ROZDZIAŁ IV

GEOMETRIA MAS

I. Układy punktów

§ 1. Momenty statyczne. Moment statyczny punktu. Weźmy pod uwagę dowolną płaszczyznę Π. Dzieli ona przestrzeń na dwie części; jedną z tych części uważajmy za dodatnią, a drugą za ujemną. Niech A oznacza pewien punkt materialny, a d jego odległość od płaszczyzny Π. Będziemy pisali $\sigma=+d$ lub $\sigma=-d$, zależnie od tego, czy punkt A leży w dodatniej części przestrzeni czy w ujemnej.

Oznaczając masę punktu A przez m, wyrażenie

$$M_{\Pi}=m\sigma$$

nazywać będziemy *momentem statycznym* punktu materialnego A względem płaszczyzny Π.

Moment statyczny punktu może więc być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem (jest on zerem dla każdego punktu A leżącego na płaszczyźnie Π).

Jeżeli za płaszczyznę Π obierzemy jedną z płaszczyzn rzutowych xy, yz, zx, to za część dodatnią przestrzeni uważać będziemy tę część, w której znajduje się część dodatnia osi prostopadłej do obranej płaszczyzny rzutowej. Gdy punkt A o masie m ma współrzędne x, y, z, mamy na mocy powyższej umowy:

$$M_{xy}=mz, \qquad M_{yz}=mx, \qquad M_{zx}=my,$$

gdzie M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} oznaczają odpowiednio momenty statyczne punktu A względem płaszczyzn xy, yz i zx.

Moment statyczny układu punktów. Zbiór punktów materialnych nazywamy *układem punktów*, sumę zaś momentów statycznych poszczególnych jego punktów nazywamy *momentem statycznym (ogólnym) układu punktów.*

Jeżeli więc punkty materialne o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$, mają odpowiednio względem płaszczyzny Π momenty statyczne: $m_1\sigma_1$, $m_2\sigma_2, \ldots m_n\sigma_n$, to momentem statycznym ogólnym układu tych punktów będzie

$$M_\Pi = m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_n\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i,$$

Jeżeli punkty materialne danego układu punktów mają odpowiednio współrzędne $x_1, y_1, z_1, \; x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, to momenty statyczne ogólne tego układu punktów względem odpowiednich płaszczyzn rzutowych wyrażają się wzorami:

$$M_{xy} = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i,$$

$$M_{yz} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$

$$M_{zx} = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i.$$

Momenty statyczne nazywamy także *momentami stopnia pierwszego.*

§ 2. Środek masy. Niech będzie dany układ U punktów materialnych $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, m_n(x_n, y_n, z_n)$. Weźmy pod uwagę punkt S o współrzędnych:

$$\text{(I)} \quad x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y_0 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$
$$z_0 = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Punkt S nazywamy *środkiem masy* lub *środkiem ciężkości* danego układu punktów U.

Sumę mas poszczególnych punktów (występującą w mianowniku ułamków (I)) nazywać będziemy *masą całkowitą* układu punktów.

Jakkolwiek określiliśmy środek masy przy pomocy układu współrzędnych, to jednak wykażemy, że położenie środka masy jest od układu współrzędnych nie zależne, lecz że zależy ono tylko od

mas punktów i ich wzajemnego rozmieszczenia. Wyniknie to łatwo z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Moment statyczny układu punktów względem dowolnej płaszczyzny równa się momentowi statycznemu masy całkowitej, umieszczonej w środku ciężkości.*

Dowód. Niechaj Π będzie dowolną płaszczyzną, której równanie normalne ma kształt

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Przyjmijmy za dodatnią tę z dwóch części przestrzeni, dla której $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p > 0$, gdy za x, y i z podstawić współrzędne dowolnego punktu tej części. Jeżeli więc $A(x, y, z)$ jest dowolnym punktem przestrzeni, to ponieważ odległość punktu A od płaszczyzny Π wyraża się wzorem

$$d = |x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p|,$$

zatem możemy w myśl naszej umowy położyć:

$$\sigma = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p.$$

Moment statyczny punktu A o masie m względem płaszczyzny Π wynosi więc

$$\text{(1)} \quad M_\Pi = m\sigma = mx\cos\alpha + my\cos\beta + mz\cos\gamma - mp.$$

Niech dany będzie układ punktów materialnych $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, m_n(x_n, y_n, z_n)$. Moment statyczny tego układu punktów względem płaszczyzny Π będzie na mocy (1)

$$M_\Pi = (m_1x_1\cos\alpha + m_1y_1\cos\beta + m_1z_1\cos\gamma - m_1p) + \ldots$$
$$\ldots + (m_nx_n\cos\alpha + m_ny_n\cos\beta + m_nz_n\cos\gamma - m_np)$$

czyli

$$\text{(2)} \quad M_\Pi = (m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n)\cos\alpha + (m_1y_1 + \ldots + m_ny_n)\cos\beta +$$
$$+ (m_1z_1 + \ldots m_nz_n)\cos\gamma - (m_1 + \ldots + m_n)p.$$

Kładąc $m_1 + m_2 + \ldots m_n = m$, mamy na mocy (I):

$$\text{(II)} \quad mx_0 = \sum m_ix_i, \quad my_0 = \sum m_iy_i, \quad mz_0 = \sum m_iz_i \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

skąd na mocy (2)

$$\text{(3)} \quad M_\Pi = mx_0\cos\alpha + my_0\cos\beta + mz_0\cos\gamma - mp.$$

Ponieważ prawa strona równości (3) przedstawia na mocy (1) moment statyczny masy m, umieszczonej w środku ciężkości S o współrzędnych x_0, y_0, z_0, więc twierdzenie zostało udowodnione.

Aby wykazać teraz, że środek masy układu punktów nie zależy od wyboru układu współrzędnych, przypuśćmy, że własność środka ciężkości S, wypowiedzianą w twierdzeniu, posiada, prócz punktu S, jeszcze jakiś inny punkt S'. Udowodnimy, że to jest nie możliwe.

Poprowadźmy w tym celu przez punkt S dowolną płaszczyznę Π, nie przechodzącą przez S'. Zatem

$$(4) \qquad M_\Pi = m\sigma \quad \text{i} \quad M_\Pi = m\sigma',$$

gdzie σ i σ' oznaczają odpowiednio odległości (ze znakami) punktów S i S' od płaszczyzny Π. Z (4) wynika, że $\sigma = \sigma'$. Lecz $\sigma = 0$, ponieważ Π przechodzi przez S. Zatem musiałoby być również $\sigma' = 0$, co jednak nie możliwe, gdyż S' nie leży w płaszczyźnie Π.

Widzimy więc, że *położenie środka masy układu punktów nie zależy od układu współrzędnych.*

Środek masy dwóch układów punktów. Niech układ U złożony będzie z punktów materialnych

$$m_1'(x_1', y_1', z_1'), \quad m_2'(x_2', y_2', z_2'), \quad \ldots, \quad m_1''(x_1'', y_1'', z_1''), \quad m_2''(x_2'', y_2'', z_2''), \quad \ldots$$

Środek S' masy układu punktów $m_1', m_2' \ldots$ ma na mocy określenia współrzędne:

$$(5) \qquad x_0' = (m_1' x_1' + m_2' x_2' + \ldots)/m', \qquad y_0' = (m_1' y_1' + m_2' y_2' + \ldots)/m',$$
$$z_0' = (m_1' z_1' + m_2' z_2' + \ldots)/m',$$

gdzie $m' = m_1' + m_2' + \ldots$. Dla środka S masy całego układu U będzie zaś

$$x_0 = \frac{(m_1' x_1' + m_2' x_2' + \ldots) + (m_1'' x_1'' + m_2'' x_2'' + \ldots)}{(m_1' + m_2' + \ldots) + (m_1'' + m_2'' + \ldots)},$$

skąd na mocy (5)

$$(6) \qquad x_0 = \frac{m' x_0' + (m_1'' x_1'' + m_2'' x_2'' + \ldots)}{m' + (m_1'' + m_2'' + \ldots)}.$$

Podobne wzory otrzymamy na y_0 i z_0. Wzór (6) przedstawia odciętą środka masy układu, jaki otrzymamy z układu danego U, jeżeli część jego, mianowicie punkty o masach $m_1', m_2', \ldots$ zastąpimy jednym punktem materialnym o masie $m' = m_1' + m_2' + \ldots$, umieszczonym w środku masy tej części. Otrzymaliśmy zatem

Twierdzenie 2. *Środek masy układu punktów nie zmieni się, jeżeli jego część zastąpimy punktem materialnym o masie równej masie tej części i umieszczonym w środku jej masy.*

Jeżeli więc w szczególności mamy dwa układy punktów U' i U'' o masach całkowitych m' i m'' i o środkach ciężkości S' i S'', to środek masy układu $U' + U''$ otrzymamy, wyznaczając środek masy układu dwu punktów materialnych o masach m' i m'', umieszczonych odpowiednio w punktach S' i S''. Układy U' i U'' możemy bowiem uważać za części układu $U' + U''$.

Układ płaski punktów. Układ punktów materialnych nazywamy *płaskim*, jeżeli wszystkie jego punkty leżą w jednej płaszczyźnie. Obierając tę płaszczyznę za płaszczyznę xy (co wolno nam uczynić, ponieważ środek masy nie zależy od wyboru układu współrzędnych), będziemy mieli dla punktów układu: $z_1 = 0$, $z_2 = 0, \ldots, z_n = 0$, skąd na mocy wzorów (I), str. 154, dostaniemy $z_0 = 0$.

Środek ciężkości układu płaskiego leży zatem w płaszczyźnie układu.

Momentem statycznym układu płaskiego względem dowolnej prostej l leżącej w płaszczyźnie układu nazywamy wyrażenie

$$(7) \qquad M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i,$$

gdzie $|\sigma_i|$ jest odległością punktu o masie od prostej l, zaś znak przy σ_i zależy od tego, czy m_i znajduje się w dodatniej czy ujemnej części płaszczyzny, na które dzieli płaszczyznę prosta l. Widzimy stąd, że moment statyczny układu płaskiego względem prostej l jest to moment statyczny tego układu względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny układu i przecinającej ją wzdłuż prostej l. W szczególności więc momenty względem osi x i y wyrażają się wzorami:

$$(8) \qquad M_x = \Sigma m_i y_i, \qquad M_y = \Sigma m_i x_i.$$

Układ liniowy punktów. Jeżeli punkty układu leżą na jednej prostej l, to środek masy układu leży również na tej prostej. Obierając bowiem prostą l za oś x-ów, mamy $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots$ i $z_1 = 0$, $z_2 = 0, \ldots$, skąd na mocy wzorów (I), str. 154, dostaniemy $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Środek masy będzie więc także leżał na osi x.

