

ROZDZIAŁ III

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

I. Dynamika punktu swobodnego

§ 1. Podstawowe pojęcia dynamiki. Przedmiotem badań dynamiki jest ruch ciał pod wpływem sił, które ruch ten wywołują.

W kinematyce wszystkie układy odniesienia są, jak już wiemy, równouprawnione; jest rzeczą obojętną, jak mierzymy czas (t. j. jakie przedziały czasu uważamy za równe). Prawa dynamiki natomiast, wypowiedziane przez Newtona, ważne są nie dla każdego układu odniesienia i nie dla każdego pomiaru czasu.

Układ inercjalny, czas bezwzględny. Układ odniesienia, dla którego przy pewnym pomiarze czasu zachodzą prawa dynamiki newtonowskiej, nazywamy *układem inercjalnym*, odpowiedni zaś pomiar czasu — pomiarem *czasu absolutnego*, a ruch ciała względem układu inercjalnego — *ruchem absolutnym*.

Ścisłe biorąc, nie znamy dotychczas przykładu ani układu inercjalnego ani czasu absolutnego. W wielkiej liczbie zagadnień możemy jednak obrać takie układy odniesienia i takie metody mierzenia czasu, że stosowanie praw dynamiki doprowadza do wyników dość mało różniących się od doświadczenia, aby błędy można było praktycznie pominąć.

Jeżeli np. badamy ruch drobnych ciał w pobliżu ziemi w krótkim przedziale czasu, to wyniki będą naogół wystarczająco dokładne, gdy za układ inercjalny przyjmujemy układ odniesienia związany z ziemią, zaś mierzenie czasu absolutnego oprzemy na założeniu, że ziemia względem gwiazd stałych obraca się około swej osi w równych czasach o równe kąty.

W innych jednak zagadnieniach (jak np. wahadło Foucaulta, giroskop, ruch planet) stosowanie praw dynamiki do układu odniesienia związanego z ziemią nie prowadzi już do równie dobrych wyników. Znacznie lepsze wyniki otrzymamy tu, przyjmując za układ inercjalny układ odniesienia, którego początek znajduje się w słońcu, osie zaś skierowane są ku gwiazdom stałym.

Prócz poprzednio wspomnianego mierzenia czasu, opartego na jednostajności ruchu obrotowego ziemi około swej osi, istnieją jeszcze inne metody mierzenia czasu, które podaje astronomia.

W dynamice zakładamy, że *dany mamy układ inercjalny i czas absolutny*.

Masa i siła. W dynamice występują nowe pojęcia, jak np. masa i siła. Przyjmujemy, że są one czytelnikowi znane z fizyki i nie będziemy bliżej wchodzić w ich określenia. Podamy tylko te ich własności, jakie zakładamy o nich w dynamice.

Masa ciała wyraża się liczbą dodatnią, zależną od obioru jednostki masy t. j. od obioru dowolnego ciała, którego masę oznaczamy liczbą 1.

Stosunek mas dwóch ciał nie zależy od obioru jednostki.

Jeżeli więc przez m_1 i m_2 oznaczymy masy dwóch ciał przy pewnej jednostce, zaś przez m'_1 i m'_2 masy tych ciał przy innej jednostce, to

$$m_1/m_2 = m'_1/m'_2.$$

Niech np. masa pewnego ciała A wynosi m , jeżeli za jednostkę obierzemy masę ciała B . Przyjmijmy ponadto, że masa ciała A wynosi m' , ciała zaś B wynosi m'' , jeżeli za jednostkę obierzemy masę innego ciała C . Stosunek mas ciał A i B wynosi zatem $m/1$, gdy jednostką jest masa ciała B , zaś m'/m'' , gdy jednostką jest masa ciała C . Jest więc na mocy założenia $m/1 = m'/m''$, skąd

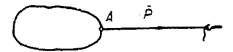
$$m' = mm''.$$

Możemy zatem, znając masy ciał przy pewnej jednostce, obliczyć je przy innej jednostce.

Masa ciała jest niezależna od czasu, t. zn. że dane ciało ma w każdej chwili tę samą masę.

Siłę uważamy za wyznaczoną, jeżeli podana jest jej wielkość (wartość bezwzględna), kierunek, zwrot i punkt zaczepienia. Siłę, działającą na ciało, może nam uzmysłwić nitka napięta lub sprężyna rozciągnięta, przyczepiona do ciała (p. rysunek).

Siły, których wielkość wyraża się liczbą 0, nazywamy *siłami zerowymi*. Przy siłach zerowych nie rozróżniamy kierunku ani zwrotu.



Wielkość siły niezerowej wyraża się liczbą dodatnią, zależną od jednostki siły, t. j. od obioru dowolnej siły (niezerowej), której wielkość oznaczamy liczbą 1.

Stosunek wielkości dwóch sił (niezerowych) nie zależy od obioru jednostki.

Opierając się na tym, możemy z wielkości siły przy pewnej jednostce wyznaczyć jej wielkość przy innej jednostce.

Siłę, działającą na ciało, przedstawiamy jako *wektor*. Obieramy w tym celu dowolną jednostkę długości i dowolną jednostkę siły. Siłę daną przedstawia wektor, którego długość wyraża się tą samą liczbą co wielkość siły, zaś początek, kierunek i zwrot są te same, co początek, kierunek i zwrot siły. Wektor mający np. 5 jednostek długości przedstawia siłę mającą 5 jednostek siły. Siłę zerową przedstawia wektor zerowy.

Działania na siłach określamy jako działania na wektorach, które przedstawiają te siły. Jeżeli np. wektory $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ przedstawiają pewne siły, wówczas sumą tych sił nazywamy siłę, którą przedstawia wektor $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$.

Momentem siły (przedstawionej przez wektor $\vec{P}$) względem punktu O nazywamy moment wektora $\vec{P}$ względem O .

Punkt materialny. W dynamice zajmujemy się najpierw ruchem punktów, a następnie ruchem ciał. Podobnie jak w kinematyce, punkt będziemy niekiedy uważali za model ciała (np. w przypadku, gdy rozmiary ciała są drobne w stosunku do toru).

Masą punktu nazywamy masę ciała, które dany punkt przedstawia; sam punkt nazywamy wówczas *punktem materialnym*.

Jeżeli siła działa na ciało, którego obrazem jest punkt materialny A , wówczas siłę tę przedstawiamy w postaci wektora o początku w A .

Siła, działająca na punkt materialny, może się zmieniać w czasie zarówno co do wielkości, jak co do kierunku i zwrotu.

§ 2. Prawa dynamiki Newtona. Prawa dynamiki, wyprowadzone przez Newtona, podają związki, jakie zachodzą w ruchu absolutnym między masą, przyspieszeniem i siłami, działającymi na punkt materialny.

Prawa ruchu. Niech układ odniesienia (x, y, z) będzie układem inercyjnym, zaś t niech oznacza czas absolutny. Przy tych założeniach prawa ruchu możemy wypowiedzieć jak następuje:

I. Jeżeli m oznacza masę punktu materialnego, $\vec{p}$ przyspieszenie w chwili t , $\vec{P}$ sumę sił działających na punkt materialny w chwili t , to

$$(1) \quad m \vec{p} = K \vec{P},$$

gdzie K oznacza pewną liczbę (dodatnią), zależną tylko od obioru jednostek długości, czasu, masy i siły (a więc niezależną od czasu, masy i siły).

Z równości (1) wynika, że

$$(2) \quad m |\vec{p}| = K |\vec{P}|.$$

Jeżeli więc ze wspomnianych jednostek trzy obierzemy dowolnie, to czwartą możemy zawsze tak dobrać, by $K=1$. Obierzmy np. dowolnie jednostki czasu, długości i masy, a za jednostkę siły obierzmy taką siłę, która punktowi o masie 1 nadaje przyspieszenie 1. Przy tych jednostkach dla $m=1$ i $|\vec{P}|=1$ mamy $|\vec{p}|=1$, zatem ze wzoru (2) otrzymamy $K=1$. Związek (1) przyjmie wtedy postać

$$(I) \quad m \vec{p} = \vec{P}.$$

Na przyszłość będziemy stale zakładać, że jednostki są tak dobrane, by $K=1$. Prawo Newtona będziemy więc zawsze przyjmowali w postaci (I).

Tworząc rzuty na osie układu otrzymamy na mocy (I):

$$(II) \quad m p_x = P_x, \quad m p_y = P_y, \quad m p_z = P_z.$$

Równości (I) i (II) są oczywiście równoważne.

Ponieważ $\vec{p} = d\vec{v}/dt$, zaś m jest liczbą stałą, więc $m\vec{p} = d(m\vec{v})/dt$. Zatem związek (I) możemy napisać również w postaci

$$(III) \quad d(m\vec{v})/dt = \vec{P}.$$

Wektor $m\vec{v}$ nazywamy *pędem* (ilością ruchu).

A więc: *pochodna pędu (względem czasu) równa się sumie sił działających na punkt materialny.*

Niech na punkt materialny o masie m działają siły, których suma $\vec{P}$ w pewnym okresie czasu stale jest zerem. Wtedy $m\vec{p}=0$, więc przyspieszenie $\vec{p}=0$, i punkt porusza się wówczas ruchem jednostajnym prostoliniowym (lub jest w spoczynku). Mamy więc następujące prawo, zwane *prawem bezwładności Newtona*:

II. Jeżeli na punkt materialny w pewnym okresie czasu działają siły o sumie 0, to punkt jest w spoczynku albo w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

Na odwrót, jeżeli punkt jest w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym, to przyspieszenie $\vec{p}=0$, a ponieważ na mocy prawa (I) jest $m\vec{p}=\vec{P}$, więc suma sił działających $\vec{P}$ jest zerem.

Siły działające na punkt materialny pochodzą zazwyczaj z działania innych punktów materialnych na dany punkt. Dla sił tych Newton podał prawo następujące, zwane *prawem akcji i reakcji*:

III. Jeżeli punkt materialny A działa na punkt materialny B z pewną siłą, to również punkt B działa wówczas na punkt A z siłą równą co do wielkości i kierunku, ale o zwrocie przeciwnym; siły z jakimi punkty A i B działają na siebie są zawsze skierowane wzdłuż prostej AB , łączącej te punkty.

Jeżeli siła z jaką punkt A działa na punkt B ma zwrot ku A (a więc siła, z jaką punkt B działa na A , ma zwrot ku B), to mówimy, że punkty A i B *przyciągają się*; w przypadku przeciwnym mówimy, że punkty te się *odpychają*.

Równowaga punktu i sił. Jeżeli punkt materialny jest w spoczynku, to powiadamy, że jest *w równowadze*. O siłach $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ mówimy, że są *w równowadze* lub że się *równoważą*, jeżeli ich suma jest zerem, t. zn. jeżeli $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = 0$.

Jeżeli więc punkt materialny jest w równowadze, to siły działające na ten punkt również są w równowadze. Jeżeli natomiast siły działające na punkt materialny w pewnym okresie czasu są w równowadze, to w tym okresie czasu przyspieszenie $\vec{p} = 0$, zatem punkt jest bądź w równowadze, bądź w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

Siła bezwładności. Zasada d'Alemberta. Prawo (I) możemy napisać również w postaci

$$(IV) \quad \vec{P} + (-m\vec{p}) = 0.$$

Wektor $-m\vec{p}$ o początku w punkcie m nazywamy *siłą bezwładności*.

Nie należy sądzić, że wektor $-m\vec{p}$ przedstawia siłę działającą na punkt materialny m . Tylko dla wygody nazywamy ten wektor siłą (bezwładności). Na punkt m działają tylko siły, których suma wynosi $\vec{P}$.

Związek (IV) możemy wypowiedzieć jak następuje:

Siły działające na punkt materialny są w równowadze z siłą bezwładności.

Powyższe sformułowanie jest równoważne I prawu Newtona i nosi nazwę *zasady d'Alemberta*. Zasada ta daje duże usługi przy badaniu ruchu punktów t. zw. nieswobodnych.

§ 3. Układy jednostek dynamicznych. Zasadniczymi jednostkami, jakie przyjmujemy w dynamice, są jednostki długości czasu i masy. Przy pomocy tych jednostek określamy jednostkę siły. Za jednostkę siły obieramy mianowicie siłę, która masie 1 nadaje przyspieszenie 1.

Układ fizyczny *cgs*. Otóż za jednostkę długości przyjmuje się *centymetr* (cm), masy *gram* (g), za jednostkę czasu *sekundę* (sek) i siły *dynę* (dyn).

Pierwotnie metr ($m=100$ cm) miał przedstawiać jedną czterdziestomilionową część południka ziemskiego. Przy obliczeniach jednak popełniono pewien niewielki błąd. Dzisiaj metr określamy przy pomocy długości wzorca przechowywanego w Paryżu. Podobnie jednostka masy 1 g miała być pierwotnie masą 1 cm³ wody chemicznie czystej przy 4° C pod ciśnieniem 760 mm rtęci. Obecnie jednak przyjmujemy za 1 kilogram ($kg=1000$ g) masę wzorca platynowego, przechowywanego w Paryżu.

Jednostkę czasu 1 sek określamy z pomocą t. zw. średniej doby słonecznej, której wyznaczeniem zajmuje się astronomia. Średnia doba słoneczna = 24 godzin (godz), godzina = 60 minut (min), minuta = 60 sek.

Jednostką siły 1 dyn jest siła, która masie 1 g nadaje przyspieszenie 1 cm · sek⁻².

Układ zasadniczych jednostek (centymetr, gram, sekunda) nazywamy krótko *układem fizycznym cgs*.

Mierzenie mas i sił. Drobne ciała w pobliżu ziemi, puszczone swobodnie, spadają ku ziemi pionowo ruchem jednostajnie przyspieszonym (jeżeli pominiemy opór powietrza). Przyspieszenie to (zwane *ziemskim*) jest w danym miejscu na ziemi dla wszystkich ciał jednakowe, zmienia się jednak wraz z szerokością geograficzną. Oznacza się je przez g . U nas przyspieszenie ziemskie wynosi w przybliżeniu $g=981$ cm · sek⁻².

Niechaj m oznacza masę drobnego ciała. Siłę skierowaną pionowo w dół, o wielkości $Q=mg$, nazywamy *ciężarem* tego ciała.

Ciężar jest więc proporcjonalny do masy ciała; ciała mające równe ciężary (w tym samym miejscu na ziemi) mają równe masy i na odwrót.

Przy pomocy przyrządu zwanego *wagą* (którego zasadę poznamy w rozdz. VI), możemy porównywać ciężary dwóch ciał. Ponieważ

z równości ciężarów wynika równość mas, więc przy pomocy wagi możemy pośrednio porównywać masy ciał. Wynika stąd, że przy pomocy wagi możemy *mierzyć*, t.j. wyznaczać *masy* ciał.

Sily mierzymy sposobem *dynamicznym* lub *statycznym*.

Sposób dynamiczny opiera się na I prawie Newtona ($\vec{P}=m\vec{p}$). Ze wzoru tego możemy wyznaczyć siłę $\vec{P}$, gdy znamy masę ciała m i przyspieszenie $\vec{p}$, jakie mu siła $\vec{P}$ nadaje.

Sposób statyczny opiera się na tym, że pod działaniem sił ciała zmieniają swój kształt (odkształcają się). Ze znajomości odkształceń możemy w pewnych przypadkach wnioskować o wielkości sił, wywołujących te odkształcenia. Jeżeli np. na sprężynkę, zawieszoną pionowo, działa w dolnym jej końcu siła skierowana pionowo w dół, wówczas sprężynka się wydłuża. Wydłużenie jest (przy małych siłach) proporcjonalne do wielkości siły działającej. Przyrządy służące do statycznego mierzenia sił nazywamy *dynamometrami*.

Układ techniczny jednostek. W technice rozpowszechniony jest t. zw. *układ techniczny* jednostek. W układzie technicznym przyjmuje się za jednostki zasadnicze jednostki długości, czasu i siły. Jednostkę długości jest 1 m, czasu 1 sek, a siły 1 *kilogram* (kg). Jest to ciężar 1 dm³ wody (w normalnych warunkach) pod 45° szerokości geograficznej północnej (gdzie przyspieszenie ziemskie $g=981 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2}=9,81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$).

Jeżeli we wzorze $|\vec{P}|=m|\vec{p}|$ położymy $|\vec{P}|=1$ i $|\vec{p}|=1$, dostaniemy $m=1$. A zatem jednostką masy będzie masa, której siła 1 kg nadaje przyspieszenie $1 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$.

Niech m będzie masą ciała, Q jego ciężarem (pod 45° szer. geogr. płn.) i położymy $g=9,81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$. Zatem $Q=mg$, więc

$$(1) \quad m = Q/g = Q/9,81.$$

Ze wzoru powyższego możemy wyznaczyć masę ciała w jednostkach układu technicznego, gdy znamy ciężar ciała. Ponieważ ciężar 9,81 dm³ wody (pod 45° szer. geogr. płn.) wynosi 9,81 kg, więc jednostkę masy w układzie technicznym przedstawia masa 9,81 dm³ wody.

W układzie *cgs* masa 9,81 dm³ wody wynosi 9,81 kg (masy) = 9810 g (masy). Zatem:

$$(2) \quad \text{Jedn. masy w ukl. techn.} = 9,81 \text{ kg (masy)} = 9810 \text{ g (masy)}.$$

Aby znaleźć związek między jednostką siły (kg) w układzie technicznym a jednostką siły (dyną) w układzie *cgs*, zauważmy, że

1 dm³ wody (t. j. masa 1000 g) spada na ziemię pod wpływem swego ciężaru 1 kg z przyspieszeniem $981 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2}$. Zatem $1 \text{ kg (siły)} = 1000 \cdot 981 \text{ dyn}$, skąd

$$(3) \quad 1 \text{ kg (siły)} = 981.000 \text{ dyn}.$$

Wymiary wielkości dynamicznych. W dynamice występują jeszcze inne wielkości (np. praca, energia kinetyczna i t. p.), których jednostki określamy, podobnie jak jednostkę siły, przy pomocy jednostek zasadniczych, t. j. długości, masy i czasu. Podobnie jak dla wielkości kinematycznych (por. Rozdz. II, § 11), można wprowadzić dla wielkości dynamicznych pojęcie wymiaru. Znajomość wymiaru danej wielkości pozwala w łatwy sposób wyznaczyć miarę tej wielkości przy zmianie zasadniczych jednostek.

Przypuśćmy, że obraliśmy dwa układy jednostek długości, masy i czasu, które oznaczmy odpowiednio przez L, M, T i L', M', T' i że między tymi jednostkami zachodzą związki

$$(4) \quad L = \lambda L', \quad M = \mu M', \quad T = \tau T'.$$

Niechaj miara jakiejś wielkości dynamicznej A wynosi a przy jednostkach L, M, T , zaś a' przy jednostkach L', M', T' .

Jeżeli można dobrać takie liczby α, β, γ , żeby dla każdego dwóch układów jednostek L, M, T i L', M', T' spełniających związki (4) zachodził związek

$$(5) \quad a' = a \lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma,$$

to *wymiarem* wielkości A nazywamy wyrażenie

$$(6) \quad L^\alpha M^\beta T^\gamma.$$

Wymiar wielkości A oznaczamy przez $[A]$, a jednostkę wielkości A przy jednostkach L, M, T przedstawiamy symbolem $L^\alpha M^\beta T^\gamma$.

Wielkość A wynosi zatem $a L^\alpha M^\beta T^\gamma$ przy jednostkach L, M, T , zaś $a' L'^\alpha M'^\beta T'^\gamma$ przy jednostkach L', M', T' , skąd

$$(7) \quad a L^\alpha M^\beta T^\gamma = a' L'^\alpha M'^\beta T'^\gamma.$$

Opierając się na wzorach (4) i rachując formalnie, dostaniemy $a L^\alpha M^\beta T^\gamma = a (\lambda L')^\alpha (\mu M')^\beta (\tau T')^\gamma$, skąd

$$(8) \quad a L^\alpha M^\beta T^\gamma = (a \lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma) L'^\alpha M'^\beta T'^\gamma.$$

Ze wzorów (7) i (8) otrzymujemy przez przyrównanie wzór (5). W ten sposób przy pomocy rachunku formalnego możemy, znając

wymiar wielkości A , otrzymać jej miarę przy zmianie jednostek długości, masy i czasu.

Czytelnik łatwo uogólni twierdzenie podane na str. 51, które daje duże usługi przy wyznaczaniu wymiaru.

Przykład 1. Siła o wielkości (wartości bezwzględnej) P , działając na punkt materialny o masie m , nadaje mu przyspieszenie o wielkości p . Zatem $P = mp$, skąd $[P] = [m] \cdot [p]$. Ponieważ $[m] = M$ i $[p] = LT^{-2}$, więc

$$(I) \quad [siła] = L M T^{-2}.$$

Jednostką siły w układzie *cgs* jest dyna. Zatem

$$(II) \quad \text{dyn} = \text{cm} \cdot \text{g} \cdot \text{sek}^{-2}.$$

Przykład 2. Siłę o wielkości 6 m kg min^{-2} przedstawić w układzie *cgs*.

Mamy

$$\begin{aligned} 6 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{min}^{-2} &= 6 (100 \text{ cm}) \cdot (1000 \text{ g}) \cdot (60 \text{ sek})^{-2} = \\ &= (6 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 60^{-2}) \cdot (\text{cm g sek}^{-2}) = 166\frac{2}{3} \text{ dyn}. \end{aligned}$$

§ 4. Równania ruchu. Jednym z głównych zagadnień dynamiki jest wyznaczenie ruchu punktu materialnego, gdy dana jest masa m tego punktu i siła $\bar{P}$, działająca na ten punkt. W najprostszym przypadku siła $\bar{P}$ może być podana, jako funkcja czasu, t. zn. że dane są funkcje:

$$(1) \quad P_x = F(t), \quad P_y = \Phi(t), \quad P_z = \Psi(t),$$

określające w każdej chwili t (pewnego okresu czasu) rzuty siły $\bar{P}$ na osie układu.

Spotykamy się jednak z przypadkami bardziej skomplikowanymi. Zdarzyć się może, że jakiś obszar D ma tę własność, że na dany punkt materialny, umieszczony gdziekolwiek w obszarze D , działa pewna siła $\bar{P}$.

Jeżeli siła $\bar{P}$ zależy tylko od położenia punktu, a nie zależy od niczego więcej (np. prędkości), to obszar D nazywamy *polem sił*.

Przykładem pola sił jest pole grawitacyjne ziemskie: na dany bowiem punkt materialny umieszczony w pobliżu ziemi, działa siła ciężkości zależna tylko od położenia tego punktu (a niezależna od prędkości).

W polu sił jest więc siła $\bar{P}$ funkcją współrzędnych x, y, z danego punktu. Pole jest określone, jeżeli są dane funkcje:

$$(2) \quad P_x = F(x, y, z), \quad P_y = \Phi(x, y, z), \quad P_z = \Psi(x, y, z),$$

wyznaczające w każdym punkcie pola rzuty siły $\bar{P}$. Jeżeli więc badamy ruch punktu w polu sił, to mamy do czynienia z siłą, która zależy od położenia punktu.

Jeżeli punkt materialny porusza się w pewnym ośrodku (np. w powietrzu), wówczas na punkt materialny oprócz innych sił działa również siła oporu, jaki ośrodek przeciwstawia ruchowi. Siła ta zależy między innymi od prędkości punktu materialnego. W tym przypadku mamy więc siłę zależną również od prędkości punktu.

W najogólniejszym przypadku przyjmować będziemy, że siła $\bar{P}$ zależy od czasu, położenia i prędkości punktu. Zakładać więc będziemy, że siła $\bar{P}$ działająca na punkt materialny określona jest funkcjami:

$$(3) \quad P_x = F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad P_y = \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad P_z = \Psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

których wartościami są rzuty tej siły, zależne od współrzędnych położenia punktu (x, y, z) i jego prędkości $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, oraz od czasu t .

O funkcjach (3) zakładamy zazwyczaj, że są ciągłe i mają pochodne cząstkowe ciągłe w pewnym obszarze zmiennych $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$.

Oczywiście, że w poszczególnych zagadnieniach siła $\bar{P}$ nie musi zależeć od wszystkich zmiennych $x, y, \dots, t$, lecz od niektórych może być niezależna.

Teoretycznie jest do pomyślenia, że siła $\bar{P}$ może zależeć od wyższych pochodnych (np. od drugich, trzecich, i t. d.) zmiennych x, y, z . Z przypadkami takimi nie spotykamy się jednak w zagadnieniach praktycznych i nie będziemy ich tu rozważać.

Niechaj ruch punktu materialnego dany będzie przez funkcje:

$$(4) \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t).$$

Na mocy równości (II), str. 73, otrzymujemy:

$$(I) \quad m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y, \quad m\ddot{z} = P_z.$$

Jeżeli założymy, że P_x, P_y, P_z są funkcjami kształtu (3), równania (I) przyjmą postać

$$(II) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} &= \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} &= \Psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}$$

Powyższe równania przedstawiają układ równań różniczkowych rzędu drugiego, przy czym szukanymi funkcjami są funkcje (4).

Przypuśćmy, że badamy ruch w otoczeniu pewnej chwili t_0 . Załóżmy, że w chwili t_0 punkt miał współrzędne x_0, y_0, z_0 , zaś prędkość jego miała rzuty $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Załóżmy nadto, że funkcje (3) są funkcjami ciągłymi, posiadającymi ciągle pochodne cząstkowe w otoczeniu wartości $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0$.

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że przy powyższych założeniach istnieje jeden i tylko jeden układ funkcji (4) ciągłych wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w otoczeniu chwili t_0 , spełniających równania (II) oraz związki:

$$(5) \quad f(t_0) = x_0, \quad \varphi(t_0) = y_0, \quad \psi(t_0) = z_0; \quad f'(t_0) = \dot{x}_0, \quad \varphi'(t_0) = \dot{y}_0, \quad \psi'(t_0) = \dot{z}_0.$$

Układ ten, jako jedyny układ funkcji (4) czyniący zadość wszystkim żądanym warunkom, wyznacza więc ruch punktu materialnego, mającego w chwili t_0 współrzędne x_0, y_0, z_0 i prędkość o rzutach $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Widzimy stąd, że *ruch punktu jest w zupełności wyznaczony przez podanie masy punktu, sił działających na niego i t. zw. warunków początkowych* (t. j. jego położenia i prędkości w chwili początkowej t_0).

