ROZDZIAŁ II

KINEMATYKA PUNKTU

I. Ruch względem układu odniesienia

§ 1. Czas. W kinematyce oprócz pojęć znanych z geometrii występuje pojęcie *czasu*. W rozważaniach kinematyki teoretycznej wystarczy przyjąć, że każdej chwili przypisana jest pewna liczba t, przyczem chwili wcześniejszej przypisana jest mniejsza liczba niż późniejszej; ponadto przy tym przyporządkowaniu każdej liczbie t odpowiadać ma, na odwrót, pewna chwila: liczbie większej chwila późniejsza.

Dla kinematyki teoretycznej jest zupełnie obojętne, w jaki sposób powyższe przyporządkowanie zostało określone. W zagadnieniach konkretnych postępujemy w sposób następujący. Obieramy dowolną *jednostkę czasu*, np. sekundę, i dowolną chwilę, którą nazywamy *chwilą początkową*. Chwili początkowej przypisujemy liczbę 0. Każdej innej chwili przyporządkowujemy liczbę t, której bezwzględna wartość równa się liczbie sekund, jakie upłynęły między chwilą początkową a daną; liczba t jest dodatnią dla chwil późniejszych od początkowej, ujemną zaś dla chwil wcześniejszych.

§ 2. Układ odniesienia. W kinematyce przyjmujemy, że dany jest pewien układ współrzędnych zwany *układem odniesienia*.

Ciało porusza się względem układu odniesienia, jeżeli zmieniają się współrzędne punktów ciała. Zadaniem kinematyki jest opis ruchu ciała względem układu odniesienia, polegający na podaniu współrzędnych punktów tego ciała dla każdej chwili czasu.

Dla kinematyki jest rzeczą obojętną, jak został obrany układ odniesienia. W zagadnieniach konkretnych obieramy układ odniesienia związany z pewnymi ciałami jak np. z ziemią, słońcem, gwiazdami stałymi i t. p.

Ruch ciała zależy od układu odniesienia. Względem jednego układu odniesienia ciało może być w spoczynku, względem innego zaś w ruchu. Podróżny siedzący w wagonie kolejowym jest względem wagonu (tj. układu odniesienia związanego z wagonem) w spoczynku, a względem ziemi jest w ruchu.

Wyłania się pytanie czy w zadaniach konkretnych nie można badać ruchu ciała niezależnie od innych ciał. Ruch taki byłby t. zw. ruchem bezwzględnym (absolutnym). Okazuje się jednak (z uwagi na to, że punkty przestrzeni są nierozróżnialne), że przy pomocy pomiarów odległości i twierdzeń geometrycznych niepodobna stwierdzić w żaden sposób, czy ciało badane w dwu chwilach zmieniło swoje położenie czy nie. Pojęcie ruchu absolutnego jest więc bezużyteczne. Musimy się zatem ograniczyć do badania ruchu względnego, t. j. ruchu ciała względem innych ciał.

§ 3. Ruch punktu. Zajmiemy się na początku ruchem jednego punktu. Opis ruchu ciała sprowadza się bowiem do opisu ruchu jego punktów. Nadto w wielu przypadkach opis ruchu ciała sprowadza się praktycznie do podania ruchu jednego jego punktu, np. gdy wymiary ciała są drobne w stosunku do przebywanej drogi (ruch ziemi wkoło słońca, ruch kuli karabinowej) lub jeżeli ruch jednego punktu wyznacza ruch całego ciała (np. ruch wagonu).

Oznaczmy współrzędne poruszającego się punktu M względem pewnego układu odniesienia przez x, y, z. Współrzędne x, y, z zależą od czasu, są więc funkcjami zmiennej t:

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t), \qquad z=\psi(t).$$

Funkcje te dają nam opis ruchu punktu M względem przyjętego układu odniesienia. Znając je, możemy podać współrzędne x, y, z punktu M w każdej chwili t.

O funkcjach f, φ i ψ zakładamy, że są ciągłe wraz z pierwszą i drugą pochodną w pewnym przedziale $\langle t_0, t_1\rangle$, w którym ruch badamy.

Ruch punktu można określić przy pomocy jednej funkcji wektorowej. Połóżmy $\bar{r}=\overline{OM}$ (O początek układu). Zatem

$$\bar{r}=\bar{F}(t).$$

Powyższa funkcja wektorowa opisuje ruch w zupełności, podając dla każdej chwili czasu wektor $\bar{r}$, a więc położenie punktu M.

Zauważmy, że funkcje f, φ i ψ podają składowe wektora $\bar{r}$.

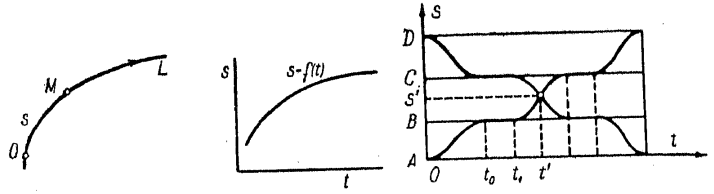
Linię, jaką zakreśla punkt podczas ruchu nazywamy *torem* lub *trajektorią*.

Przypuśćmy, że torem punktu jest łuk L. Nadajmy łukowi temu pewien zwrot i obierzmy na nim dowolny punkt O, który nazwiemy *początkiem* (rys. 1). Położenie punktu M na łuku L będzie wyznaczone przez podanie liczby s, której bezwzględna wartość równa się długości łuku OM, przy czym liczba s jest dodatnia lub ujemna zależnie od tego, czy zwrot łuku OM jest zgodny ze zwrotem obranym na L czy nie. Liczbę s nazywamy *współrzędną łukową* punktu M na łuku L.

Ruch punktu M po łuku L będzie wyznaczony również funkcją

$$s=f(t),$$

podającą w każdej chwili t współrzędną łukową s punktu M.



1. 2. 3.

§ 4. Wykres ruchu. Niechaj ruch punktu po krzywej L określony będzie funkcją $s=f(t)$. Obierzmy dwie osie prostopadłe s i t.