Środek masy dwóch punktów. Niech punkty materialne o masach m_1 i m_2 będą od siebie w odległości d. Środek masy leży oczywiście na prostej łączącej te punkty. Umieśćmy w m_1 początek osi x-ów, zaś dodatnią jej część przeprowadźmy przez m_2. Punkty m_1 i m_2 będą więc miały współrzędne odpowiednio $x_1 = 0$ i $x_2 = d$, a środek masy współrzędną

$$(9) \qquad x_0 = m_2 d / (m_1 + m_2).$$

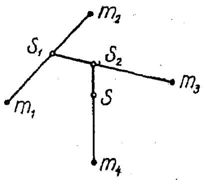
Ponieważ $0<x_0<d$, więc środek masy leży między punktami. Oznaczając przez d_1 i d_2 odległości środka masy od punktów m_1 i m_2, otrzymujemy $d_1=x_0=m_2d/(m_1+m_2)$ i $d_2=d-d_1=m_1d/(m_1+m_2)$, skąd

$$d_1/d_2=m_2/m_1. \tag{10}$$

Mamy więc następujące

Twierdzenie 3. *Środek masy układu dwupunktowego leży między punktami układu i dzieli odcinek, łączący te punkty, w stosunku odwrotnym do ich mas.*

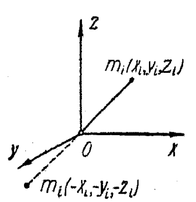
Opierając się na twierdzeniu 2, str. 156, możemy w następujący sposób wyznaczyć środek masy skończonego układu punktów, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ (rys. 1): wyznaczamy najpierw środek masy S_1 układu punktów A_1 i A_2; wyznaczamy następnie środek masy S_2 układu dwu punktów, złożonego z punktu o masie m_1+m_2, umieszczonego w S_1, i z punktu A_3 o masie m_3; postępując tak dalej, otrzymamy środek masy całego danego układu.



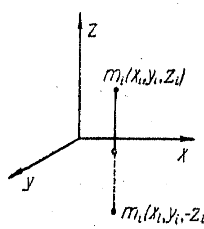
1.

Układy punktów symetryczne. Punkt O (prostą l, płaszczyznę Π) nazywamy *środkiem (prostą, płaszczyzną) symetrii układu punktów* materialnych, jeżeli do każdego punktu m_i istnieje w układzie punkt o tej samej masie m_i, symetrycznie względem O (prostej l, płaszczyzny Π) położony.

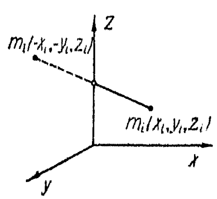
Jeżeli środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych (rys. 2), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ punktów zawiera punkt $m_i(-x_i, -y_i, -z_i)$. Jeżeli płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna xy (rys. 3), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ zawiera punkt $m_i(x_i, y_i, -z_i)$. Jeżeli osią symetrii jest oś z (rys. 4), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ zawiera punkt $m_i(-x_i, -y_i, z_i)$.



2.



3.



4.

Łatwo okazać, że zawsze *środek symetrii jest środkiem masy.*

Środek masy pary punktów symetrycznych leży bowiem na mocy twierdzenia 3, str. 158, w środku symetrii. Na mocy twierdzenia 2, str. 156, możemy więc taką parę zastąpić przez punkt materialny umieszczony w środku symetrii. Robiąc to z każdą parą, przekonywamy się, że środek symetrii jest środkiem masy całkowitej układu.

Podobnie, *środek masy leży na prostej symetrii (i na płaszczyźnie symetrii).*

Z tych samych bowiem powodów środek pary punktów symetrycznych leży na prostej (i na płaszczyźnie) symetrii.

§. 3 Momenty stopnia drugiego.

Moment bezwładności. Niech będzie dany punkt materialny A o masie m i pewna płaszczyzna Π. Oznaczmy przez r odległość punktu A od płaszczyzny Π. Wyrażenie

$$I=mr^2 \tag{1}$$

nazywamy *momentem bezwładności* punktu A względem płaszczyzny Π. Jeżeli przez r oznaczymy odległość punktu materialnego A od pewnej prostej l (lub od pewnego punktu O), to (1) będzie momentem bezwładności punktu A względem prostej l (lub względem punktu O).

Momentem bezwładności ogólnym układu punktów nazywamy sumę momentów bezwładności poszczególnych punktów tego układu.

Moment zboczenia (dewiacji). Niech dane będą dwie płaszczyzny Π_1 i Π_2, prostopadłe do siebie. Połóżmy $\sigma_1=\pm d_1$, gdzie d_1 oznacza odległość punktu materialnego A od Π_1, przyczem znak zależeć ma od tego, czy punkt znajduje się w dodatniej czy ujemnej z dwu części, na jakie dzieli przestrzeń płaszczyzna Π_1. Podobnie określamy σ_2 względem płaszczyzny Π_2. Wyrażenie

$$D=m\sigma_1\sigma_2 \tag{2}$$

nazywamy *momentem zboczenia* (lub *dewiacji*) punktu materialnego A względem płaszczyzn Π_1 i Π_2.

Momentem zboczenia ogólnym układu punktów $A_1, A_2, \ldots$ względem płaszczyzn Π_1 i Π_2 nazywamy sumę momentów zboczenia poszczególnych punktów. A więc

$$D=\sum m_i\sigma_1^{(i)}\sigma_2^{(i)}, \tag{3}$$

gdzie m_i, $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$ oznaczają odpowiednio masę punktu A_i i jego odległości od płaszczyzn Π_1 i Π_2 (opatrzone właściwymi znakami).

Momenty bezwładności i momenty zboczenia nazywamy *momentami stopnia drugiego.*

Ramię bezwładności. Niech I oznacza ogólny moment bezwładności układu punktów U względem pewnej płaszczyzny Π (prostej l, punktu O). Liczbę

(4) $$k=\sqrt{I/m}, \quad \text{gdzie} \quad m=m_1+m_2+\ldots$$

nazywamy *ramieniem bezwładności* układu punktów U względem płaszczyzny Π (prostej l, punktu O). Na mocy (4) jest

(5) $$I=mk^2.$$

A więc: *ramię bezwładności k jest odległością, w jakiej umieszczona masa całkowita układu ma moment bezwładności równy ogólnemu momentowi bezwładności układu.*

Masa zredukowana. Niech r będzie dowolną liczbą dodatnią. Masą układu *zredukowaną na odległość r* względem danej płaszczyzny (prostej lub punktu) nazywamy liczbę

(6) $$m_r=I/r^2.$$

Zatem $I=m_r r^2$. A więc: *moment bezwładności układu względem płaszczyzny (prostej, punktu) równa się momentowi bezwładności jego masy zredukowanej m_r, umieszczonej w odległości r od tej płaszczyzny (prostej, punktu).*

Momenty stopnia drugiego układu punktów:

$$m_1(x_1, y_1, z_1), \quad m_2(x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad m_n(x_n, y_n, z_n)$$

względem płaszczyzny, osi i początku układu spółrzędnych wyrażają się następującymi wzorami:

Momenty bezwładności względem płaszczyzn xy, yz i xz:

(7) $$I_{xy}=\sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \qquad I_{yz}=\sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \qquad I_{zx}=\sum_{i=1}^n m_i y_i^2.$$

Momenty bezwładności względem osi x, y i z:

(8) $$I_x=\sum_{i=1}^n m_i(y_i^2+z_i^2), \qquad I_y=\sum_{i=1}^n m_i(x_i^2+z_i^2), \qquad I_z=\sum_{i=1}^n m_i(x_i^2+y_i^2).$$

Momenty bezwładności względem początku O układu współrzędnych:

(9) $$I_O=\sum_{i=1}^n m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2).$$

Momenty zboczenia względem par płaszczyzn xy i zx, xy i yz oraz xz i zy:

(10) $$D_x=\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \qquad D_y=\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i, \qquad D_z=\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i.$$

Ze wzorów (7)—(10) wynikają łatwo związki:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz}, \qquad I_y=I_{xy}+I_{yz}, \qquad I_z=I_{xz}+I_{yz};$$

$$I_{xy}=\tfrac{1}{2}[I_x+I_y-I_z], \qquad I_{yz}=\tfrac{1}{2}[I_y+I_z-I_x], \qquad I_{xz}=\tfrac{1}{2}[I_x+I_z-I_y];$$

$$I_O=\tfrac{1}{2}(I_x+I_y+I_z)=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}, \qquad I_O=I_x+I_{yz}=I_y+I_{xz}=I_z+I_{xy}.$$

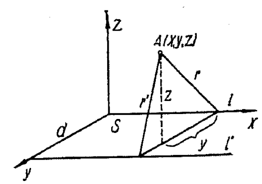
Momenty bezwładności względem prostych równoległych. Znając momenty bezwładności układu punktów o masie całkowitej m względem prostych przechodzących przez jeden punkt np. przez początek układu spółrzędnych, możemy łatwo wyznaczyć moment bezwładności tegoż układu punktów względem dowolnej prostej w przestrzeni, opierając się na następującym twierdzeniu:

Jeżeli prosta l przechodząca przez środek masy układu punktów jest równoległa do prostej l', to

(I) $$I_{l'}=I_l+md^2,$$

gdzie d oznacza odległość między l a l', zaś I_l i $I_{l'}$ momenty bezwładności względem tych prostych..

Dowód. Środek S masy układu punktów, przez który przechodzi prosta l, obierzmy za początek układu współrzędnych, prostą l za oś x-ów, a płaszczyznę przesuniętą przez proste równoległe l i l' za płaszczyznę xy. Oznaczając odpowiednio przez r i r' odległość dowolnego punktu $A(x,y,z)$ od prostych l i l', mamy $r'^2=z^2+(d-y)^2$ i $r^2=z^2+y^2$,



skąd $r'^2=r^2+d^2-2dy$, a więc

$$I_{l'}=\sum_{i=1}^n m_i r_i'^2=\sum_{i=1}^n m_i[r_i^2+d^2-2dy_i]=\sum_{i=1}^n m_i r_i^2+d^2\sum_{i=1}^n m_i-2d\sum_{i=1}^n m_i y_i=$$
$$=I_l+md^2-2d\sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

Lecz $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = m y_0 = 0$, gdyż środek S masy układu punktów leży w początku układu współrzędnych. Zatem $I_{l'} = I_l + md^2$, c. b. d. d.

Z wzoru (I) wynika, że jeżeli wziąć pod uwagę wszystkie proste równoległe do prostej o pewnym danym kierunku, to moment bezwładności będzie najmniejszy względem tej prostej, która przechodzi przez środek masy. Oczywistym jest również, że jeżeli proste l' i l'' są równoległe, to oznaczając przez d_1 i d_2 odległości środka masy od tych prostych, będziemy mieli

$$I_{l'} - md_1^2 = I_{l''} - md_2^2, \tag{10}$$

ponieważ na mocy (I) obie strony równości wynoszą I_l, gdzie l jest prostą równoległą do l' i l'', przechodzącą przez środek masy.

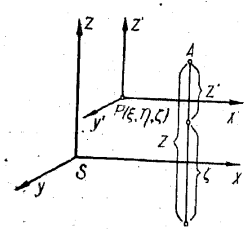
Ze wzoru (10) mamy

$$I_{l''} = I_{l'} + m(d_2^2 - d_1^2). \tag{II}$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć moment bezwładności układu punktów względem dowolnej prostej w przestrzeni, gdy znane są momenty bezwładności tego układu względem wszystkich prostych przechodzących przez jeden punkt i położenie środka masy układu.

Momenty zboczenia względem płaszczyzn równoległych. Dla momentów zboczenia można udowodnić twierdzenie podobne do twierdzenia o momentach bezwładności (str. 161).