Równania (II) noszą nazwę *równań ruchu Newtona*.

Przykład. Siła zależna tylko od czasu. Niech siła $\bar{P}$ zależy tylko od czasu i dana będzie przez funkcje (1). Równania ruchu (II) będą więc miały postać:

$$m\ddot{x} = F(t), \quad m\ddot{y} = \Phi(t), \quad m\ddot{z} = \Psi(t).$$

Dzieląc przez m i całkując obustronnie, otrzymamy dla $t_0 = 0$:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt + c_1, \quad \dot{y} = \frac{1}{m} \int_0^t \Phi(t) dt + c_2, \quad \dot{z} = \frac{1}{m} \int_0^t \Psi(t) dt + c_3.$$

Przyjmijmy, że dla $t = 0$ mamy $\dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0$ (warunki początkowe). Podstawiając w powyższych równaniach $t = 0$, dostaniemy $c_1 = \dot{x}_0, c_2 = \dot{y}_0, c_3 = \dot{z}_0$. Zatem:

$$(6) \quad \dot{x} = F_1(t) + \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \Phi_1(t) + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \Psi_1(t) + \dot{z}_0,$$

gdzie $F_1(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt$ i t. d. Całkując równania (6), otrzymamy:

$$(7) \quad x = \int_0^t F_1(t) dt + \dot{x}_0 t + c'_1, \quad y = \int_0^t \Phi_1(t) dt + \dot{y}_0 t + c'_2, \quad z = \int_0^t \Psi_1(t) dt + \dot{z}_0 t + c'_3.$$

Przyjmijmy teraz, że dla $t = 0$ jest $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. Zatem z równań (7), kładąc $t = 0$, dostaniemy $c'_1 = x_0, c'_2 = y_0, c'_3 = z_0$. A więc

$$(8) \quad x = F_2(t) + \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \Phi_2(t) + \dot{y}_0 t + y_0, \quad z = \Psi_2(t) + \dot{z}_0 t + z_0,$$

gdzie $F_2(t) = \int_0^t F_1(t) dt$ i t. d. Z równań (8) wynika, że ruch będzie określony, jeżeli w chwili początkowej $t = 0$ podamy położenie punktu (t. j. x_0, y_0, z_0) i prędkość początkową (t. j. $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$).

§ 5. Ruch pod wpływem siły ciężkości. Niech na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$ stała co do wielkości, kierunku i zwrotu.

Z tym przypadkiem mamy do czynienia, badając ruch drobnych ciał w pobliżu ziemi i przyjmując za układ inercjalny układ związany z ziemią. Jeżeli pominiemy opór powietrza, to na ciało wyrzucone działać będzie tylko siła ciężkości, którą na małej przestrzeni uważać możemy za stałą.

Niech $\bar{P}$ oznacza siłę ciężkości. Zatem $|\bar{P}| = mg$ (g przyspieszenie ziemskie). Obierzmy układ (x, y, z) w ten sposób, by oś z była zwrócona pionowo ku górze. Zatem:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg.$$

Równania ruchu Newtona (str. 79, wzory (II)) przyjmą więc postać: $m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} = 0, m\ddot{z} = -mg$ czyli:

$$(1) \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Całkując powyższe równania, otrzymamy:

$$(2) \quad \dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = c_2, \quad \dot{z} = -gt + c_3.$$

Całkując jeszcze raz, dostaniemy:

$$(3) \quad x = c_1 t + c'_1, \quad y = c_2 t + c'_2, \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c'_3.$$

Liczby $c_1, c_2, c_3, c'_1, c'_2, c'_3$ oznaczają stałe całkowania, które wyznaczymy, znając warunki początkowe, t. j. współrzędne x_0, y_0, z_0 i rzuty $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ prędkości $\bar{v}_0$ punktu ruchomego w chwili początkowej t_0 . Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że $t_0 = 0$; ponadto (dobierając odpowiednio układ współrzędnych) możemy przyjąć, że w chwili $t_0 = 0$ punkt znajdował się w początku układu, zaś prędkość $\bar{v}_0$ leżała w płaszczyźnie pionowej xz .

Zakładamy więc, że dla $t=0$ jest $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$ i $\dot{y}_0=0$.

Wstawiając $t=0$ w równania (2) i (3), otrzymamy:

$$c_1=\dot{x}_0, \quad c_2=\dot{y}_0=0, \quad c_3=\dot{z}_0; \quad c'_1=x_0=0, \quad c'_2=y_0=0, \quad c'_3=z_0=0.$$

Równania (2) i (3) przyjmują więc postać:

$$\begin{aligned} (2') \quad & \dot{x}=\dot{x}_0, \quad \dot{y}=0, \quad \dot{z}=-gt+\dot{z}_0, \\ (3') \quad & x=\dot{x}_0 t, \quad y=0, \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+\dot{z}_0 t. \end{aligned}$$

Ponieważ jest stale $y=0$, więc ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej xz .

Rozpatrzmy dwa przypadki: t. zw. rzut pionowy i rzut ukośny.

Rzut pionowy. Załóżmy, że w chwili $t=0$ prędkość $\bar{v}_0$ miała kierunek pionowy (lub była zerem), a więc że $\dot{x}_0=0$. Kładąc $\dot{z}=v$ i $\dot{z}_0=v_0$, otrzymamy z (2') i (3'):

$$\begin{aligned} (4) \quad & \dot{x}=0, \quad \dot{y}=0, \quad x=0, \quad y=0, \\ (5) \quad & v=-gt+v_0, \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t. \end{aligned}$$

Ponieważ jest stale $x=0$ i $y=0$, więc punkt porusza się po osi z t. j. po pionie. Mamy nadto $\dot{v}=p=-g$.

A więc: jeżeli prędkość początkowa ma kierunek pionowy (lub jest zerem), wówczas punkt pod wpływem siły ciężkości porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po pionie.

Przyjmijmy, że $v_0 > 0$, t. j. że w chwili początkowej prędkość miała zwrot ku górze (np. że wyrzuciliśmy punkt pionowo w górę z prędkością v_0). Oznaczmy przez h wysokość rzutu, t. j. wzniesienie maksymalne, jakie punkt osiągnie. Aby otrzymać h , należy obliczyć maksimum funkcji $z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t$. Dostaniemy

$$(6) \quad h=v_0^2/2g \quad \text{w chwili} \quad t=v_0/g.$$

Rzut ukośny. Załóżmy, że prędkość $\bar{v}_0 (\neq 0)$ tworzy z osią x kąt $\alpha \neq \pm \pi/2$. Kładąc $|\bar{v}_0|=v_0$, dostaniemy $\dot{x}_0=v_0 \cos \alpha$, $\dot{z}_0=v_0 \sin \alpha$. Na mocy więc (2') i (3'):

$$\begin{aligned} (7) \quad & \dot{x}=v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}=0, \quad \dot{z}=-gt+v_0 \sin \alpha \\ (8) \quad & x=v_0 t \cos \alpha, \quad y=0, \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ponieważ $\cos \alpha \neq 0$ i $v_0 \neq 0$, więc na mocy pierwszego z równań (8) $t=x/v_0 \cos \alpha$, skąd

$$(9) \quad z=-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha.$$

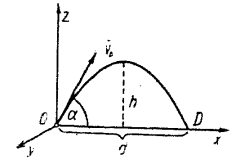
Równanie powyższe jest równaniem paraboli.

A więc: punkt w rzucie ukośnym porusza się po paraboli.

Parabola ta przecina oś x w punktach O i D . Długość odcinka $OD=d$ nazywamy odległością rzutu.

Aby wyliczyć d , podstawiamy $z=0$ w (9). Otrzymamy

$$(10) \quad d=\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$



A więc: maksymalna odległość rzutu przy danej prędkości początkowej v_0 wypada dla kąta $\alpha=\pi/4=45^\circ$.

Aby otrzymać wysokość rzutu h , należy obliczyć maximum funkcji (9). Dostaniemy

$$(11) \quad h=v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g \quad \text{dla} \quad x=v_0^2 \sin 2\alpha / 2g.$$

§ 6. Ruch w ośrodku stawiającym opór. Punkt materialny, poruszający się w ośrodku takim jak np. powietrze, napotyka na opór. Doświadczenie okazuje, że opór powietrza daje się wyrazić przez siłę zależną tylko od prędkości punktu (przy ciałach opór zależy jeszcze od kształtu ciała). Opór ma kierunek prędkości, ale zwrot przeciwny. Wielkość oporu zależy od wielkości prędkości, a nie zależy od jej kierunku. Oznaczmy wielkość oporu przez Γ , a wielkość prędkości przez v . Możemy więc napisać

$$\Gamma=f(v).$$

Funkcja f jest rosnącą, przyczem $f(0)=0$. Dla prędkości mniejszych od prędkości głosu (wynoszącej w powietrzu 333 m/sec) możemy z dużą dokładnością przyjąć, że

$$(1) \quad \Gamma=\lambda v^2,$$

gdzie λ jest współczynnikiem zależnym od temperatury i gęstości powietrza.

Rzut pionowy. Rozpatrzmy przypadek spadania punktu. Załóżmy, że punkt spada po osi z , której nadajmy zwrot pionowo w dół. Zatem współrzędna prędkości $\dot{z}=v > 0$. Opór jest skierowany ku górze, więc rzut jego na oś z jest ujemny. Przyjmując, że wielkość oporu wyraża się wzorem (1), otrzymujemy, kładąc $\lambda=km$:

$$(2) \quad m\ddot{z}=m\frac{dv}{dt}=mg-kmv^2.$$

Stąd $\frac{dv}{g-kv^2}=dt$, a więc

$$(3) \quad \int \frac{dv}{g-kv^2} = \int dt = t.$$

Kładąc $v_\infty = \sqrt{\frac{g}{k}}$, dostaniemy

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = \frac{1}{k} \int \frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{2kv_\infty} \log \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} + c,$$

gdzie c jest stałą całkowania. Na mocy więc (3)

$$(4) \quad \frac{1}{2kv_\infty} \log \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} + c = t.$$

Założmy, że w chwili początkowej $t=0$ prędkość wynosiła $v=0$. Podstawiając $v=0$ i $t=0$ we wzór (4), dostaniemy $c=0$. Zatem

$$(5) \quad v = \frac{e^{2kv_\infty t} - 1}{e^{2kv_\infty t} + 1} v_\infty = \left(1 - \frac{2}{e^{2kv_\infty t} + 1}\right) v_\infty.$$

Ze wzoru (5) wynika, że stale $v < v_\infty$.

A więc: *prędkość punktu spadającego pionowo w ośrodku stawiającym opór nie wzrasta nieograniczenie, lecz jest stale mniejsza od prędkości granicznej v_∞ .*

Po pewnym czasie prędkość v mało się różni od v_∞ i punkt spada ruchem prawie jednostajnym. Zaobserwować to możemy na kroplach deszczu.

Rzut ukośny. Założmy obecnie, że punkt porusza się w płaszczyźnie pionowej xz . Przyjmijmy ogólnie, że wielkość oporu wynosi $\Gamma = f(v)$. Oznaczając opór przez $\bar{\Gamma}$, otrzymamy więc $\bar{\Gamma} = -\frac{f(v)}{v} \bar{v}$,

skąd $\Gamma_x = -\frac{f(v)}{v} v_x$ i $\Gamma_z = -\frac{f(v)}{v} v_z$. Zatem:

$$\Gamma_x = -\frac{f(v)}{v} \dot{x}, \quad \Gamma_z = -\frac{f(v)}{v} \dot{z}.$$

Równania ruchu będą więc miały postać

$$m\ddot{x} = -\frac{f(v)}{v} \dot{x}, \quad m\ddot{z} = mg - \frac{f(v)}{v} \dot{z}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}.$$

Rozwiązaniem powyższych równań zajmuje się t. zw. balistyka zewnętrzna. Zadanie to jest bardzo trudne, gdyż wartości funkcji $f(v)$ znamy tylko z pomiarów.

§ 7. Moment ilości ruchu. Niech punkt materialny A o masie m porusza się z prędkością $\bar{v}$. Wektor $m\bar{v}$ o początku w A nazwalimy *pędem* albo *ilością ruchu* (str. 73). Jeżeli x, y, z są współrzędnymi punktu A , to rzuty pędu na osie układu wynoszą odpowiednio $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$.

Oznaczmy przez $\bar{K}$ moment ilości ruchu $m\bar{v}$ względem początku układu. Zatem (str. 18, wzór (II)):

$$(1) \quad K_x = m(\dot{y}z - \dot{z}y), \quad K_y = m(\dot{z}x - \dot{x}z), \quad K_z = m(\dot{x}y - \dot{y}x).$$

Utwórzmy pochodną (względem czasu) momentu ilości ruchu. Otrzymamy:

$$(2) \quad \dot{K}_x = m(\ddot{y}z - \dot{z}\dot{y}), \quad \dot{K}_y = m(\ddot{z}x - \dot{x}\dot{z}), \quad \dot{K}_z = m(\ddot{x}y - \dot{y}\dot{x}).$$

Założmy, że układ odniesienia jest układem inercyjnym, a na punkt A działa siła $\bar{P}$. Wówczas $m\ddot{x} = P_x$, $m\ddot{y} = P_y$, $m\ddot{z} = P_z$, skąd na mocy (2)

$$(3) \quad \dot{K}_x = P_y z - P_z y, \quad \dot{K}_y = P_z x - P_x z, \quad \dot{K}_z = P_x y - P_y x.$$

Wyrażenia, stojące po prawych stronach równań (3), przedstawiają momenty siły $\bar{P}$ względem osi układu. Oznaczając więc przez $\bar{M}$ moment siły $\bar{P}$ względem początku układu, mamy na mocy (3):

$$(4) \quad \dot{K}_x = M_x, \quad \dot{K}_y = M_y, \quad \dot{K}_z = M_z.$$

Równania powyższe możemy napisać w postaci jednego równania wektorowego:

$$(5) \quad \dot{\bar{K}} = \bar{M}.$$

Za początek układu mogliśmy obrać punkt dowolny.

A więc: *pochodna momentu ilości ruchu względem dowolnego punktu stałego równa się momentowi siły działającej względem tego punktu.*

Z równań (4) wynika również, że *pochodna momentu ilości ruchu względem dowolnej osi stałej równa się momentowi siły względem tej osi.*

Zasada zachowania pól. Przypuśćmy, że moment siły $\bar{P}$ względem pewnej osi l jest stale zerem; albo więc kierunek siły $\bar{P}$ przecina oś l , albo siła $\bar{P}$ jest do osi l równoległa. Obierzmy oś l za oś z . Mamy zatem $M_z = 0$. Na mocy (4) jest więc $\dot{K}_z = 0$, czyli $K_z = \text{const}$. Stąd na mocy (1) otrzymujemy

$$(6) \quad m(\dot{x}y - \dot{y}x) = \text{const.} \quad \text{czyli} \quad \dot{x}y - \dot{y}x = \text{const.}$$

Niechaj A' będzie rzutem punktu A na płaszczyznę xy . Punkt A' ma współrzędne x, y . Zatem prędkość polowa (str. 47) punktu A' wynosi $+\frac{1}{2}(\dot{x}y - y\dot{x})$. Ze wzoru (6) wynika, że prędkość polowa punktu A' jest stała.

A więc: jeżeli moment siły względem pewnej osi jest stale zerem, to moment ilości ruchu względem tej osi jest stały i prędkość polowa rzutu ruchu na płaszczyznę prostopadłą do tej osi jest stała.

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania momentu ilości ruchu* lub *zasady zachowania pól*.

§ 8. Ruch środkowy. Jeżeli punkt materialny porusza się w ten sposób, że jego przyspieszenie w każdej chwili ma kierunek przechodzący przez pewien stały punkt O , to ruch punktu nazywamy *ruchem środkowym*, punkt zaś O *środkiem ruchu*.

Np. ruch jednostajny punktu po okręgu koła jest ruchem środkowym, gdyż przyspieszenie jest stale skierowane ku środkowi koła, będącemu w tym przypadku środkiem ruchu (str. 43).

Ponieważ przyspieszenie ma kierunek siły działającej na punkt materialny, więc w ruchu środkowym kierunek siły przechodzi przez środek ruchu.

Pole sił w którym kierunki sił przechodzą przez pewien stały punkt O nazywamy *polem środkowym*, a punkt O *środkiem pola*.

Punkt o masie M umieszczony nieruchomo w stałym punkcie O i przyciągający inny punkt o masie m z siłą, która zależy tylko od wzajemnej odległości tych punktów, wytwarza pole sił. Pole to jest polem środkowym, gdyż siła działająca na punkt m ma -- wedle prawa akcji i reakcji (str. 74, III) -- kierunek przechodzący przez punkt M .

Punkt materialny porusza się w polu środkowym ruchem środkowym; środek ruchu leży oczywiście w środku pola.

Obierzmy początek układu współrzędnych w środku pola. Ponieważ kierunek siły przechodzi stale przez początek układu, więc jej moment względem każdej osi jest zerem. Na mocy zasady zachowania pól ruch rzutu punktu na każdą płaszczyznę układu ma wówczas prędkość polową stałą, zatem:

$$(1) \quad \dot{y}z - z\dot{y} = a, \quad \dot{z}x - x\dot{z} = b, \quad \dot{x}y - y\dot{x} = c,$$

gdzie a, b, c są pewnymi stałymi. Mnożąc równanie pierwsze obustronnie przez x , drugie przez y , trzecie przez z i dodając stronami, otrzymamy

$$(2) \quad ax + by + cz = 0.$$

Widzimy więc, że współrzędne punktu spełniają stale równanie (2). Jest ono równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez początek układu (t. j. przez środek pola). Zatem punkt porusza się w płaszczyźnie, przechodzącej przez początek układu.

Jeżeli na tej płaszczyźnie obierzmy osie x, y , wówczas z (1) wynika, że prędkość polowa w płaszczyźnie ruchu jest stała; promienie wodzące zakreślają więc w równych czasach równe pola.

A zatem: *tor ruchu środkowego jest torem płaskim, leżącym w płaszczyźnie przechodzącej przez środek; promienie wodzące, wychodzące ze środka, zakreślają w równych czasach równe pola*.

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne:

Jeżeli tor punktu jest płaski, a promienie wodzące, wychodzące z pewnego stałego punktu O (leżącego w płaszczyźnie toru), zakreślają w równych czasach równe pola, wówczas kierunek siły działającej przechodzi stale przez punkt O .

Dowód. Obierzmy początek układu w O , zaś osie x, y w płaszczyźnie ruchu. Punkt porusza się więc w płaszczyźnie xy . Ponieważ prędkość polowa jest stała, więc $\dot{x}y - y\dot{x} = \text{const}$. Różniczkując obustronnie, dostaniemy $\ddot{x}y - y\ddot{x} = 0$, więc $(m\ddot{x})y - (m\ddot{y})x = 0$, skąd

$$(3) \quad P_x y - P_y x = 0.$$

Ponieważ $\ddot{z} = 0$, więc $P_z = m\ddot{z} = 0$. Siła $\vec{P}$ leży zatem w płaszczyźnie xy ; na mocy (3) moment siły $\vec{P}$ względem O jest zerem, więc kierunek siły $\vec{P}$ przechodzi przez O , c. b. d. d.

Uwaga. Załóżmy, że prędkość polowa w ruchu środkowym jest zerem. Wtedy $\dot{x}y - y\dot{x} = 0$ lub (we współrzędnych biegunowych) $r^2\dot{\varphi} = 0$. Wynika stąd, że albo jest stale $r = 0$, t. zn. że punkt jest w spoczynku, albo jest stale $\dot{\varphi} = 0$ czyli $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, t. zn., że punkt porusza się po prostej przechodzącej przez środek (i nachylonej do osi x pod kątem φ_0).

A więc: jeżeli w ruchu środkowym prędkość polowa jest zerem, to punkt porusza się po prostej przechodzącej przez środek.

Jeżeli zaś założymy, że prędkość polowa jest różną od zera, to $r^2\dot{\varphi} \neq 0$, czyli $r \neq 0$.

A więc: jeżeli w ruchu środkowym prędkość polowa jest różna od zera, to punkt nigdy nie przechodzi przez środek.

Wzór Bineta. Punkt A o masie m porusza się w środkowym polu sił w płaszczyźnie xy z prędkością połową różną od zera. Wprowadźmy współrzędne biegunowe r, φ . Oznaczmy przez P rzut siły $\vec{P}$ na promień wodzący $\vec{OA}$. Zatem $P_x = P \cos \varphi$ i $P_y = P \sin \varphi$, więc $P_x \cos \varphi + P_y \sin \varphi = P$, skąd

$$(4) \quad P = m(\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi).$$

Ponieważ $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, więc (por. str. 47, wzór (2))

$$\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

skąd na mocy (4)

$$(5) \quad P = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2).$$

Oznaczmy prędkość połową przez $\frac{1}{2}c$. Z założenia jest $\frac{1}{2}c \neq 0$. Ponieważ we współrzędnych biegunowych prędkość połowa wynosi $\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ (str. 47), więc

$$(6) \quad r^2\dot{\varphi} = c \quad \text{czyli} \quad \dot{\varphi} = c/r^2.$$

Przypuśćmy, że tor ma równanie $r = f(\varphi)$. Zatem

$$(7) \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{d(1/r)}{d\varphi},$$

więc

$$(8) \quad \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -c^2 \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} \frac{1}{r^2}.$$

Ze wzoru (5) na mocy (6) i (8) otrzymujemy:

$$P = m \left(-\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - \frac{c^2}{r^3} \right),$$

zatem

$$(I) \quad P = -\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right).$$

Wzór powyższy nosi nazwę *wzoru Bineta*.

Wzór ten z kształtu toru pozwala wyznaczyć siłę, działającą w ruchu środkowym. Na odwrót, znając siłę P jako funkcję zmiennych r i φ , możemy wyznaczyć tor.

§ 9. Ruchy planet. Prawa Keplera. Opierając się na obserwacjach, podał Kepler następujące trzy prawa odnoszące się do ruchów planet:

1) Planety krążą po elipsach, w których ognisku znajduje się słońce.

2) Promienie wodzące, wychodzące ze słońca zakreslają w równych czasach równe pola.

3) Kwadraty czasów obiegu dwóch planet są do siebie w stosunku takim, jak trzecie potęgi ich średnich odległości od słońca (przyczem przez średnią odległość rozumie się połowę wielkiej osi elipsy, po której krąży planeta).

Trzecie prawo nie jest zupełnie ściśle. Przyczynę tego poznamy później. Zauważmy jeszcze, że prawa Keplera mają charakter ściśle kinematyczny.

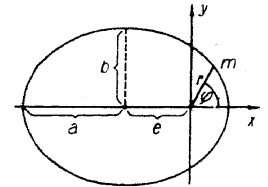
Wnioski z praw Keplera. Z praw Keplera wyprowadził Newton (przy pomocy dynamiki) prawo, określające siły, które wywołują ruch planet. Z pierwszych dwóch praw Keplera wynika mianowicie, że planety krążą po torach płaskich z prędkością połową stałą. Na mocy więc twierdzenia odwrotnego ze str. 87, siły działające na planety są siłami środkowymi, których kierunki przechodzą przez słońce.

Obierzmy w płaszczyźnie ruchu planety osie x, y , umieszczając początek układu w słońcu jako ognisku elipsy, po której planeta krąży. Za kierunek osi x obierzmy kierunek wielkiej osi elipsy i nadajmy osi x taki zwrot, by środek elipsy leżał w części ujemnej osi x . Oznaczmy oś wielką elipsy przez $2a$, oś małą przez $2b$, a mimośród przez $2e$. Równanie elipsy we współrzędnych biegunowych będzie wówczas miało postać

$$(1) \quad r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \varphi},$$

gdzie

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$



Ze wzoru Bineta (str. 88, (I)) możemy otrzymać siłę, działającą na planetę. Mamy mianowicie na mocy (1) $\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon \cos \varphi}{a(1-\varepsilon^2)}$, skąd

$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} = -\frac{\varepsilon \cos \varphi}{a(1-\varepsilon^2)}$, a więc na mocy (2) i wzoru Bineta

$$(3) \quad P = -\frac{mc^2 a}{b^2 r^2}.$$

Pole elipsy wynosi $ab\pi$; oznaczając przez T czas obiegu planety, otrzymamy z uwagi na to, że $\frac{1}{2}c$ jest prędkością połową, $\frac{1}{2}c = ab\pi/T$, czyli $c = 2ab\pi/T$. Na mocy zatem (3) dostaniemy

$$(4) \quad P = -\frac{4\pi^2 ma^3}{r^2 T^2}.$$

Ponieważ $P < 0$, więc siła jest skierowana ku słońcu.

Na mocy trzeciego prawa Keplera mamy dla dwóch planet $T^2/T_1^2 = a^3/a_1^3$, czyli $a^3/T^2 = a_1^3/T_1^2$. Poraz a^3/T_2^2 ma zatem stałą wartość dla wszystkich planet. Kładąc

$$(5) \quad \mu = a^3/T^2,$$

otrzymamy z (4)

$$(6) \quad P = -\frac{4\pi^2 \mu m}{r^2}.$$

A więc: siła, pod której wpływem planeta się porusza, jest skierowana ku słońcu i wprost proporcjonalna (co do wielkości) do masy planety, a odwrotnie do kwadratu odległości od słońca.

Prawo ogólnego ciążenia. Wynik powyższy, wyprowadzony z praw Keplera, nasunął Newtonowi przypuszczenie, że siła działająca na planetę pochodzi ze wzajemnego przyciągania się planety i słońca. Myśl tę uogólnił Newton w postaci prawa powszechnej grawitacji czyli ogólnego ciążenia:

Dwa jakiegokolwiek punkty materialne przyciągają się z siłami, których wielkość jest wprost proporcjonalna do mas, a odwrotnie do kwadratu odległości tych punktów.