Wykres funkcji $s=f(t)$ nazywamy *wykresem* lub *diagramem* ruchu (rys. 2).

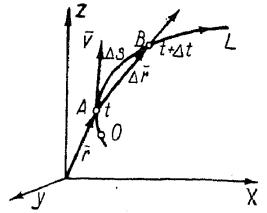
Na rys. 3 mamy wykres ruchu dwóch pociągów, z których jeden biegnie od stacji A do stacji D (przez stacje B, C), drugi zaś od stacji D do A. Z wykresu odczytujemy np., że w chwili 0 pociąg wyjechał ze stacji A i przybył do B w chwili t_0. Stację B opuścił w chwili t_1 i t. d. Współrzędne (t', s') punktu przecięcia obu wykresów przedstawiają chwilę i miejsce spotkania obu pociągów.

§ 5. Prędkość. Załóżmy, że punkt poruszający się po krzywej L znajdował się w chwili t w punkcie A, a w chwili $t+\Delta t$ w punkcie B.

Wektor $\overline{AB}$ nazywamy *przesunięciem* poruszającego się punktu w czasie Δt. Iloraz

(1) $$\overline{AB}/\Delta t=\overline{AC}$$

przedstawia przesunięcie przypadające na jednostkę czasu. Iloraz powyższy nazywamy także *wektorem prędkości średniej* lub krótko *prędkością średnią* w czasie Δt.



Załóżmy, że istnieje granica ilorazu (1) gdy przyrost czasu Δt dąży do 0. Oznaczmy tę granicę przez $\bar{v}$. Zatem

(I) $$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t}.$$

Wektor $\bar{v}$ nazywamy *wektorem prędkości* lub krótko *prędkością* w chwili t.

Jeżeli $\Delta t\to 0$, sieczna AB dąży do stycznej. A więc: *wektor prędkości jest styczny do toru.*

Niechaj ruch określony będzie funkcjami $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$. Oznaczmy współrzędne punktu A przez x, y, z, a punktu B przez $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. Wektor $\overline{AB}$ ma zatem rzuty $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Rzutami ilorazu $\frac{\overline{AB}}{\Delta t}$ będą więc ilorazy $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$.

Wynika stąd, że rzuty prędkości $\bar{v}$ wyrażają się wzorami:

$$v_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t),\qquad v_y=\frac{dy}{dt}=\varphi'(t),\qquad v_z=\frac{dx}{dt}=\psi'(t).$$

W mechanice pochodną względem czasu przyjęte jest oznaczać kropką u góry. Zatem

(II) $$v_x=\dot{x},\qquad v_y=\dot{y},\qquad v_z=\dot{z}.$$

A więc: *rzuty wektora prędkości na osie układu równają się pochodnym (względem czasu) współrzędnych poruszającego się punktu.*

Niech teraz ruch określony będzie funkcją wektorową $\bar{r}=\bar{F}(t)$. Przyjmując $\overline{AB}=\Delta\bar{r}$, otrzymamy

$$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\dot{\bar{r}}.$$

A więc

(III) $$\bar{v}=\dot{\bar{r}}.$$

Prędkość jako pochodna drogi. Niech wreszcie ruch punktu po torze L określony będzie funkcją $s=f(t)$, gdzie s oznacza współrzędną łukową. Ponieważ prędkość jest styczna do toru, więc dla wyznaczenia prędkości w punkcie A wystarczy podać wielkość i zwrot prędkości. Z określenia prędkości wynika, że

$$|\bar{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{AB}{\Delta s}\right|\cdot\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|,$$

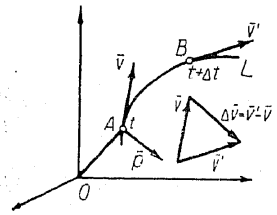
gdzie $|\Delta s|$ oznacza długość łuku AB. Ponieważ $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{AB}{\Delta s}\right|=1$, więc

$$|\bar{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|=\left|\frac{ds}{dt}\right|=|\dot{s}|.$$

Wykreślmy w punkcie A styczną i nadajmy jej zwrot zgodny ze zwrotem obranym na krzywej L. Jeżeli $\dot{s}>0$, wówczas dla małych $\Delta t>0$ jest $\Delta s>0$; zatem punkt porusza się po torze w kierunku dodatnim, więc $\bar{v}$ ma zwrot zgodny ze zwrotem stycznej. Podobnie, jeżeli $\dot{s}<0$, to $\bar{v}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu stycznej. Jeżeli więc przez v oznaczymy współrzędną wektora prędkości względem stycznej, której nadaliśmy zwrot zgodny ze zwrotem toru, to

(IV) $$v=\frac{ds}{dt}=\dot{s}.$$

§ 6. Przyśpieszenie. Załóżmy, że w chwili t punkt był w A i miał prędkość $\bar{v}$, zaś w chwili $t+\Delta t$ był w B i miał prędkość $\bar{v}'$. Połóżmy $\Delta\bar{v}=\bar{v}'-\bar{v}$.



Granicę $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}=\bar{p}$ nazywamy *wektorem przyśpieszenia* lub krótko *przyśpieszeniem* w chwili t.

Niech ruch określony będzie funkcjami $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$. Mamy $p_x=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$. Ponieważ $v_x=f'(t)$ i $v_x'=f'(t+\Delta t)$, więc $\Delta v_x=v_x'-v_x=f'(t+\Delta t)-f'(t)$. Zatem $p_x=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t}=f''(t)$; podobnie $p_y=\varphi''(t)$ i $p_z=\psi''(t)$.

Pochodne $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ oznaczamy przez $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$. Stąd:

(I) $$p_x=\ddot{x},\qquad p_y=\ddot{y},\qquad p_z=\ddot{z}.$$

Zatem: *rzuty przyśpieszenia na osie układu równają się drugim pochodnym współrzędnych poruszającego się punktu.*

Jeżeli ruch określony jest funkcją wektorową

$$\bar{r}=\bar{F}(t),$$

to — jak wynika z definicji drugiej pochodnej — mamy:

(II) $$\bar{p}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\ddot{\bar{r}}.$$

Przykład 1. Punkt porusza się w płaszczyźnie w ten sposób, że jego współrzędne w chwili t wyrażają się wzorami:

(1) $$x=a\cos kt,\qquad y=b\sin kt\qquad (a>0,\ b>0,\ k>0).$$

Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie, oraz tor.

