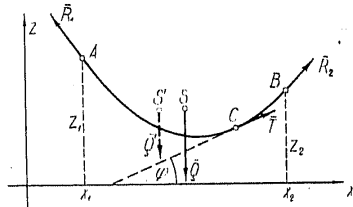
gdzie $\delta = \rho g$.

Zajmijmy się wyznaczeniem kształtu, jaki przyjmie lina pod wpływem swego ciężaru.

Obierzmy układ współrzędnych (x, y, z) , nadając osi z kierunek pionowy ze zwrotem ku górze; przyjmijmy za płaszczyznę xz płaszczyznę pionową, przechodzącą przez punkty A i B .

Siłami zewnętrznymi działającymi na linę są: ciężar, zaczepiony w środku ciężkości S liny, i reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w punktach A i B . Gdy lina jest w równowadze, siły te równoważą się. Wynika stąd, że leżą w jednej płaszczyźnie pionowej, mianowicie w płaszczyźnie xz . Zatem:

$$(4) \quad R_{1y} = 0, \quad R_{2y} = 0.$$



Przetnijmy linę w dowolnym punkcie C i odrzućmy część CB . Aby część AC pozostała w równowadze, należy dołączyć w punkcie C siłę $\bar{T}$, z jaką część CB działa na część AC . Siłę $\bar{T}$ nazywamy *napięciem liny*.

Ponieważ linę uważamy w przybliżeniu za łańcuch złożony z drobnych ogniów, więc siła $\bar{T}$ jest styczna do CB .

Oznaczmy przez s długość łuku AC . Siłami zewnętrznymi, działającymi na część AC są: ciężar $\bar{Q}'$ o wielkości $s\delta$, zaczepiony w środku ciężkości S' części AC , reakcja $\bar{R}_1$ i napięcie $\bar{T}$. Ponieważ, suma sił tych jest zerem, gdyż część AC pozostaje w równowadze, więc tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy:

$$(5) \quad T_x + R_{1x} = 0, \quad T_z + R_{1z} - s\delta = 0, \quad T_y + R_{1y} = 0.$$

Wobec (4) jest $R_{1y} = 0$, więc $T_y = 0$. Ponieważ napięcie $\bar{T}$ jest styczne do krzywej, zaś C jest dowolnym punktem tej krzywej, więc styczna w każdym punkcie jest równoległa do płaszczyzny pionowej xz . Wynika stąd, że krzywa leży w płaszczyźnie pionowej, a mianowicie w płaszczyźnie xz , gdyż ma z nią dwa punkty A i B wspólne. Pierwsze z równań (5) daje

$$(6) \quad T_x = -R_{1x} = \text{const.}$$

A więc: *składowa pozioma napięcia liny jest w każdym punkcie liny ta sama.*

Oznaczmy przez φ kąt jaki $\bar{T}$ tworzy z osią x . Mamy zatem $\text{tg } \varphi = T_z/T_x$, skąd na mocy drugiego z równań (5)

$$(7) \quad \text{tg } \varphi = (-\delta s/R_{1x}) + (R_{1z}/R_{1x}).$$

Położmy:

$$(8) \quad a = -\delta/R_{1x}, \quad a' = R_{1z}/R_{1x}.$$

Jeżeli $z = f(x)$ jest równaniem krzywej, to $z' = \text{tg } \varphi$. Na mocy więc (7) i (8)

$$(9) \quad z' = as + a'.$$

Równanie (9) jest równaniem różniczkowym krzywej, której postać przyjmuje lina. Różniczkując je, otrzymamy $z'' = a\delta s/dx$, a ponieważ $ds = \sqrt{1+z'^2} dx$, więc $z'' = a/\sqrt{1+z'^2}$. Podstawmy $z' = w$. Zatem $z'' = dw/dx$, skąd $dw/dx = a/\sqrt{1+w^2}$ czyli $dw/\sqrt{1+w^2} = adx$. Całkując, otrzymujemy $\int dw/\sqrt{1+w^2} = \int adx$, więc $\log(\sqrt{1+w^2} + w) = ax + c$, gdzie c jest stałą całkowania. Zatem

$$(10) \quad \sqrt{1+w^2} + w = \sqrt{1+z'^2} + z' = e^{ax+c}.$$

Mamy

$$(11) \quad 1/(\sqrt{1+z'^2} + z') = \sqrt{1+z'^2} - z' = e^{-ax-c}.$$

Z równań (10) i (11) otrzymujemy:

$$(12) \quad z' = (e^{ax+c} - e^{-ax-c})/2,$$

$$(13) \quad ds/dx = \sqrt{1+z'^2} = (e^{ax+c} + e^{-ax-c})/2.$$

Całkując równania (12) i (13), otrzymamy

$$(14) \quad z = \frac{1}{2a} (e^{ax+c} + e^{-ax-c}) + c',$$

$$(15) \quad s = \frac{1}{2a} (e^{ax+c} - e^{-ax-c}) + c'',$$

gdzie c' i c'' są pewnymi stałymi.