Według prawa akcji i reakcji, siły, z jakimi się punkty materialne przyciągają, są co do wielkości równe, przeciwnie skierowane i działają wzdłuż prostej łączącej te punkty. Oznaczając przez m_1 i m_2 masy punktów, przez r ich odległość, a przez P wielkość siły, z jaką się przyciągają, otrzymamy więc

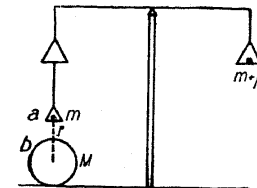
$$(I) \quad P = K \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdzie K jest pewną stałą, t.zw. stałą ciążenia, zależną tylko od jednostek długości, masy i czasu.

Z równania (I) mamy $K = Pr^2/m_1 m_2$, zatem $[K] = [P][r]^2/[m_1][m_2]$, więc $[K] = L^3 M^{-1} T^{-2}$. Pomiaru okazały, że w układzie cgs:

$$K = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sek}^{-2}.$$

Stałą ciążenia można zmierzyć przy pomocy t.zw. wagi Jolly'ego. Jest to waga, która po jednej stronie ma dwie szalki, górną i dolną, a po drugiej jedną. Ciało a o masie m kładziemy na szalce górnej i równoważymy je na szali przeciwnej ciężarkiem o masie m . Ciało a przenosimy następnie na szalkę dolną; równowaga nie zostanie przez to zachwiana. Jeżeli jednak pod szalkę dolną podstawimy ciało b o masie M , waga się przechyli. Żeby równowagę przywrócić, musimy do ciężarka m dołożyć ciężarek o masie μ .



W doświadczeniu ciało b było kulą ołowianą. Ponieważ, jak można okazać, kula jednorodna przyciąga punkt materialny położony zewnątrz tak, jak gdyby jej całkowita masa była skupiona w środku, więc oznaczając przez r odległość środka kuli od ciała a , mamy $KmM/r^2 = \mu g$ czyli

$$K = \mu g r^2 / m M.$$

Masa ziemi. Można okazać, że kula złożona z warstw współśrodkowych o gęstości stałej przyciąga punkt położony zewnątrz tak, jak gdyby cała jej masa skupiona była w środku kuli. Przyjmując, że ziemia spełnia powyższe założenie, i oznaczając przez M masę ziemi, przez R jej promień, a przez Q ciężar ciała o masie m (na powierzchni ziemi), otrzymamy $Q = K m M / R^2$. Ponieważ $Q = mg$, więc $mg = K m M / R^2$, czyli

$$(7) \quad M = g R^2 / K.$$

Przyjmując $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$, $R = 6300 \text{ km}$, $K = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sek}^{-2}$, otrzymamy (po zamianie m i km na cm)

$$M = 6 \cdot 10^{27} \text{ g}.$$

Gęstość ziemi otrzymujemy ze wzoru

$$\rho = M / \frac{4}{3} R^3 \pi = 3g/4 K R \pi = 5,6 \text{ g cm}^{-3}.$$

Równanie Keplera. Zajmiemy się teraz wyznaczaniem położenia planety w danej chwili czasu. Obierzmy układ współrzędnych w płaszczyźnie ruchu planety, jak na str. 89. Elipsa, po której krąży planeta, ma we współrzędnych prostokątnych równanie

$$(x+e)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Wprowadźmy kąt pomocniczy u , określony przez równania:

$$(II) \quad (x+e)/a = \cos u, \quad y/b = \sin u.$$

Kąt u nazywamy *anomalą mimośrodową*.

Równania (II) określają kąt u jednoznacznie. Z (II) dostajemy:

$$x = a(\cos u - e/a), \quad y = b \sin u.$$

Podstawiając $e = ea/a$, $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, otrzymujemy stąd:

$$(8) \quad x = a(\cos u - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin u.$$

Promień r otrzymujemy z równania

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2(1 - \varepsilon \cos u)^2.$$

Zatem

$$(III) \quad r = a(1 - \varepsilon \cos u).$$

Kąt φ , jaki r tworzy z osią x , nazywamy *anomalą prawdziwą*.

Z równania elipsy we współrzędnych biegunowych (str. 89, (1)) dostaniemy $r\varepsilon \cos \varphi = a(1 - \varepsilon^2) - r$, więc

$$r\varepsilon(1 + \cos \varphi) = (1 - \varepsilon)[a(1 + \varepsilon) - r],$$

skąd na mocy (III), $r(1 + \cos \varphi) = a(1 - \varepsilon)(1 + \cos u)$. Ponieważ

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{i} \quad 1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}, \quad \text{więc}$$

$$(IV) \quad \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1 - \varepsilon)} \cos \frac{u}{2} \quad \text{i} \quad \text{podobnie} \quad \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1 + \varepsilon)} \sin \frac{u}{2};$$

stąd

$$(V) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Wzory (IV) i (V) wyznaczają jednoznacznie φ przy pomocy u .

Przypuśćmy, że w chwili $t=0$ jest $u=0$, a więc $\varphi=0$. Pole elipsy wynosi $ab\pi$. Jeżeli T oznacza czas obiegu planety, wówczas prędkość połowa wynosi $ab\pi/T$. Promień wodzący zakreśli więc w czasie od 0 do t pole $\frac{ab\pi}{T}t$. Pole to możemy również przedstawić w postaci całki

$$(9) \quad \frac{ab\pi}{T}t = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2 d\varphi.$$

Różniczkując (V), otrzymamy $\frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \frac{du}{\cos^2 \frac{u}{2}}$. Na

mocy więc (IV) $d\varphi = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot \frac{a(1 - \varepsilon)}{r} du = \frac{a\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{r} du$. Podstawiając

w (9) otrzymamy $\frac{ab\pi}{T}t = \frac{a\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} \int_0^u r du$, skąd na mocy (III),

$\frac{ab\pi}{T}t = \frac{a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} (u - \varepsilon \sin u)$. Stąd z uwagi na to, że $a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2} = ab$, dostaniemy

$$(VI) \quad u - \varepsilon \sin u = 2\pi t/T.$$

Wyrażenie $2\pi t/T$ nazywamy *anomalą średnią*.

Równanie (VI) nosi nazwę *równania Keplera*.

Przy pomocy równania Keplera możemy dla każdej chwili t wyznaczyć u , a następnie przy pomocy równań (III), (IV), (V) promień r i kąt φ . Astronomia podaje liczne metody rozwiązywania równania Keplera.

W astronomii anomalę mimośrodową u oznacza się zazwyczaj literą E , anomalę prawdziwą φ literą $\mathcal{V}$, a anomalę średnią $2\pi t/T$ literą M .

§ 10. Praca. Przypuśćmy, że punkt materialny przesunął się z punktu A do B i że podczas tego przesunięcia działała nań (oprócz być może innych sił) siła $\vec{P}$.

Siła stała. Załóżmy, że siła $\vec{P}$, działająca na punkt materialny podczas jego ruchu od A do B , była stała co do wielkości, kierunku i zwrotu (choć ruch mógł się odbywać po linii krzywej).

Pracą siły $\vec{P}$ na przesunięciu $\overline{AB}$ nazywamy iloczyn skalarny

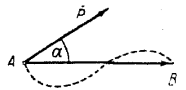
$$\vec{P} \cdot \overline{AB}.$$

Jeżeli więc pracę oznaczymy przez L , to

$$(I) \quad L = \vec{P} \cdot \overline{AB}.$$

Niechaj α będzie kątem zawartym między $\vec{P}$ i $\overline{AB}$. Zatem

$$(II) \quad L = |\vec{P}| \cdot |\overline{AB}| \cos \alpha.$$



Praca może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem. Praca siły $\vec{P}$ jest zerem, jeżeli $\vec{P}=0$ lub $AB=0$ (t. zn. gdy nie ma przesunięcia) lub jeżeli $\alpha = \pi/2$ (t. zn. gdy siła jest prostopadła do przesunięcia). Jeżeli $\vec{P} \neq 0$, $AB \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$ to praca jest liczbą dodatnią lub ujemną, zależnie od tego czy α jest kątem ostrym czy rozwartym.

Jeżeli $\alpha = 0$ lub $\alpha = \pi$ (t. zn. jeżeli siła ma kierunek przesunięcia), mamy

$$L = \pm |\vec{P}| \cdot |\overline{AB}|,$$

przez znak zależy od tego, czy siła i przesunięcie mają zwroty zgodne czy przeciwnie.

Z twierdzeń o iloczynie skalarowym (rozdz. I, str. 7) wynika, że praca siły $\vec{P}$ na przesunięciu $\overline{AB}$ równa się iloczynowi przesunięcia i rzutu siły na kierunek przesunięcia lub iloczynowi siły i rzutu przesunięcia na kierunek siły.

Należy zwrócić uwagę, że — według określenia — *praca nie zależy od czasu, w jakim punkt materialny przesunął się od A do B.*

Oznaczmy rzuty przesunięcia $\overline{AB}$ na osie układu przez Δx , Δy , Δz . Na mocy więc (I)

$$(1) \quad L = P_x \Delta x + P_y \Delta y + P_z \Delta z.$$

Jeżeli punkt A ma współrzędne x_0, y_0, z_0 , zaś B x_1, y_1, z_1 , to $\Delta x = x_1 - x_0$ i t. d. Zatem

$$(2) \quad L = P_x(x_1 - x_0) + P_y(y_1 - y_0) + P_z(z_1 - z_0).$$

Siła zmienna. Załóżmy teraz, że punkt porusza się po krzywej C określonej parametrycznie przez funkcje:

$$(3) \quad x = f(\sigma), \quad y = \varphi(\sigma), \quad z = \psi(\sigma) \quad (\sigma' \leq \sigma \leq \sigma'').$$

Przypuśćmy przytem, że jeżeli $\sigma_1 < \sigma_2$, to położenie punktu odpowiadające wartości σ_1 jest wcześniejsze od położenia odpowiadającego wartości σ_2 .

Założmy dalej, że na punkt działa siła zmienna $\vec{P}$, której rzuty w dowolnym punkcie toru o współrzędnych x, y, z dane są przez funkcje:

$$(4) \quad P_x = F(x, y, z), \quad P_y = \Phi(x, y, z), \quad P_z = \Psi(x, y, z).$$

O funkcjach F, Φ, Ψ zakładamy oczywiście, że są określone w każdym punkcie toru. Utwórzmy dowolny podział δ odcinka $\sigma'\sigma''$ przy pomocy punktów $\sigma' = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n = \sigma''$. Niechaj tym wartościom parametru σ odpowiadają na krzywej C punkty:

$$A' = A_0(x_0, y_0, z_0), \quad A_1(x_1, y_1, z_1), \quad \dots, \quad A_n(x_n, y_n, z_n) = A''.$$

Na mocy (3) jest:

$$(5) \quad x_i = f(\sigma_i), \quad y_i = \varphi(\sigma_i), \quad z_i = \psi(\sigma_i) \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, n.$$

Położmy:

$$(6) \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta z_i = z_{i+1} - z_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Oznaczmy wreszcie przez $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$ siły działające w punktach $A_0, A_1, \dots, A_n$. Na mocy (4) jest:

$$(7) \quad P_{ix} = F(x_i, y_i, z_i), \quad P_{iy} = \Phi(x_i, y_i, z_i), \quad P_{iz} = \Psi(x_i, y_i, z_i).$$

Gdyby siła $\vec{P}$ na przesunięciach $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \dots$ była stała i odpowiednio równa $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \dots$, to prace na poszczególnych przesunięciach wyrażałyby się wzorami:

$$L_0 = P_{0x} \Delta x_0 + P_{0y} \Delta y_0 + P_{0z} \Delta z_0,$$

$$L_1 = P_{1x} \Delta x_1 + P_{1y} \Delta y_1 + P_{1z} \Delta z_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

Kładąc $L' = L_0 + L_1 + \dots$, otrzymamy więc

$$(8) \quad L' = \sum_{i=0}^{n-1} (P_{ix} \Delta x_i + P_{iy} \Delta y_i + P_{iz} \Delta z_i).$$

Wyrażenie stojące po prawej stronie powyższej równości zależy oczywiście od podziału δ odcinka $\sigma'\sigma''$.

Jeżeli L' dąży do pewnej granicy dla każdego ciągu normalnego¹⁾ podziałów $\{\delta_k\}$ odcinka $\sigma'\sigma''$, to granicę tę nazywamy *pracą siły $\vec{P}$ po krzywej C* (albo *wzdłuż krzywej C*).

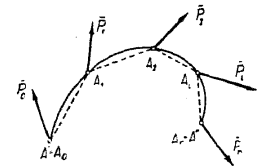
Wyrażenie (8) możemy więc uważać za wartość przybliżoną pracy L siły $\vec{P}$.

Granicą wyrażenia (8) jest tak zwana całka krzywolinijna²⁾ po krzywej C:

$$(III) \quad L = \int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

¹⁾ t.j. takiego, w którym długość największego odcinka podziału dąży do zera. Por. S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. II, Lwów, str. 69.

²⁾ tamże, str. 187 i 196.



Całkę krzywoliniową możemy zamienić na zwykłą całkę oznaczoną, wyrażając zmienne x, y, z funkcjami (3) przy pomocy parametru σ . Otrzymamy wówczas

$$L = \int_{\sigma'}^{\sigma''} [P_x f'(\sigma) + P_y \varphi'(\sigma) + P_z \psi'(\sigma)] d\sigma,$$

gdzie $P_x = F(f(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma))$, $P_y = \Phi(f(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma))$ i t. d. Jeżeli w szczególności σ oznacza czas t , wówczas $f'(\sigma) = \dot{x}$, $\varphi'(\sigma) = \dot{y}$, $\psi'(\sigma) = \dot{z}$. Zatem

$$(IV) \quad L = \int_t^{t'} [P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z}] dt.$$

Ponieważ $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ są rzutami prędkości $\vec{v}$, więc $P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z} = \vec{P} \cdot \vec{v}$. Zatem

$$(V) \quad L = \int_t^{t'} (\vec{P} \cdot \vec{v}) dt.$$

Uwaga. Wzór (III) jest słuszny, gdy położenia punktu ruchomego na krzywej następują po sobie w porządku, który odpowiada wzrostowi parametru σ . Jeżeli jednak jest przeciwnie, t. zn. jeżeli $\sigma_1 > \sigma_2$, to położenie odpowiadające σ_1 jest późniejsze od położenia odpowiadającego σ_2 i wówczas należy we wzorze (III) zamiast dx, dy, dz podstawić $-dx, -dy, -dz$. Otrzymamy wtedy

$$L = - \int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Jeżeli więc punkt materialny poruszał się po krzywej C od A' do A'' i siła $\vec{P}$ wykonała pracę L , to gdy punkt poruszał się będzie po krzywej C od A'' do A' (przezem położenia będą następowały po sobie w porządku odwrotnym niż poprzednio), ta sama siła $\vec{P}$ wykona pracę $-L$.

Praca sumy sił. Przypuśćmy, że punkt materialny, poruszając się po krzywej C , był pod działaniem dwóch sił $\vec{P}$ i $\vec{Q}$. Położmy $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$. Oznaczmy przez L pracę siły $\vec{R}$, przez L' pracę siły $\vec{P}$ i przez L'' pracę siły $\vec{Q}$. Wówczas $L = \int_C (R_x dx + R_y dy + R_z dz) =$

$$= \int_C [(P_x + Q_x) dx + (P_y + Q_y) dy + (P_z + Q_z) dz] = \int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz) +$$

$$+ \int_C (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) = L' + L'', \text{ a więc}$$

$$(VI) \quad L = L' + L''.$$

Możemy zatem powiedzieć, że *praca sumy dwóch (lub kilku) sił na pewnej krzywej równa się sumie prac poszczególnych sił na tej krzywej*.

Wymiar i jednostki pracy. Na mocy (II), str. 93, mamy $[praca] = [siła] \cdot [droga] = LMT^{-2}L$, a więc

$$[praca] = L^2 M T^{-2}.$$

Jednostką pracy w układzie *cgs* jest *erg*. Jest to praca, jaką wykona siła 1 dyn na drodze 1 cm. Zatem

$$\text{erg} = \text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sek}^{-2}.$$

Większą jednostką jest *Joule* (J) = 10^7 erg. W układzie technicznym jednostką pracy jest *kilogramometr* (kgm). Jest to praca siły 1 kg na drodze 1 m. Ponieważ 1 kg (siły) = 981000 dyn, a 1 m = 100 cm, więc

$$\text{kgm} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg} = 9,81 \text{ J}.$$

§ 11. Pole sił potencjalne. Obszar D nazwalimy (str. 78) *polem sił*, jeżeli na punkt materialny, gdziekolwiek w obszarze D umieszczony, działa siła zależna tylko od położenia tego punktu.

Pole sił jest określone przez podanie funkcji:

$$(1) \quad P_x = F(x, y, z), \quad P_y = \Phi(x, y, z), \quad P_z = \Psi(x, y, z),$$

które wyznaczają rzuty siły działającej $\vec{P}$ w punkcie o współrzędnych x, y, z .

Natężenie pola. Może się zdarzyć, że siła $\vec{P}$ jest proporcjonalna do masy m punktu materialnego. Wówczas siłę działającą na jednostkę masy (t. j. siłę $\vec{P}/m$) w pewnym punkcie pola nazywamy *natężeniem pola* w tym punkcie.

Przykładem takiego pola jest pole grawitacyjne ziemskie. Ciężar ciała jest proporcjonalny do masy ciała. Na powierzchni ziemi natężenie pola jest co do wielkości równe g (przyspieszeniu ziemskiemu).

Linie sił. Na specjalną uwagę zasługują pewne krzywe w polu sił, zwane *liniami sił*. Są to krzywe o tej własności, że styczna w dowolnym punkcie ma kierunek siły działającej w tym punkcie. Np. w polu grawitacyjnym ziemskim liniami sił są linie pionowe. Linie sił są określone układem równań różniczkowych:

$$(2) \quad dx/P_x = dy/P_y = dz/P_z.$$

Określenie pola potencjalnego. Gdy w polu sił punkt materialny przesunie się od punktu A do punktu B po jakimś łuku AB , wówczas praca siły działającej $\vec{P}$ (str. 95, (III)) wynosi

$$(I) \quad L = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Praca zależy będzie na ogół nie tylko od punktów A i B , lecz także od przebytej drogi, t. j. od łuku AB . W mechanice ważną rolę odgrywają pola, w których praca zależy tylko od punktów A i B , a nie zależy od łuku AB . Jeżeli więc w takim polu punkt materialny przesuwać się będzie od A do B po rozmaitych torach, to siła $\vec{P}$ wykona zawsze tę samą pracę. Pola takie nazywamy *polami potencjalnymi lub zachowawczymi (konserwatywnymi)*.

A więc: *polem potencjalnym jest takie pole sił, w którym praca nie zależy od drogi przejścia, lecz tylko od punktu początkowego i końcowego.*

Jeżeli w polu potencjalnym punkt odbył drogę zamkniętą (czyli wyszedł z punktu A i powrócił do A), to praca wykonana wzdłuż tej drogi jest zerem. Praca bowiem w polu potencjalnym zależy tylko od punktu początkowego i końcowego, więc jeśli się one pokrywają, to praca jest taka, jak gdyby punkt wogóle się nie poruszył.

Na odwrót, jeżeli pole sił ma tę własność, że praca po każdej drodze zamkniętej jest zerem, to pole jest polem potencjalnym. Obierzmy bowiem dwa dowolne punkty A, B i łuki AMB, ANB . Oznaczmy przez L' pracę na łuku AMB , a przez L'' na łuku ANB . Praca po linii zamkniętej $AMBNA$ jest wedle założenia zerem. Pracę tą można przedstawić jako sumę prac: od A do B po łuku AMB i od B do A po łuku BNA . Ponieważ praca po łuku BNA równa się $-L''$ więc $L' + (-L'') = 0$, skąd $L' = L''$. Zatem praca po obu łukach jest ta sama.

Możemy więc powiedzieć, że *na to aby pole sił było polem potencjalnym, potrzeba i wystarcza, by praca po wszelkiej linii zamkniętej była w nim zerem.*

Potencjał. Obierzmy dowolny układ współrzędnych (x, y, z) i punkt A w polu potencjalnym. Jeżeli będziemy uważać punkt A za stały, to praca L_{AB} , gdzie B jest dowolnym punktem pola, będzie

zależać tylko od współrzędnych x, y, z punktu B . Zatem praca L_{AB} będzie funkcją współrzędnych x, y, z . Oznaczając tę funkcję przez $V(x, y, z)$, otrzymamy

$$(3) \quad L_{AB} = V(x, y, z).$$

Funkcję $V(x, y, z)$ nazywamy *funkcją sił* albo *potencjałem*.

Weźmy pod uwagę jakiś punkt B' o współrzędnych x', y', z' . Praca po dowolnej linii $ABB'A$ jest zerem. Zatem $L_{AB} + L_{BB'} + L_{B'A} = 0$. Lecz $L_{B'A} = -L_{AB'} = -V(x', y', z')$. Więć na mocy (3) $V(x, y, z) + L_{BB'} - V(x', y', z') = 0$, skąd

$$(II) \quad L_{BB'} = V(x', y', z') - V(x, y, z).$$

Wzór (II) możemy wypowiedzieć, jak następuje:

Przy przejściu od jednego punktu do drugiego praca równa się różnicy potencjałów w tych punktach.

Potencjał określiliśmy w zależności od obioru punktu A . Gdybyśmy obrali inny punkt $A'(x', y', z')$, to potencjał wyraziłby się inną funkcją $V'(x, y, z)$. Ponieważ na mocy określenia potencjału mamy dla dowolnego punktu $B(x, y, z)$

$$V'(x, y, z) = L_{A'B} = V(x, y, z) - V(x', y', z'),$$

więc

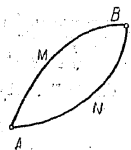
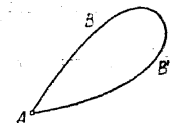
$$V(x, y, z) - V'(x, y, z) = V(x', y', z') = \text{const.}$$

A więc różnica obu funkcji V i V' jest stała. Widzimy stąd, że w polu sił potencjał jest funkcją określoną tylko po za pewną stałą (podobnie jak całka nieoznaczona). Stała ta jednak, jak wskazuje wzór (II), nie gra roli, ponieważ na wielkość pracy wpływa jedynie różnica potencjałów w dwóch punktach.

Wymiar potencjału. Ponieważ na mocy określenia potencjału równa się pracy, więc wymiar potencjału jest taki, jak wymiar pracy. Zatem

$$[\text{potencjał}] = L^2 M T^{-2}.$$

Jednostki pracy są również jednostkami potencjału.



Związek między siłą a potencjałem. Przesuńmy punkt materialny z punktu $A(x_0, y, z)$ do punktu $B(x, y, z)$ po prostej równoległej do osi x . Praca wynosi więc na mocy (I) i (II):

$$L_{AB} = V(x, y, z) - V(x_0, y, z) \quad \text{lub} \quad L_{AB} = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Ponieważ punkt przesunął się po prostej równoległej do osi x , więc $dy=0$ i $dz=0$. Zatem $L_{AB} = \int_{AB} P_x dx = \int_{x_0}^x P_x dx$, skąd

$$V(x, y, z) - V(x_0, y, z) = \int_{x_0}^x P_x dx.$$

Tworząc pochodną cząstkową względem x , dostaniemy $\partial V / \partial x = P_x$; analogiczne wzory otrzymamy dla pozostałych pochodnych cząstkowych.

A więc: *pochodne cząstkowe potencjału równają się odpowiednio rzutom siły na osie układu, t. j.*

$$(III) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = P_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = P_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = P_z.$$

Na odwrót, jeżeli założymy, że w danym polu sił istnieje funkcja V spełniająca związki (III), wówczas pole jest polem potencjalnym. Niech bowiem pewna funkcja V spełnia związki (III). Zatem, praca od punktu $A(x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B(x_2, y_2, z_2)$ po dowolnym łuku AB wynosi:

$$L_{AB} = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \int_{AB} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right).$$

Ponieważ wyrażenie zawarte w nawiasie ostatniej całki jest różniczką zupełną dV , więc otrzymujemy wzór

$$(4) \quad L_{AB} = \int_{AB} dV = V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1),$$

wyrażający, że praca nie zależy od drogi, lecz tylko od punktu początkowego i końcowego. Na mocy (4) funkcja V jest tedy potencjałem.

A więc: *jeżeli dla pola sił istnieje funkcja V spełniająca równania (III), wówczas to pole sił jest polem potencjalnym, zaś funkcja V jest potencjałem.*

Powierzchnie potencjalne. Gdy c jest dowolną stałą, powierzchnię określoną równaniem

$$(5) \quad V(x, y, z) = c$$

nazywamy *powierzchnią potencjalną*.

A więc: *powierzchnia potencjalna jest to taka powierzchnia, na której potencjał ma wartość stałą.*

W geometrii różniczkowej dowodzi się, że dostawy kierunkowe $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ normalnej do powierzchni (5) w punkcie (x, y, z) spełniają warunki:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z},$$

skąd na mocy (III) str. 100,

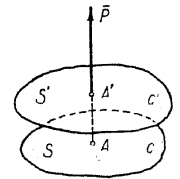
$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = P_x : P_y : P_z.$$

Ponieważ dostawy kierunkowe $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ siły $\bar{P}$ spełniają podobne warunki: $\cos \alpha' : \cos \beta' : \cos \gamma' = P_x : P_y : P_z$, więc siła $\bar{P}$ ma kierunek normalny do powierzchni potencjalnej.

A zatem: *w każdym punkcie powierzchni potencjalnej siła działająca jest prostopadła do tej powierzchni.* Wynika stąd, że linie sił są prostopadłe do powierzchni potencjalnych.

Obierzmy dwie powierzchnie potencjalne S i S' , dość bliskie, o potencjałach c i c' , gdzie $c' > c$. Z dowolnego punktu A powierzchni S wykreślimy normalną do tej powierzchni aż do przecięcia A' z powierzchnią S' .

Praca przy przesunięciu od A do A' wynosi $L_{AA'} = c' - c > 0$. Ponieważ praca jest dodatnia, więc siła $\bar{P}$ ma zwrot przesunięcia $\overline{AA'}$.



A więc: *siła zwrócona jest względem powierzchni potencjalnej w stronę wzrostu potencjału.*

W przybliżeniu mamy $L_{AA'} = |\bar{P}| AA' = c' - c$ czyli $|\bar{P}| = (c' - c) / AA'$.