Niechaj płaszczyzny Π_1, Π_2 będą do siebie prostopadłe i przechodzą przez środek masy m danego układu punktów materialnych. Obierzmy dowolnie płaszczyzny Π_1', Π_2' równoległe odpowiednio do płaszczyzn Π_1, Π_2. Niech σ_1 oznacza odległość między płaszczyznami Π_1, Π_1', zaopatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy płaszczyzna Π_1' leży w dodatniej czy ujemnej części przestrzeni, na jakie dzieli przestrzeń płaszczyzna Π_1. Analogicznie określmy σ_2 dla pary płaszczyzn Π_2, Π_2'. Wreszcie oznaczmy przez D i D' momenty zboczenia danego układu względem par płaszczyzn Π_1, Π_2 i Π_1', Π_2'. Mamy wówczas analogicznie do (I) wzór



$$D' = D + m\sigma_1\sigma_2. \tag{III}$$

Uwaga. Zauważmy, że iloczyn $m\sigma_1\sigma_2$ oznacza moment zboczenia względem pary płaszczyzn Π_1, Π_2 masy całkowitej m układu, umieszczonej gdziekolwiek bądź na prostej przecięcia pary płaszczyzn Π_1' i Π_2'.

Dowód wzoru (III). Obierzmy początek układu współrzędnych (x, y, z) w środku S masy całkowitej m danego układu punktów. Za oś x-ów weźmiemy prostą przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2, zaś płaszczyzny te obieramy odpowiednio za płaszczyzny xy i xz.

Analogicznie obieramy drugi układ współrzędnych (x', y', z') dla pary płaszczyzn Π_1', Π_2', przyjmując za początek dowolny punkt P leżący na prostej przecięcia płaszczyzn Π_1' i Π_2'.

Oznaczmy współrzędne punktu P względem układu współrzędnych (x, y, z) przez ξ, η, ζ. Oczywiście $\eta = \sigma_2$ i $\zeta = \sigma_1$. Niech x, y, z będą współrzędnymi dowolnego punktu A względem układu współrzędnych (x, y, z), zaś x', y', z' współrzędnymi tegoż punktu A względem układu współrzędnych (x', y', z'). Wówczas:

$$x' = x - \xi, \qquad y' = y - \eta, \qquad z' = z - \zeta. \tag{11}$$

Ponieważ

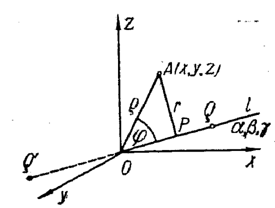
$$D' = \sum m_i z_i' y_i', \qquad D = \sum m_i z_i y_i, \tag{12}$$

więc na mocy (11)

$$\begin{aligned} D' &= \sum m_i (z_i - \zeta)(y_i - \eta) = \sum m_i [z_i y_i + \zeta\eta - \zeta y_i - \eta z_i] = \\ &= \sum m_i z_i y_i + \zeta\eta \sum m_i - \zeta \sum m_i y_i - \eta \sum m_i z_i. \end{aligned} \tag{13}$$

Lecz $\sum m_i y_i = m y_0 = 0$ i $\sum m_i z_i = m z_0 = 0$, gdyż środek S masy m danego układu punktów leży z założenia w początku układu (x, y, z). Na mocy (12) i (13) jest więc $D' = D + m\zeta\eta$, a ponieważ $\zeta = \sigma_1$ i $\eta = \sigma_2$, więc otrzymujemy w końcu $D' = D + m\sigma_1\sigma_2$, c. b. d. d.

§ 4. Elipsoida bezwładności. Osie bezwładności. Niech $O(x, y, z)$ będzie dowolnym układem współrzędnych prostokątnych o początku O. Udowodnimy, że znając momenty bezwładności względem osi i momenty zboczenia względem płaszczyzn tego układu współrzędnych, można wyznaczyć momenty bezwładności względem dowolnej prostej l, przechodzącej przez O.



Niechaj prosta l tworzy z osiami układu współrzędnych $O(x, y, z)$ kąty α, β, γ. Obierzmy dowolny punkt $A(x, y, z)$ i niechaj P będzie rzutem punktu A na prostą l. Zatem $AP=r$ jest odległością punktu A od prostej l. Połóżmy

(1) $$OA=\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Oznaczając przez φ kąt między prostą OA a prostą l, otrzymamy

(2) $$AP=r=\varrho\sin\varphi.$$

Ponieważ, jak wiadomo z geometrii analitycznej,

$$OP=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma,$$

więc z uwagi na to, że $OP=\varrho\cos\varphi$, otrzymamy

$$\cos\varphi=\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\varrho}$$

Na mocy (2) jest $r^2=\varrho^2\sin^2\varphi=\varrho^2(1-\cos^2\varphi)$, więc

$$r^2=\varrho^2\left[1-\frac{(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{\varrho^2}\right]=\varrho^2-[x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma]^2,$$

skąd na mocy (1) jest $r^2=x^2[1-\cos^2\alpha]+y^2[1-\cos^2\beta]+z^2[1-\cos^2\gamma]-$ $-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma$.

Ponieważ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, więc podstawiając $1-\cos^2\alpha=$ $=\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ i t. d., dostaniemy:

$$r^2=(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(x^2+z^2)\cos^2\beta+(x^2+y^2)\cos^2\gamma-$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma.$$

Oznaczając przez m_i masę, a przez r_i odległość punktu A_i danego układu punktów $A_1, A_2, \ldots$ od prostej l, otrzymamy na moment bezwładności I_l tego układu punktów względem prostej l wzór

$$I_l=\sum m_i r_i^2=\cos^2\alpha\sum m_i(y_i^2+z_i^2)+\cos^2\beta\sum m_i(x_i^2+z_i^2)+\cos^2\gamma\sum m_i(x_i^2+y_i^2)-$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta\sum m_i x_i y_i-2\cos\alpha\cos\gamma\sum m_i x_i z_i-2\cos\beta\cos\gamma\sum m_i y_i z_i,$$

skąd

(I) $$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-$$
$$-2D_z\cos\alpha\cos\beta-2D_y\cos\alpha\cos\gamma-2D_x\cos\beta\cos\gamma.$$

Ze wzoru (I) możemy wyznaczyć moment bezwładności układu punktów materialnych względem prostej l, znając $I_x, I_y, I_z, D_x, D_y, D_z$ oraz kąty, jakie prosta l tworzy z osiami układu współrzędnych.

Zachowując znakowanie poprzednie, oznaczmy przez k_l długość ramienia bezwładności danego układu punktów względem prostej l. Zatem (str. 160)

(3) $$k_l=\sqrt{I_l/m}.$$

Załóżmy, że dla każdej prostej l przechodzącej przez O jest $I_l\neq 0$. Założenie to równoważne jest założeniu, że punkty materialne danego układu nie leżą na jednej i tej samej prostej przechodzącej przez O. Ponieważ $I_l\neq 0$, więc na mocy (3) jest również $k_l\neq 0$.

Odetnijmy na każdej prostej l odcinki OQ i OQ' o długości odwrotnie proporcjonalnej do ramienia bezwładności k_l, t. zn.

(4) $$OQ=OQ'=a/k_l=a\sqrt{m/I_l},$$

gdzie a jest dowolną stałą dodatnią, nie zależną od prostej l. Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu Q, mamy:

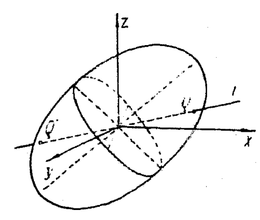
(5) $$x=\pm a\sqrt{\frac{m}{I_l}}\cos\alpha,\qquad y=\pm a\sqrt{\frac{m}{I_l}}\cos\beta,\qquad z=\pm a\sqrt{\frac{I_l}{m}}\cos\gamma.$$

Punkt Q' ma współrzędne $-x, -y, -z$. Zbiór wszystkich punktów Q i Q' utworzy pewną powierzchnię Σ. Aby otrzymać jej równanie, wyznaczmy z (5) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ i wstawmy otrzymane wartości do równania (I). Dostaniemy:

$$I_l=\frac{I_l}{ma^2}[I_x x^2+I_y y^2+I_z z^2-2D_x yz-2D_y xz-2D_z xy],$$

skąd

(6) $$I_x x^2+I_y y^2+I_z z^2-2D_x yz-2D_y xz-2D_z xy=c^2,$$



gdzie $c^2=ma^2$. Widzimy stąd, że powierzchnia Σ jest powierzchnią rzędu drugiego. Wykażemy, że Σ jest elipsoidą. Wystarczy w tym celu udowodnić, że Σ jest powierzchnią ograniczoną (t. zn. że odległości jej punktów od początku układu współrzędnych nie przekraczają pewnej liczby). W rzeczy samej, założyliśmy, że $I_l\neq 0$, a więc mamy stale $I_l>0$. Ponieważ na mocy wzoru (I) I_l jest funkcją ciągłą kątów α, β, γ, więc minimum I_l jest również dodatnie. Oznaczając to minimum przez h, mamy na mocy (3) $k_l\geqslant\sqrt{h/m}$, skąd na mocy (4) $OQ'=OQ\leqslant a\sqrt{m/h}$. A zatem powierzchnia Σ jest powierzchnią ograniczoną. Wynika stąd, że powierzchnia Σ jest elipsoidą, gdyż jedyną powierzchnią ograniczoną drugiego rzędu jest elipsoida.

Otrzymaną elipsoidę Σ nazywamy *elipsoidą bezwładności* danego układu punktów względem punktu O.

Ponieważ w równaniu (6) brak jest wyrazów pierwszego stopnia, t. j. y, x, z, więc punkt O jest środkiem elipsoidy bezwładności.

Zatem: *elipsoida bezwładności układu punktów materialnych względem punktu O ma tę własność, że odległość od O każdego jej punktu jest odwrotnie proporcjonalna do ramienia bezwładności układu względem średnicy, przechodzącej przez ten punkt.*

Osie elipsoidy bezwładności względem punktu O nazywamy *osiami bezwładności* względem punktu O.

Elipsoidę bezwładności względem środka ciężkości nazywamy elipsoidą bezwładności *środkową*, osie jej osiami bezwładności *środkowymi* a płaszczyzny przeprowadzone przez dwie osie *płaszczyznami środkowymi*.

Istnieje oczywiście nieskończenie wiele elipsoid bezwładności danego układu względem jednego i tego samego punktu O. Zależą one od wyboru współczynnika proporcjonalności. Wszystkie te elipsoidy mają jednak wspólny środek i wspólne kierunki osi głównych. Ponadto stosunek osi głównych jest we wszystkich elipsoidach jednakowy. Wszystkie elipsoidy bezwładności względem jednego i tego samego punktu O są więc do siebie podobne.

Ramię bezwładności ma największą wartość względem osi małej; zatem moment bezwładności ma najmniejszą wartość względem osi małej. Względem wielkiej osi jest na odwrót.

W szczególności, gdy elipsoida jest kulą, punkt O nazywamy punktem *kulistym*.

Momenty bezwładności względem każdej prostej przechodzącej przez punkt kulisty są równe (i na odwrót).