Mamy tutaj

$$\dot{x}=-ak\sin kt,\qquad \dot{y}=bk\cos kt,$$
$$\ddot{x}=-ak^2\cos kt,\qquad \ddot{y}=-bk^2\sin kt,$$

a więc wartość bezwzględna prędkości będzie $|\bar{v}|=k\sqrt{a^2\sin^2 kt+b^2\cos^2 kt}$, zaś wartość bezwzględna przyśpieszenia $|\bar{p}|=k^2\sqrt{a^2\cos^2 kt+b^2\sin^2 kt}$.

Aby otrzymać tor punktu, należy znaleźć związek między współrzędnymi x, y, t. zn. wyrugować czas t. Dzieląc równania (1) odpowiednio przez a i b, podnosząc do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1.$$

A więc tor jest elipsą o osiach $2a, 2b$. Wektor prędkości jest oczywiście styczny do elipsy. Współrzędne wektora przyśpieszenia można, z uwagi na równania (1), napisać w postaci:

$$\ddot{x}=-k^2x,\qquad \ddot{y}=-k^2y,\qquad \text{skąd}\qquad |\bar{p}|=k^2\sqrt{x^2+y^2},\qquad \ddot{y}/\ddot{x}=y/x.$$

Wektor przyśpieszenia jest zatem proporcjonalny do odległości od początku układu i zawsze skierowany ku początkowi układu.

Przykład 2. Wyznaczyć prędkość, przyśpieszenie i tor punktu, którego ruch określony jest równaniami

(2) $$x=\frac{a}{2}(1+\cos t),\qquad y=\frac{a}{2}\sin t,\qquad z=a\sin\frac{t}{2}\qquad (a>0).$$

Różniczkując, otrzymujemy

$$\dot{x}=-\frac{a}{2}\sin t,\qquad \dot{y}=\frac{a}{2}\cos t,\qquad \dot{z}=\frac{a}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$\ddot{x}=-\frac{a}{2}\cos t,\qquad \ddot{y}=-\frac{a}{2}\sin t,\qquad \ddot{z}=-\frac{a}{4}\sin\frac{t}{2},$$

skąd $|\bar{v}|=\frac{a}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}$ i $|\bar{p}|=\frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{t}{2}}$.

Aby wyznaczyć tor punktu, należy z równań (2) wyrugować czas, co da nam dwa związki między x, y, z określające krzywą przestrzenną, po której się punkt porusza. Rugowanie to w ogólności przedstawia duże trudności rachunkowe, w tym przykładzie jednak łatwo daje się przeprowadzić. Podnosząc równania (2) do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Podobnie, z pierwszych dwu równań (2) wynika, że

$$(x-a/2)^2+y^2=(a/2)^2.$$

Z równań otrzymanych widzimy, że tor punktu jest krzywą przekroju kuli i walca kołowego.

Przykład 3. Ruch jednostajny prostolinijny. Punkt porusza się w ten sposób, że przyśpieszenie jest stale zerem. Zakładamy więc, że $\bar{p}=0$. Zatem

$$\ddot{x}=0,\qquad \ddot{y}=0,\qquad \ddot{z}=0.$$

Wynika stąd po scałkowaniu, że

$$\dot{x}=c_1,\qquad \dot{y}=c_2,\qquad \dot{z}=c_3, \tag{3}$$

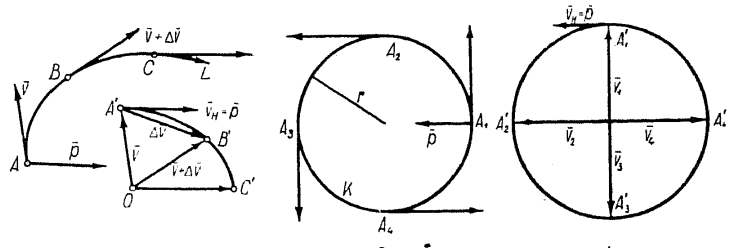
gdzie c_1, c_2, c_3 oznaczają pewne stałe. Całkując jeszcze raz, otrzymamy

$$x=c_1t+d_1,\qquad y=c_2t+d_2,\qquad z=c_3t+d_3. \tag{4}$$

Tutaj d_1, d_2, d_3 oznaczają również pewne stałe. Równania (4) przedstawiają parametrycznie równanie linii prostej. Z równań (3) wynika, że wektor prędkości jest stały. Ruch więc odbywa się po linii prostej z prędkością stałą. Ruch taki nazywamy ruchem *jednostajnym prostolinijnym.*

Zauważmy, że założenie $\bar{p}=0$ równoważne jest z założeniem, że wektor prędkości jest stały. Mamy bowiem $\bar{p}=\dot{\bar{v}}$. Jeżeli więc $\bar{v}=\text{const.}$, to $\bar{p}=0$ i na odwrót, jeżeli $\bar{p}=0$, to $\dot{\bar{v}}=0$, zatem $\bar{v}=\text{const.}$

Hodograf. Niechaj punkt porusza się po krzywej L (rys. 1). Obierzmy dowolny punkt O. Dla każdej chwili t wykreślmy z punktu O wektor prędkości, jaką punkt ruchomy ma w danej chwili (rys. 2). Końce tych prędkości utworzą krzywą H zwaną *hodografem.*



1. 2. 3. 4.

Na hodografie oznaczyliśmy przez A', B', C' końce prędkości, jakie punkt poruszający się po krzywej L ma w A, B, C. Jeżeli więc punkt porusza się po torze L, to koniec odpowiedniej prędkości porusza się po hodografie.