A więc: *na jednej i tej samej powierzchni potencjalnej siła jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do odcinka normalnej, zawartego między tą powierzchnią a powierzchnią potencjalną dość bliską.*

§ 12. Przykłady pól potencjalnych. Rozpatrzmy obecnie kilka rodzajów pól potencjalnych, z którymi często mamy do czynienia w praktyce.

Pole stałe. Jeżeli siła P jest w pewnym polu stała co do wielkości, kierunku i zwrotu, to pole takie nazywamy *polem stałym*.

Pole grawitacyjne ziemskie w małym otoczeniu danego punktu na ziemi jest polem stałym.

Obierzmy układ współrzędnych (x, y, z) , nadając osi z kierunek siły $\vec{P}$, zwrot zaś przeciwny. Kładąc $|\vec{P}| = mg$, otrzymamy

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$V = -mgs$$

jest potencjałem. Mamy bowiem

$$\partial V / \partial x = 0 = P_x, \quad \partial V / \partial y = 0 = P_y, \quad \partial V / \partial z = -mg = P_z.$$

A więc: *pole stałe jest polem potencjalnym*.

Praca od punktu $A(x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B(x_2, y_2, z_2)$ po dowolnej drodze wynosi $L_{AB} = -mgs_2 - (-mgs_1)$, więc

$$(1) \quad L_{AB} = mg(z_1 - z_2).$$

Przy założeniu, że siła $\vec{P}$ jest siłą ciężkości, jasnym jest, że $z_1 - z_2 = h$ jest różnicą poziomów, na których znajdują się punkty A i B . Kładąc więc $|\vec{P}| = Q = mg$, otrzymamy

$$L_{AB} = Qh.$$

Powierzchnia potencjalna ma równanie $V = \text{const.}$, zatem $-mgs = \text{const.}$ czyli $z = \text{const.}$ A więc powierzchniami potencjalnymi są płaszczyzny poziome (t. j. prostopadłe do kierunku siły). Ponieważ linie sił są prostopadłe do powierzchni potencjalnych, więc liniami sił są proste równoległe do osi z , t. j. linie pionowe.

Pole środkowe czyli *centralne*. Jeżeli w polu sił kierunek siły przechodzi zawsze przez pewien stały punkt O , to pole nazywa się *środkowym* lub *centralnym*, a sam punkt O *środkiem pola* (str. 86).

Załóżmy, że w danym polu środkowym wielkość siły w dowolnym punkcie A zależy tylko od odległości r punktu A od środka O . Oznaczmy przez P rzut siły $\vec{P}$ działającej w A na kierunek $\overrightarrow{OA}$. Zatem P jest funkcją r . Położmy

$$P = f(r).$$

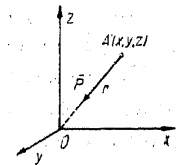
Obierzmy początek układu współrzędnych w O . Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu A , a przez α kąt, jaki $\overrightarrow{OA}$ tworzy z osią x , otrzymamy $\cos \alpha = x/r$. Zatem

$$(2) \quad P_x = P \cos \alpha = P \frac{x}{r} \quad \text{i podobnie} \quad P_y = P \frac{y}{r}, \quad P_z = P \frac{z}{r}.$$

Położmy $V = \int P dr = \int f(r) dr$. Ponieważ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, więc $\partial r / \partial x = x/r$, $\partial r / \partial y = y/r$ i $\partial r / \partial z = z/r$. Zatem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) \frac{x}{r} = P \frac{x}{r} = P_x$$

i analogicznie $\frac{\partial V}{\partial y} = P_y$, $\frac{\partial V}{\partial z} = P_z$. Pole nasze jest



więc polem potencjalnym i funkcja V jest potencjałem.

A więc: *pole środkowe, w którym siła zależy tylko od odległości punktu od środka, jest polem potencjalnym i potencjał wyraża się wzorem*

$$(3) \quad V = \int P dr.$$

Ponieważ potencjał w punkcie A jest funkcją odległości r punktu A od środka O , więc na kulach o środku O potencjał ma wartość stałą. Powierzchniami potencjalnymi będą więc tutaj kule o środku O . Liniami sił są oczywiście proste przechodzące przez punkt O .

Pole grawitacyjne Newtonowskie. Przypuśćmy, że punkt o masie m jest przyciągany z siłą $\vec{P}$ przez stały punkt o masie M według prawa ciążenia Newtona (str. 90, (I)), t. zn. że

$$|\vec{P}| = KmM/r^2.$$

Ponieważ siła skierowana jest ku punktowi M , więc pole jest polem środkowym, którego środkiem jest punkt M . Zatem, wedle określenia liczby P , $P = -KmM/r^2$.

Mamy $V = \int P dr = - \int KmM dr/r^2$. Zatem

$$(4) \quad V = KmM/r.$$

A więc praca po dowolnym łuku $A'A$ wynosi $L_{A'A} = KmM(1/r - 1/r')$, gdzie r i r' oznaczają odległości punktów A i A' od środka. Jeżeli w szczególności punkt A' obierzemy w nieskończoności czyli położymy $r' = \infty$, to otrzymamy

$$(5) \quad L_{\infty A} = KmM/r = V.$$

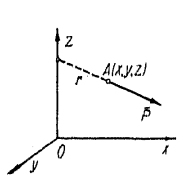
A więc: w polu grawitacyjnym Newtonowskim potencjał w punkcie A równa się pracy, jaką wykonałaby siła $\vec{P}$, prowadząc punkt materialny z nieskończoności do A .

Pole osiowe. Pole sił o tej własności, że w każdym punkcie pola kierunek siły przecina pod kątem prostym pewną stałą prostą l , nazywamy polem osiowym, a prostą l nazywamy osią pola.

Załóżmy, że wielkość siły $\vec{P}$, działającej w dowolnym punkcie A , zależy tylko od odległości r punktu A od osi pola. Połóżmy $P_r = |\vec{P}|$ lub $P = |\vec{P}|$ zależnie od tego, czy siła $\vec{P}$ ma zwrot ku osi l czy przeciwnie. Ponieważ wielkość siły $\vec{P}$ jest funkcją r (t. j. odległości punktu A od osi l), więc możemy napisać

$$P = f(r).$$

Obierzmy układ współrzędnych, przyjmując oś pola za oś z . Łatwo zauważyć, że rzuty siły $\vec{P}$ działającej w punkcie $A(x, y, z)$



wynoszą $P_x = P \frac{x}{r}$, $P_y = P \frac{y}{r}$ i $P_z = 0$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Połóżmy

$$V = \int P dr = \int f(r) dr.$$

Zatem $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = P \frac{x}{r} = P_x$. Podobnie $\frac{\partial V}{\partial y} = P_y$. Ponieważ V nie zależy od z (gdyż r nie zależy od z), więc $\frac{\partial V}{\partial z} = 0 = P_z$.

Wynika stąd, że pole dane jest polem potencjalnym, zaś V jest potencjałem.

A więc: pole osiowe, w którym wielkość siły zależy tylko od odległości punktu od osi, jest polem potencjalnym i potencjał wynosi

$$(6) \quad V = \int P dr.$$

Łatwo zauważyć, że powierzchniami potencjalnymi są tutaj walce, których wspólną osią jest oś pola. Liniami sił są proste przecinające oś pola pod kątem prostym.

Jeżeli np. $P = m\omega^2 r$ (ω stałe) wówczas $V = \int P dr = \int m\omega^2 r dr$, więc $V = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$. Powierzchnie potencjalne otrzymamy, kładąc $V = \text{const.}$, zatem $\frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.}$, więc $x^2 + y^2 = \text{const.}$; jest to równanie walca o osi z .

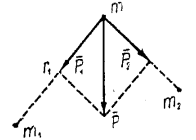
Suma pól potencjalnych. Niechaj w pewnym obszarze D danych będzie kilka pól o siłach $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$. Pole w obszarze D o sile $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$ nazywa się sumą pól sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$.

Jeżeli pola sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ są potencjalne, to — jak łatwo okazać — suma pól jest również polem potencjalnym, którego potencjał V równa się sumie potencjałów $V_1, V_2, \dots$ poszczególnych pól.

Położmy bowiem $V = V_1 + V_2 + \dots$. Mamy $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} + \dots = P_{1x} + P_{2x} + \dots = P_x$ i analogicznie $\frac{\partial V}{\partial y} = P_y$, $\frac{\partial V}{\partial z} = P_z$. A więc V jest potencjałem sumy danych pól.

Przypuśćmy np., że punkt o masie m przyciągany jest wedle prawa Newtona przez dwa stałe punkty o masach m_1 i m_2 z siłami $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$. Siła więc wypadkowa będzie $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$. Na str. 103 wykazaliśmy, że siły $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$ mają potencjał. Zatem wedle (4), str. 103, oznaczając przez r_1, r_2 odległości punktu m od m_1 i m_2 , otrzymamy:

$$V_1 = K \frac{mm_1}{r_1} \quad \text{ i } \quad V_2 = K \frac{mm_2}{r_2}.$$



Siła $\vec{P}$ ma więc potencjał $V = V_1 + V_2$. Zatem $V = Km \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right)$.

Podobnie, jeżeli punkt o masie m przyciągany jest wedle prawa Newtona przez n punktów stałych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$, wówczas

$$(7) \quad V = Km \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right),$$

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_n$ oznaczają odpowiednio odległości punktu m od punktów $m_1, m_2, \dots, m_n$.

§ 13. Energia kinetyczna i potencjalna. Niech na punkt materialny $A(x, y, z)$ o masie m działa siła $\vec{P}$. Zatem (str. 79, (I)):

$$m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y, \quad m\ddot{z} = P_z.$$

Pomnożmy obie strony pierwszego równania przez $\dot{x}$, drugiego przez $\dot{y}$, trzeciego przez $\dot{z}$ i dodajmy następnie równania stronami. Otrzymamy

$$(1) \quad m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}.$$

Oznaczmy przez v wartość bezwzględną prędkości punktu A . Zatem $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, skąd $d(v^2)/dt = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})$, a więc

$d(\frac{1}{2}mv^2)/dt = m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z})$. Wstawiając to w równanie (1), otrzymamy

$$d(\frac{1}{2}mv^2)/dt = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}.$$

Całkując obustronnie (względem t) od chwili początkowej t_0 do chwili t , dostaniemy

$$(2) \quad \int_{t_0}^t \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} dt = \int_{t_0}^t [P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}] dt.$$

Niechaj v_0 będzie wartością bezwzględną prędkości w chwili początkowej t_0 ; lewa strona równania (2) wynosi więc $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ a prawa strona równa się (str. 96, (IV)) pracy, jaką wykonała siła P w czasie od t_0 do t . Oznaczmy tę pracę przez L_{t_0t} . Równanie (2) możemy więc napisać w postaci

$$(3) \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = L_{t_0t}.$$

Wyrażenie $\frac{1}{2}mv^2$ nazywamy *energiją kinetyczną punktu*.

Kładąc

$$(4) \quad E = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

otrzymamy:

$$(I) \quad E - E_0 = L_{t_0t}.$$

A więc: *przyrost energii kinetycznej w pewnym czasie równa się pracy siły działającej w tym czasie*.

Twierdzenie to nosi nazwę *zasady równowartości pracy i energii kinetycznej*.

W szczególności, jeżeli praca siły $\bar{P}$ jest stale zerem, to $E - E_0 = 0$ czyli $E = E_0$, więc na mocy (4) $v = v_0$. Punkt ma zatem wówczas prędkość stałą co do wielkości. Jeżeli więc siła jest np. stale prostopadła do toru, to punkt porusza się ruchem jednostajnym. Przykładem jest ruch jednostajny punktu po kole pod wpływem siły stałej co do wielkości i skierowanej ku środkowi koła.

Niech teraz punkt porusza się w polu potencjalnym. Oznaczmy przez V i V_0 potencjały jakie punkt posiada odpowiednio w chwilach t i t_0 . Zatem $L_{t_0t} = V - V_0$, skąd na mocy (I) $E - E_0 = V - V_0$ czyli

$$(5) \quad E - V = E_0 - V_0.$$

Wyrażenie $-V$ nazywamy *energiją potencjalną*.



Kładąc $-V = U$ i $-V_0 = U_0$, otrzymamy

$$(II) \quad E + U = E_0 + U_0 = \text{const.}$$

Sumę energii kinetycznej i potencjalnej t. j. wyrażenie $E + U$ nazywamy *energiją całkowitą*.

A więc: *jeżeli punkt porusza się w polu potencjalnym, wówczas jego energia całkowita jest stała*.

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania energii całkowitej*.

Wymiar energii kinetycznej i potencjalnej. Na mocy (4) jest $[E] = [m][v^2]$, więc

$$[\text{energia kinetyczna}] = L^2 M T^{-2}.$$

A zatem energia kinetyczna ma wymiar pracy. Jednostki pracy są więc również jednostkami energii kinetycznej.

Energia potencjalna ma na mocy określenia wymiar potencjału, zatem ma również wymiar pracy (str. 99).

§ 14. Ruch punktu przyciąganego przez masę nieruchomą. Ruch po krzywej rzędu drugiego. Niech punkt materialny A o masie m przyciągany będzie przez punkt nieruchomy o masie M z siłą $\bar{P}$, działającą według prawa Newtona. Umieścimy w punkcie M początek O układu współrzędnych. Oznaczając (jak na str. 103) przez P rzut siły na kierunek $\overline{OA}$, otrzymamy

$$(1) \quad P = -K \frac{mM}{r^2}.$$

Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu A , otrzymamy (str. 103): $P_x = P \frac{x}{r} = -K \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$ i t. d. Równania ruchu punktu A są więc

$$(I) \quad m\ddot{x} = -K \frac{mM}{r^2} \frac{x}{r}, \quad m\ddot{y} = -K \frac{mM}{r^2} \frac{y}{r}, \quad m\ddot{z} = -K \frac{mM}{r^2} \frac{z}{r}.$$

W naszym przypadku siła $\bar{P}$ ma potencjał $V = K mM/r$ (str. 103), zatem energia potencjalna $U = -K mM/r$. Na mocy zasady zachowania energii całkowitej $\frac{1}{2}mv^2 - K mM/r = \text{const.}$, skąd kładąc $\mu = KM$,

$$(2) \quad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad \text{gdzie } h = \text{const.}$$

Ponieważ w rozważanym przypadku ruch jest ruchem środkowym (str. 86), więc tor jest płaski. Przyjmijmy więc, że ruch odbywa się w płaszczyźnie xy i że prędkość połowa jest różna od zera.

Ze wzoru Bineta (str. 88, (1)) otrzymamy na mocy (1)

$$(3) \quad -\frac{KM}{r^2} = -\frac{mc^2}{r^2} \left[\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right],$$

a ponieważ $KM = \mu$, więc

$$(4) \quad \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}.$$

Podstawmy $u = 1/r$. Otrzymujemy

$$(5) \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}.$$

Rozwiązaniem szczególnym powyższego równania jest $u = \mu/c^2$.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$ jest — jak łatwo stwierdzić — postaci $u = a \cos \varphi + b \sin \varphi$. Ogólnym więc rozwiązaniem równania (5) będzie

$$u = \mu/c^2 + a \cos \varphi + b \sin \varphi,$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Kładąc $a = \varrho \cos \varphi_0$, $b = \varrho \sin \varphi_0$ (gdzie ϱ i φ_0 są dowolnymi stałymi) i podstawiając z powrotem $1/r = u$, otrzymamy rozwiązanie ogólne równania (4)

$$(6) \quad 1/r = \mu/c^2 + \varrho \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Otóż ogólne równanie krzywej rzędu drugiego, gdy biegun jest w ognisku, ma kształt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie p jest parametrem, ε mimośrodem, zaś φ_0 kątem, jaki oś krzywej tworzy z osią układu. Równanie więc (6) jest równaniem krzywej rzędu drugiego. Z przyrównania dostajemy

$$(7) \quad p = c^2/\mu \quad \text{ i } \quad \varepsilon = \varrho c^2/\mu.$$

Krzywa taka jest elipsą, hyperbolą lub parabolą, zależnie od tego czy $\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 1$ lub $\varepsilon = 1$. Aby rozpoznać rodzaj krzywej, musimy obliczyć stałą ϱ . Wyznaczymy ją ze wzoru (2). Mamy

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$. Ponieważ $\frac{1}{2}c$ jest prędkością połową, więc $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}r^2 \dot{\varphi}$ czyli $\dot{\varphi} = c/r^2$; zatem (str. 88, wzór (7)) $v^2 = c^2 \left(\frac{d(1/r)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{c^2}{r^2}$. Na mocy (6) otrzymujemy tedy

$$(8) \quad v^2 = \frac{\mu^2}{c^2} + 2\mu\varrho \cos(\varphi - \varphi_0) + c^2\varrho^2.$$

Wyrażając r przez φ przy pomocy wzoru (6) i wstawiając we wzór (2), otrzymujemy $v^2 = 2\mu^2/c^2 + 2\mu\varrho \cos(\varphi - \varphi_0) + h$, skąd przez przyrównanie ze wzorem (8)

$$(9) \quad \varrho = \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}},$$

a więc na mocy (7)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}}.$$

Zatem $\varepsilon \gtrless 1$ zależnie od tego czy $h \gtrless 0$. Kładąc $t = t_0$, $v = v_0$, $r = r_0$, otrzymujemy ze wzoru (2) $h = v_0^2 - 2\mu/r_0$; zatem:

$$h \gtrless 0 \text{ zależnie od tego czy } v_0^2 \gtrless 2\mu/r_0.$$

Wynika stąd, że rodzaj krzywej nie zależy od kierunku prędkości, lecz tylko od jej wielkości.

Rodzaj krzywej możemy więc wyznaczyć, znając jedno położenie punktu i szybkość jego w tym położeniu.

Komety np. poruszają się w obrębie układu słonecznego pod wpływem przyciągania przez słońce, krążą więc (względem słońca) po krzywych rzędu drugiego.

Założmy obecnie, że punkt porusza się po elipsie o równaniu $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0)$. Ze wzoru Bineta (3) dostaniemy

$$-\frac{KM}{r^2} = -\frac{c^2}{p} \frac{m}{r^2} \quad \text{czyli} \quad KM = \frac{c^2}{p}.$$

Niech a i b będą osiami elipsy, zaś T czasem obiegu. Prędkość połowa będzie wówczas $\frac{1}{2}c = ab\pi/T$. Ponieważ $p = b^2/a$, więc $KM = 4\pi^2 a^3/T^2$, skąd

$$(10) \quad a^3/T^2 = KM/4\pi^2.$$

Wynika stąd, że stosunek a^3/T^2 zależy tylko od masy ciała przyciągającego, a nie od masy poruszającego się punktu.

Gdyby słońce było w spoczynku, to stosunek a^3/T^2 byłby dla planet wielkością stałą (tak jak tego wymaga trzecie prawo Keplera). Słońce nie jest jednak w spoczynku, ponieważ jest przyciągane przez planety. Stąd pochodzą odchylenia od prawa Keplera.

Sprawą tą zajmijmy się później przy t. zw. *zagadnieniu dwóch ciał* (rozdz. V).

Ruch po linii prostej. Zbadajmy jeszcze przypadek szczególny, gdy prędkość połowa jest zerem. Ruch wtedy odbywa się po prostej przechodzącej przez środek pola, t. j. przez punkt M (str. 87). Ponieważ v oznacza wartość bezwzględną prędkości, więc

$$(11) \quad v = |\dot{r}|.$$

Przypuścimy, że dla $t=0$ jest $r=r_0$, $v=v_0$. Z równości (2), str. 107, wynika

$$(12) \quad v^2 = 2\mu r^{-1} + h,$$

skąd

$$(13) \quad h = v_0^2 - 2\mu r_0^{-1}.$$

Założmy, że w chwili początkowej $t=0$ prędkość poruszającego się punktu zwrócona była od punktu M , czyli że punkt się oddalał. Dla $t=0$ jest więc $\dot{r} > 0$.

Rozpatrzmy dwa przypadki zależnie od tego, czy $h \geq 0$, czy $h < 0$.

1°. $h \geq 0$. Na mocy (12) jest stale $v^2 \geq 2\mu r^{-1}$, więc $v^2 > 0$; zatem stale $v > 0$. Wynika stąd, że punkt nigdy się nie zatrzyma i ciągle będzie oddalał się od M . Będzie więc stale $\dot{r} > 0$, skąd na mocy (11) $v = \dot{r}$ przez cały czas ruchu. Z (12) otrzymujemy

$$(14) \quad \dot{r} = v = \sqrt{2\mu r^{-1} + h} \quad \text{czyli} \quad dr / \sqrt{2\mu r^{-1} + h} = dt.$$

Zatem

$$(15) \quad \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2\mu r^{-1} + h}} = t.$$

Z równości powyższej wynika, że gdy t dąży do ∞ , r także dąży do ∞ , a więc punkt oddala się do nieskończoności.

2°. $h < 0$. W tym przypadku istnieje takie $r=r_1$, dla którego $v=0$. Wartość r_1 otrzymamy z (12), kładąc $v=0$ i $r=r_1$. Dostaniemy

$$(16) \quad r_1 = -2\mu/h.$$

Łatwo okazać, że $r_1 > r_0$. Mamy bowiem $2\mu > 2\mu - r_0 v_0^2 = r_0(2\mu r_0^{-1} - v_0^2) = r_0(-h)$. Ponieważ $h < 0$, więc $-2\mu/h > r_0$, zatem na mocy (16) jest $r_1 > r_0$.

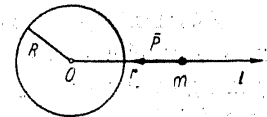
Na początku ruchu, dopóki $r < r_1$, punkt będzie się więc oddalał od M . W tym okresie będzie więc stale $\dot{r} > 0$, zatem na mocy (11) $\dot{r} = v$ i wskutek tego będą zachodziły wzory (14) i (15).

Podstawiając we wzorze (15) zamiast górnej granicy całkowania r wartość r_1 , otrzymamy chwilę t_1 , dla której $r=r_1$. Zatem

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2\mu r^{-1} + h}} = t_1.$$

Dla $t=t_1$ będziemy mieli $v=0$, a dla $t > t_1$ punkt będzie się z powrotem zbliżał do M .

Przyjmując, że ziemia jest kulą złożoną z warstw jednorodnych (t. j. o stałej gęstości), współśrodkowych, można okazać, że ziemia przyciąga punkt materialny zewnętrzny tak, jak gdyby cała masa ziemi skupiona była w jej środku O . Otrzymane wyniki możemy więc stosować do ruchu ciał przyciąganych przez ziemię, oznaczając przez M masę ziemi (skupioną w jej środku O) i zakładając, że początek układu znajduje się w punkcie O , zaś poruszający się punkt materialny nad powierzchnią ziemi, t. zn. że $r \geq R$, gdzie R jest promieniem ziemi.



Przykład. Założmy, że punkt materialny został wyrzucony z powierzchni ziemi pionowo do góry z prędkością v_0 . Zatem $r_0=R$ i na mocy (13) $h=v_0^2 - 2\mu R^{-1}$. Ze wzoru (7) str. 91, wynika, że $\mu = KM = gR^2$, gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Zatem

$$h = v_0^2 - 2gR.$$

Jeżeli $v_0 < \sqrt{2gR}$, to $h < 0$, a więc punkt spadnie z powrotem na ziemię. Jeżeli natomiast $v_0 \geq \sqrt{2gR}$, to $h \geq 0$, a więc punkt nie powróci więcej na ziemię.

Przyjmując $R=6300$ km, $g=9,81$ m·sek⁻², otrzymamy $\sqrt{2gR}=12$ km·sek⁻¹. Zatem, jeżeli ciało wyrzucimy w górę z prędkością $v_0 \geq 12$ km·sek⁻¹, to nie spadnie nigdy z powrotem na ziemię. Wynik ten nie uwzględnia jednak oporu powietrza.

§ 15. Ruch harmoniczny. Ruch harmoniczny prosty. Niech w polu środkowym na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$, skierowana stale ku środkowi O i której wielkość jest proporcjonalna do odległości punktu od O .

Siłę $\bar{P}$ nazywamy wówczas siłą sprężystą.

Założmy na razie, że punkt porusza się po osi x , której O jest początkiem. Oznaczając przez x współrzędną punktu m , zaś przez P współrzędną siły, będziemy więc mieli

$$(1) \quad P = -\lambda^2 x,$$

gdzie λ^2 jest współczynnikiem proporcjonalności. Zatem $m\ddot{x} = -\lambda^2 x$. Kładąc $k^2 = \lambda^2/m$, otrzymamy $\ddot{x} = -k^2 x$ czyli

$$(2) \quad \ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Z równania (2) wynika, że przyspieszenie punktu ma wielkość proporcjonalną do odległości punktu od początku O i zwrot stałe ku O .

Ruch, mający tę własność nazywamy ruchem *harmonicznym* (lub *drgającym*) *prostym*.

Równanie różniczkowe (2) jest równaniem liniowym drugiego rzędu o współczynnikach stałych. Pierwiastki równania charakterystycznego $r^2 + k^2 = 0$ są $r_{1,2} = \pm ki$. Ogólnym więc rozwiązaniem równania (2) jest

$$(3) \quad x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt.$$

Pisząc stałe c_1, c_2 w postaci $c_1 = a \cos kt_0$, $c_2 = -a \sin kt_0$, (gdzie a i t_0 są dowolnymi stałymi, przy czym $a \geq 0$), otrzymamy

$$(4) \quad x = a \sin k(t - t_0),$$

skąd, zaczynając rachubę czasu od chwili t_0 ,

$$(I) \quad x = a \sin kt.$$

Stałą a nazywamy *amplitudą*.

Ponieważ $|\sin kt| \leq 1$, więc amplituda a wyraża największe odchylenie punktu od O . Dla $t = \pm \pi/2k$ dostajemy $x = \pm a$. Torem punktu jest więc odcinek od $-a$ do a . Połóżmy

$$(5) \quad T = 2\pi/k.$$

Wówczas $a \sin k(t + T) = a \sin(kt + 2\pi) = a \sin kt$. Na mocy więc (I) punkt zajmie to samo położenie w czasie t i $t + T$. Ruch jest zatem *okresowy* (czyli *periodyczny*) o *okresie* T .