W y z n a c z a n i e o s i b e z w ł a d n o ś c i. Jeżeli za osie spółrzędnych x, y, z przyjąć osie bezwładności, to równanie elipsoidy bezwładności będzie miało kształt

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = F. \tag{7}$$

Porównując równania (6) i (7), widzimy, że w tym przypadku $D_x=0$, $D_y=0$ i $D_z=0$; równanie elipsoidy bezwładności będzie zatem

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = c^2. \tag{8}$$

A więc: *warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by osie układu współrzędnych były osiami bezwładności, jest by momenty zboczenia D_x, D_y, D_z były równe zeru.*

Jeżeli osie spółrzędnych x, y, z obierzemy tak, by tylko jedna z nich, np. oś z, pokrywała się z jedną z osi bezwładności, to równanie elipsoidy bezwładności przyjmie kształt

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Exy = F. \tag{9}$$

Porównując równania (6) i (9), widzimy, że $D_x=0$ i $D_y=0$. Równanie elipsoidy bezwładności będzie więc w tym przypadku

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_z xy = c^2. \tag{10}$$

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by oś z była osią bezwładności, jest by momenty zboczenia D_x i D_y były równe zeru.*

Łatwo sformułować analogiczne warunki na to, by osiami bezwzględności były oś x, lub oś y.

Przyjmijmy teraz za początek układu współrzędnych (x, y, z) środek S masy całkowitej m danego układu punktów materialnych, zaś jego osie środkowe za osie współrzędnych x, y, z. Mamy oczywiście:

$$D_x = 0, \qquad D_y = 0, \qquad D_z = 0. \tag{11}$$

Przyjmijmy następnie dowolny punkt $O(\xi, \eta, \zeta)$ za początek nowego układu współrzędnych (x', y', z') o osiach odpowiednio równoległych do osi x, y i z. Na mocy (III), str. 162, będzie:

$$D_{x'} = D_x + m\zeta\eta, \qquad D_{y'} = D_y + m\xi\zeta, \qquad D_{z'} = D_z + m\xi\eta,$$

skąd na mocy (11):

$$D_{x'} = m\zeta\eta, \qquad D_{y'} = m\xi\zeta, \qquad D_{z'} = m\xi\eta. \tag{12}$$

Załóżmy, że punkt $O(\xi, \eta, \zeta)$ leży na jednej z płaszczyzn środkowych, np. na płaszczyźnie xy. Zatem $\zeta=0$. Na mocy więc (12) otrzymamy $D_{x'}=0$ i $D_{y'}=0$. Wynika stąd, że oś z' jest osią bezwładności względem punktu O. Mamy więc twierdzenie:

Jedna z osi bezwładności względem punktu położonego w płaszczyźnie środkowej jest prostopadła do tej płaszczyzny.

W szczególności, gdy punkt O leży na osi środkowej, np. na osi x, mamy $\eta=0$ i $\zeta=0$, skąd na mocy (12) $D_{x'}=0$, $D_{y'}=0$ i $D_{z'}=0$. Wynika stąd, że osie x', y', z' są osiami bezwładności względem punktu O. Otrzymujemy więc wnioski:

1^0 *Osie bezwładności względem punktu położonego na osi środkowej są równoległe do osi środkowych.*

2^0 *oś środkowa jest osią bezwładności względem każdego jej punktu.*

Jeżeli dany układ punktów materialnych posiada oś lub płaszczyznę symetrii, wówczas można dowieść następującego twierdzenia:

Oś symetrii układu punktów materialnych jest osią środkową; podobnie *płaszczyzna symetrii jest płaszczyzną środkową.*

D o w ó d. Aby dowieść pierwszej części twierdzenia, zauważmy, że na osi symetrii leży środek S masy m układu. Weźmy S za początek układu współrzędnych (x, y, z), a oś symetrii za oś z. Wobec tego dany układ punktów materialnych zawiera do każdego punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i drugi punkt A'_i o masie równej m_i i o współrzędnych $-x_i$, $-y_i$, z_i. Mamy więc:

$$D_x=\Sigma[m_i y_i z_i+m_i(-y_i)z_i]=0, \qquad D_y=\Sigma[m_i x_i z_i+m_i(-x_i)z_i]=0.$$

Wynika stąd, że oś symetrii z jest zarazem osią bezwładności względem środka masy S, a zatem jest osią środkową.

Aby dowieść drugiej części twierdzenia, zauważmy, że na płaszczyźnie symetrii leży środek masy S. Przyjmijmy S za początek układu współrzędnych, zaś osie x i y obierzmy w płaszczyźnie symetrii. Ponieważ płaszczyzna xy jest płaszczyzną symetrii, więc do każdego punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i istnieje w naszym układzie punktów materialnych punkt A'_i o masie równej m_i i o współrzędnych x_i, y_i, $-z_i$. Mamy więc:

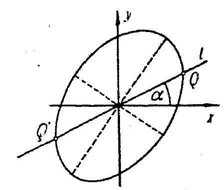
$$D_x=\Sigma[m_i y_i z_i+m_i y_i(-z_i)]=0, \qquad D_y=\Sigma[m_i x_i z_i+m_i x_i(-z_i)]=0.$$

Wynika stąd, że oś z jest osią środkową, a więc płaszczyzna symetrii xy, jako prostopadła do osi środkowej z, jest płaszczyzną środkową.

§ 5. Momenty kwadratowe układu płaskiego. Niech dany będzie układ punktów materialnych leżących w płaszczyźnie Π. Jako płaszczyzna symetrii jest więc płaszczyzna Π na mocy twierdzenia poprzedniego płaszczyzną środkową. W każdym punkcie płaszczyzny Π jedna z osi bezwładności jest tedy prostopadła do płaszczyzny Π, podczas gdy dwie pozostałe osie bezwładności leżą w płaszczyźnie Π.

Jeżeli wziąć pod uwagę tylko momenty bezwładności względem prostych leżących w płaszczyźnie Π, to rozważania §§ 3 i 4 można uprościć.

Obierzmy dany punkt O za początek układu współrzędnych (x, y) płaszczyzny Π. Wykreślmy z punktu O dowolną prostą l leżącą w tej płaszczyźnie i tworzącą kąt α z osią x-ów. Moment bezwładności względem l otrzymamy ze wzoru (I), str. 164, kładąc $\beta=90^0-\alpha$ i $\gamma=90^0$. Zatem



(1) $$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-D_z\sin 2\alpha.$$

Moment zboczenia $D_{z}=\Sigma m_i x_i y_i$ nazywać będziemy *momentem zboczenia względem osi x i y.*

Zaznaczmy na prostej l punkty Q i Q', których odległości od O są odwrotnie proporcjonalne do ramienia bezwładności. Zbiór takich par punktów zaznaczonych na wszystkich prostych l, jakie przechodzą przez O, utworzy krzywą, która będzie przekrojem płaszczyzny Π z elipsoidą bezwładności względem punktu O. Krzywa ta będzie zatem elipsą; nazywamy ją *elipsą bezwładności względem O.*

Równanie jej otrzymamy z równania (6), str. 165, kładąc $z=0$. A więc równaniem elipsy bezwładności będzie

(2) $$I_x x^2+I_y y^2-2D_z xy=c^2.$$

Jeżeli za osie x, y obierzemy osie bezwładności, to równanie elipsy bezwładności przyjmie postać

(3) $$I_x x^2+I_y y^2=c^2.$$

II. Bryły, powierzchnie i linie materialne.

§ 6. Gęstość. Gdy ciało nie jest tak małe, byśmy je mogli uważać za punkt materialny, to oprócz masy ciała podajemy także rozmieszczenie masy w ciele. W wielu bowiem zagadnieniach mechaniki duże znaczenie ma nie tylko znajomość masy całego ciała, lecz także znajomość masy jego poszczególnych części.

Często się zdarza, że masa części ciała jest proporcjonalna do objętości. Oznaczając wówczas przez m masę, a przez v objętość ciała, otrzymamy, że masa przypadająca na jednostkę objętości, wynosi

$$\varrho = m/v. \tag{I}$$

Liczbę ϱ nazywamy *gęstością* ciała.

Mówimy w tym przypadku, że masa jest w ciele rozmieszczona jednostajnie, lub że ciało jest *jednorodne*, lub wreszcie, że *gęstość jest stała*.

Masa części ciała o objętości v' wyniesie wówczas $m' = v'\varrho$. Na mocy (I) wymiar gęstości jest

$$[\text{gęstość}] = L^{-3}M \tag{1}$$

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego, t. j. nie zakładajmy, że masa jest w danym ciele rozmieszczona jednostajnie. Niechaj A będzie jakimkolwiek punktem danego ciała. Obierzmy w ciele dowolny sześcian o masie Δm i objętości Δv, którego środkiem jest punkt A. Granicę

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \varrho \tag{II}$$

nazywamy *gęstością ciała w punkcie A*.

Gęstość ϱ zależy w ogólności od punktu A. Jeżeli A ma współrzędne x, y, z, to ϱ jest funkcją zmiennych x, y, z; możemy więc napisać $\varrho = \varrho(x, y, z)$. Jeżeli $\varrho = \text{const.}$, to masa w ciele jest rozmieszczona jednostajnie i mamy rozpatrzony już przypadek ciała jednorodnego.

Zakładać będziemy zawsze, że ϱ jest funkcją ciągłą.

Obliczanie masy. Znając gęstość w każdym punkcie ciała możemy obliczyć jego masę, jak również masę dowolnej jego części. Przy pomocy płaszczyzn równoległych do płaszczyzn xy, yz, zx podzielmy mianowicie dane ciało na drobne prostopadłościany (t. zw. *elementy objętości*) i na ewentualne kawałki brzeżne o kształcie nieregularnym. Oznaczmy objętości kolejnych prostopadłościanów przez Δv_1, $\Delta v_2, \ldots$ i obierzmy w każdym z nich po jednym punkcie o współrzędnych $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots$. Masy poszczególnych prostopadłościanów wynoszą w przybliżeniu $\varrho(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1$, $\varrho(x_2, y_2, z_2)\Delta v_2, \ldots$. Zatem suma

$$\varrho(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1 + \varrho(x_2, y_2, z_2)\Delta v_2 + \ldots$$

przedstawia w przybliżeniu masę ciała. Tworząc podział na coraz drobniejsze prostopadłościany o wymiarach dążących do zera i przechodząc do granicy, otrzymamy dla masy m danego ciała wzór

$$m = \iiint_D \varrho(x, y, z)\, dv, \tag{III}$$

gdzie obszar całkowania D obejmuje całe ciało.

W szczególności, gdy $\varrho = \text{const.}$, dostajemy ze wzoru (III) $m = \varrho v$ zgodnie ze wzorem (I).

Wzór (III) podaje również masę dowolnej części danego ciała, jeżeli przyjmiemy, że D oznacza obszar zajęty przez tę część.

Powierzchnia materialna, linia materialna. Niekiedy jeden lub dwa wymiary ciała są drobne w porównaniu z pozostałymi. Przykładami takich ciał są płyty, pręty, druty i t. p. W tych przypadkach przedstawiamy ciało, jako powierzchnię lub linię materialną i mówimy, że *masa* jego jest *rozłożona powierzchniowo* lub *liniowo*.