Oznaczmy przez $\bar{v}_H$ prędkość punktu na hodografie w A'. Z określenia prędkości mamy $\bar{v}_H=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{A'B'}}{\Delta t}$. Lecz $\overline{A'B'}=\Delta\bar{v}$, więc

$$\bar{v}_H=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}=\bar{p}.$$

Zatem: *przyśpieszenie poruszającego się punktu równa się prędkości odpowiedniego punktu na hodografie.*

Przykład 4. Jeżeli punkt porusza się po linii prostej, to kierunek prędkości jest stały. Zatem hodograf jest też linią prostą.

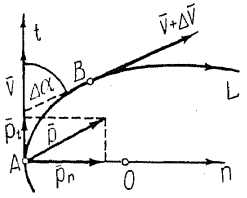
Przykład 5. Załóżmy, że punkt porusza się po kole K z prędkością stałą co do wartości bezwzględnej (rys. 3).

Hodograf będzie kołem (rys. 4). Punkt po hodografie będzie poruszał się również z prędkością stałą co do wartości bezwzględnej.

Ponieważ prędkość punktu A'_1, na hodografie jest styczna do hodografu, zatem jest prostopadła do $\bar{v}_1$. Wynika stąd, że przyśpieszenie punktu poruszającego się po kole K jest skierowane ku środkowi koła i jest stałe co do wartości bezwzględnej.

§ 7. Rozkład przyśpieszenia na styczne i normalne.

Ruch po torze płaskim. Niech ruch punktu A po torze L określony będzie funkcją $s=f(t)$, gdzie s oznacza współrzędną łukową. Wykreślmy w punkcie A styczną t i normalną n. Nadajmy stycznej zwrot zgodny ze zwrotem krzywej L, zaś normalnej zwrot ku środkowi krzywizny.



Rzut przyśpieszenia $\bar{p}$ na styczną nazywamy *przyśpieszeniem stycznym* $\bar{p}_t$. Rzut przyśpieszenia na normalną nazywamy *przyśpieszeniem normalnym* $\bar{p}_n$. Jest oczywiście

(I) $$\bar{p}=\bar{p}_t+\bar{p}_n.$$

Mając więc dane przyśpieszenie styczne i normalne, możemy wyznaczyć przyśpieszenie $\bar{p}$. Przyśpieszenie styczne będzie określone przez podanie współrzędnej p_t względem stycznej. Podobnie, współrzędna p_n względem normalnej określa przyśpieszenie normalne.

Oznaczmy przez $\Delta\alpha$ kąt ostry zawarty między stycznymi w punkcie A o współrzędnej łukowej s w bliskim od A punkcie B o współrzędnej łukowej $s+\Delta s$. Załóżmy, że $\Delta s>0$. Mamy wówczas

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{\varrho},$$

gdzie ϱ oznacza promień krzywizny. Jak wiemy, $\bar{p}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$; zatem

$$p_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{Rzut}_t\,\Delta\bar{v}}{\Delta t},$$

gdzie $\mathrm{Rzut}_t\,\Delta\bar{v}$ oznacza współrzędną $\Delta\bar{v}$ względem stycznej t. Lecz $\mathrm{Rzut}_t\Delta\bar{v}=\mathrm{Rzut}_t(\bar{v}+\Delta\bar{v})-\mathrm{Rzut}_t\bar{v}$. A więc $\mathrm{Rzut}_t\Delta\bar{v}=(v+\Delta v)\cos\Delta\alpha-v$. Stąd

(1) $$p_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(v+\Delta v)\cos\Delta\alpha-v}{\Delta t}=v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\cos\Delta\alpha.$$

Lecz

(2) $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ze znanej reguły na obliczanie symbolów nieoznaczonych otrzymujemy

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{-\sin\Delta\alpha}{1}=0.$$

Zatem na mocy (2) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta\alpha-1}{\Delta t}=0\cdot\frac{1}{\varrho}v=0$, skąd na mocy (1):

$$p_t=dv/dt=\ddot{s}.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia p_n. Mamy

$$p_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{Rzut}_n\,\Delta\bar{v}}{\Delta t}.$$

Lecz $\mathrm{Rzut}_n\,\Delta\bar{v}=\mathrm{Rzut}_n(\bar{v}+\Delta\bar{v})-\mathrm{Rzut}_n\,\bar{v}=(v+\Delta v)\sin\Delta\alpha$. Więc $p_n=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(v+\Delta v)\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t}$. Ponieważ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}=1\cdot\frac{1}{\varrho}\cdot v$, więc

$$p_n=v^2/\varrho.$$

Zatem przyśpieszenia: styczne p_t i normalne p_n wyrażają się wzorami

(II) $$p_t=dv/dt=\ddot{s},\qquad p_n=v^2/\varrho,$$

gdzie ϱ jest promieniem krzywizny.

Ponieważ przyśpieszenie styczne jest prostopadłe do przyśpieszenia normalnego, więc

(III) $$|\bar{p}|=\sqrt{p_t^2+p_n^2}.$$

Ze wzoru (1) wynika, że $p_n\geqslant 0$. Zatem przyśpieszenie normalne ma zawsze zwrot ku środkowi krzywizny.

Zauważmy, że przyśpieszenie styczne zależy tylko od zmiany wartości bezwzględnej prędkości, a nie zależy od zmiany jej kierunku. Przyśpieszenie styczne jest wtedy i tylko wtedy stale zerem, gdy $v=\text{const}$.

Przyśpieszenie normalne zależy od promienia krzywizny ϱ, zatem od zmiany kierunku prędkości. Przyśpieszenie normalne jest stale zerem, jeżeli stale $v=0$ lub $1/\varrho=0$. W pierwszym przypadku punkt jest w spoczynku, w drugim ruch odbywa się po linii prostej.

Przykład. Punkt porusza się po kole o promieniu r z prędkością $\bar{v}$ stałą co do wartości bezwzględnej. Zatem na mocy (I)

$$p_t=dv/dt=0,\qquad p_n=v^2/r=\text{const}.$$

A więc przyśpieszenie jest wówczas stale skierowane ku środkowi i stałe co do wartości bezwzględnej (por. str. 39, przykład 5).