Wstawiając w (I) zamiast k wartość wyznaczoną z (5), otrzymamy

$$(II) \quad x = a \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Jeżeli n oznacza ilość okresów na 1 sek, to $n = 1/T$. Na mocy więc (II)

$$(III) \quad x = a \sin 2\pi n t.$$

Różniczkując (II), otrzymamy:

$$(6) \quad \dot{x} = v = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad \ddot{x} = p = -\frac{4a\pi^2}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Na mocy (II) i (6) możemy ułożyć następującą tabelkę, podającą położenie, prędkość i przyspieszenie punktu dla $t = 0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T$ i T :

t	0	$\frac{1}{4}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{3}{4}T$	T
x	0	a	0	$-a$	0
v	$2a\pi/T$	0	$-2a\pi/T$	0	$2a\pi/T$
p	0	$-4a\pi^2/T^2$	0	$4a\pi^2/T^2$	0

Z tabelki tej widzimy, że w ciągu okresu T punkt porusza się od początku układu O do punktu $x = a$, następnie wraca przez punkt O i dochodzi do punktu $x = -a$, następnie powraca do O i t. d. Największa prędkość jest w O , natomiast na krańcach toru (t. j. w punktach $x = \pm a$) prędkość jest zerem. Przyspieszenie zaś jest największe na krańcach, t. j. dla $x = \pm a$; w O przyspieszenie jest zerem.

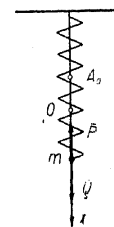
Przykład. W dolnym końcu sprężyny zawieszonej pionowo przyczepiona jest kulka o masie m . Niech O oznacza punkt w którym jest ona w spoczynku (w równowadze). Jeżeli kulkę odchylimy wzdłuż linii pionowej od położenia równowagi, to kulka zacznie się wahać pionowo. Jeżeli masa sprężyny jest mała, to możemy w przybliżeniu przyjąć, że sprężyna działa na kulkę z siłą $\bar{P}$ proporcjonalną do wydłużenia (wzgl. skrócenia) i skierowaną stałe ku punktowi A_0 , w którym znajdował się koniec sprężyny nierozciągniętej przed zawieszeniem kulki.

Obierzmy w punkcie O początek osi x , skierowanej pionowo w dół. Kładąc $A_0O = d$, otrzymamy

$$P = -\lambda^2(x + d),$$

gdzie λ jest liczbą stałą, zależną od sprężyny. Ponieważ w O kulka jest w równowadze i $P = -\lambda^2 d$ (bo $x = 0$), zatem $-\lambda^2 d + mg = 0$, skąd $\lambda^2 = mg/d$. Podczas ruchu jest $m\ddot{x} = P + mg = -\lambda^2(x + d) + mg$, więc $m\ddot{x} + \lambda^2 x = 0$ czyli $\ddot{x} + k^2 x = 0$, gdzie

$$k^2 = \lambda^2/m = g/d.$$



Na mocy (1), str. 112, rozwiązaniem powyższego równania jest $x = a \sin kt$, zatem

$$x = a \sin \sqrt{\frac{g}{d}} t.$$

Kulka będzie więc odbywała ruch harmoniczny prosty około punktu O . Na mocy (5) okres ruchu wynosi

$$T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{d/g} = 2\pi\sqrt{m/\lambda}.$$

Okres ruchu zależy więc od masy punktu.

Ruch harmoniczny płaski. Niechaj punkt porusza się w polu sił środkowym, w którym siła P ma zwrot ku środkowi pola i jest (co do wielkości) proporcjonalna do odległości punktu od środka.

Obierzmy w środku pola początek O układu współrzędnych. Ponieważ ruch środkowy jest ruchem płaskim, więc możemy przyjąć, że odbywa się w płaszczyźnie xy .

Według prawa Newtona jest $mp = \bar{P}$, gdzie p oznacza przyspieszenie punktu. Przyspieszenie ma więc zwrot ku środkowi pola i jest (co do wielkości) proporcjonalne do odległości punktu od środka.

Ruch mający tę własność nazywamy ruchem *harmonicznym płaskim*, a siłę $\bar{P}$ siłą *sprężystą* (por. str. 111).

Na mocy założenia mamy

$$P_x = -\lambda^2 x \quad \text{i} \quad P_y = -\lambda^2 y,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Równania ruchu będą miały postać

$$m\ddot{x} = -\lambda^2 x, \quad m\ddot{y} = -\lambda^2 y.$$

Kładąc, jak poprzednio $k^2 = \lambda^2/m$, otrzymamy

$$(7) \quad \ddot{x} = -k^2 x, \quad \ddot{y} = -k^2 y.$$

Na str. 112, wzór (4), wykazaliśmy, że rozwiązaniem powyższych równań jest:

$$(8) \quad x = a' \sin k(t - t_0), \quad y = a'' \sin k(t - t_0'),$$

gdzie a' , a'' , t_0 , t_0' są dowolnymi stałymi.

Jak łatwo sprawdzić, ruch ten jest również ruchem okresowym w okresie $T = 2\pi/k$.



Z równań (8) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a''x \cos kt_0' - a'y \cos kt_0 &= a'a'' \cos kt \sin k(t_0' - t_0), \\ a''x \sin kt_0' - a'y \sin kt_0 &= a'a'' \sin kt \sin k(t_0' - t_0). \end{aligned}$$

Podnosząc do kwadratu i dodając stronami, otrzymamy

$$(9) \quad a''^2 x^2 + a'^2 y^2 - 2a'a''xy \cos k(t_0' - t_0) = [a'a'' \sin k(t_0' - t_0)]^2.$$

Jeżeli $a' = 0$, lub $a'' = 0$, lub $t_0' - t_0 = n\pi/k$ (gdzie n całkowite), to równanie (9) jest równaniem linii prostej. W pozostałych przypadkach (9) jest równaniem elipsy, której środek leży w początku układu.

A więc: *ruch harmoniczny płaski odbywa się po prostej, przechodzącej przez środek pola, lub po elipsie, której środek leży w środku pola.*

Ruch harmoniczny płaski, odbywający się po prostej, jest oczywiście ruchem harmonicznym prostym.

Ruch harmoniczny tłumiony. Niech na punkt materialny, poruszający się po osi x , działa oprócz siły sprężystej $\bar{P}$ (t. j. proporcjonalnej do odległości od środka i skierowanej ku środkowi), jeszcze siła $\bar{Q}$ (*tłumiąca* czyli hamująca ruch), co do wielkości proporcjonalna do prędkości, lecz wprost przeciwnie skierowana niż prędkość.

Ruch, jaki punkt będzie wówczas wykonywał, nazywamy ruchem *harmonicznym tłumionym*.

Oznaczając przez P i Q współrzędne sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$, możemy napisać:

$$(10) \quad P = -\lambda^2 x \quad \text{i} \quad Q = -2\mu\dot{x},$$

gdzie λ^2 i $\mu > 0$ są współczynnikami proporcjonalności. Zatem $m\ddot{x} = -\lambda^2 x - 2\mu\dot{x}$. Kładąc

$$(11) \quad \lambda^2/m = k^2 \quad \text{i} \quad \mu/m = \varepsilon,$$

otrzymamy więc

$$(IV) \quad \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2x = 0.$$

Równanie (IV) jest równaniem liniowym o współczynnikach stałych rzędu drugiego. Jego równaniem charakterystycznym jest

$$(12) \quad r^2 + 2\varepsilon r + k^2 = 0,$$

skąd

$$(13) \quad r_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Rozpatrzmy tu trzy przypadki, zależnie od tego czy wyróżnik $\varepsilon^2 - k^2$ jest ujemny, dodatni czy równy zero.

1°. $\varepsilon^2 - k^2 < 0$. Przypadek ten występuje, gdy r jest małe, t. j. gdy siła hamująca $\tilde{Q}$ jest mała. Położmy

$$(14) \quad \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = k_1.$$

Zatem, na mocy (13) $r_{1,2} = -\varepsilon \pm ik_1 t$. Rozwiązaniem ogólnym równania (IV) jest więc w tym przypadku

$$x = e^{-\varepsilon t} (c_1 \sin k_1 t + c_2 \cos k_1 t).$$

Pisząc stałe c_1, c_2 , w postaci $c_1 = A \cos k_1 t_0$ i $c_2 = -A \sin k_1 t_0$, gdzie $A > 0$ i t_0 są dowolnymi stałymi, otrzymamy

$$(15) \quad x = A e^{-\varepsilon t} \sin k_1 (t - t_0).$$

Obierzmy, jako nowy początek czasu, chwilę t_0 ; podstawmy zatem $t - t_0 = t'$. Dostaniemy $x = A e^{-\varepsilon(t'+t_0)} \sin k_1 t'$; pisząc z powrotem t zamiast t' i kładąc $A e^{-\varepsilon t_0} = a$, otrzymamy

$$(V) \quad x = a e^{-\varepsilon t} \sin k_1 t, \text{ gdzie } a > 0.$$

Wykres powyższej funkcji podany jest na rysunku. Aby wyznaczyć ekstrema tej funkcji, należy obliczyć miejsca zerowe pochodnej $\dot{x} = a e^{-\varepsilon t} (k_1 \cos k_1 t - \varepsilon \sin k_1 t)$. Będzie więc $\dot{x} = 0$ dla tych wartości t , dla których

$$(16) \quad \operatorname{tg} k_1 t = k_1 / \varepsilon.$$

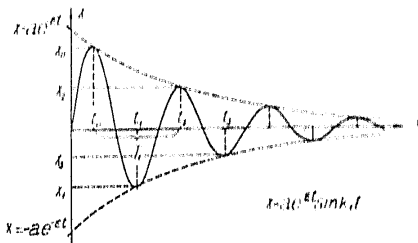
Jeżeli t_0 jest najmniejszym pierwiastkiem dodatnim równania (16), to pozostałe pierwiastki mają postać

$$(17) \quad t_n = t_0 + n\pi/k_1,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Badając znak drugiej pochodnej, stwierdzamy, że maximum występuje dla n parzystych, a minimum dla n nieparzystych. Wynika stąd, że w chwilach t_n pochodna $\dot{x}$ zmienia znak, a więc prędkość zmienia zwrot.

Chwile t_n nazywamy *chwilami zwrotu*, odpowiednie zaś położenia poruszającego się punktu — *punktami zwrotu*.

Punkty zwrotu wypadają okresowo co π/k_1 sek, i to kolejno, raz na prawo, raz na lewo od początku O .



Czas $T_1 = 2\pi/k_1$ nazywamy jak wprzód *okresem ruchu*.

Czas $\frac{1}{2} T_1 = \pi/k_1$ między dwiema chwilami zwrotu nazywa się *okresem drgania*.

Na mocy (17) mamy więc

$$(18) \quad t_n = t_0 + \frac{1}{2} n T_1.$$

Weźmy pod uwagę dwa po sobie następujące punkty zwrotu x_n, x_{n+1} , odpowiadające chwilom t_n, t_{n+1} . Na mocy (V) i (18) jest:

$$|x_n| = a e^{-\varepsilon(t_0 + \frac{1}{2} n T_1)} |\sin k_1 t_0|, \quad |x_{n+1}| = a e^{-\varepsilon(t_0 + \frac{1}{2} (n+1) T_1)} |\sin k_1 t_0|,$$

skąd

$$|x_{n+1}|/|x_n| = e^{-\frac{1}{2} \varepsilon T_1}.$$

Wynika stąd, że współrzędne x_n maleją do zera (co do modułu) według postępu geometrycznego.

A więc: jeżeli siła hamująca jest mała, to maksymalne odchylenia punktu następują po sobie w równych odstępach czasu (okres drgania) i maleją do zera według postępu geometrycznego.

2°. $\varepsilon^2 - k^2 > 0$. Przypadek ten występuje gdy siła tłumiąca jest duża. Łatwo stwierdzić, że pierwiastki równania charakterystycznego (13) są w tym przypadku ujemne. Oznaczając je przez $-\varrho_1$ i $-\varrho_2$, otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (IV) w postaci

$$(VI) \quad x = A e^{-\varrho_1 t} + B e^{-\varrho_2 t},$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi oraz $\varrho_1 > 0$ i $\varrho_2 > 0$.

Gdy czas t wzrasta, to x szybko dąży do zera. Nie trudno, sprawdzić, że istnieje co najwyżej jeden punkt zwrotu. Prędkość jest więc co najwyżej raz tylko zerem.

3°. $\varepsilon^2 - k^2 = 0$. Przy tym założeniu równanie charakterystyczne (13) ma pierwiastek podwójny $-\varepsilon$. Rozwiązanie ogólne równania (IV) ma postać

$$(VII) \quad x = e^{-\varepsilon t} (At + B),$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.

Gdy czas wzrasta, x dąży szybko do zera. Podobnie jak poprzednio, istnieje co najwyżej jeden punkt zwrotu, a więc prędkość staje się zerem co najwyżej raz tylko.

Ruch harmoniczny wymuszony. Niech na punkt materialny, poruszający się po osi x , działa oprócz siły sprężystej P i tłumiącej Q jeszcze siła R , skierowana wzdłuż osi x i zależna tylko od czasu.

Współrzędna siły $\bar{R}$ będzie więc

$$R = m\omega f(t),$$

gdzie ω jest stałe.

Przypuśćmy, że siła $\bar{R}$ jest periodyczna, np. że

$$(19) \quad R = m\omega \sin(at + \beta),$$

gdzie a i β są stałe. Równanie ruchu ma więc postać (por. (IV), str. 115):

$$(20) \quad \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2x = \omega \sin(at + \beta),$$

gdzie znaczenie stałych ε i k jest takie same jak poprzednio. Aby otrzymać rozwiązanie ogólne równania (20), wyznaczamy jedno szczególne postaci

$$(21) \quad x = b \sin(at + \gamma).$$

W celu wyznaczenia stałych b i γ , podstawmy (21) w (20). Dostaniemy

$$(22) \quad (k^2 - a^2)b \sin(at + \gamma) + 2a\varepsilon b \cos(at + \gamma) = \omega \sin(at + \beta).$$

Kładąc raz $at + \gamma = 0$, drugi raz $at + \gamma = \pi/2$, dostaniemy

$$(23) \quad 2a\varepsilon b = \omega \sin(\beta - \gamma), \quad (k^2 - a^2)b = \omega \cos(\beta - \gamma),$$

skąd

$$(24) \quad b^2 = \frac{\omega^2}{(k^2 - a^2)^2 + 4a^2\varepsilon^2}, \quad \tan(\beta - \gamma) = \frac{2a\varepsilon}{k^2 - a^2},$$

a z równości tych wyznaczamy już b i γ .

Opierając się na (24), łatwo stwierdzić, że funkcja (21) spełnia równanie (20) tożsamościowo dla każdego t .

Rozpatrzmy przypadek $\varepsilon^2 - k^2 < 0$. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2x = 0$ podaje wzór (15), str. 116. Zatem ogólnym rozwiązaniem równania (20) jest

$$(25) \quad x = Ae^{-\varepsilon t} \sin k_1(t - t_0) + b \sin(at + \gamma), \quad \text{gdzie } k_1 = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}.$$

Gdy t wzrasta, pierwszy składnik dąży szybko do zera i ruch staje się w przybliżeniu harmoniczny o równaniu

$$x = b \sin(at + \gamma).$$

Amplitudą tego ruchu jest b . Siła $\bar{R}$ jest siłą periodyczną o okresie $T' = 2\pi/a$. Okres ruchu harmonicznego tłumionego wynosi $T_1 = 2\pi/k_1$. Przypuśćmy, że okresy T' i T_1 mało się różnią od siebie, czyli że a mało się różni od k_1 . Jeżeli siła tłumiąca jest mała, to ε jest małe, więc $k_1 = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$ mało się różni od k . Zatem i k mało się będzie różniło od a . Na mocy więc (24) może być b wielkie nawet wówczas, gdy ω jest małe (t. zn. gdy siła $\bar{R}$ jest mała).

Widzimy stąd, że małą siłą periodyczną, o okresie zbliżonym do okresu ruchu, możemy wywołać wielkie odchylenia punktu od środka, gdy siła tłumiąca jest mała.

Oddział żołnierzy, przechodzących przez most krokiem miarowym, wywołuje drgania (własne) mostu. Jeżeli okresy kroków i drgania mostu mało się różnią od siebie, to odchylenia mostu mogą stać się szybko tak duże, że most się załamie. Podobnie gdy automobil doznaje na złej drodze wstrząsów, drobnych nawet, ale których okres jest zbliżony do okresu drgań (własnych) jego resorów, to wahania mogą stać się tak wielkie, że resor pęknie.

Krzywe Lissajous. Niech na punkt materialny działa siła $\bar{P}$, której rzuty na osie układu są (co do wielkości) proporcjonalne do współrzędnych punktu i skierowane ku początkowi układu. Możemy więc przyjąć, że:

$$P_x = -\lambda_1^2 x, \quad P_y = -\lambda_2^2 y, \quad P_z = -\lambda_3^2 z,$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są stałe. Równania ruchu mają postać:

$$m\ddot{x} = -\lambda_1^2 x, \quad m\ddot{y} = -\lambda_2^2 y, \quad m\ddot{z} = -\lambda_3^2 z.$$

Kładąc $\lambda_1^2/m = k_1^2$, $\lambda_2^2/m = k_2^2$ i $\lambda_3^2/m = k_3^2$, otrzymamy więc:

$$(26) \quad \ddot{x} = -k_1^2 x, \quad \ddot{y} = -k_2^2 y, \quad \ddot{z} = -k_3^2 z.$$

Rozwiązaniami powyższych równań (por. str. 112, wzór (4)) są funkcje:

$$(27) \quad x = a_1 \sin k_1(t - t'_0), \quad y = a_2 \sin k_2(t - t''_0), \quad z = a_3 \sin k_3(t - t'''_0).$$

Okresy tych funkcji wynoszą (str. 112, wzór (5)):

$$(28) \quad T_1 = 2\pi/k_1, \quad T_2 = 2\pi/k_2, \quad T_3 = 2\pi/k_3.$$

Jeżeli ruch jest okresowy o okresie T , to ilorazy $T:T_1$, $T:T_2$, $T:T_3$ muszą być liczbami całkowitymi. Zatem ilorazy $T_1:T_2$, $T_1:T_3$ i $T_2:T_3$ (lub ze względu na (28) ilorazy $k_2:k_1$, $k_3:k_1$ i $k_3:k_2$) muszą być liczbami wymiernymi. Jeżeli więc nie wszystkie te ilorazy są liczbami wymiernymi, to ruch nie jest ruchem okresowym.

W przypadku ruchu na płaszczyźnie, toru ruchu określonego równaniami (27) nosząc nazwę *krzywych Lissajous*; odgrywają one ważną rolę w akustyce.

Przykład. Ruch odbywa się w płaszczyźnie xy . Niech $k_2:k_1=2$ i $t'_0=t''_0=0$.

Kładąc $k_1=k$ i $k_2=2k$, otrzymamy zatem na mocy (27):

$$x = a_1 \sin kt \quad \text{ i } \quad y = a_2 \sin 2kt.$$

Ponieważ $y=2a_2 \sin kt \cos kt$, więc $\sin kt = x/a_1$ i $\cos kt = a_1 y / 2a_2 x$, skąd $(x/a_1)^2 + (a_1 y / 2a_2 x)^2 = 1$, czyli

$$4a_2^2 x^4 - 4a_1^2 a_2^2 x^2 + a_1^4 y^2 = 0.$$

Tor będzie więc krzywą rzędu czwartego.

§ 16. Warunki równowagi w polu sił. Jeżeli w pewnym polu sił punkt materialny jest w punkcie A w równowadze, to oczywiście siła $\vec{P}$ działająca w A równa się zeru. Na odwrót, jeżeli w pewnym punkcie $A(x_0, y_0, z_0)$ pola, siła $\vec{P}=0$, to punkt materialny umieszczony w A w chwili $t=t_0$ bez prędkości początkowej (t. zn. $\vec{v}_0=0$) pozostanie stale w spoczynku t. j. w równowadze. Wynika to stąd, że warunki początkowe wyznaczają ruch jednoznacznie, a spoczynek (t. j. ruch określony równaniami $x=x_0, y=y_0, z=z_0$) spełnia warunki początkowe i równanie $m\vec{p}=\vec{P}$; mamy bowiem stale $\vec{p}=0$ i $\vec{P}=0$.

W polu potencjalnym pochodne cząstkowe potencjału V równe są, jak wiemy, rzutom siły na osie układu (§ 11, str. 100). Jeżeli więc punkt A jest położeniem równowagi, wówczas w punkcie A :

$$(1) \quad \partial V / \partial x = 0, \quad \partial V / \partial y = 0, \quad \partial V / \partial z = 0.$$

Równania powyższe zachodzą w szczególności w tych punktach, w których występują maxima lub minima potencjału.

A więc: *punkty, w których występują ekstrema potencjału, są położeniami równowagi.*

Położenia równowagi mogą jednak występować również w takich punktach, w których potencjał nie ma ekstremum; równania (1) przedstawiają bowiem tylko warunki konieczne istnienia ekstremum.

Równowaga stała. Niech w polu sił punkt materialny znajduje się w równowadze w punkcie A .

Powiadamy, że *równowaga jest stała*, jeżeli punkt materialny po małym przesunięciu z punktu A i po otrzymaniu małej energii kinetycznej początkowej, będzie poruszał się stale w niewielkiej odległości od A i posiadał stale małą energię kinetyczną. Ścisłej mówiąc, równowaga w A jest stała, jeżeli do każdych dwu liczb $R>0$ i $\varepsilon>0$ można dobrać takie liczby $R_0>0$ i $\varepsilon_0>0$, że punkt materialny, znajdujący się gdziekolwiek w odległości mniejszej niż R_0 od A , będzie po otrzymaniu energii kinetycznej początkowej mniejszej niż ε_0 poruszał się w odległości od A stale mniejszej niż R i posiadał energię kinetyczną stale mniejszą niż ε .

Jeżeli równowaga w punkcie A nie jest stała, mówimy, że w punkcie tym jest *równowaga niestała*.

Twierdzenie Dirichleta. *W polu potencjalnym punkt, w którym potencjał osiąga maximum właściwe, jest położeniem równowagi stałej.*

Dowód. Niech w pewnym polu potencjalnym potencjał V osiąga maximum właściwe w punkcie A (mówi się, że funkcja osiąga w punkcie A *maximum właściwe*, jeżeli w pewnym otoczeniu tego punktu największą wartość przyjmuje tylko w punkcie A).

Żałóży, że w punkcie A potencjał ma wartość 0; możemy to zawsze uzyskać przez dodanie odpowiedniej stałej, ponieważ potencjał określony jest tylko z dokładnością do pewnej stałej (str. 99).

Weźmy dowolne $R>0$ i $\varepsilon>0$. Bez szkody dla ogólności do wodu możemy też obrać R tak małe, by w kuli K o środku A i promieniu R potencjał był wszędzie po za A ujemny. Oznaczmy przez L maksimum potencjału na powierzchni kuli K ; zatem $L<0$.

Niech teraz ε_0 będzie dowolną liczbą, spełniającą nierówności:

$$(2) \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \varepsilon_0 < -\frac{1}{2}L, \quad \varepsilon_0 < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ponieważ w A potencjał jest zerem, więc istnieje taka kula K_0 o środku A i promieniu $R_0 < R$, że

$$(3) \quad -\varepsilon_0 < V \leq 0 \quad \text{ w kuli } K_0.$$

Umieścimy punkt materialny gdziekolwiek w odległości $< R_0$ od A (t. j. w kuli K_0) i nadajmy mu energię kinetyczną początkową

$$(4) \quad E_0 < \varepsilon_0.$$

Na mocy (5), str. 106, jest podczas ruchu stale

$$(5) \quad E - V = E_0 - V_0.$$

Ponieważ na mocy (3) jest $\varepsilon_0 < V_0$, więc wobec (5) i (4) jest

$$(6) \quad E - V < 2\varepsilon_0.$$

Z uwagi na to, że $E \geq 0$, otrzymujemy $-V < 2\varepsilon_0$, skąd na mocy (2) $-V < -L$, czyli $V > L$. A więc punkt materialny nigdy nie przekroczy powierzchni kuli K (bo potencjał na niej jest $\leq L$); ruch jego będzie się tedy odbywał wewnątrz kuli K , t. j. w odległości od A mniejszej niż R . Ponieważ ponadto w kuli K jest stale $V \leq 0$, czyli $-V \geq 0$, więc na mocy (6) jest $E < 2\varepsilon_0$, skąd na mocy (1) $E < \varepsilon$. A więc w A jest równowaga stała, c. b. d. d.

Przykład. Weźmy pod uwagę pole sił, w którym $P_x = -k^2x$, $P_y = -k^2y$, $P_z = -k^2z$. Pole to jest więc polem potencjalnym o potencjale $V = -\frac{1}{2}k^2r^2$, gdzie $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Punkt $A(0,0,0)$ jest położeniem równowagi stałej, bo w punkcie tym potencjał osiąga wartość największą 0, a poza tym jest ujemny. Stałość równowagi w A udowodnimy teraz bezpośrednio.

Niech dane będą dowolne liczby $R > 0$ i $\varepsilon > 0$. Umieścimy punkt materialny w odległości r_0 od A i nadajmy mu energię kinetyczną E . Zatem $E + \frac{1}{2}k^2r^2 = E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2$, skąd

$$(7) \quad E \leq E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2.$$

Ponadto $\frac{1}{2}k^2r^2 \leq E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2$ czyli

$$(8) \quad r \leq \sqrt{\frac{2}{k^2} E_0 + r_0^2}.$$

Jeżeli więc dobierzemy ε_0 i R_0 tak, by było równocześnie

$$\varepsilon_0 + \frac{1}{2}k^2R_0^2 < \varepsilon \quad \text{ i } \quad \sqrt{\frac{2}{k^2} \varepsilon_0 + R_0^2} < R,$$

to otrzymamy dla wszelkich $E_0 < \varepsilon_0$ i $r_0 < R_0$ na mocy (7) i (8) $E < \varepsilon$ i $r < R$. Udowodniliśmy więc, że równowaga w A jest stała.