Krzywą określoną równaniem (14) nazywamy *krzywą łańcuchową*.

A więc: *lina przyjmuje kształt krzywej łańcuchowej*.

Równania (14) i (15) zależą od czterech stałych a, c, c' i c'' . Stałe te możemy wyznaczyć, jeżeli znamy np. współrzędne x_1, z_1 i x_2, z_2 punktów A i B oraz długość l liny.

Z warunków bowiem, że dla $x=x_1$ jest $z=z_1$, zaś dla $x=x_2$ jest $z=z_2$, otrzymujemy na mocy (14):

$$(16) \quad z_1 = \frac{1}{2a} (e^{ax_1+c} + e^{-ax_1-c}) + c', \quad z_2 = \frac{1}{2a} (e^{ax_2+c} + e^{-ax_2-c}) + c'.$$

Z warunku zaś, że dla $x=x_1$ jest $s=0$, a dla $x=x_2$ jest $s=l$, dostajemy na mocy (15):

$$(17) \quad 0 = \frac{1}{2a} (e^{ax_1+c} - e^{-ax_1-c}) + c'', \quad l = \frac{1}{2a} (e^{ax_2+c} + e^{-ax_2-c}) + c''.$$

Można okazać, że równania (16) i (17) określają jednoznacznie stałe a, c, c' i c'' .

Obliczmy jeszcze napięcie liny $\bar{T}$ w dowolnym jej punkcie C o współrzędnych x, z . Z równań (6) i (8) dostajemy

$$(18) \quad T_x = \delta/a.$$

Ponieważ $T_z/T_x = \tan \varphi = z'$, więc $T_z = T_x z'$, zatem

$$(19) \quad T_z = \delta z'/a.$$

Z równań (18) i (19) otrzymujemy

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_z^2} = \frac{\delta}{a} \sqrt{1+z'^2} = \frac{\delta}{a} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{\delta}{2a} (e^{ax+c} + e^{-ax-c}),$$

na mocy więc (14)

$$(20) \quad T = \delta(z - c').$$

Lina obciążona. Niech w punkcie C liny zaczepiona będzie siła $\bar{P}$, skierowana pionowo w dół. Części CB i AC liny są, jak już wiemy, linami łańcuchowymi. Oznaczmy przez a_1, c_1, c'_1, c''_1 i a_2, c_2, c'_2, c''_2 , odpowiednie stałe dla krzywych BC i CA w równaniach (14) i (15), a przez $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ napięcia części BC i CA w punkcie C .

Uważając linę za łańcuch o drobnych ogniach, zaś punkt C za przegub, mamy w położeniu równowagi $\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{P} = 0$. Tworząc rzuty na osie x, z i kładąc $P = |\bar{P}|$, otrzymujemy:

$$(21) \quad T_{1x} + T_{2x} = 0, \quad T_{1z} + T_{2z} - P = 0.$$

Oznaczając pochodne prawostronną i lewostronną w C przez z'_1 i z'_2 , otrzymamy na mocy (18) i (19):

$$T_{1x} = \delta/a_1, \quad T_{1z} = \delta z'_1/a_1, \quad T_{2x} = -\delta/a_2, \quad T_{2z} = -\delta z'_2/a_2,$$

skąd na mocy (21)

$$\frac{\delta}{a_1} - \frac{\delta}{a_2} = 0, \quad \frac{\delta z'_1}{a_1} - \frac{\delta z'_2}{a_2} - P = 0.$$

Dostajemy więc:

$$(22) \quad a_1 = a_2, \quad z'_1 - z'_2 = \frac{Pa_1}{\delta} = \frac{Pa_2}{\delta}.$$

Znając długości l_1 i l_2 łuków BC i CA , możemy otrzymać równania krzywych CB i AC . Należy w tym celu wyznaczyć dziesięć stałych $a_1, c_1, c'_1, c''_1, a_2, c_2, c'_2, c''_2$ i x_0, z_0 , gdzie x_0 i z_0 są współrzędnymi punktu C . Otóż do wyznaczenia tych stałych dla CB i AC mamy po cztery równania analogiczne do (16) i (17), a nadto dwa równania (22), razem więc dziesięć.