Ruch po torze przestrzennym. Niech punkt porusza się po torze przestrzennym L. Oznaczmy przez $\bar{v}$ prędkość punktu w A, przez $\bar{v}+\Delta\bar{v}$ prędkość jego w B.

Przeprowadźmy przez styczną w punkcie A płaszczyznę Π równoległą do stycznej w punkcie B. Na tej płaszczyźnie leżą wektory $\bar{v}$ i $\bar{v}+\Delta\bar{v}$ wykreślone z punktu A. Zatem w płaszczyźnie Π leży wektor $\Delta\bar{v}/\Delta t$. Gdy punkt B dąży do punktu A, płaszczyzna Π zmierza do t. zw. *płaszczyzny ściśle stycznej* w punkcie A. Wynika stąd, że przyśpieszenie $\bar{p}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.

A więc: *wektor przyśpieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.*

Na płaszczyźnie ściśle stycznej leży styczna. Prostą prostopadłą do stycznej i leżącą w płaszczyźnie ściśle stycznej nazywamy *normalną główną*. Na normalnej głównej leży środek krzywizny. Tworząc rzuty przyśpieszenia na styczną i normalną, otrzymamy analogicznie do wzoru (I), otrzymanego przy ruchu płaskim:

$$\bar{p}=\bar{p}_t+\bar{p}_n.$$

Nadając stycznej zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, zaś normalnej zwrot ku środkowi krzywizny, otrzymamy postępując jak poprzednio

$$p_t=dv/dt=\ddot{s} \qquad \text{i} \qquad p_n=v^2/\varrho,$$

gdzie ϱ oznacza promień krzywizny.

Wzory powyższe są identyczne ze wzorami (II) w przypadku toru płaskiego.

Przykład 1. Ruch jednostajny. Niech punkt A porusza się po krzywej L, na której obrany jest zwrot i początek O. Załóżmy że prędkość punktu A jest stała co do wielkości (t. j. co do wartości bezwzględnej). Ruch taki nazywamy *ruchem jednostajnym* po krzywej L.

Zakładamy tedy, że $v=\dot{s}=\text{const}$. Całkując, otrzymamy

$$s=vt+s_0. \tag{3}$$

Podstawiając $t=0$, dostajemy $s=s_0$. A więc stała s_0 oznacza współrzędną łukową punktu A w chwili $t=0$.

Ruch jednostajny jest określony funkcją pierwszego stopnia względem t. Na odwrót, dowolna funkcja pierwszego stopnia $s=at+b$ określa ruch jednostajny z prędkością $v=\dot{s}=a$. Ponadto $s_0=b$.

Na mocy (3) mamy

$$p_t=\dot{v}=\ddot{s}=0, \qquad p_n=v^2/\varrho.$$

Ponieważ przyśpieszenie styczne jest zerem, więc przyśpieszenie ma stale kierunek ku środkowi krzywizny. Wielkość przyśpieszenia wynosi p_n. Zatem przyśpieszenie jest co do wielkości odwrotnie proporcjonalne do promienia krzywizny ϱ (czyli wprost proporcjonalne do krzywizny $K=1/\varrho$).

Jeżeli w szczególności punkt porusza się ruchem jednostajnym po kole o promieniu r, wówczas $\varrho=r$, a więc

$$p_n=v^2/r.$$

Zatem: *jeżeli punkt porusza się po kole ruchem jednostajnym, to przyśpieszenie jest stałe co do wielkości i skierowane ku środkowi koła.*

Przykład 2. Ruch jednostajnie przyśpieszony. Punkt poruszający się po krzywej L ma stałe przyśpieszenie styczne. Ruch taki nazywamy *ruchem jednostajnie przyśpieszonym* po krzywej L.

Zakładając, że $p_t=p=\text{const.}$, dostajemy $\ddot{s}=p_t=p$, więc

$$\dot{s}=v=pt+c_1, \qquad s=\tfrac{1}{2}pt^2+c_1t+c_2. \tag{4}$$

Ruch jednostajnie przyśpieszony jest określony funkcją $s=f(t)$ drugiego stopnia względem t. Na odwrót, dowolna funkcja drugiego stopnia $s=at^2+bt+c$ określa ruch jednostajnie przyśpieszony. Mamy bowiem, różniczkując:

$$p_t=\ddot{s}=2a=\text{const.}$$

Przyjmijmy, że w ruchu jednostajnie przyśpieszonym określonym funkcją (4) punkt w chwili $t=0$ miał prędkość $v=v_0$ i współrzędną łukową $s=s_0$.

Kładąc $t=0$, otrzymujemy z (4) $v_0=c_1$, $s_0=c_2$. Wstawiając w równania (4), otrzymamy

$$v=pt+v_0, \qquad s=\tfrac{1}{2}pt^2+v_0t+s_0.$$

W szczególności, jeżeli $v_0=0$ i $s_0=0$, dostaniemy

$$v=pt \qquad \text{i} \qquad s=\tfrac{1}{2}pt^2.$$

Przykład 3. Ruch po cykloidzie. Niech koło o promieniu r toczy się po prostej. Zbadać ruch dowolnego punktu na obwodzie koła.

Załóżmy, że dany punkt P obwodu koła jest początkowo punktem styczności koła i prostej. Obierzmy ten punkt za początek układu, zaś prostą za oś x-ów. Jeżeli koło obróci się o kąt φ, punkt zajmie nowe położenie $P'(x,y)$. Aby wyrazić współrzędne x, y jako funkcje kąta φ, zauważmy, że nowe położenie punktu możemy otrzymać, najpierw obracając koło dokoła środka o kąt φ w kierunku wskazówki zegara, a następnie przesuwając je wzdłuż osi x-ów o odcinek PQ równy łukowi $P'Q$ należącemu do kąta φ, którego długość wynosi $r\varphi$. Zatem $x = -r\sin\varphi + r\varphi$, $y = r - r\cos\varphi$, czyli:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Po wykonaniu przez koło pełnego obrotu, t. j. dla $\varphi = 2\pi$, punkt P znowu jest punktem styczności, poczem ruch powtarza się. Wykonując wykres, otrzymujemy krzywą złożoną z przystających łuków, zwaną *cykloidą*.