II Dynamika punktu nieswobodnego.

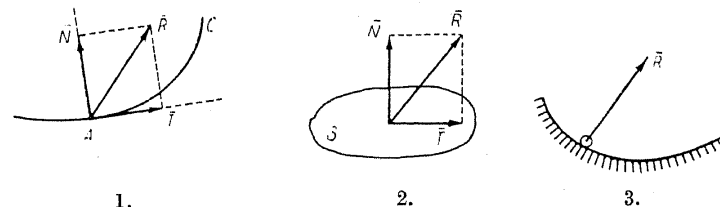
§ 17. Równania ruchu. Dotychczas badaliśmy ruch punktu materialnego *swobodnego*, t. j. takiego, który mógł wykonywać dowolne ruchy przy odpowiednich siłach. Spotykamy się jednak również z zagadnieniami, w których ruchy punktu podlegają pewnym ograniczeniom, takim np., że punkt musi stale pozostawać na pewnej linii, powierzchni i t. p.

Przykład. Wyobraźmy sobie, że drobna kulka nawleczona jest na sztywny drut (np. w kształcie koła). Jakimkolwiek siłami działalibyśmy na kulkę, będzie ona mogła wykonywać jedynie takie ruchy, przy których pozostanie stale na drucie. Zagadnienie sprowadza się więc w tym przypadku do badania ruchu punktu materialnego, który ma pozostawać stale na pewnej linii.

Punkt taki nazywamy *nieswobodnym*, a warunki ograniczające, jakim muszą czynić zadość ruchy punktu nieswobodnego, nazywamy *więzami*.

Reakcja. Przy rozpatrywaniu ruchu punktów nieswobodnych będziemy zakładali, że na punkt nieswobodny działa (oprócz danych sił) pewna dodatkowa siła, która sprawia, że punkt zachowuje więzy. Tę dodatkową siłę nazywamy *reakcją* (oddziaływaniem).

Reakcję przypisujemy działaniu na punkt materialny ciał wywołujących więzy. Reakcją drutu jest więc np. siła, z jaką drut przeciwstawia się porzuceniu go przez nawleczoną na niego kulkę.



Niech punkt materialny nieswobodny A ma pozostawać stale na krzywej C (rys. 1). Niech reakcja w pewnym położeniu punktu A będzie $\vec{R}$. Składową $\vec{N}$ reakcji, prostopadłą do stycznej, nazywamy *reakcją normalną*, składową $\vec{T}$ styczną nazywamy *reakcją styczną* lub *tarciem*.

Podobnie, jeżeli punkt ma pozostawać stale na pewnej powierzchni S (rys. 2), to składową reakcji prostopadłą do powierzchni S nazywamy *reakcją normalną*, składową zaś styczną *reakcją styczną* lub *tarciem*.

Niektóre więc zakładamy, że nie ma tarcia, to przyjmujemy tym samym, że reakcja jest prostopadła do krzywej (powierzchni). Gdy nie ma tarcia, mówimy też, że krzywa (powierzchnia) jest *gładka*.

Jeżeli o punkcie A , leżącym po pewnej stronie powierzchni, zakładamy tylko, że nie może przejść na drugą jej stronę (choć może porzucić tę powierzchnię), to reakcję uważamy za skierowaną w tę stronę powierzchni, z której znajduje się punkt (str. 123, rys. 3).

Gdy np. kulka leży na stole, wówczas reakcja stołu skierowana jest ku górze.

Równania ruchu. Reakcję określiliśmy jako siłę dodatkową, która sprawia, że punkt nieswobodny zachowuje więzy. Jeżeli więc do siły działającej $\vec{P}$ dodamy reakcję $\vec{R}$, to będziemy mogli uważać punkt materialny za punkt swobodny. Oznaczając przez m masę, a przez $\vec{p}$ przyspieszenie punktu, otrzymamy więc

$$(I) \quad m\vec{p} = \vec{P} + \vec{R}.$$

W ten sposób badanie ruchu punktu nieswobodnego sprowadzamy do badania ruchu punktu swobodnego. Jeżeli o reakcji $\vec{R}$ przyjmiemy jeszcze pewne założenia specjalne, np. że nie ma tarcia, to (jak okażemy później) równanie (I) wystarcza do wyznaczenia ruchu.

Przykład. Niech punkt o masie m spada pod wpływem ciężaru $Q = mg$ po płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem α .

Zalóżmy, że nie ma tarcia. Reakcja $\vec{R}$ jest zatem prostopadła do płaszczyzny.

Oznaczając przez p przyspieszenie punktu, mamy na mocy (I) $m\vec{p} = \vec{Q} + \vec{R}$. Tworząc rzuty na płaszczyznę pochyłą i kładąc $p = |p|$, otrzymamy $mp = mg \sin \alpha$, skąd

$$p = g \sin \alpha.$$

Energia kinetyczna. Przyrost energii kinetycznej punktu nieswobodnego równa się sumie prac siły działającej $\vec{P}$ i reakcji $\vec{R}$. Przy założeniu braku tarcia reakcja jest prostopadła do toru, zatem praca reakcji równa się zeru. Wynika stąd, że gdy nie ma tarcia, przyrost energii kinetycznej równa się jedynie pracy wykonanej przez siłę $\vec{P}$.

W szczególności, jeżeli nie ma tarcia, to suma energii kinetycznej i potencjalnej punktu poruszającego się w polu potencjalnym jest stała.

§ 18. Ruch punktu nieswobodnego po krzywej.

Ruch po krzywej płaskiej. Zalóżmy, że punkt A o masie m ma pozostawać na krzywej płaskiej C i że siła $\vec{P}$ działająca na punkt leży w płaszczyźnie krzywej C . Przypuśćmy, że nie ma tarcia, t. zn. że reakcja $\vec{R}$ jest prostopadła do krzywej.

Oznaczając przez $\vec{p}$ przyspieszenie punktu, mamy więc (por. wzór (I), str. 124)

$$(1) \quad m\vec{p} = \vec{P} + \vec{R}.$$

Nadajmy stycznej t zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, a normalnej n zwrot ku środkowi krzywizny (rys. 1). Niechaj p_t, p_n, P_t, P_n będą rzutami przyspieszenia $\vec{p}$ i siły $\vec{P}$ na styczną i normalną zaś R rzutem reakcji $\vec{R}$ na normalną. Z równania (1) otrzymamy, tworząc rzuty na styczną i normalną:

$$(2) \quad mp_t = P_t, \quad mp_n = P_n + R.$$

Niech v oznacza rzut prędkości na styczną, zaś ρ promień krzywizny. Wówczas (str. 41):

$$p_t = \dot{v}, \quad p_n = v^2/\rho,$$

skąd na mocy (2):

$$(I) \quad m\dot{v} = P_t, \quad mv^2/\rho = P_n + R.$$

Pierwsze z równań (I) pozwala wyznaczyć ruch, znając siłę $\vec{P}$ lub jej rzut P_t . Równanie to możemy także napisać w innej jeszcze postaci, mianowicie:

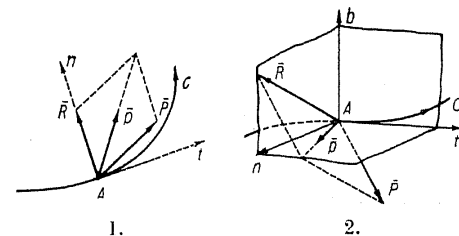
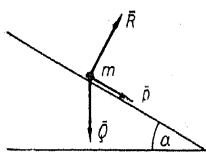
$$(3) \quad m\ddot{s} = P_t,$$

gdzie s oznacza współrzędną łukową na krzywej C .

Drugie z równań (I) pozwala obliczyć reakcję $\vec{R}$, znając prędkość v .

Ruch po krzywej przestrzennej. Zalóżmy, że tor jest krzywą przestrzenną C i że nie ma tarcia.

Nadajmy stycznej t zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, normalnej głównej n zwrot ku środkowi krzywizny, wreszcie binormalnej b zwrot taki, by układ (t, n, b) miał zwrot zgodny z układem współrzędnych (rys. 2).



Utwórzmy rzuty na styczną, na normalną główną i na binormalną. Ponieważ rzut przyspieszenia na binormalną (str. 42) i rzut $\vec{R}$ na styczną są zerami, więc otrzymamy z równania $m\vec{p} = \vec{P} + \vec{R}$:

$$\begin{aligned} m\vec{p}_t &= P_t, & m\vec{p}_n &= P_n + R_n, & 0 &= P_b + R_b, \\ \text{skąd} \\ \text{(II)} \quad m\dot{v} &= P_t, & mv^2/\rho &= P_n + R_n, & P_b + R_b &= 0. \end{aligned}$$

Pierwsze z równań (II) pozwala wyznaczyć ruch, z dwóch zaś pozostałych równań (II) możemy obliczyć składowe R_n i R_b , a więc reakcję $\vec{R}$.

Ruch punktu nieswobodnego ciężkiego. Niech na punkt materialny nieswobodny o masie m działa siła ciężkości. Załóżmy, że nie ma tarcia. Potencjał siły ciężkości wynosi $V = -mgz$ (oś z skierowana pionowo w górę). Na mocy zasady zachowania energii całkowitej otrzymamy więc $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{const.}$ lub po uproszczeniu

$$\text{(III)} \quad v^2 + 2gz = h.$$

Stałą h możemy wyznaczyć, znając prędkość v_0 i współrzędną z_0 w pewnej chwili t_0 . Dostaniemy

$$\text{(4)} \quad h = v_0^2 + 2gz_0, \quad \text{skąd} \quad v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0.$$

Z (III) wynika $2gz \leq h$, zatem $z \leq h/2g$. Maksymalna więc wysokość, na jaką punkt może się wznieść, wynosi

$$\text{(5)} \quad z_{\max} = \frac{1}{2g} h = \frac{1}{2g} v_0^2 + z_0.$$

Jeżeli punkt w ciągu ruchu znajduje się kilka razy na tym samym poziomie $z = z'$, wówczas na mocy (III) mamy $v^2 = h - 2gz'$.

A więc: na jednym i tym samym poziomie punkt ma jedną i tę samą prędkość.

Przykład 1. Punkt spada po krzywej C o równaniu $z = f(x)$, położonej w płaszczyźnie pionowej xz . Załóżmy, że w czasie $t=0$ punkt znajduje się w punkcie $A(x_0, z_0)$ i ma prędkość $\vec{v}_0=0$.

Oznaczając przez s współrzędną łukową, dostaniemy więc na mocy (4), z uwagi na to, że $v = \dot{s}$,

$$s^2 + 2gz = 2gz_0 \quad \text{czyli} \quad s^2 = 2g(z_0 - z).$$

Obierzmy na krzywej C zwrot zgodny z początkowym ruchem punktu (t.j. zwrot ku dołowi). Aż do chwili, gdy punkt mate-

rialny dojdzie do punktu B , położonego na tej samej wysokości co punkt A (rys. 1), mamy $\dot{s} = \sqrt{2g(z_0 - z)}$, więc $ds \sqrt{2g(z_0 - z)} = dt$. Ponieważ $ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$, więc

$$\text{(6)} \quad \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\frac{1 + f'^2(x)}{2g(f(x_0) - f(x))}} dx = t.$$

Wzór powyższy podaje czas, w którym punkt materialny osiągnie punkt D o współrzędnych $x = \xi$, $y = f(\xi)$. Jeżeli x_1 oznacza odciętą punktu B , to dla $x_0 \leq \xi < x_1$ całka (6) ma wartość skończoną, więc czas t jest skończony. Dla $\xi = x_1$ funkcja podcałkowa staje się nieskończoną, bo z założenia $z_0 = f(x_0) = f(x_1)$. W tym przypadku wartość całki może być więc skończona lub nieskończona. Wynika stąd, że punkt materialny może dojść do punktu B lub nie: zależy to będzie od kształtu krzywej C . Łatwo okazać, że jeżeli styczna w punkcie B nie jest pozioma (t. zn. jeżeli $f'(x_1) \neq 0$), wówczas wartość całki (6) jest skończona, więc punkt materialny osiągnie punkt B .

Przykład 2.

Niech punkt zsuwa się w płaszczyźnie pionowej po krzywej C , której część $BEDF$ jest kołem o środku O i promieniu r . Załóżmy, że nie ma tarcia. Załóżmy też, że punkt nie musi stale pozostawać na krzywej C , byleby tylko nie przeszedł na drugą jej stronę; reakcja będzie więc skierowana w tę stronę, po której punkt się znajduje (rys. 2).

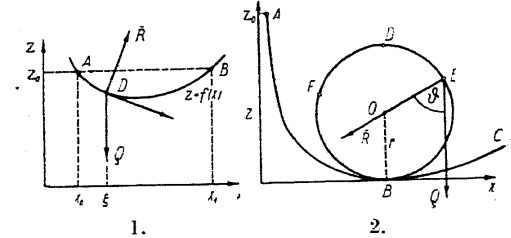
Zapytajmy się, z jakiej wysokości z_0 należy punkt opuścić bez prędkości początkowej, ażeby obiegł okrąg koła $BEDF$.

Obierzmy na kole punkt E dowolnie. Oznaczmy przez v prędkość punktu w E , przez ϑ kąt, jaki tworzy z pionem promień OE . Zatem na mocy (I), str. 125, jest $mv^2/r = mg \cos \vartheta + R$, czyli

$$R = \frac{m}{r} (v^2 - gr \cos \vartheta).$$

Ponieważ $R \geq 0$ (gdyż reakcja musi być skierowana w stronę punktu, t. j. ku środkowi koła), więc

$$\text{(7)} \quad v^2 - gr \cos \vartheta \geq 0.$$



Ponieważ punkt opuścił wysokość z_0 bez prędkości początkowej, więc oznaczając przez z współrzędną punktu E , będziemy mieli $v^2 + 2gz = 2gz_0$. Wyznaczając stąd v^2 i wstawiając w (7), otrzymujemy $2gz_0 - 2gz - gr \cos \vartheta \geq 0$, skąd

$$(8) \quad z_0 \geq z + \frac{1}{2} r \cos \vartheta.$$

Nierówność (8) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, jaki musi spełniać wysokość z_0 , aby punkt obiegł okrąg $BDEF$. Prawa strona tej nierówności osiąga maksymalną wartość w najwyższym punkcie koła, w którym $z = 2r$ i $\vartheta = 0$. Wstawiając te wartości w (8), dostaniemy

$$z_0 \geq 5r/2.$$

Jeżeli więc spuścimy punkt materialny z wysokości $z_0 \geq 5r/2$, to punkt obiegnie koło.

Jeżeli zaś $z_0 < 5r/2$, to w pewnym punkcie koła nasz punkt materialny opuści koło, mianowicie w tym punkcie, w którym, $z_0 = z + \frac{1}{2} r \cos \vartheta$. Gdyby bowiem dalej poruszał się po kole, to, jak łatwo stwierdzić, mielibyśmy $R < 0$, co jest niemożliwe, gdyż to by oznaczało, że punkt jest przyciskany do krzywej. Po opuszczeniu koła punkt będzie spadał oczywiście tylko pod wpływem swego ciężaru.

Przykład 3. Punkt o masie m porusza się pod działaniem siły ciężkości po linii śrubowej

$$(9) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = k\varphi.$$

Mamy

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = r\dot{\varphi} \cos \varphi \quad \text{ i } \quad \dot{z} = k\dot{\varphi},$$

więc $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (r^2 + k^2)\dot{\varphi}^2$, skąd na mocy (III), str. 126, otrzymujemy $(r^2 + k^2)\dot{\varphi}^2 + 2gk\varphi = h$, a zatem $dt/d\varphi = \pm \sqrt{(r^2 + k^2)/h - 2gk\varphi}$ i wreszcie

$$t = \pm \frac{1}{gk} \sqrt{r^2 + k^2} \sqrt{h - 2gk\varphi} + c.$$

Znak po prawej stronie i stała c zależą od warunków początkowych. Wyrażając φ przez t i wstawiając w (9), otrzymamy równania ruchu.

§ 19. Ruch punktu nieswobodnego po powierzchni.

Niech na punkt materialny o masie m działa siła $\vec{P}$. Załóżmy, że punkt ma pozostawać stale na powierzchni S o równaniu

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

i że nie ma tarcia. Reakcja $\vec{R}$ jest więc prostopadła do S . Z geometrii różniczkowej wiadomo, że współczynniki kierunkowe normalnej do powierzchni są proporcjonalne do pochodnych cząstkowych $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$. Ponieważ reakcja $\vec{R}$ ma kierunek normalnej, więc:

$$(2) \quad R_x = \lambda \partial F/\partial x, \quad R_y = \lambda \partial F/\partial y, \quad R_z = \lambda \partial F/\partial z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od czasu. Zatem $\lambda = \lambda(t)$.

Z równania $m\vec{p} = \vec{P} + \vec{R}$ otrzymamy na mocy (2):

$$(I) \quad m\ddot{x} = P_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = P_y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = P_z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Równania (1) i (I) wyznaczają łącznie nieznane funkcje czasu $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ i $\lambda = \lambda(t)$. Po wyznaczeniu tych funkcji możemy reakcję $\vec{R}$ obliczyć z równań (2).

Przykład 1. Punkt ciężki o masie m porusza się po powierzchni walca kołowego (oś z skierowana pionowo w górę)

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Mamy tutaj $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $P_x = 0$, $P_y = 0$ i $P_z = -mg$, więc na mocy (I):

$$(3) \quad m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Trzecie z równań (3) daje po scałkowaniu

$$(4) \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b,$$

gdzie a i b są stałe. Przyjmijmy warunki początkowe dla $t = 0$:

$$(5) \quad x_0 = r, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = u, \quad \dot{z}_0 = w,$$

gdzie u i w oznaczają pewne stałe ($\dot{x}_0 = 0$, gdyż w chwili $t = 0$ prędkość $\vec{v}_0$ jest styczna do walca, więc prostopadła do osi x). Na mocy (4) i (5) dostajemy $b = 0$ i $a = w$, zatem

$$(6) \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + wt.$$

Ponieważ $v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0$, więc $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = u^2 + w^2$, skąd na mocy (6) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (-gt + w)^2 - g^2t^2 + 2wgt = u^2 + w^2$, a zatem

$$(7) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2.$$

A więc rzut punktu na płaszczyznę poziomą porusza się po kole $x^2 + y^2 = r^2$ z prędkością stałą u ; prędkość kątową wynosi więc $\omega = u/r$. Stąd $x = r \cos(ut/r + \varphi_0)$ i $y = r \sin(ut/r + \varphi_0)$. Ponieważ dla $t=0$ jest według (5) $x_0 = r$ i $y_0 = 0$, więc możemy przyjąć $\varphi_0 = 0$. Dostaniemy zatem:

$$(8) \quad x = r \cos \frac{u}{r} t, \quad y = r \sin \frac{u}{r} t.$$

Równania (6) i (8) określają ruch punktu. Czynniki λ otrzymamy z równań (3), wstawiając zamiast $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$ wartości z (8). Dostaniemy $\lambda = -mu^2/2r^2$, skąd na mocy (2):

$$R_x = -\frac{mu^2}{r^2} x, \quad R_y = -\frac{mu^2}{r^2} y, \quad R_z = 0$$

i wreszcie

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{mu^2}{r^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{mu^2}{r}.$$

A więc: reakcja jest stała co do wielkości i zawsze prostopadła do osi walca.

Przykład 2. Punkt o masie m porusza się pod działaniem siły ciężkości po kuli (oś z skierowana pionowo w górę)

$$(9) \quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Na mocy więc (I), str. 129:

$$(10) \quad m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = 2\lambda z - mg.$$

Równania (10) nie dadzą się rozwiązać przy pomocy funkcji elementarnych. Możemy jednak wyprowadzić pewne wnioski, nie rozwiązując tych równań.

Zauważmy, że reakcja $\bar{R}$ jest stale skierowana ku środkowi kuli, a więc, że jej rzut $\bar{R}'$ na płaszczyznę poziomą jest stale skierowany ku początkowi O układu. Rzut $\bar{R}$ jest więc siłą środkową.

Ponieważ rzut siły ciężkości na płaszczyznę poziomą jest zerem, więc oznaczając przez $\bar{p}'$ rzut przyspieszenia punktu na płaszczyznę poziomą, otrzymamy $m\bar{p}' = \bar{R}'$.

Wynika stąd (str. 86), że ruch rzutu będzie ruchem środkowym. Tor rzutu będzie więc albo linią prostą l , przechodzącą przez początek O , albo krzywą C , która nigdy przez początek nie przejdzie (str. 87).

W przypadku pierwszym ruch samego punktu będzie odbywał się w płaszczyźnie pionowej, której śladem jest l ; punkt będzie więc poruszał się po południku. Przypadek ten zajdzie, jeżeli punktowi nadamy prędkość początkową styczną do południka, wtedy bowiem rzut prędkości (na płaszczyznę xy) będzie skierowany ku początkowi O , prędkość połowa rzutu będzie zerem i tor rzutu będzie linią prostą przechodzącą przez środek O .

W przypadku drugim, gdy tor rzutu jest krzywą C nigdy nie przechodzącą przez O , będziemy mieli, oznaczając przez r_0 i r_1 najmniejszą i największą odległość rzutu od O , $r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2$.

Na mocy (9) jest $z^2 = r^2 - (x^2 + y^2)$, więc $r^2 - r_1^2 \leq z^2 \leq r^2 - r_0^2$ czyli

$$\sqrt{r^2 - r_1^2} \leq |z| \leq \sqrt{r^2 - r_0^2}.$$

Wynika stąd, że punkt będzie krążył po kuli między dwiema płaszczyznami poziomymi. Przypadek ten zajdzie, jeżeli prędkość początkowa $\bar{v}_0$ punktu nie będzie styczna do południka; wtedy bowiem rzut prędkości $\bar{v}_0$ na płaszczyznę xy nie będzie skierowany ku O i prędkość połowa rzutu będzie różna od zera.

§ 20. Wahadło matematyczne. Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny m zawieszony w polu ciężkości na nici niematerialnej i nierozciągliwej, utwierdzonej jednym końcem w punkcie S .

Nic działa na punkt materialny tylko wówczas, gdy jest napięta; reakcja $\bar{R}$ jest skierowana wzdłuż nici ku punktowi S . Odległość punktu m od punktu S jest stale nie większa od długości nici l . Punkt może się zatem poruszać wewnątrz i na powierzchni kuli K o środku S i promieniu l .

Jeżeli przy napiętej nici, tworzącej z pionem SO kąt $< \pi/2$ puścimy wolno punkt m (t. j. bez prędkości początkowej), to punkt będzie się poruszał w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez S , po kole o środku O i promieniu l .

Przyjąwszy na kole dowolny zwrot, oznaczmy położenie punktu A (leżącego na dolnej połowie koła) przy pomocy współrzędnej łukowej s , liczonej od najniższego punktu koła O . Oznaczmy przez φ kąt między OS i OA , przyczem znak kąta φ niechaj będzie zgodny ze zwrotem łuku OA . Zatem

$$(1) \quad s = l\varphi.$$

Tworząc rzuty siły ciężkości i reakcji $\vec{R}$ na styczną w punkcie A , otrzymamy $m\ddot{s} = -mg \sin \varphi$, a ponieważ na mocy (1) jest $\dot{s} = l\dot{\varphi}$, więc $ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$, a więc

$$(I) \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Przyjmijmy, że w chwili początkowej $t=0$ mieliśmy $\varphi = \varphi_0 > 0$. W ciągu całego ruchu będzie oczywiście $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, gdyż punkt nie może się wzniesić do położenia wyższego niż początkowe.

Jeżeli φ_0 jest dość małe, wówczas z wielkim przybliżeniem możemy przyjąć $\varphi = \sin \varphi$. Zatem na mocy (I) otrzymamy $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$, a ponieważ według (1) jest $\varphi = s/l$, więc

$$(2) \quad \ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0.$$

Porównując równanie (2) z równaniem ruchu harmonicznego (str. 112), widzimy, że punkt będzie poruszał się ruchem harmonicznym. Okres ruchu w myśl (5), str. 112, i z uwagi, że $k = \sqrt{g/l}$, wynosi

$$(3) \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Wzór (3) jest wzorem przybliżonym, wyprowadzonym przy założeniu, że kąt φ_0 jest mały. Ciekawem jest, że *okres T nie zależy od kąta wychylenia φ_0* .

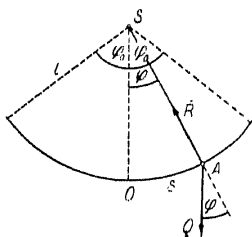
Odrzućmy teraz założenie, że kąt φ_0 jest mały. Pomnożmy obie strony równania (I) przez $\dot{\varphi}$ i scałkujmy. Otrzymamy:

$$(4) \quad \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} \cos \varphi + c.$$

Dla $t=0$ jest $\varphi = \varphi_0$ i $\dot{s} = 0$; zatem na mocy (1) jest $\dot{\varphi} = 0$. Z równania (4) dla $t=0$ dostaniemy $0 = \frac{g}{l} \cos \varphi_0 + c$ czyli $c = -\frac{g}{l} \cos \varphi_0$, a więc $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ czyli

$$(5) \quad \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

Przypuśćmy, że badamy ruch punktu od chwili początkowej $t=0$ do chwili, w której osiągnął on to samo wzniesienie po



przeciwniej stronie prostej OS . Zatem $\dot{\varphi} \leq 0$, a więc wobec (5) będzie

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}, \quad \text{skąd} \quad -\sqrt{\frac{l}{2g} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)} d\varphi = dt.$$

Oznaczając przez T okres wahan, otrzymamy

$$-\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{1}{2} T,$$

zatem

$$(6) \quad T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

Wprowadźmy nową zmienną u , podstawiając $\sin \frac{1}{2}\varphi = \sin u \sin \frac{1}{2}\varphi_0$. Ponieważ $\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2(\sin^2 \frac{1}{2}\varphi - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi_0)$, otrzymamy

$$(7) \quad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \frac{1}{2}\varphi_0}}.$$

Obliczając całkę przy pomocy rozwinięcia w szereg¹⁾, dostaniemy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) + \dots \right].$$

Dla małych φ_0 otrzymujemy wzór (3), pomijając wyrazy szeregu począwszy od drugiego.