Niech masa będzie rozłożona na powierzchni S i niechaj A oznacza dowolny punkt tej powierzchni. Oznaczmy przez $\Delta\sigma$ pole małego płata powierzchni S, pokrywającego punkt A (t. zw. *element pola*), przez Δm masę tego płata. Jeżeli wymiary płata będą dążyły do zera, granicę

$$\lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} = \varrho \tag{IV}$$

nazywamy *gęstością powierzchniową w punkcie A*.

W szczególności, gdy $\varrho = \text{const}$, wówczas ϱ przedstawia masę płata o polu 1 cm², wyciętego z powierzchni S.

Można wykazać (podobnie jak poprzednio przy bryłach), że masa powierzchni S wyraża się wzorem

$$\text{(V)} \qquad m = \iint_S \varrho\, d\sigma,$$

gdzie obszar całkowania S rozciągnięty jest na całą powierzchnię.

Gdy $\varrho = \text{const.}$ i P oznacza pole powierzchni S, mamy $m = \varrho P$, skąd

$$\text{(2)} \qquad \varrho = m/P.$$

Ze wzoru powyższego otrzymujemy dla gęstości powierzchniowej wymiar

$$\text{(3)} \qquad [\text{gęstość powierzchniowa}] = L^{-2}M.$$

Podobnie postępujemy w przypadku masy rozłożonej liniowo na pewnej krzywej C. Jeżeli A jest punktem krzywej C, wówczas obieramy dowolny łuk krzywej C, pokrywający punkt A. Jeżeli Δs oznacza długość tego łuku (t. zw. *element długości*), zaś Δm jego masę, wówczas granicę

$$\text{(VI)} \qquad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \varrho$$

nazywamy *gęstością liniową w punkcie* A.

W szczególności jeżeli $\varrho = \text{const}$, wówczas ϱ przedstawia masę łuku (krzywej C) o długości 1 cm.

Masa m na całej krzywej C wynosi

$$\text{(VII)} \qquad m = \int_C \varrho\, ds,$$

gdzie obszar całkowania rozciągnięty jest na całą tą krzywą.

Gdy $\varrho = \text{const}$ i s oznacza długość krzywej C, mamy na mocy (VII):

$$\text{(4)} \qquad m = \varrho s, \qquad \text{skąd} \qquad \varrho = m/s.$$

Na wymiar gęstości liniowej otrzymujemy więc wzór

$$\text{(5)} \qquad [\text{gęstość liniowa}] = L^{-1}M.$$

§ 7. Momenty statyczne i bezwładności. Środek masy.

Moment statyczny ciała względem pewnej płaszczyzny, np. xy, określamy w sposób następujący. Dzielimy ciało na drobne prostopadłościany o objętościach $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots$ i ewentualnie na pewne kawałki nieregularne brzeżne. W każdym prostopadłościanie obieramy dowolnie po jednym punkcie o współrzędnych $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots$ Oznaczmy przez $\varrho(x, y, z)$ gęstość ciała w punkcie x, y, z. Masa prostopadłościanu Δv_1 wynosi w przybliżeniu $\varrho(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta v_1$; gdybyśmy całą jego masę umieścili w punkcie x_1, y_1, z_1, to moment statyczny tej masy względem płaszczyzny xy byłby równy $z_1 \cdot \varrho(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta v_1$. Możemy więc przyjąć, że suma

$$z_1 \cdot \varrho(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta v_1 + z_2 \cdot \varrho(x_2, y_2, z_2) \cdot \Delta v_2 + \ldots$$

przedstawia w przybliżeniu moment statyczny ciała względem płaszczyzny xy. Z tego powodu granicę powyższej sumy, gdy wymiary prostopadłościanów dążą do zera, nazywamy *momentem statycznym ciała względem płaszczyzny* xy.

Ponieważ granicą powyższej sumy jest całka potrójna $\iiint_D z\varrho\, dv$, gdzie obszar całkowania D jest rozciągnięty na całe ciało, więc

$$\text{(I)} \qquad M_{xy} = \iiint_D z\varrho\, dv \quad \text{i podobnie} \quad M_{xz} = \iiint_D y\varrho\, dv, \quad M_{yz} = \iiint_D x\varrho\, dv.$$

Analogicznie określamy moment statyczny powierzchni i linij. Zamiast całek potrójnych wystąpią odpowiednio całki podwójne po powierzchniach i pojedyncze po liniach.

W przypadku masy rozłożonej na powierzchni S otrzymamy

$$\text{(II)} \qquad M_{xy} = \iint_S z\varrho\, d\sigma, \qquad M_{xz} = \iint_S y\varrho\, d\sigma, \qquad M_{yz} = \iint_S x\varrho\, d\sigma,$$

gdzie $d\sigma$ jest elementem pola, a dla masy rozłożonej liniowo na krzywej C:

$$\text{(III)} \qquad M_{xy} = \int_C z\varrho\, ds, \qquad M_{xz} = \int_C y\varrho\, ds, \qquad M_{yz} = \int_C x\varrho\, ds,$$

gdzie ds jest elementem długości łuku.

Momenty statyczne figur płaskich względem osi x i y wyrażają się wzorami

$$\text{(1)} \qquad M_x = \iint_D y\varrho\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint_D x\varrho\, dx\, dy.$$

Dla linij płaskich mamy:

$$M_x = \int_C y\varrho\,ds, \qquad M_y = \int_C x\varrho\,ds. \tag{2}$$

Środek masy ciała, powierzchni lub linii materialnej określamy jako punkt o współrzędnych:

$$x_0 = M_{zy}/m, \qquad y_0 = M_{xz}/m, \qquad z_0 = M_{xy}/m, \tag{IV}$$

gdzie M_{zy}, M_{xz}, M_{xy} oznaczają momenty statyczne względem płaszczyzn zy, xz, xy, a m masę ciała.

Dla figur i linii płaskich dostajemy:

$$x_0 = M_y/m, \qquad y_0 = M_x/m. \tag{V}$$

Jeżeli gęstość w ciele jest $\varrho = \text{const.}$, to $M_{zy} = \varrho\iiint_D x\,dv$ i $m = \varrho\iiint_D dv = \varrho v$, skąd

$$x_0 = \frac{\iiint_D x\,dv}{v}, \qquad y_0 = \frac{\iiint_D y\,dv}{v}, \qquad z_0 = \frac{\iiint_D z\,dv}{v}. \tag{VI}$$

Widzimy stąd, że x_0, y_0 i z_0 nie zależą od gęstości.

A więc: *jeżeli gęstość jest stała, to położenie środka ciężkości nie zależy od gęstości.*

To samo odnosi się do powierzchni i linij.

Można wykazać, że twierdzenia o środku masy dla układów punktów materialnych, udowodnione w § 2, zachodzą również w przypadku ciał, powierzchni i linij materialnych.

Bryły, powierzchnie i linie geometryczne. *Momentem statycznym bryły geometrycznej* nazywamy moment statyczny ciała materialnego, mającego postać danej bryły, przy założeniu, że gęstość $\varrho = \text{const}$; zazwyczaj przyjmujemy $\varrho = 1$.

Środek masy tego ciała (który nie zależy od ϱ) nazywamy *środkiem ciężkości bryły geometrycznej*.

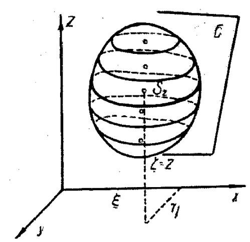
Analogicznie określamy moment statyczny i środek ciężkości dla powierzchni i linii geometrycznych.

Momenty statyczne i środki masy tworów geometrycznych otrzymamy zatem, kładąc w podanych wzorach (I)-(V), (1) i (2) $\varrho = 1$ i przyjmując wobec tego, że m oznacza objętość, pole lub długość, zależnie od tego czy twór geometryczny jest bryłą, powierzchnią czy linią.

Poznamy teraz pewne twierdzenie, ułatwiające w wielu wypadkach znalezienie środka masy. Przetnijmy daną bryłę D płaszczyznami równoległymi do pewnej płaszczyzny Π. Załóżmy, że środki ciężkości przekrojów leżą w pewnej płaszczyźnie σ.

Przy tych założeniach można udowodnić, że środek ciężkości bryły D leży również w płaszczyźnie σ.

Intuicyjnie jest to jasne. Podzielmy bowiem bryłę D na cienkie warstwy przy pomocy płaszczyzn równoległych do płaszczyzny Π. Możemy przyjąć w przybliżeniu, że środek masy każdej warstwy leży w płaszczyźnie σ. Zatem moment statyczny każdej warstwy względem płaszczyzny σ jest równy zeru. Wynika stąd, że moment statyczny całej bryły D względem płaszczyzny σ jest zerem (gdyż równy jest sumie momentów poszczególnych warstw). A więc środek masy bryły D też będzie leżał w płaszczyźnie σ.



Ścisły dowód można przeprowadzić w następujący sposób. Przyjmijmy, że Π jest płaszczyzną poziomą, zaś σ jest płaszczyzną o równaniu

$$Ax + By + Cz + E = 0. \tag{3}$$

Oznaczmy przez D_z przekrój bryły D płaszczyzną poziomą na wysokości z. Niechaj ξ, η i $\zeta = z$, będą współrzędnymi środka ciężkości S_z przekroju D_z. Oczywiście ξ, η i ζ są funkcjami z i na mocy (3)

$$A\xi + B\eta + C\zeta + E = 0. \tag{4}$$

Oznaczając przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka masy bryły D, otrzymujemy z (VI)

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + E = \frac{1}{v}\left(A\iiint_D x\,dv + B\iiint_D y\,dv + C\iiint_D z\,dv + Ev\right). \tag{5}$$

Niech P_z będzie polem przekroju D_z, a z' i z'' (gdzie $z' < z''$) granicami, w których się zmienia zmienna z. Wówczas

$$P_z = \iint_{D_z} dx\,dy. \tag{6}$$

Zamieniając całkę potrójną na całkę iterowaną, otrzymamy:

$$v=\iiint\limits_D dv=\int\limits_{z'}^{z''} dz \iint\limits_{D_z} dx\,dy=\int\limits_{z'}^{z''} P_z\,dz, \tag{7}$$

$$\iiint\limits_D z\,dv=\int\limits_{z'}^{z''} z\,dz \iint\limits_{D_z} dx\,dy=\int\limits_{z'}^{z''} P_z z\,dz=\int\limits_{z'}^{z''} P_z \zeta\,dz, \tag{8}$$

$$\iiint\limits_D x\,dv=\int\limits_{z'}^{z''} dz \iint\limits_{D_z} x\,dx\,dy. \tag{9}$$

Ponieważ $\iint\limits_{D_z} x\,dx\,dy$ przedstawia moment statyczny przekroju D_z względem płaszczyzny yz, więc $\iint\limits_{D_z} x\,dx\,dy=P_z\xi$. Zatem na mocy (9)

$$\iiint\limits_D x\,dv=\int\limits_{z'}^{z''} P_z \xi\,dz \quad \text{i podobnie} \quad \iiint\limits_D y\,dv=\int\limits_{z'}^{z''} P_z \eta\,dz. \tag{10}$$

Na mocy więc (6)—(10) dostaniemy

$$Ax_0+By_0+Cz_0+E=\frac{1}{v}\int\limits_{z'}^{z''}(A\xi+B\eta+C\zeta+E)P_z\,dz.$$

Ze wzoru (4) otrzymamy tedy

$$Ax_0+By_0+Cz_0+E=0.$$

A więc, środek ciężkości bryły D leży w płaszczyźnie σ. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie. *Jeżeli środki ciężkości przekrojów równoległych danej bryły leżą w jednej płaszczyźnie, to środek ciężkości tej bryły leży w tej samej płaszczyźnie.*

W szczególności wynika stąd, że jeżeli środki ciężkości przekrojów leżą na jednej prostej, to i środek ciężkości bryły leży na tej prostej. Jeżeli bowiem przez tę prostą przeprowadzimy dowolną płaszczyznę, to na mocy udowodnionego twierdzenia środek ciężkości bryły będzie leżał w tej płaszczyźnie.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla powierzchni i figur płaskich.