Załóżmy, że koło obraca się jednostajnie, t. j. że kąt φ jest proporcjonalny do czasu: $\varphi = \omega t$ (gdzie ω stałe). Równania ruchu punktu P są wówczas

$$x = r(\omega t - \sin\omega t), \qquad y = r(1 - \cos\omega t).$$

Różniczkując je dwukrotnie względem czasu, otrzymujemy składowe prędkości i przyśpieszenia

$$\dot{x} = r\omega(1 - \cos\omega t), \qquad \dot{y} = r\omega\sin\omega t$$
$$\ddot{x} = r\omega^2\sin\omega t, \qquad \ddot{y} = r\omega^2\cos\omega t.$$

Stąd

(5) $$|\bar{v}| = \sqrt{r^2\omega^2(2 - 2\cos\omega t)} = 2r\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|, \qquad |\bar{p}| = r\omega^2.$$

Ze względu na to, że po wykonaniu pełnego obrotu ruch powtarza się, możemy się ograniczyć do przedziału czasu $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega$. Ze wzorów powyższych widzimy, że wielkość przyspieszenia punktu P jest stała, natomiast wielkość prędkości zmienia się. Mianowicie w chwili $t = 0$ oraz $t = 2\pi/\omega$, t. j. gdy punkt znajduje się na prostej, prędkość równa się zeru, zaś w chwili $t = \pi/\omega$ t. j. gdy punkt osiąga położenie najwyższe, prędkość jest największa i wynosi $2r\omega$.

Nadajmy cykloidzie zwrot zgodny z ruchem punktu. W czasie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega$ mamy $v = |\bar{v}|$, zatem na mocy (5)

$$v = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}.$$

Przyśpieszenie styczne będzie więc

$$p_t = \dot{v} = r\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}.$$

Aby wyznaczyć przyśpieszenie normalne, obliczamy krzywiznę według znanego wzoru

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{r^2\omega^3(1 - \cos\omega t)}{8r^3\omega^3\sin^3\omega t/2} = \frac{1}{4r\sin\omega t/2}.$$

Zatem

$$p_n = v^2/\varrho = r\omega^2\sin\frac{\omega t}{2}.$$

Droga przebyta przez punkt do chwili t równa się, z uwagi na to, że $ds = v\,dt$,

$$s = \int_0^t ds = \int_0^t v\,dt = \int_0^t 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}\,dt = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right).$$

W szczególności dla $t = 2\pi/\omega$ otrzymujemy długość toru cykloidy przy pełnym obrocie koła. Długość ta wynosi $8r$.

§ 8. Prędkość i przyśpieszenie kątowe. Niech punkt A porusza się po kole o promieniu r i środku M. Obierzmy zwrot na kole i punkt początkowy O (rys. 1). Oznaczmy przez φ kąt między promieniami MA i MO liczony zgodnie z obranym zwrotem. Mamy $s = r\varphi$, zatem

(1) $$\dot{s} = r\dot{\varphi} \quad \text{i} \quad \ddot{s} = r\ddot{\varphi}.$$

Pochodną $\dot{\varphi}$ nazywamy *prędkością kątową* i oznaczamy zazwyczaj przez ω.

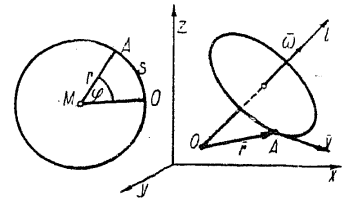
Pochodną $\ddot{\varphi}$ nazywamy *przyśpieszeniem kątowym* i oznaczamy przez ε.

Mamy oczywiście $\dot{\varphi} = \omega$ i $\dot{\omega} = \varepsilon$. Na mocy (1) jest więc

(I) $$v = r\omega \quad \text{i} \quad p_t = r\varepsilon,$$

a ponieważ $p_n = v^2/r$, więc

(II) $$p_n = r\omega^2.$$



1. 2.

Wektor prędkości kątowej. Niech punkt obraca się około pewnej osi l, t. zn. porusza się po kole leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do l, którego środkiem jest punkt przebicia tej płaszczyzny osią l (str. 45, rys. 2).

Niechaj punkt w pewnej chwili t ma prędkość kątową ω. Oznaczmy przez $\bar{\omega}$ wektor położony na osi l o długości $|\omega|$. Zwrot wektora $\bar{\omega}$ obierzmy tak, aby człowiek, mający głowę w końcu, a stopy w początku wektora, widział ruch od ręki prawej ku lewej.

Wektor $\bar{\omega}$ nazywamy *wektorem prędkości kątowej*.

Łatwo sprawdzić, że prędkość $\bar{v}$ punktu A równa się momentowi $\bar{\omega}$ względem A:

(2) $$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}.$$

Jeżeli przez $\bar{r}$ oznaczymy wektor $\overline{OA}$, gdzie O jest dowolnym punktem na prostej l, to $\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{AO}$, więc

(III) $$\bar{v} = \bar{r} \times \bar{\omega}.$$

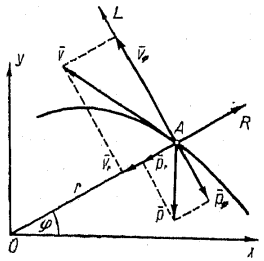
Oznaczając przez $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ rzuty wektora $\bar{\omega}$ na osie układu, przez x, y, z współrzędne punktu A i przez x_0, y_0, z_0 współrzędne punktu O, otrzymujemy

(IV) $$v_x = \omega_z(y-y_0) - \omega_y(z-z_0), \qquad v_y = \omega_x(z-z_0) - \omega_z(x-x_0),$$
$$v_z = \omega_y(x-x_0) - \omega_x(y-y_0).$$

Jeżeli w szczególności l przechodzi przez początek układu, to przyjmując $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, otrzymamy

(V) $$v_x = \omega_z y - \omega_y z, \qquad v_y = \omega_x z - \omega_z x, \qquad v_z = \omega_y x - \omega_x y.$$