§ 21. Równowaga punktu nieswobodnego. Jeżeli punkt nieswobodny jest w równowadze, znaczy to, że siła działająca $\vec{P}$ równoważy się z reakcją $\vec{R}$. Zatem

$$(I) \quad \vec{P} + \vec{R} = 0.$$

Równanie powyższe przedstawia *warunek konieczny równowagi*.

Gdy punkt ma pozostawać na powierzchni i nie ma tarcia, to — jak wiemy — reakcja jest prostopadła do powierzchni. W przypadku więc równowagi siła działająca $\vec{P}$ musi być również prostopadła do powierzchni.

Na odwrót, jeżeli w pewnej chwili t siła $\vec{P}$ jest prostopadła do powierzchni S , a punkt ma prędkość $\vec{v} = 0$, wówczas $\vec{P} + \vec{R} = 0$,

¹⁾ Por. S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. II, Lwów, str. 110.

czyli punkt pozostanie w spoczynku. Przypuśćmy bowiem, że $\bar{P} + \bar{R} \neq 0$; punkt posuwałby się więc po pewnej krzywej C , położonej na powierzchni S . Zauważmy, że w chwili t przyspieszenie normalne jest $p_n = v^2/\rho = 0$. Z równania $m\bar{p} = \bar{P} + \bar{R}$, tworząc rzuty na styczną do C , otrzymamy $mp_t = 0$, gdyż $\bar{P}$ i $\bar{R}$ są prostopadłe do stycznej. Ponieważ $p_n = 0$ i $p_t = 0$, więc $\bar{p} = 0$. Zatem byłoby $\bar{P} + \bar{R} = m\bar{p} = 0$ wbrew założeniu.

A więc: warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi punktu nieswobodnego, mającego pozostawać (bez tarcia) na pewnej powierzchni, jest to, by siła działająca $\bar{P}$ była prostopadła do powierzchni.

To samo odnosi się do linii krzywej.

Równowaga stała. Równowagę stałą określamy dla punktu nieswobodnego podobnie jak dla punktu swobodnego (str. 120), z tą różnicą, że wychylenie z położenia równowagi ma być zgodne z więzami. Punkt będzie więc w równowadze stałej, jeżeli przy małym (i zgodnym z więzami) wychyleniu z położenia równowagi i przy małej energii kinetycznej początkowej punkt ten będzie poruszał się stale w pobliżu położenia równowagi i stale z małą energią kinetyczną.

Równowaga w polu potencjalnym. Niech w polu sił potencjalnym punkt materialny ma pozostawać na pewnej powierzchni S o równaniu $F(x, y, z) = 0$. Załóżmy, że nie ma tarcia.

Jeżeli w pewnym punkcie $A(x, y, z)$ powierzchni S potencjał V osiąga ekstremum ze względu na punkty tej powierzchni, to punkt A jest położeniem równowagi.

W punkcie A występuje bowiem ekstremum funkcji V z warunkiem ubocznym $F(x, y, z) = 0$. Na mocy więc twierdzenia z teorii maximów i minimów istnieje taka liczba λ , że:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Zatem $P_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $P_y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $P_z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Ponieważ zaś $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ są proporcjonalne do współczynników kierunkowych normalnej w A , więc siła $\bar{P}$ ma kierunek normalnej, czyli punkt A jest istotnie położeniem równowagi.

Jeżeli w A występuje maximum właściwe potencjału ze względu na punkty powierzchni S , to punkt A jest położeniem równowagi stałej.

Dowód przebiega podobnie jak na str. 121.

Uwagi powyższe odnoszą się również do przypadku, gdy punkt materialny ma pozostawać na krzywej.

Niech np. punkt ma pozostawać w polu siły ciężkości na powierzchni S o równaniu $z = f(x, y)$ (oś z skierowana pionowo do góry). Położeniami równowagi są te punkty, w których siła ciężkości jest prostopadła do powierzchni, t. j. w których płaszczyzna styczna jest pozioma. Mogą to być punkty najwyższe lub najniższe (ze względu na otoczenie) lub t. zw. punkty siodłowe. Maximum właściwe potencjału $V = -mgz$ występuje w tych punktach, w których funkcja $z = f(x, y)$ osiąga minimum właściwe. W punktach najniższych występuje więc równowaga stała. Punkty A, B są tedy położeniami równowagi stałej; punkt zaś C położeniem równowagi niestalej (p. rysunek).



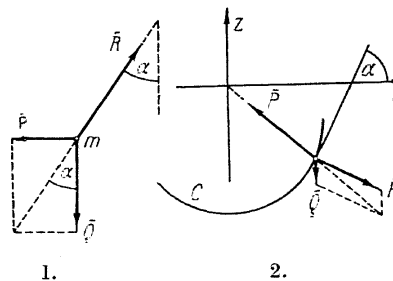
Jeżeli punkt wychylimy z położenia A , np. do A' , i nadamy mu małą prędkość, to będzie on krążył w zagłębieniu koło punktu A z małą prędkością. Jeżeli natomiast punkt wychylimy z położenia C (choćby nieznacznie nawet) do położenia C' , to oczywiście oddali się on od C pod wpływem ciężaru.

Przykład 1. Punkt materialny ciężki, zawieszony na nici tworzącej z pionem kąt α , jest w równowadze pod wpływem siły poziomej $\bar{P}$ (rys. 1). Na punkt działa reakcja nici $\bar{R}$ skierowana wzdłuż nici (ku punktowi zawieszenia), ciężar $\bar{Q}$ i siła $\bar{P}$. Zatem

$$\bar{R} + \bar{Q} + \bar{P} = 0.$$

Kładąc $|\bar{R}| = R$, $|\bar{P}| = P$ i $|\bar{Q}| = mg$, otrzymujemy z trójkąta utworzonego przez siły $\bar{R}$, $\bar{Q}$ i $\bar{P}$

$$P = mg \tan \alpha, \quad R = mg / \cos \alpha.$$



1.

2.

Przykład 2. Na krzywej C o równaniu $z = f(x)$, leżącej w płaszczyźnie ax , znajduje się punkt ciężki, przyciągany ku początkowi układu O z siłą $\bar{P}$, o wielkości proporcjonalnej do odległości punktu od O . W jakim położeniu punkt będzie w równowadze, przy założeniu, że nie ma tarcia?

W położeniu równowagi siła $\bar{P}$, ciężar $\bar{Q}$ i reakcja $\bar{R}$ równoważą się (rys. 2), więc

$$(1) \quad \bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} = 0.$$

Rzuty siły $\bar{P}$ na osie układu wynoszą:

$$(2) \quad P_x = -\lambda^2 x, \quad P_z = -\lambda^2 z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Niechaj α oznacza kąt, jaki w położeniu równowagi styczna tworzy z osią x . Rzutując na styczną, otrzymamy z (1) i (2) $-\lambda^2 x \cos \alpha - \lambda^2 z \sin \alpha - mg \sin \alpha = 0$. Dzieląc przez $\cos \alpha$, dostaniemy z uwagi na to, że $\tan \alpha = z'$

$$(3) \quad \lambda^2 x + \lambda^2 z z' + mg z' = 0.$$

Znając funkcję $z=f(x)$, możemy z równania (3) wyznaczyć współrzędną x położenia równowagi.

Jeżeli np. krzywa C jest parabolą $z=x^2-a$, to na mocy (3) mamy $\lambda^2 x + 2\lambda^2(x^2-a)x + 2mgx = 0$, skąd

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2(2a-1)-2mg}{2\lambda^2}}.$$

Rozwiązania $x_{2,3}$ istnieją przy założeniu, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie.

Zapytajmy teraz: *jaka to jest krzywa, na której punkt jest w każdym położeniu w równowadze?*

Dla krzywej tej równanie (3) musi być spełnione tożsamościowo. Całkując je, otrzymamy $\frac{1}{2}\lambda^2 x^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 z^2 + mgz = \text{const.}$, skąd

$$x^2 + \left(z + \frac{mg}{\lambda^2}\right)^2 = \text{const.}$$

Krzywą taką jest więc dowolne koło o środku w punkcie $(0, -mg/\lambda^2)$.

III. Dynamika ruchu względnego.

§ 22. Prawa ruchu. Przypuśćmy, że badamy ruch punktu materialnego w układzie (x, y, z) , poruszającym się względem układu inercjalnego. Uważając układ inercjalny (p. str. 70) za stały, zaś układ (x, y, z) za ruchomy, otrzymamy (str. 61):

$$(1) \quad \bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u + \bar{p}_c \quad \text{czyli} \quad \bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_c,$$

gdzie $\bar{p}_b, \bar{p}_w, \bar{p}_u, \bar{p}_c$ oznaczają przyspieszenia: bezwzględne, względne, unoszenia i Coriolisa. Mnożąc (1) obustronnie przez masę m danego punktu, dostaniemy

$$(2) \quad m\bar{p}_w = m\bar{p}_b - m\bar{p}_u - m\bar{p}_c.$$

Położmy:

$$(I) \quad \bar{P}_b = m\bar{p}_b, \quad \bar{P}_u = -m\bar{p}_u, \quad \bar{P}_c = -m\bar{p}_c.$$

Ponieważ $\bar{p}_b$ jest przyspieszeniem punktu względem układu inercjalnego, więc $\bar{P}_b$ jest wedle prawa Newtona siłą działającą na dany punkt materialny; nazywamy ją *siłą bezwzględną*. Wektor $\bar{P}_u$ nazywamy *siłą unoszenia* lub *siłą odśrodkową*, a wektor $\bar{P}_c$ siłą *Coriolisa* lub *siłą odśrodkową złożoną*.

Należy zwrócić uwagę na to, że wektory $-m\bar{p}_u$ i $-m\bar{p}_c$ nie przedstawiają żadnych sił, lecz nazwaliśmy je tylko ze względów praktycznych siłami unoszenia i Coriolisa.

Na mocy (2) i (I) jest

$$(II) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u + \bar{P}_c.$$

Według prawa Newtona mamy w układzie inercjalnym $m\bar{p} = \bar{P}$; widzimy, że równanie (II) ma postać podobną.

A więc: *prawa ruchu w układzie ruchomym współrzędnych są takie, jak gdyby układ był układem inercjalnym, pod warunkiem jednak, że do sił działających dodamy siłę unoszenia i siłę Coriolisa.*

Sumę sił: bezwzględnej, unoszenia i Coriolisa nazywamy *siłą względną* i oznaczamy przez $\bar{P}_w$.

Zatem

$$(3) \quad \bar{P}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u + \bar{P}_c.$$

Równanie (II) możemy więc napisać w postaci

$$(III) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_w.$$

Obserwator, będący w spoczynku względem układu ruchomego i przyjmujący go za układ inercjalny, będzie sądził, że siłą działającą na punkt materialny jest właśnie siła względna $\bar{P}_w$. Jeżeli układ rozpoczął ruch w pewnej chwili t_0 , to obserwatorowi będzie się wydawało, że oprócz siły $\bar{P}_b$, działającej poprzednio, zaczęła działać od chwili t_0 nowa siła $\bar{P}_u + \bar{P}_c$. Np. człowiek jadący na karuzeli sądzi, że oprócz siły ciężkości działa na niego jeszcze nowa siła, skierowana od środka ruchu i starająca się zrzucić go z karuzeli (siła odśrodkowa). Dla obserwatora zaś będącego w spoczynku względem układu inercjalnego siły unoszenia i Coriolisa oczywiście nie istnieją.

Jeżeli układ ruchomy porusza się względem pewnego układu inercjalnego ruchem postępowym z prędkością stałą, to $\bar{p}_u = 0$ i $\bar{p}_c = 0$ (p. str. 62); wobec tego $\bar{P}_u = 0$ i $\bar{P}_c = 0$ i na mocy (II)

$$m\bar{p}_w = \bar{P}_b.$$

Do takiego układu ruchomego stosują się zatem prawa Newtona.

A więc: *każdy układ współrzędnych, który porusza się względem układu inercjalnego ruchem postępowym z prędkością stałą, jest równieży układem inercjalnym.*

Widzimy stąd, że prawa mechaniki nigdy nie pozwolą rozstrzygnąć, czy dany układ inercjalny jest w spoczynku czy nie.

Jeżeli ruch punktu materialnego badamy w pewnym układzie odniesienia (x, y, z) , to z równania (III) możemy otrzymać siłę względną $\bar{P}_w$. Jeżeli znamy przytem skądinąd siłę bezwzględną $\bar{P}_b$ i zauważymy, że $\bar{P}_b \neq \bar{P}_w$, to wówczas będziemy mogli stwierdzić, że układ (x, y, z) nie jest układem inercjalnym, więc że porusza się względem każdego układu inercjalnego.

§ 23. Przykłady ruchu. Ruch postępowy układu.

Gdy układ porusza się ruchem postępowym, przyspieszenie Coriolisa jest $\bar{p}_c = 0$ (str. 62), więc siła Coriolisa $\bar{P}_c = 0$. Przyspieszenie unoszenia jest dla wszystkich punktów stałe i równa się przyspieszeniu początku układu (względem układu inercjalnego). Zatem siła unoszenia jest stała. Wynika stąd, że siła unoszenia tworzy pole potencjalne (str. 102). Na mocy (II), str. 137, mamy wówczas

$$(I) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u.$$

Przykład 1. Płaszczyzna pochyła porusza się ze stałym przyspieszeniem poziomym $\bar{a}$. Na płaszczyźnie pochyłej znajduje się punkt ciężki o masie m . Tarcia nie uwzględniamy. Jakie przyspieszenie względem płaszczyzny pochyłej będzie miał punkt m ?

Siłami bezwzględnymi są: ciężar $\bar{Q}$ i reakcja $\bar{R}$, prostopadła do płaszczyzny pochyłej. Siła unoszenia wynosi $-m\bar{a}$. Obierzmy za oś x -ów prostą przecięcia płaszczyzny pochyłej z płaszczyzną pionową, przechodzącą przez m , i nadajmy jej zwrot ku dołowi (rys. 1). Oznaczając przez α kąt, jaki płaszczyzna pochyła tworzy z poziomem, i tworząc rzuty na oś x -ów, otrzymamy z (I)

$$(1) \quad p = g \sin \alpha - a \cos \alpha,$$

gdzie $p = p_{wx}$, zaś $a = |\bar{a}|$. Wiedzimy stąd, że $p > 0$ lub $p < 0$, zależnie od tego czy $a < g \tan \alpha$ czy $a > g \tan \alpha$.

Przykład 2. Układ (x, y, z) porusza się w polu siły ciężkości ruchem postępowym ze stałym przyspieszeniem poziomym $\bar{a}$. Przyjmijmy, że oś z skierowana jest pionowo w górę, zaś oś x ma kierunek przyspieszenia $\bar{a}$, zwrot zaś przeciwny.

Siła unoszenia jest $\bar{P}_u = -m\bar{a}$; kładąc $a = |\bar{a}|$ otrzymamy $P_{ux} = ma$, $P_{uy} = 0$ i $P_{uz} = 0$. Łatwo zauważyć, że siła unoszenia wytwarza pole potencjalne o potencjale $V_u = max$; potencjał siły ciężkości wynosi $V_g = -mgz$. Siła względna wytwarza więc pole o potencjale

$$(2) \quad V = max - mgz.$$

Jeżeli na punkt materialny działa tylko siła ciężkości $\bar{Q}$, to stosując zasadę zachowania energii całkowitej i kładąc $v = |\bar{v}_w|$, otrzymamy na mocy (2) $\frac{1}{2}mv^2 - V = \text{const.}$ czyli

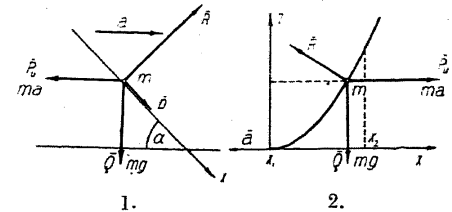
$$(3) \quad v^2 - 2ax + 2gz = h,$$

gdzie h jest pewną stałą.

Przypuśćmy teraz, że badamy ruch punktu nieswobodnego, mającego pozostawać na krzywej leżącej w płaszczyźnie xz o równaniu $z = x^2$ (rys. 2).

Załóżmy, że dla $t = 0$ jest $x = 0$ i $v = 0$. Jeżeli nie uwzględniamy tarcia, to reakcja jest prostopadła do toru i nie wykonuje pracy. Do ruchu stosuje się więc wzór (3). Z warunków początkowych wynika, że $h = 0$, więc $v^2 - 2ax + 2gx^2 = 0$ czyli

$$(4) \quad v^2 = 2x(a - gx).$$



Ponieważ $v^2 \geq 0$, więc $2x(a - gx) \geq 0$; wynika stąd, że $0 \leq x \leq a/g$. Ruch odbywać się więc będzie po łuku zawartym między odciętymi $x_1 = 0$ a $x_2 = a/g$. Ponieważ $v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \dot{x} \sqrt{1 + 4x^2}$, więc na mocy (4) będzie $\dot{x}^2(1 + 4x^2) = 2x(a - gx)$, skąd $\sqrt{\frac{1 + 4x^2}{2x(a - gx)}} dx = dt$, a więc

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{2x(a - gx)}} dx = t.$$

Wzór powyższy ważny jest od chwili $t=0$ aż do chwili gdy punkt osiągnie odcietą $x_2 = a/g$. Dla $x_2 = a/g$ na mocy (4) mamy $v=0$. Następnie odbywać się będzie ruch powrotny aż do chwili, gdy punkt osiągnie odcietą $x=0$ i t. d.

Ruch obrotowy układu. Niech układ (x, y, z) obraca się około osi z z prędkością kątową ω stałą. Przyspieszenie unoszenia ma rzuty:

$p_{u_x} = -x\omega^2$, $p_{u_y} = -y\omega^2$ i $p_{u_z} = 0$. Zatem dla siły unoszenia mamy:

$$P_{u_x} = mx\omega^2, \quad P_{u_y} = my\omega^2, \quad P_{u_z} = 0.$$

Łatwo zauważyć, że siła unoszenia wytwarza pole o potencjale

$$(5) \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Przyspieszenie Coriolisa będzie $\bar{p}_C = 2\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ (str. 63). Ponieważ rzuty prędkości względnej na osie x, y, z wynoszą $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, zaś $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$ i $\omega_z = \omega$, więc będzie $p_{C_x} = 2\dot{y}\omega$, $p_{C_y} = -2\dot{x}\omega$ i $p_{C_z} = 0$, skąd

$$P_{C_x} = -2m\dot{y}\omega, \quad P_{C_y} = 2m\dot{x}\omega, \quad P_{C_z} = 0.$$

Równania ruchu będą więc miały postać (str. 137, wzór (II)):

$$(6) \quad m\ddot{x} = P_{b_x} + mx\omega^2 - 2m\dot{y}\omega, \quad m\ddot{y} = P_{b_y} + my\omega^2 + 2m\dot{x}\omega, \quad m\ddot{z} = P_{b_z}.$$

Pracę siły w ruchu względnym nazywamy *pracą względną*.

Ponieważ $\bar{p}_C$ jest prostopadłe do $\bar{v}_w$, więc $\bar{P}_C$ jest prostopadłe do $\bar{v}_w$; zatem siła Coriolisa nie wykonywa pracy względnej. Praca względna siły względnej sprowadza się więc do pracy siły bezwzględnej i siły unoszenia.

Jeżeli siłą bezwzględną jest siła ciężkości, to przyjmując, że oś z jest skierowana pionowo w górę, otrzymamy jako potencjał siły ciężkości $V_g = -mgz$. Siła ciężkości wraz z siłą unoszenia wytwarza pole potencjalne o potencjale

$$V = -mgz + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Jeżeli więc położymy $v = |\bar{v}_w|$, to na mocy zasady równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 106) dostaniemy

$$\frac{1}{2} m v^2 - V = \text{const.}, \quad \text{więc} \quad \frac{1}{2} m v^2 + mgz - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

czyli

$$(7) \quad v^2 + 2gz - \omega^2 (x^2 + y^2) = h,$$

gdzie h jest stałą.

Jeżeli badamy ruch punktu nieswobodnego po krzywej (lub powierzchni) nieruchomej względem układu (x, y, z) , to przy założeniu, że nie ma tarcia, reakcja nie wykonywa pracy względnej; wzór (7) zachodzi więc również i w tym przypadku.

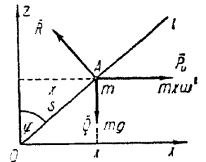
Przykład 3. Krzywa C płaska obraca się około osi pionowej, leżącej w jej płaszczyźnie, ze stałą prędkością kątową ω . Wyznaczyć ruch punktu nieswobodnego poruszającego się po krzywej C pod wpływem siły ciężkości.

Obierzmy za oś obrotu oś z skierowaną pionowo ku górze; za płaszczyznę krzywej C obierzmy płaszczyznę xz . Niechaj krzywa C ma równanie $z = f(x)$. Na mocy (7), wobec $y = 0$, dostaniemy $v^2 + 2gz - \omega^2 x^2 = h$. Zakładając, że dla $t = 0$ jest $x = x_0$, $z = z_0 = f(x_0)$ i $v = 0$, otrzymamy $h = 2gz_0 - \omega^2 x_0^2$. Ponieważ $ds = dx \sqrt{1 + f'^2(x)}$, więc $v = \dot{s} = \dot{x} \sqrt{1 + f'^2(x)}$; zatem

$$(8) \quad \dot{x}^2 (1 + f'^2(x)) + 2gf(x) - \omega^2 x^2 = h.$$

Z równania powyższego możemy wyznaczyć x jako funkcję czasu t .

Przykład 4. Niech w szczególności C (z przykładu poprzedniego) będzie prostą l przechodzącą przez początek układu O i nachyloną do osi z pod kątem φ .



Aby wyznaczyć ruch punktu po prostej l , można by zastosować wzór (8), podstawiając $z = f(x) = x \cot \varphi$. Wyprowadzimy jednak równania ruchu bezpośrednio.

Siła unoszenia jest prostopadła do osi z i wynosi $m\omega^2$. Oznaczmy przez s długość odcinka OA . Ponieważ siła Coriolisa i reakcja są prostopadłe do prostej l , więc rzut siły względnej na l wynosi $-mg \cos \varphi + m\omega^2 \sin \varphi$. Z uwagi na to że $x = s \sin \varphi$, otrzymamy więc

$$m\ddot{s} = -mg \cos \varphi + m\omega^2 \sin^2 \varphi$$

czyli

$$(9) \quad \ddot{s} - s\omega^2 \sin^2 \varphi = -g \cos \varphi.$$

Równanie jednorodne $\ddot{s} - s\omega^2 \sin^2 \varphi = 0$ ma rozwiązanie ogólne postaci $s = ae^{\omega t \sin \varphi} + be^{-\omega t \sin \varphi}$. Ponieważ rozwiązaniem szczególnym równania (9) jest $s = \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}$, więc rozwiązaniem ogólnym tego równania będzie

$$(10) \quad s = ae^{\omega t \sin \varphi} + be^{-\omega t \sin \varphi} + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}.$$

Stałe a i b wyznaczmy z warunków początkowych. Jeżeli w szczególności $\varphi = \pi/2$, czyli prosta l jest osią x -ów, to

$$(11) \quad s = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}.$$

§ 24. Równowaga względna. Jeżeli punkt materialny jest w równowadze (czyli spoczynku) względem układu ruchomego, to przyspieszenie względne jest $\bar{p}_w = 0$, a prędkość względna $\bar{v}_w = 0$. Wynika stąd, że również przyspieszenie Coriolisa jest $\bar{p}_c = 0$, a zatem i siła Coriolisa $\bar{P}_c = 0$. Z równania (II), str. 137, otrzymamy więc

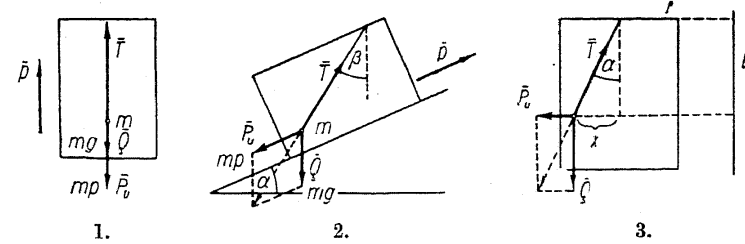
$$(I) \quad \bar{P}_b + \bar{P}_u = 0.$$

A więc: *gdy punkt jest w równowadze względnej, siła bezwzględna równoważy się z siłą unoszenia.*

Równowaga względna w układzie poruszającym się ruchem postępowym. Gdy układ porusza się ruchem postępowym, przyspieszenie unoszenia ma wartość stałą dla wszystkich punktów; stąd i siła unoszenia musi być jednakowa w każdym punkcie.

Jeżeli w szczególności układ ruchomy porusza się ruchem postępowym z prędkością stałą, to $\bar{p}_u = 0$, skąd $\bar{P}_u = 0$ i równanie (I), wyrażające warunek równowagi, sprowadza się do postaci $\bar{P}_b = 0$.

Przykład 1. W windzie, poruszającej się z przyspieszeniem $\bar{p}$, zawieszony jest na nici nierozciągliwej punkt ciężki o masie m . Niechaj nie ma kierunku pionowy i niech punkt pozostaje w równowadze względem windy (t.j. układu związanego z windą). Siły działające, mianowicie ciężar $\bar{Q}$ i napięcie nici $\bar{T}$ znoszą się więc z siłą unoszenia (rys. 1). Położmy $p = |\bar{p}|$ i $T = |\bar{T}|$.



Przyspieszenie unoszenia jest $\bar{p}$. Załóżmy, że jest skierowane w górę. Zatem siła unoszenia jest skierowana w dół i wynosi mp . Tworząc rzuty sił na oś skierowaną pionowo w górę, otrzymamy $T - mg - mp = 0$ czyli $T = mg + mp$. Napięcie nici jest więc większe niż ciężar. Gdybyśmy trzymali ciało w ręce, uczulibyśmy pozorny wzrost ciężaru.

Na odwrót, jeżeli przyspieszenie jest skierowane w dół, to $T = mg - mp$; napięcie nici jest więc mniejsze niż ciężar i ciało w tym przypadku wydaje się lżejsze.