Reguły Guldina. Niech na płaszczyźnie xy dana będzie krzywa C, o równaniu $y=f(x)$, przyczem $f(x)\geqslant 0$ dla $a\leqslant x\leqslant b$. Oznaczmy przez l długość krzywej. Na mocy (V) środek ciężkości wyznaczony jest wzorami:

$$x_0=M_y/m=\int\limits_a^b x\,ds/l, \qquad y_0=M_x/m=\int\limits_a^b y\,ds/l. \tag{11}$$

Pole powierzchni zatoczonej przez daną krzywą przy obrocie około osi x-ów wynosi $P=2\pi\int\limits_a^b y\,ds$. Na mocy więc (11) jest

I. $$P=2\pi l y_0.$$

Podobny wzór otrzymamy, dla dowolnej krzywej, leżącej ponad osią x-ów.

Ponieważ przy obrocie krzywej środek masy zatacza koło o promieniu y_0, więc $2\pi y_0$ oznacza obwód tego koła.

A więc: *powierzchnia bryły, zatoczonej przez obrót krzywej płaskiej około osi, leżącej w płaszczyźnie tej krzywej i nie przecinającej jej, równa się iloczynowi długości krzywej przez drogę, jaką opisuje środek ciężkości.*

Jest to t. zw. *pierwsza reguła Guldina.*

Weźmy teraz pod uwagę dla tej samej krzywej obszar D zawarty między krzywą, osią x a rzędnymi $x=a$ i $x=b$. Oznaczmy przez F pole obszaru D. Środek ciężkości obszaru D ma na mocy (V), str. 174, współrzędne:

$$x_0=\frac{M_y}{F}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{F}, \qquad y_0=\frac{M_x}{F}=\frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{F}. \tag{12}$$

Lecz $\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\left(\int\limits_0^y y\,dy\right)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx$. Na mocy więc (12) jest

$$Fy_0=\tfrac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx. \tag{13}$$

Jeżeli krzywa obróci się około osi x, wówczas objętość zatoczonej bryły będzie wynosiła $V=\pi\int\limits_a^b y^2dx$, skąd na mocy (13)

$$\text{II.} \qquad V=2\pi y_0 F.$$

Podobny wzór otrzymalibyśmy dla dowolnego obszaru położonego nad osią x.

A więc: *objętość bryły zatoczonej przez obrót obszaru płaskiego naokoło osi, leżącej w płaszczyźnie obszaru i nieprzecinającej go, równa się iloczynowi pola obszaru przez drogę, jaką odbył środek ciężkości obszaru.*

Jest to t. zw. *druga reguła Guldina.*

Momenty bezwładności i momenty zboczenia. Postępując podobnie jak przy momentach statycznych, dochodzimy do określenia momentów bezwładności i momentów zboczenia dla brył, powierzchni i linij.

Jeżeli $\varrho(x, y, z)$ oznacza gęstość bryły, to momenty bezwładności względem płaszczyzn xy, yz i zx określamy przez wzory:

$$\text{(VII)} \quad I_{xy}=\iiint\limits_D \varrho z^2 dv, \qquad I_{yz}=\iiint\limits_D \varrho x^2 dv, \qquad I_{zx}=\iiint\limits_D \varrho y^2 dv,$$

momenty bezwładności względem osi współrzędnych:

$$\text{(VIII)} \quad \begin{aligned} I_x&=\iiint\limits_D \varrho(y^2+z^2)dv, \qquad I_y=\iiint\limits_D \varrho(x^2+z^2)dv,\\ I_z&=\iiint\limits_D \varrho(x^2+y^2)dv,\end{aligned}$$

a momenty zboczenia względem płaszczyzn układu:

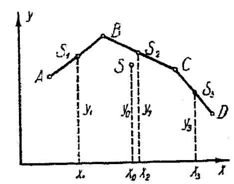
$$\text{(IX)} \quad D_x=\iiint\limits_D \varrho yz dv, \qquad D_y=\iiint\limits_D \varrho zx dv, \qquad D_z=\iiint\limits_D \varrho xy dv.$$

Aby otrzymać momenty bezwładności dla powierzchni (linij), należy w podanych wzorach całkę potrójną zamienić na podwójną (pojedyńczą) po powierzchni (po linii) i zastąpić dv przez $d\sigma$ (ds), podobnie jak dla momentów statycznych. Określenia ramienia bezwładności oraz masy zredukowanej pozostają bez zmiany. Twierdzenia udowodnione dla układów punktów materialnych zachodzą także i tutaj.

§ 8. Środki ciężkości niektórych linij powierzchni i brył.

Jeżeli linia, powierzchnia lub bryła posiada środek symetrii, to jest on równocześnie środkiem ciężkości. Zatem środkiem ciężkości odcinka, pełnego równoległoboku, koła, równoległościanu, kuli i walca jest środek symetrii tych tworów.

Linia łamana. Środek ciężkości linii łamanej, np. $ABCD$, otrzymamy, zastępując każdy odcinek linii punktem materialnym, umieszczonym w środku odcinka, o masie równej długości odcinka. Środek ciężkości układu tych punktów będzie środkiem linii $ABCD$ (rys. 1).

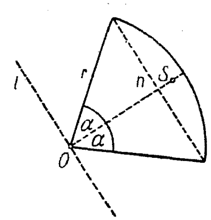

1.

Niechaj d_1, d_2, d_3 oznaczają długości odcinków AB, BC, CD, zaś $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, $S_3(x_3, x_3)$ środki tych odcinków. Środek ciężkości łamanej $ABCD$ będzie więc miał współrzędne

$$(1) \qquad x_0=\frac{d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3}{d_1+d_2+d_3}, \qquad y_0=\frac{d_1y_1+d_2y_2+d_3y_3}{d_1+d_2+d_3},$$

Łuk koła o promieniu r, należący do kąta środkowego 2α, ma za oś symetrii dwusieczną tego kąta. Środek ciężkości łuku leży więc na tej dwusiecznej (rys. 2).

Aby wyznaczyć odległość środka ciężkości S od środka koła O, opieramy się na pierwszej regule Guldina. Przy obrocie naokoło średnicy l, prostopadłej do dwusiecznej kąta 2α, łuk opisuje powierzchnię pasa kulistego o polu $2r\pi h$ (gdzie h oznacza długość cięciwy, na której wspiera się łuk). Długość łuku wynosi $s=2r\alpha$, droga zaś środka ciężkości $2\pi\cdot OS$. Zatem $2r\pi h=4r\pi\alpha\cdot OS$, skąd $OS=h/2\alpha$. Ponieważ $h=2r\sin\alpha$, więc


2.

$$(2) \qquad OS=r\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

W szczególności dla półkola jest $2\alpha=\pi$, stąd $OS=2r/\pi=0{,}64r$.

Trójkąt. Przetnijmy trójkąt prostymi równoległymi do jednego z boków. Środki odcinków, a więc i środek ciężkości trójkąta, leżą na dośrodkowej.

Wynika stąd, że środek ciężkości trójkąta leży w punkcie przecięcia się trzech dośrodkowych, a więc w odległości $^1/_3$ odpowiedniej wysokości od każdego boku.

T r a p e z. Środki odcinków równoległych do podstawy trapezu, a więc również środek ciężkości S trapezu, leżą na dośrodkowej.

Aby wyznaczyć odległość y_0 środka ciężkości S od podstawy, obliczmy moment statyczny trapezu względem podstawy. Niechaj a oznacza podstawę, b drugi bok równoległy, h wysokość i P powierzchnię trapezu. Moment statyczny względem podstawy wynosi

(3) $$M = Py_0 = \tfrac{1}{2}(a+b)hy_0.$$

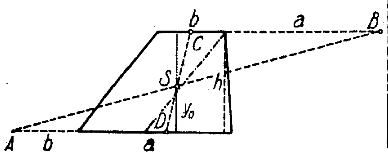
Dzieląc trapez na równoległobok i trójkąt, dostaniemy

(4) $$M = bh\cdot\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}(a-b)h\cdot\tfrac{1}{3}h = \tfrac{1}{6}h^2(a+2b).$$

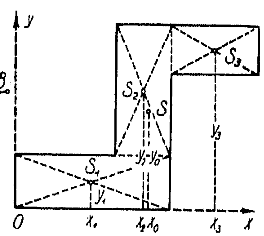
Z porównania (3) i (4) dostaniemy

(5) $$y_0 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}\,h.$$

Wynika stąd konstrukcja geometryczna środka ciężkości, przedstawiona na rysunku 1. Z podobieństwa trójkątów BCS i ADS dostajemy $(h-y_0)/y_0 = (\frac{1}{2}b+a)/(\frac{1}{2}a+b)$, skąd otrzymujemy y_0 zgodnie ze wzorem (5).



1.



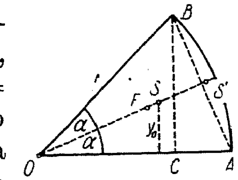
2.

Wielokąt. Aby wyznaczyć środek ciężkości wielokąta, rozbijamy go na trójkąty (trapezy, prostokąty), a następnie obliczamy momenty statyczne poszczególnych części względem osi układu.