§ 9. Ruch płaski w układzie biegunowym. Jeżeli punkt porusza się w płaszczyźnie xy, to położenie punktu wyznaczone jest w zupełności przez długość odcinka $OA = r$, zwanego *promieniem wodzącym*, oraz kąt φ, jaki odcinek OA tworzy z osią x-ów. Ruch punktu określony więc będzie dwiema funkcjami



$$r = F(t), \qquad \varphi = f(t).$$

Ponieważ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, więc tworząc pochodne względem czasu t, dostaniemy:

(1) $$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

(2) $$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi.$$

Z równań (1) i (2) możemy wyznaczyć $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$, znając $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ i na odwrót. Z równania (1) otrzymamy

(3) $$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2,$$

(4) $$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2},$$

Często wygodnem jest rozkładać prędkość i przyśpieszenie nie w kierunkach osi współrzędnych, lecz w kierunku promienia wodzącego i kierunku do niego prostopadłym, przyczem zwrot dodatni w tych kierunkach obieramy jak na rysunku. Składowe te nazywamy odpowiednio składową *radialną* i *transwersalną*.

Jeżeli a_x, a_y są współrzędnymi dowolnego wektora $\bar{a}$ wychodzącego z punktu $A(r, \varphi)$, to rzutując ten wektor na oś AR oraz AL, otrzymujemy jako składową radialną a_r i transwersalną a_φ:

$$a_r = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi, \qquad a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi.$$

Stosując te wzory do wektorów prędkości i przyśpieszenia, otrzymujemy na mocy równań (1) i (2):

(I) $$v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi},$$

(II) $$p_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad p_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}).$$

[1] Przykład. Punkt porusza się po linii spiralnej $r = a + b\varphi$ w ten sposób, że kąt φ jest proporcjonalny do czasu t. Jest więc $\varphi = \omega t$, gdzie ω jest współczynnikiem proporcjonalności. Wówczas $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{r} = b\dot{\varphi} = b\omega$ i $\ddot{r} = 0$, skąd

$$v_r = b\omega, \qquad p_r = -(a + b\omega t)\omega^2, \qquad v_\varphi = (a + b\omega t)\omega, \qquad p_\varphi = 2b\omega^2.$$

§ 10. Prędkość polowa. Niechaj ruch odbywa się w płaszczyźnie xy. Oznaczmy przez ΔS pole zakreślone przez promień wodzący r w czasie od t do $t + \Delta t$. Ze wzoru na obliczenie pola w układzie biegunowym współrzędnych otrzymamy

$$\Delta S = \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} r^2\, d\varphi,$$

skąd, na podstawie twierdzenia o wartości średniej,

(1) $$\Delta S = \tfrac{1}{2} r_s^2 \Delta\varphi,$$

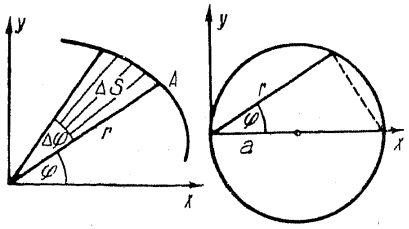
gdzie r_s oznacza wartość pośrednią między maximum a minimum promienia r w czasie od t do $t+\Delta t$.

Granicę $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$ nazywamy *prędkością polową* i oznaczamy ją przez A. Zatem na mocy (1) jest

(I) $$A=\tfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Ze wzorów (4) str. 47 otrzymujemy $\dot{\varphi}=\frac{1}{r^2}(x\dot{y}-y\dot{x})$. Zatem na mocy (I)

(II) $$A=\tfrac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x}).$$



1. 2.

Przykład. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie punktu poruszającego się po kole $x^2-2ax+y^2=0$ ze stałą prędkością polową h.

Równanie danego koła we współrzędnych biegunowych jest $r=2a\cos\varphi$. Warunek stałości prędkości polowej wyraża się równaniem

(2) $$\tfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}=h, \quad \text{czyli} \quad \dot{\varphi}=2h/r^2.$$

Różniczkując równanie koła, otrzymujemy

$$\dot{r}=-2a\dot{\varphi}\sin\varphi=-\frac{4ah}{r^2}\sin\varphi.$$

Zatem

$$v_r=-\frac{4ah}{r^2}\sin\varphi, \qquad v_\varphi=\frac{2h}{r}.$$

Z uwagi na to, że prędkość polowa jest stała, wzór (II), str. 47, $p_\varphi=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$, pociąga $p_\varphi=0$. Zatem przyśpieszenie ma zawsze kierunek promienia wodzącego.

Różniczkując pierwsze z równań (2), otrzymujemy $2r\dot{r}\dot{\varphi}+r^2\ddot{\varphi}=0$, więc $\ddot{\varphi}=-\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}=\frac{16ah^2}{r^5}\sin\varphi$; różniczkując zaś $\dot{r}$, dostajemy

$$\ddot{r}=-2a\ddot{\varphi}\sin\varphi-2a\dot{\varphi}^2\cos\varphi=-2a\sin\varphi\frac{16ah^2}{r^5}\sin\varphi-2a\cos\varphi\frac{4h^2}{r^4}=$$

$$=-\frac{32a^2h^2}{r^5}\sin^2\varphi-4a^2\cos^2\varphi\frac{4h^2}{r^5}=-\frac{16a^2h^2}{r^5}(1+\sin^2\varphi).$$

Ponieważ $r\dot{\varphi}^2=r\frac{4h^2}{r^4}=r^2\frac{4h^2}{r^5}=4a^2\cos^2\varphi\frac{4h^2}{r^5}=\frac{16a^2h^2}{r^5}\cos^2\varphi$, więc ze wzoru $p_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$ otrzymujemy

$$p_r=-32a^2h^2/r^5.$$

§ 11. Wymiary wielkości kinematycznych. Miara prędkości, przyśpieszenia i t. p. zależy od jednostek długości i czasu. Zajmiemy się pytaniem, jak zmieniają się te miary, gdy jednostki długości i czasu będą ulegały zmianom.