Wreszcie, jeżeli $p = 0$, to $T = mg$. A więc podczas ruchu jednostajnego windy napięcie nici równe jest ciężarowi.

Przykład 2. Wagon kolejki zębatej porusza się z przyspieszeniem $\bar{p}$ po torze nachylonym do poziomu pod kątem α . Punkt materialny, zawieszony na nici nierozciągliwej, znajduje się w równowadze względem wagonu. Niech β oznacza kąt odchylenia nici od pionu.

Ciężar punktu $\bar{Q}$ i napięcie nici $\bar{T}$ równoważą się z siłą unoszenia $\bar{P}_u$ (rys. 2), zatem

$$(1) \quad \bar{T} + \bar{Q} + \bar{P}_u = 0.$$

Przyspieszenie unoszenia jest $\bar{p}$. Załóżmy, że jest skierowane w górę. $\bar{P}_u$ jest więc skierowane w dół i $|\bar{P}_u| = m|\bar{p}|$. Tworząc rzuty na oś poziomą i pionową, otrzymamy z (1):

$$(2) \quad T \sin \beta - mp \cos \alpha = 0, \quad T \cos \beta - mp \sin \alpha - mg = 0,$$

gdzie $T = |\bar{T}|$ i $p = |\bar{p}|$. Z równań (2) otrzymujemy:

$$T = m \sqrt{p^2 + g^2 + 2pg \sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p \cos \alpha}{g + p \sin \alpha}.$$

Gdy w szczególności $\alpha = 0$, t. zn. gdy tor jest poziomy, będzie $T = m \sqrt{p^2 + g^2}$ i $\operatorname{tg} \beta = p/g$. Możemy więc w wagonie kolejowym wyznaczyć z kąta wychylenia nitki od pionu przyspieszenie wagonu: mamy bowiem $p = g \operatorname{tg} \beta$.

Przykład 3. Po torze poziomym, zakrzywionym, porusza się wagon z prędkością stałą v . Możemy więc przyjąć, że wagon obraca się około pewnej prostej pionowej l . Niech punkt ciężki o masie m , zawieszony na nici nierozciągliwej, będzie w równowadze względem wagonu (str. 143, rys. 3).

Oznaczmy przez α kąt, jaki nić tworzy z pionem, przez r odległość punktu zawieszenia nici od prostej l . Odległość punktu m od osi l wynosi więc $r' = r + x = r + d \sin \alpha$ (gdzie d długość nici). Przyspieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ punktu m jest prostopadle do l i jest skierowane ku l , przyczem $|\bar{p}_u| = v^2/(r+x)$. Siła unoszenia, mająca zwrot przeciwny, wynosi zatem $|\bar{P}_u| = mv^2/(r+x)$. Ponieważ ciężar $\bar{Q}$ i napięcie nici $\bar{T}$ równoważą się z siłą unoszenia, więc z trójkąta sił otrzymamy

$$\operatorname{tg} \alpha = |\bar{P}_u|/|\bar{Q}| = v^2/g(r+x).$$

Gdy x jest małe w stosunku do r , to $\operatorname{tg} \alpha = v^2/gr$.

Przykład 4. Punkt nieswobodny ciężki o masie m ma pozostawać na krzywej C , obracającej się z prędkością kątową ω około stałej prostej pionowej l . Tarcia nie uwzględniamy. W jakim położeniu punkt będzie w równowadze względem krzywej C ?

Obierzmy układ ruchomy (x, y, z) obracający się wraz z krzywą C około osi l z prędkością kątową ω , przyjmując l za oś z -ów skierowaną ku górze. Niech krzywa C , będąca w spoczynku względem układu (x, y, z) , dana będzie parametrycznie przy pomocy funkcji:

$$(3) \quad x = f(\sigma), \quad y = \varphi(\sigma), \quad z = \psi(\sigma).$$

W położeniu równowagi względnej ciężar $\bar{Q}$, reakcja $\bar{R}$ i siła unoszenia $\bar{P}_u$ równoważą się. Zatem suma $\bar{Q} + \bar{P}_u$ jest prostopadła do krzywej C . Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu w położeniu równowagi względnej, otrzymamy więc $p_{u_x} = -x\omega^2$, $p_{u_y} = -y\omega^2$ i $p_{u_z} = 0$, skąd $P_{u_x} = mx\omega^2$, $P_{u_y} = my\omega^2$ i $P_{u_z} = 0$. Suma $\bar{P}_u + \bar{Q}$ ma zatem rzuty: $mx\omega^2$, $my\omega^2$ i $-mg$.

Współczynniki kierunkowe stycznej są proporcjonalne do pochodnych $x' = f'(\sigma)$, $y' = \varphi'(\sigma)$, $z' = \psi'(\sigma)$. Z warunku prostopadłości $\bar{P}_u + \bar{Q}$ do stycznej wynika tedy (po skróceniu przez m), że

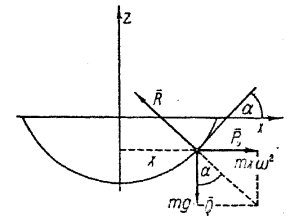
$$(4) \quad xx'\omega^2 + yy'\omega^2 - gz' = 0.$$

Z równania powyższego możemy wyznaczyć wartość parametru σ , odpowiadającą położeniu równowagi względnej.

Jeżeli w szczególności krzywa C jest krzywą płaską o równaniu $z = \psi(x)$, leżącą w płaszczyźnie xz , wówczas dla położenia równowagi otrzymamy z równania (4) (kładąc $x = \sigma$, $y = 0$ i $z = \psi(\sigma)$) lub bezpośrednio z rysunku:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \alpha = \psi'(x) = x\omega^2/g.$$

Jeżeli np. krzywa C ma równanie $z = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (czyli jest dolną częścią koła $x^2 + z^2 = r^2$), to z (5) dostaniemy $x/\sqrt{r^2 - x^2} = x\omega^2/g$, skąd $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm \sqrt{r^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$. Rozwiązania $x_{2,3}$ istnieją tylko wtedy, gdy $r^2 - \frac{g^2}{\omega^4} \geq 0$, t. zn. gdy $\omega \geq \sqrt{g/r}$.



Zapytajmy teraz, jakie to są krzywe, na których punkt jest w każdym położeniu w równowadze względnej.

Dla krzywych tych równanie (4) musi być spełnione tożsamościowo, t. j. dla każdej wartości parametru σ . Otrzymamy tedy z (4) $\frac{1}{2} \frac{d[x^2 + y^2]}{d\sigma} \omega^2 - g \frac{dz}{d\sigma} = 0$. Całkując, dostajemy $(x^2 + y^2)\omega^2/2 - gz = \text{const.}$ czyli

$$(6) \quad z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + c,$$

gdzie $c = \text{const.}$

Równanie (6) przedstawia zbiór paraboloid obrotowych, powstałych przez obrót paraboli $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$ dokoła osi z . Na mocy (6) krzywa, leżąca na którejkolwiek z tych paraboloid, spełnia równanie (4) tożsamościowo. Krzywe płaskie, spełniające równanie (4), otrzymamy, tworząc przekrój paraboloidy dowolną płaszczyzną. Jako przekroje dostaniemy elipsy i parabole. W szczególności, przekrój płaszczyzną pionową $y = 0$ będzie parabolą o równaniu $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$.

§ 25. Ruch względem ziemi. Siła ciężkości. Przyjmijmy za układ inercjalny układ, którego początek znajduje się w słońcu, a osie skierowane są ku gwiazdom stałym. Ziemia nie jest w spoczynku względem tego układu. Badając ruch punktu w ciągu krótkiego czasu, możemy się ograniczyć do ruchu obrotowego ziemi tylko około pewnej osi.

Niech punkt zawieszony na nici w pewnym miejscu powierzchni ziemi będzie względem ziemi w spoczynku. Siłami bezwzględnyymi są: przyciąganie ziemi $\vec{A}$ i napięcie nici $\vec{T}$ (równe co do wielkości i kierunku ciężarowi, lecz o zwrocie przeciwnym).

Przyciąganie ziemi nie jest równe ciężarowi, bo w przeciwnym razie równoważyłoby się ono z napięciem nici i punkt byłby w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym. To jednak nie zachodzi, gdyż punkt obraca się wraz z ziemią około jej osi.

Stosując warunki równowagi względnej (§ 24, str. 142) do układu związanego z ziemią, możemy powiedzieć, że przyciąganie ziemi $\vec{A}$ i napięcie nici $\vec{T}$ równoważą się z siłą unoszenia $\vec{P}_u$. A więc

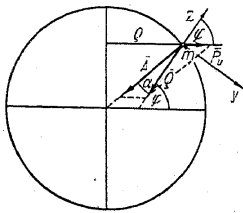
$$\vec{A} + \vec{T} + \vec{P}_u = 0.$$

Ponieważ ciężar ciała $\vec{Q} = -\vec{T}$, więc $\vec{A} - \vec{Q} + \vec{P}_u = 0$, skąd

$$(I) \quad \vec{Q} = \vec{A} + \vec{P}_u.$$

A więc: ciężar jest wypadkową siły odśrodkowej (siły unoszenia) i siły przyciągania ziemi.

Wielkość i kierunek przyciągania ziemi. Załóżmy, że ziemia ma kształt bryły obrotowej, której osią jest oś obrotu ziemi. Załóżmy ponadto, że gęstość ziemi jest rozłożona symetrycznie względem środka masy. Można udowodnić wówczas, że siła przyciągania jest skierowana stale ku środkowi masy ziemi.



Niechaj α będzie kątem, jaki siła $\vec{A}$ tworzy z pionem, t. j. z ciężarem $\vec{Q}$. Oznaczmy przez ϱ promień równoleżnika, na którym znajduje się punkt materialny, przez φ szerokość geograficzną tego punktu (t. j. kąt między przechodzącym przez ten pionem a płaszczyzną równika), wreszcie przez ω prędkość kątową obrotu ziemi.

Siła unoszenia leży w płaszczyźnie równoleżnika i jest skierowana od osi obrotu, przyczem $|\vec{P}_u| = m\varrho\omega^2$. Utwórzmy rzuty sił $\vec{A}$, $\vec{Q}$ i $\vec{P}_u$ na oś z zwróconą pionowo w górę oraz na oś y poziomą (t. j.

prostopadłą do pionowej), leżącą w płaszczyźnie południka (t. j. w płaszczyźnie sił) i zwróconą na południe. Kładąc $A = |\vec{A}|$ i $Q = |\vec{Q}|$, otrzymamy na mocy (I)

$$-Q = -A \cos \alpha + m\varrho\omega^2 \cos \varphi, \quad -A \sin \alpha + m\varrho\omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Zatem:

$$(1) \quad A \cos \alpha = Q + m\varrho\omega^2 \cos \varphi, \quad A \sin \alpha = m\varrho\omega^2 \sin \varphi.$$

Stąd, znając Q , ϱ , ω i φ , możemy obliczyć A i α . Na równiku mamy $\varphi = 0$; zatem na mocy (1) dostajemy $\alpha = 0$. Oznaczając przez A_0 , Q_0 i ϱ_0 odpowiednie wartości na równiku, otrzymamy

$$(2) \quad A_0 = Q_0 + m\varrho_0\omega^2.$$

Znając Q_0 i ϱ_0 , możemy więc obliczyć A_0 . Znając A_0 , otrzymamy

$$(3) \quad m\varrho_0\omega^2/A_0 = 1/289 = 1/17^2.$$

Gdyby prędkość ziemi wynosiła $\omega_1 = 17\omega$, byłoby więc $m\varrho_0\omega_1^2/A_0 = 1$ czyli $A_0 = m\varrho_0\omega_1^2$. Na mocy (2) otrzymujemy stąd $Q_0 = A_0 - m\varrho_0\omega_1^2 = 0$; gdyby więc ziemia obracała się 17 razy szybciej, wówczas ciała na równiku pozbawione były by ciężaru.

Założmy teraz, że ziemia jest kulą, złożoną z warstw współśrodkowych o stałej gęstości. Wówczas, jak można wykazać, A musi być stałe na powierzchni ziemi. Zatem $A = A_0$. Oznaczając przez R promień ziemi, otrzymamy

$$(4) \quad \varrho = R \cos(\varphi - \alpha).$$

Na mocy (1) jest $\sin \alpha = \frac{mR\omega^2}{A_0} \cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi$, a ponieważ $\varrho_0 = R$, więc na mocy (3)

$$\sin \alpha = \frac{1}{289} \cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi.$$

Kąt α jest bardzo mały; przyjmując więc w przybliżeniu $\sin \alpha = \alpha$ i $\cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi$, dostaniemy

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot 289} \sin 2\varphi.$$

Widzimy stąd, że α ma największą wartość dla $\varphi = 45^\circ$. Kładąc $\alpha = 0$, dostaniemy na mocy (1) i (4)

$$Q = A_0 - mR\omega^2 \cos^2 \varphi = A_0 \left(1 - \frac{mR\omega^2}{A_0} \cos^2 \varphi \right),$$

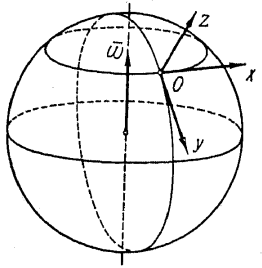
skąd na mocy (3), wobec $\varrho_0=R$, otrzymamy

$$Q=A_0\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{289}\right).$$

Sila Coriolisa. Badając ruch punktu względem ziemi, należy do sił bezwzględnych dodać siły unoszenia i Coriolisa. Załóżmy, że oprócz siły przyciągania $\vec{A}$ działa na punkt materialny jeszcze pewna siła $\vec{P}$. Oznaczając przez $\vec{p}$ przyspieszenie względem ziemi, otrzymamy $m\vec{p}=\vec{P}+\vec{A}+\vec{P}_u+\vec{P}_C$, a ponieważ $\vec{A}+\vec{P}_u$ równa się ciężarowi $\vec{Q}$, więc

$$(5) \quad m\vec{p}=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{P}_C.$$

Zatem: przy badaniu ruchu punktu względem ziemi należy do siły $\vec{P}$ i ciężaru $\vec{Q}$ dodać siłę Coriolisa $\vec{P}_C$.



Obierzmy w danym miejscu na ziemi oś z skierowaną pionowo w górę, oś x poziomo skierowaną na wschód i oś y poziomo skierowaną na południe. Oś obrotu będzie leżała w płaszczyźnie yz i utworzy z osią z kąt $90^\circ-\varphi$ (porównaj rysunek na str. 146). Ponieważ ziemia obraca się z zachodu na wschód, więc wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$, położony na osi obrotu, ma zwrot od bieguna

południowego ku północnemu. Kładąc $|\vec{\omega}|=\omega$, otrzymamy na półkuli północnej:

$$(N) \quad \omega_x=0, \quad \omega_y=-\omega \cos \varphi, \quad \omega_z=\omega \sin \varphi,$$

a na południowej:

$$(S) \quad \omega_x=0, \quad \omega_y=-\omega \cos \varphi, \quad \omega_z=-\omega \sin \varphi,$$

Oznaczając przez $\vec{v}$ prędkość punktu względem ziemi, otrzymamy $\vec{p}_C=2\vec{v}\times\vec{\omega}$, zatem $\vec{P}_C=-m\vec{p}_C=-2m\vec{v}\times\vec{\omega}$ czyli

$$(6) \quad \vec{P}_C=2m\vec{\omega}\times\vec{v},$$

skąd na mocy (N), dla półkuli północnej:

$$(II) \quad P_{Cx}=-2m\omega(v_y \sin \varphi + v_z \cos \varphi), \quad P_{Cy}=2m\omega v_x \sin \varphi, \\ P_{Cz}=2m\omega v_x \cos \varphi.$$

Jeżeli punkt ma tylko prędkość pionową, t. j. gdy $v_x=0$ i $v_y=0$, otrzymamy $P_{Cx}=-2m\omega v_z \cos \varphi$, $P_{Cy}=0$ i $P_{Cz}=0$. Przy wzroście się punktu jest $v_z>0$, a więc $P_{Cx}<0$ i $\vec{P}_C$ jest skierowane

poziomo na zachód; przy opadaniu zaś punktu $v_z<0$, $P_{Cx}>0$, a zatem $\vec{P}_C$ jest skierowane poziomo na wschód.

Wynika stąd, że ciało spadające zbacza na wschód pod wpływem siły Coriolisa.

Jeżeli punkt porusza się stale w płaszczyźnie poziomej, czyli gdy $v_z=0$, to $P_{Cx}=-2m\omega v_y \sin \varphi$ i $P_{Cy}=2m\omega v_x \sin \varphi$. Składowa pozioma siły Coriolisa jest więc wtedy prostopadła do prędkości i ma w stosunku do niej zwrot na prawo.

A zatem: punkt poruszający się w płaszczyźnie poziomej na półkuli północnej dąży (pod wpływem siły Coriolisa) do zbaczania w prawo od kierunku prędkości.

Z tego powodu np. prawa szyna jest bardziej uciskana przy biegu pociągów niż lewa.

Efekty siły Coriolisa są małe, bo siła jest mała. Na mocy (6) mamy bowiem $|\vec{P}_C|=2m\omega|\vec{v}|\sin \varepsilon$, gdzie ε oznacza kąt między $\vec{v}$ a osią obrotu. Ponieważ

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \text{ sek}^{-1}=\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60} \text{ sek}^{-1}=0,00007 \text{ sek}^{-1},$$

gdzie T oznacza czas obrotu ziemi dookoła osi, więc $\vec{P}_C$ jest małe.

Utwórzmy rzuty (5) na osie x, y, z . Na mocy (II) otrzymamy:

$$(III) \quad m\ddot{x}=P_x-2m\omega(\dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad m\ddot{y}=P_y+2m\omega \dot{x} \sin \varphi, \\ m\ddot{z}=P_z-mg+2m\omega \dot{x} \cos \varphi.$$

Zboczenie na wschód przy spadku. Zajmiemy się wyznaczeniem zboczenia od pionu dla punktu materialnego spadającego swobodnie.

Założmy, że dla $t=0$ mamy:

$$(7) \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad \vec{v}=0.$$

Na mocy (III), otrzymamy przy założeniu, że $\vec{P}=0$:

$$(8) \quad \ddot{x}=-2\omega(\dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad \ddot{y}=2\omega \dot{x} \sin \varphi, \quad \ddot{z}=-g+2\omega \dot{x} \cos \varphi.$$

Całkując, dostaniemy z uwagi na warunki początkowe (7):

$$(9) \quad \dot{x}=-2\omega(y \sin \varphi + z \cos \varphi), \quad \dot{y}=2\omega x \sin \varphi, \quad \dot{z}=-gt+2\omega x \cos \varphi.$$

Wstawiając w (8) wartości $\dot{y}$ i $\dot{z}$, otrzymamy

$$\ddot{x}=-4\omega^2 x+2\omega g t \cos \varphi.$$

Równanie powyższe można było scałkować, a następnie, podstawiając w (9), moglibyśmy wyznaczyć y i z . Rozwiązanie przybliżone otrzymamy, opuszczając wyraz $-4\omega^2 x$, bardzo mały w porównaniu z $2\omega g t \cos \varphi$. Dostaniemy $\ddot{x} = 2\omega g t \cos \varphi$, skąd

$$(10) \quad x = \frac{1}{2} \omega g t^2 \cos \varphi.$$

Opuszczając w trzecim z równań (9) wyraz $2\omega x \cos \varphi$, jako mały w porównaniu z $-gt$, otrzymamy $\dot{z} = -gt$, skąd $z = -\frac{1}{2}gt^2$. Gdy punkt spadnie do poziomu $z = -h$, będzie $-h = -\frac{1}{2}gt^2$, zatem $t = \sqrt{2h/g}$. Na mocy więc (10)

$$(11) \quad x = \frac{2}{3} \omega h \cos \varphi \sqrt{2h/g}.$$

Wzór powyższy przedstawia zboczenie na wschód (gdyż $x > 0$) ciała spadającego z wysokości h .

W Harvard (Stany Zjednoczone) wykonano doświadczenia, przyjmując $h = 23$ m i $\varphi = 42^\circ$. Z około tysiąca doświadczeń otrzymano zboczenie zawarte między 1,3 m a 1,7 m. Ze wzoru przybliżonego (11) wypada natomiast $x = 1,8$ m. Różnica jest więc niewielka.

Wahadło Foucaulta. Zbadajmy wpływ siły Coriolisa na ruch wahadła. Umieścimy początek układu (x, y, z) w punkcie zawieszenia nici nierozciągliwej, na której końcu umocowany jest punkt ciężki o masie m . Niechaj l będzie długością wahadła (t. j. nici). Ponieważ reakcja $\vec{P}$ ze strony nici działa na punkt wzdłuż nici, więc, oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu m , otrzymamy:

$$P_x = \lambda m x, \quad P_y = \lambda m y, \quad P_z = \lambda m z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności, zależnym od czasu.

Na mocy (III), str. 149, otrzymamy, dzieląc przez m :

$$(12) \quad \ddot{x} = \lambda x - 2\omega(\dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad \ddot{y} = \lambda y + 2\omega \dot{x} \sin \varphi,$$

$$(13) \quad \ddot{z} = \lambda z - g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi.$$

Zajmiemy się tylko przybliżonym rozwiązaniem równań (12) i (13). Założmy, że kąt wychylenia jest dostatecznie mały, by można było przyjąć w przybliżeniu

$$(14) \quad z = -l, \quad \dot{z} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Z równania (13) otrzymamy zatem $0 = -\lambda l - g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi$, skąd $\lambda = \frac{-g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi}{l}$. Opuszczając w liczniku drugi wyraz jako mały w porównaniu z pierwszym, dostaniemy

$$(15) \quad \lambda = -g/l.$$

Współczynnik λ możemy więc uważać w przybliżeniu za stały. Równania (12) przyjmą na mocy (14) i (15) postać:

$$(16) \quad \ddot{x} = -\frac{g}{l} x - 2\omega \dot{y} \sin \varphi, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{l} y + 2\omega \dot{x} \sin \varphi.$$

Mnożąc pierwsze z równań (16) przez $\dot{x}$, a drugie przez $\dot{y}$, i dodając, otrzymamy $\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = -\frac{g}{l}(x\dot{x} + y\dot{y})$, skąd po scałkowaniu

$$(17) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -\frac{g}{l}(x^2 + y^2) + a,$$

gdzie a jest pewną stałą. Mnożąc pierwsze z równań (16) przez y , a drugie przez x i odejmując, dostaniemy $y\ddot{x} - x\ddot{y} = -2\omega(y\dot{y} + x\dot{x}) \sin \varphi$, skąd po scałkowaniu

$$(18) \quad y\dot{x} - x\dot{y} = -\omega(x^2 + y^2) \sin \varphi + b.$$

gdzie b jest pewną stałą. Wprowadźmy współrzędne biegunowe:

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi.$$

Na mocy (17) i (18) otrzymamy:

$$(19) \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 = -\frac{g}{l} r^2 + a,$$

$$(20) \quad r^2 \dot{\psi} = r^2 \omega \sin \varphi - b.$$

Wprowadźmy nowy układ współrzędnych (x_1, y_1, z_1) , mający z układem poprzednim (x, y, z) wspólny początek oraz wspólną oś z i obracający się dookoła osi z z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$ w kierunku od wschodu na południe, t. j. od x ku y . Dla współrzędnych biegunowych r_1, ψ_1 otrzymamy w nowym układzie wzory:

$$(21) \quad r = r_1, \quad \psi = \psi_1 + \omega t \sin \varphi.$$

Przez podstawienie (21) w (20) otrzymamy w nowych współrzędnych r_1, ψ_1 równanie $r_1^2(\dot{\psi}_1 + \omega \sin \varphi) = r_1^2 \omega \sin \varphi - b$, skąd

$$(22) \quad r_1^2 \dot{\psi}_1 = -b,$$

a przez podstawienie (21) w równanie (19) dostaniemy

$$\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\psi}_1^2 + 2r_1^2 \dot{\psi}_1 \omega \sin \varphi + r_1^2 \omega^2 \sin^2 \varphi = -\frac{g}{l} r_1^2 + a,$$

skąd opuszczając wyraz $r_1^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$ jako bardzo mały i stosując równanie (22), otrzymamy

$$(23) \quad \dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\psi}_1^2 = -\frac{g}{l} r_1^2 + a_1,$$

gdzie $a_1 = a + 2b \omega \sin \varphi = \text{const.}$

Łatwo sprawdzić, że (22) i (23) są równaniami ruchu, który we współrzędnych x_1, y_1, z_1 ma równania:

$$(24) \quad \ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}x_1, \quad \ddot{y}_1 = -\frac{g}{l}y_1.$$

Istotnie, równania (16) przyjmują tę właśnie postać dla $\omega=0$. A więc, wprowadzając współrzędne biegunowe, otrzymamy, jak widać [z równań (19) i (20) dla $\omega=0$, równania (22) i (23).

Równania (24) wyznaczają ruch punktu pod wpływem siły $\vec{P}$, której rzuty wynoszą:

$$(25) \quad P_{x_1} = -\frac{g}{l}mx_1, \quad P_{y_1} = -\frac{g}{l}my_1.$$

Jest to siła sprężysta t. j. skierowana stale ku początkowi układu współrzędnych i wprost proporcjonalna do odległości punktu od początku układu. Na str. 114 wykazaliśmy, że ruch pod wpływem siły sprężystej odbywa się po elipsie. A więc punkt materialny będzie odbywał ruch w układzie (x_1, y_1, z_1) po elipsie. Że zaś ten układ obraca się około osi z z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$, więc oś tej elipsy będzie obracała się z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$ ze wschodu na południe. Czas obrotu wynosi

$$T = 2\pi / \omega \sin \varphi.$$

Ponieważ obrót ziemi trwa 24 godz, więc $2\pi / \omega = 24$ godz, skąd $T = 24 / \sin \varphi$ godz. Dla $\varphi = 45^\circ$ dostajemy $T = 34$ godz.

Zjawisko powyższe pierwszy stwierdził doświadczalnie L. Foucault. Stanowi ono dowód obrotu ziemi naokoło osi.