Oznaczmy przez p np. pole figury podanej na rys. 2. Rozbijamy ją na 3 prostokąty o polach p_1, p_2 i p_3. Niechaj x_1, y_1, x_2, y_2 i x_3, y_3 będą współrzędnymi środków ciężkości względem osi x i y. Mamy $M_x = p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3$ i $M_y = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$; środek ciężkości S ma więc współrzędne:

(6) $$x_0 = M_y/p, \qquad y_0 = M_x/p.$$

W y c i n e k k o ł a. Weźmy pod uwagę wycinek koła OAB. Z powodu symetrii środek ciężkości S wycinka leży na dwusiecznej kąta środkowego 2α. Odległość OS środka ciężkości od środka koła O otrzymamy opierając się na drugiej regule Guldina. Wycinek OAB zatoczy przez obrót naokoło promienia $OA = r$ wycinek kuli. Wysokość czaszy wycinka kulistego wyniesie $CA = OA - OC = r - r\cos 2\alpha = 2r\sin^2\alpha$, skąd objętość wycinka kuli $v = \frac{2}{3}r^2\pi\cdot 2r\sin^2\alpha = \frac{4}{3}r^3\pi\sin^2\alpha$. Środek ciężkości zatoczy koło o promieniu $y_0 = OS\cdot\sin\alpha$. Pole wycinka równa się $r^2\alpha$. Na mocy drugiej reguły Guldina będzie więc $\frac{4}{3}r^3\pi\sin^2\alpha = 2\pi y_0\cdot r^2\alpha = 2\pi OS\sin\alpha\cdot r^2\alpha$, skąd



(7) $$OS = \frac{2\sin\alpha}{3\alpha}\,r.$$

Dla półkola mamy w szczególności $2\alpha = \pi$ czyli

(8) $$OS = 4r/3\pi = 0{,}42\,r.$$

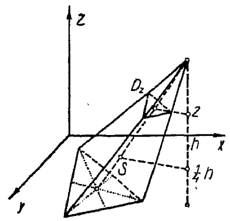
O d c i n e k k o ł a. Środek ciężkości S' odcinka koła znajduje się na dwusiecznej kąta środkowego do którego należy ten odcinek. Odległość OS' środka ciężkości odcinka od środka koła otrzymamy ze wzoru, przedstawiającego moment statyczny wycinka OAB względem OA jako sumę momentów trójkąta OAB i odcinka koła. Oznaczając więc przez p pole wycinka, przez p' pole trójkąta OAB, przez p'' pole odcinka, a przez F środek ciężkości trójkąta OAB, otrzymamy $p\cdot OS\sin\alpha = p'\cdot OF\sin\alpha + p''\cdot OS'\sin\alpha$. Ponieważ $p = r^2\alpha$, $p' = \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha$, $p'' = p - p'$ i $OF = \frac{2}{3}r\cos\alpha$, więc

(9) $$OS' = \frac{4\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}\,r.$$

G r a n i a s t o s ł u p. W a l e c. Środki ciężkości przekrojów graniastosłupa płaszczyznami równoległymi do podstawy leżą na prostej, łączącej środki ciężkości obu podstaw. Przekroje zaś płaszczyznami równoległymi do jednej ze ścian bocznych są równoległobokami (lub składają się z kilku równoległoboków); środki ciężkości tych przekrojów leżą w płaszczyźnie równoległej do podstawy, poprowadzonej w połowie wysokości. Podobnie przedstawia się sprawa dla walca.

Wynika stąd, że *środek ciężkości graniastosłupa lub walca leży w połowie jego wysokości na prostej, łączącej środki ciężkości obu jego podstaw.*

Ostrosłup. Stożek. Środki ciężkości przekrojów równoległych do podstawy ostrosłupa leżą na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy. Na tej prostej leży więc również środek ciężkości S ostrosłupa. Aby wyznaczyć wysokość, na jakiej leży ten środek ciężkości, obliczamy moment statyczny ostrosłupa względem płaszczyzny podstawy. Obierając płaszczyznę podstawy za płaszczyznę poziomą, otrzymujemy $M_{xy}=\int\int\int z\,dx\,dy\,dz$. Obszar całkowania jest rozciągnięty na cały ostrosłup. Oznaczmy przez h wysokość ostrosłupa, przez D_z przekrój płaszczyzną poziomą na wysokości z i przez P_z pole przekroju D_z. Zamieniając całkę potrójną na całkę iterowaną dostaniemy $M_{xy}=\int\limits_0^h z\,dz\int\limits_{D_z}\int dx\,dy=\int\limits_0^h zP_z\,dz$. Niech P oznacza pole podstawy. Jak wiadomo $P_z/P=(h-z)^2/h^2$, czyli $P_z=\left(1-\frac{z}{h}\right)^2P$.



Zatem

$$M_{xy}=\int\limits_0^h z\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 P\,dz=\frac{1}{12}h^2P.$$

Z drugiej strony, oznaczając przez v objętość ostrosłupa, a przez z_0 wysokość jego środka ciężkości, mamy

$$M_{xy}=z_0v=z_0\cdot\tfrac{1}{3}hP.$$

Z przyrównania obu wzorów na M_{xy} otrzymujemy

$$z_0=h/4. \tag{10}$$

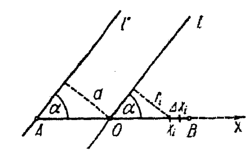
Podobnie przedstawia się sprawa dla stożka.

A więc: *środek ciężkości ostrosłupa (stożka) leży w $^1/_4$ jego wysokości na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy.*

§ 9. Momenty bezwładności niektórych linij, powierzchni i brył. W tym § zakładać będziemy, że rozpatrywane linie, powierzchnie i bryły mają gęstość stałą ϱ.

Odcinek. Obliczmy moment bezwładności odcinka AB o długości a względem prostej l, przechodzącej przez środek O tego odcinka i nachylonej do niego pod kątem α.

Przyjmijmy, że AB leży na osi x-ów i że O jest początkiem układu współrzędnych. Podzielmy odcinek AB na drobne odcinki przy pomocy punktów $x_1, x_2\dots$ Połóżmy $\Delta x_1=x_2-x_1$, $\Delta x_2=x_3-x_2$ i t. d. Moment bezwładności odcinka Δx_i względem prostej l wynosi w przybliżeniu $r_i^2\Delta m_i$, gdzie Δm_i oznacza masę i-tego odcinka, zaś r_i odległość jego lewego końca od l. Ponieważ $r_i=x_i\sin\alpha$, $\Delta m_i=\varrho\Delta x_i$, więc $r_i^2\Delta m_i=x_i^2\varrho\Delta x_i\sin^2\alpha$. Możemy zatem przyjąć, że moment bezwładności I_l względem prostej l wynosi w przybliżeniu $\sum x_i^2\varrho\Delta x_i\sin^2\alpha$. Przechodząc do granicy, otrzymamy



$$I_l=\int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a}x^2\varrho\sin^2\alpha\,dx=\frac{1}{12}a^3\varrho\sin^2\alpha.$$

Masa m odcinka AB wynosi $m=a\varrho$. Zatem

$$I_l=\tfrac{1}{12}ma^2\sin^2\alpha. \tag{1}$$

Ponieważ O jest środkiem ciężkości odcinka AB, więc moment bezwładności względem prostej l' równoległej do l i leżącej w odległości d od O wynosi w myśl wzoru (I), str. 161, $I_{l'}=I_l+md^2$, czyli

$$I_{l'}=\tfrac{1}{12}m(a^2\sin^2\alpha+12d^2). \tag{2}$$

W szczególności jeżeli l' przechodzi przez koniec A, to $d=\frac{1}{2}a\sin\alpha$, skąd

$$I_{l'}=\tfrac{1}{3}ma^2\sin^2\alpha. \tag{3}$$

Jeżeli zaś proste l i l' są prostopadłe do AB, to $\alpha=\pi/2$ i momenty I_l i $I_{l'}$ redukują się do momentów bezwładności względem punktów O i A. Z (1) i (3) otrzymujemy dla $\alpha=\pi/2$:

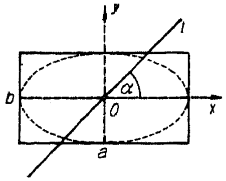
$$I_O=\tfrac{1}{12}ma^2,\qquad I_A=\tfrac{1}{3}ma^2. \tag{4}$$

Prostokąt. Przeprowadźmy przez środek prostokąta o bokach a, b osie x, y układu współrzędnych. Ponieważ osie te są osiami symetrii, więc są zarazem osiami środkowymi i

$$I_y=\int\limits_D\int x^2\varrho\,dx\,dy=\varrho\int\limits_{-b/2}^{b/2}dy\int\limits_{-a/2}^{a/2}x^2dx=\frac{1}{12}a^3b\varrho.$$

Masa prostokąta jest $m=ab\varrho$, więc

(5) $$I_y=\tfrac{1}{12}ma^2;\quad \text{podobnie}\quad I_x=\tfrac{1}{12}mb^2.$$



1.

Moment zboczenia D_z jest zerem, więc elipsa bezwładności środkowa ma równanie (str. 169, (3)) $I_xx^2+I_yy^2=c^2$ czyli $\tfrac{1}{12}mb^2x^2+\tfrac{1}{12}ma^2y^2=c^2$. Stała c jest dowolna; kładąc $c^2=\tfrac{1}{12}ma^2b^2\lambda^2$, gdzie λ jest nową stałą dowolną, otrzymamy

(6) $$(x/\lambda a)^2+(y/\lambda b)^2=1.$$

A więc: *elipsy bezwładności środkowe mają osie proporcjonalne do boków prostokąta.*

Moment bezwładności względem prostej l (rys. 1), przechodzącej przez O i nachylonej pod kątem α względem osi x, wynosi (str. 169, wzór (1)) $I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha$ czyli

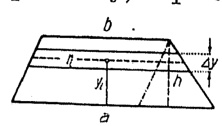
(7) $$I_l=\tfrac{1}{12}m(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha).$$

Momenty bezwładności I_a i I_b względem boków a i b prostokąta wynoszą $I_a=I_x+m(b/2)^2$ i $I_b=I_x+m(a/2)^2$, czyli

(8) $$I_a=\tfrac{1}{3}mb^2,\qquad I_b=\tfrac{1}{3}ma^2.$$

K w a d r a t. Zachowując znakowanie jak dla prostokąta, mamy $a=b$, skąd $I_x=I_y$. Wynika stąd, że elipsa bezwładności środkowa jest kołem. Środek kwadratu jest więc punktem kołowym.

T r a p e z. Aby wyznaczyć moment bezwładności trapezu względem podstawy a (p. rys. 2), podzielmy trapez na drobne paski równoległe do podstawy. Oznaczmy przez $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots$ grubości tych pasków, przez $y_1, y_2, \ldots$ odległość ich środków od podstawy, a przez $r_1, r_2, \ldots$ długości odcinków, przechodzących przez środki pasków równolegle do podstawy. Możemy przyjąć, że moment bezwładności i-tego paska względem boku a wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i y_i^2$, gdzie Δm_i oznacza masę i-tego paska.



2.

Moment bezwładności I_a względem boku a równa się w przybliżeniu $\sum\Delta m_i y_i^2$. Lecz $\Delta m_i=\Delta y_i r_i\varrho$. Z rysunku 2 widzimy, że $(r_i-b)/(a-b)=(h-y_i)/h$, skąd $r_i=a-(a-b)\dfrac{y_i}{h}$. Zatem I_a wynosi

w przybliżeniu $\sum\left[a-(a-b)\dfrac{y_i}{h}\right]\varrho y_i^2\Delta y_i$. Przechodząc do granicy, dostajemy

$$I_a=\int_0^h\left[a-(a-b)\frac{y}{h}\right]\varrho y^2dy=\frac{1}{12}\varrho(a+3b)h^3.$$

Ponieważ $m=\tfrac{1}{2}(a+b)h\varrho$, więc

(9) $$I_a=\frac{1}{6}\cdot\frac{a+3b}{a+b}mh^2.$$

T r ó j k ą t. Ze wzoru powyższego otrzymamy moment bezwładności trójkąta względem podstawy, kładąc $b=0$. Dostaniemy

(10) $$I_a=\tfrac{1}{6}mh^2.$$

R ó w n o l e g ł o b o k. Kładąc we wzorze (9) $b=a$, otrzymamy moment bezwładności równoległoboku względem jednego z boków:

(11) $$I_a=\tfrac{1}{3}mh^2.$$

P r o s t o p a d ł o ś c i a n. Umieśćmy początek układu współrzędnych w środku prostopadłościanu, prowadząc osie x, y, z równolegle do krawędzi, których długości oznaczymy przez a, b, c. Moment bezwładności względem osi x wynosi

$$I_x=\iiint\varrho(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\varrho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}(y^2+z^2)\,dz=\frac{1}{12}abc\varrho(b^2+c^2).$$

Kładąc $m=abc\varrho$, otrzymujemy stąd

(12) $$I_x=\tfrac{1}{12}m(b^2+c^2)$$

i podobnie $I_y=\tfrac{1}{12}m(a^2+c^2)$, $I_z=\tfrac{1}{12}m(a^2+b^2)$.

Moment bezwładności I_a względem krawędzi a jest $I_a=I_x+md^2$, gdzie $d=\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$ więc

(13) $$I_a=\tfrac{1}{3}m(b^2+c^2)$$

i podobnie $I_b=\tfrac{1}{3}m(a^2+c^2)$, $I_c=\tfrac{1}{3}m(a^2+b^2)$.

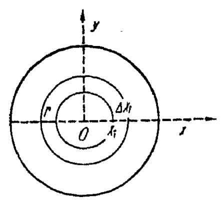
O k r ą g k o ł a. Moment bezwładności okręgu o promieniu r względem środka O wynosi oczywiście

(14) $$I_O=mr^2.$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności względem średnicy, obierzmy O za początek układu współrzędnych (x, y). Mamy oczywiście $I_x=I_y$. Ponieważ $I_O=I_x+I_y$, więc $I_O=2I_x$ czyli $I_x=\frac{1}{2}I_O$. Stąd moment bezwładności względem średnicy wynosi

(15) $$I_x=\tfrac{1}{4}mr^2.$$

Koło. Ze względu na symetrię momenty bezwładności powierzchni koła względem średnic są równe. Obierzmy środek koła O za środek układu współrzędnych (x, y). Zatem $I_x=I_y$, a ponieważ moment bezwładności względem środka $I_O=I_x+I_y$, więc $I_O=2I_x$, więc $I_x=\frac{1}{2}I_O$. Aby obliczyć I_O, podzielmy koło na pierścienie przy pomocy kół współśrodkowych o promieniach $x_1, x_2, \ldots$. Połóżmy $\Delta x_1=x_2-x_1$, $\Delta x_2=x_3-x_2, \ldots$. Możemy przyjąć, że moment bezwładności i-tego pierścienia względem O wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i x_i^2$, gdzie Δm_i oznacza masę tego pierścienia. Ponieważ pole pierścienia wynosi w przybliżeniu $2\pi x_i \Delta x_i$, więc $\Delta m_i=2\pi x_i \varrho \Delta x_i$. Zatem w przybliżeniu $I_O=\sum 2\pi x_i^3 \varrho \Delta x_i$. Przechodząc do granicy, otrzymujemy stąd



(16) $$I_O=\int_0^r 2\pi x^3 \varrho\, dx=\tfrac{1}{2}\pi\varrho r^4.$$

Ponieważ masa koła $m=r^2\pi\varrho$, więc:

(17) $$I_O=\tfrac{1}{2}mr^2 \quad \text{i} \quad I_x=\tfrac{1}{4}mr^2.$$

Powierzchnia kuli. Moment bezwładności powierzchni kuli względem środka wynosi oczywiście

(18) $$I_O=mr^2.$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności względem średnicy kuli, umieśćmy początek układu współrzędnych w środku kuli. Z powodu symetrii mamy $I_x=I_y=I_z$. Ponieważ $2I_O=I_x+I_y+I_z$, więc $I_O=\frac{3}{2}I_x$. Zatem $I_x=\frac{2}{3}I_O$, skąd

(19) $$I_x=\tfrac{2}{3}mr^2.$$

Kula. Biorąc za początek układu współrzędnych środek kuli, mamy ze względu na symetrię jak poprzednio $I_x=\frac{2}{3}I_O$. Moment I_O

obliczymy postępując podobnie jak przy kole, t. j. dzieląc kulę na warstwy przy pomocy kul współśrodkowych. Otrzymamy

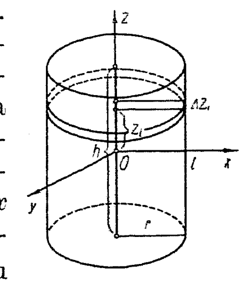
(20) $$I_O=\tfrac{3}{5}mr^2 \quad \text{i} \quad I_x=\tfrac{2}{5}mr^2.$$

Walec obrotowy. Oznaczmy przez r promień podstawy, a przez h wysokość walca. Weźmy za początek układu współrzędnych środek osi walca, przyjmując oś walca za oś z-ów.

Aby obliczyć moment I_z, postąpmy podobnie jak przy kole, t. j. podzielmy walec na warstwy przy pomocy walców o podstawach współśrodkowych z podstawą walca. Otrzymamy

(21) $$I_z=\tfrac{1}{2}mr^2.$$

Aby obliczyć momenty I_x i I_y, podzielmy walec na warstwy przy pomocy płaszczyzn równoległych do podstawy. Oznaczmy przez $\Delta z_1, \Delta z_2, \ldots$ grubości warstw, przez $z_1, z_2, \ldots$ współrzędne środków ich podstaw, przez $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots$ masy warstw. Moment bezwzględności i-tej warstwy względem prostej równoległej do osi x i przechodzącej przez środek ciężkości tej warstwy równa się w przybliżeniu $\frac{1}{4}\Delta m_i r^2$ (jak moment bezwładności koła względem średnicy). A więc moment bezwładności warstwy względem osi x wyniesie w przybliżeniu $\frac{1}{4}\Delta m_i r^2+\Delta m_i z_i^2$. Ponieważ $\Delta m_i=r^2\pi\Delta z_i\varrho$, więc będzie w przybliżeniu $I_x=\sum(\frac{1}{4}r^2+z_i^2)r^2\pi\varrho\Delta z_i$, skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy



$$I_x=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{1}{4}r^2+z^2\right)r^2\pi\varrho dz=\frac{1}{12}r^2\pi\varrho h(3r^2+h^2).$$

Ponieważ masa walca jest $m=r^2\pi\varrho h$, więc

(22) $$I_x=\tfrac{1}{12}m(3r^2+h^2).$$

Ze względu na symetrię mamy oczywiście $I_x=I_y$.

Moment względem tworzącej l walca wynosi $I_l=I_z+mr^2$, więc

(23) $$I_l=\tfrac{3}{2}mr^2.$$

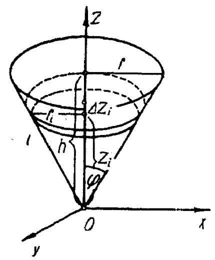
Oś z jest osią symetrii, a więc jest ona równocześnie osią środkową. Z powodu symetrii osie x i y są również osiami środkowymi. Elipsoida bezwładności ma więc równanie $I_x x^2+I_y y^2+I_z z^2=c^2$, skąd wobec (22) $\frac{1}{12}m(3r^2+h^2)(x^2+y^2)+\frac{1}{2}mr^2z^2=c^2$ czyli

(24) $$(x/r)^2+(y/r)^2+(z/\sqrt{\tfrac{1}{6}(3r^2+h^2)})^2=\lambda^2,$$

gdzie λ^2 jest dowolną stałą.

Elipsoida bezwładności jest więc elipsoidą obrotową. Gdy $r\sqrt{3}=h$, elipsoida jest kulą.

Stożek obrotowy. Oznaczmy przez r promień podstawy, a przez h wysokość stożka. Umieśćmy początek O układu współrzędnych w wierzchołku stożka i przyjmijmy oś stożka za oś z-ów.



Jako oś symetrii jest ona również osią bezwładności środkową, a więc na mocy twierdzenia 2°, str. 168, osią bezwładności w punkcie O. Z powodu symetrii osie x i y są również osiami bezwładności w punkcie O.

Podzielmy stożek na warstwy o grubości Δz_i przy pomocy płaszczyzn równoległych do podstawy. Moment bezwładności i-tej warstwy względem osi z wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i r_i^2/2$ (podobnie jak moment bezwładności walca względem osi), gdzie r_i oznacza promień dolnej podstawy i-tej warstwy. Niech z_i oznacza współrzędną środka dolnej podstawy i-tej warstwy; wówczas $r_i/r=z_i/h$, czyli

(25) $$r_i=rz_i/h.$$

Ponieważ w przybliżeniu $\Delta m_i=r_i^2\pi\Delta z_i\varrho$, więc na mocy (25) mamy

(26) $$\tfrac{1}{2}\Delta m_i r_i^2=\tfrac{1}{2}(r/h)^4\pi\varrho z_i^4\Delta z_i,$$

skąd w przybliżeniu $I_z=\sum\frac{1}{2}(r/h)^4\pi\varrho z_i^4\Delta z_i$. Przechodząc do granicy, otrzymamy

$$I_z=\int_0^h\frac{1}{2}\left(\frac{r}{h}\right)^4\pi\varrho z^4\,dz=\frac{1}{10}r^4h\pi\varrho.$$

Masa stożka jest $m=\frac{1}{3}r^2\pi h\varrho$, więc

(27) $$I_z=\frac{3}{10}mr^2.$$

Aby obliczyć I_x, zauważmy, że moment i-tej warstwy względem prostej równoległej do osi x-ów i przechodzącej przez środek ciężkości tej warstwy wynosi w przybliżeniu $\frac{1}{4}\Delta m_i r_i^2$. Zatem względem osi x-ów wynosi on $\frac{1}{4}\Delta m_i r_i^2+\Delta m_i z_i^2$. Suma ta równa się na mocy (25) i (26) $\frac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2\pi\varrho z_i^4\left(4+\left(\frac{r}{h}\right)^2\right)\Delta z_i=\Delta w_i$, czyli I_x równa się w przybliżeniu $\sum\Delta w_i$. Przechodząc do granicy, otrzymamy

$$I_x=\int_0^h\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2\pi\varrho z^4\left(4+\left(\frac{r}{h}\right)^2\right)\right]dz=\frac{1}{20}r^2\pi\varrho(4h^2+r^2)h,$$

czyli

(28) $$I_x=\frac{3}{20}m(r^2+4h^2).$$

Oczywiście mamy $I_x=I_y$.

Niech φ oznacza kąt między osią z a tworzącą l (leżącą w płaszczyźnie xz). Ponieważ osie x, y, z są osiami bezwładności w O, więc na mocy wzoru (I), str. 164, jest $I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma$, gdzie α, β, γ oznaczają kąty między tworzącą l a osiami układu współrzędnych. Mamy $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ i $\gamma=\varphi$, skąd

$$I_l=I_x\sin^2\varphi+I_z\cos^2\varphi,$$

a stąd na mocy (27) i (28)

(29) $$I_l=\frac{3}{20}m[(r^2+4h^2)\sin^2\varphi+2r^2\cos^2\varphi].$$

Z uwagi na to, że $\operatorname{tg}\varphi=r/h$, dostajemy

(30) $$I_l=\frac{3m}{20}\cdot\frac{r^2+6h^2}{r^2+h^2}r^2.$$