Obierzmy dowolnie jednostkę długości L i jednostkę czasu T. Przypuśćmy, że punkt w ruchu jednostajnym przebył drogę długości sL w czasie tT (jeżeli np. L oznacza cm, zaś T sek, to $sL=s$ cm, $tT=t$ sek). Miara prędkości v przy jednostkach L i T wynosi

$$v=s/t.$$

Obierzmy teraz nowe jednostki długości i czasu L', T'. Załóżmy, że między nowymi jednostkami a poprzednimi zachodzą związki

(1) $$L=\lambda L', \qquad T=\tau T',$$

gdzie λ i τ wskazują, ile jednostek nowych mieszczą jednostki stare. Oznaczając przez s', t', v' miary długości, czasu i prędkości w nowych jednostkach, otrzymamy

$$v'=s'/t'.$$

Ponieważ $sL=s\lambda L'$, zaś $tT=t\tau T'$, więc $s'=s\lambda$, $t'=t\tau$, skąd $v'=\frac{s\lambda}{t\tau}=\frac{s}{t}\cdot\frac{\lambda}{\tau}$, a więc

$$v'=v\frac{\lambda}{\tau} \qquad (\text{lub} \quad v'=v\lambda\tau^{-1}).$$

Jednostkę prędkości (t. j. prędkość, której miara wynosi 1) przy jednostkach L i T oznaczamy przez

$$\frac{L}{T} \qquad \text{lub} \qquad LT^{-1}.$$

Prędkość, której miara wynosi v, oznaczamy przez

$$v\frac{L}{T} \qquad \text{lub} \qquad vLT^{-1}.$$

Np. $5\,\text{cm}\cdot\text{sek}^{-1}$ oznacza prędkość, której miara wynosi 5, jeżeli za jednostkę długości przyjmiemy cm a za jednostkę czasu sek.

Załóżmy teraz, że obraliśmy nowe jednostki długości i czasu, L' i T', związane z dawnymi przez równania (1). Podstawmy w wyrażeniu vLT^{-1} zamiast L i T odpowiednio $\lambda L'$ i $\tau T'$, a następnie przekształćmy otrzymane wyrażenie tak, jak gdyby litery L' i T' oznaczały liczby. Otrzymamy:

$$vLT^{-1}=v\lambda L'\tau^{-1}T'^{-1}=v\lambda\tau^{-1}L'T'^{-1}.$$

Podstawmy $v'=v\lambda\tau^{-1}$. Zatem

$$vLT^{-1}=v'L'T'^{-1}.$$

Zauważmy, że v' jest według definicji miarą prędkości przy jednostkach L' i T'; zatem wyrażenie $v'L'T'^{-1}$ przedstawia prędkość przy jednostkach długości i czasu L', T'.

Widzimy stąd, że symbol LT^{-1} pozwala wyznaczyć rachunkiem formalnym miarę prędkości przy zmianie jednostki.

Przykład. Wyznaczyć miarę prędkości 12 cm. sek^{-1} przy jednostkach m i min.

Mamy cm=0·01 m, sek=1/60 min. Rachując formalnie, otrzymamy

$$12\,\text{cm.sek}^{-1}=12\cdot 0{\cdot}01\,\text{m}\cdot(1/60\,\text{min})^{-1}=12\cdot 0{\cdot}01\cdot 60\,\text{m.min}^{-1}=7{\cdot}2\,\text{m.min}^{-1}.$$

A więc 7,2 jest miarą danej prędkości przy jednostkach m i min.

Wyrażenie LT^{-1}, w którym L i T nie oznaczają szczególnych jednostek, lecz są symbolami dowolnych jednostek długości i czasu, nazywamy *wymiarem prędkości*.

Ogólne określenie wymiaru. Pojęcie wymiaru podane wyżej dla prędkości można uogólnić na inne wielkości, jak np. przyśpieszenie, prędkość i przyśpieszenie kątowe, etc.

Wymiarem jakiejkolwiek wielkości A nazywać będziemy wyrażenie

$$L^\alpha T^\beta,$$

gdzie wykładniki α, β są liczbami spełniającymi warunek: jeżeli a jest miarą wielkości A przy jednostkach długości i czasu L, T, zaś a' jej miarą przy jednostkach L', T' związanych z L i T równaniami (1), to

(2) $$a'=a\lambda^\alpha\tau^\beta.$$

Wymiar wielkości A oznaczamy przez $[A]$. Zatem

$$[A]=L^\alpha T^\beta,$$

Jednostkę wielkości A przy jednostkach długości i czasu L, T oznaczamy przez $L^\alpha T^\beta$. Jeżeli więc a jest miarą wielkości A przy jednostce $L^\alpha T^\beta$, to wielkość tę oznaczamy przez

$$aL^\alpha T^\beta.$$

Załóżmy teraz, że wprowadziliśmy nowe jednostki długości i czasu L', T' związane z poprzednimi przez równania (1), str. 49. Rachując formalnie, otrzymujemy $aL^\alpha T^\beta=a(\lambda L')^\alpha(\tau T')^\beta=a\lambda^\alpha L'^\alpha\tau^\beta T'^\beta$, więc $aL^\alpha T^\beta=(a\lambda^\alpha\tau^\beta)L'^\alpha T'^\beta$. Stąd, oznaczając przez a' miarę danej wielkości przy jednostkach L', T', dostajemy na mocy (2)

(3) $$aL^\alpha T^\beta=a'L'^\alpha T'^\beta.$$

A więc rachunek formalny pozwala wyznaczyć miarę przy zmianie jednostek.

Przykład. Wymiar przyśpieszenia jest LT^{-2} (co można stwierdzić podobnie jak przy prędkości). Przedstawić przyśpieszenie 5 cm. sek^{-2} przy jednostkach m i min.

Ponieważ cm=0,01 m, sek=1/60 min., więc $\lambda=0{,}01$, $\tau=1/60$, $\alpha=1$, $\beta=-2$, skąd na mocy (3) $5\,\text{cm}\cdot\text{sek}^{-2}=5(0{,}01\,\text{m})\,(1/60\,\text{min})^{-2}=5\cdot 0{,}01\cdot 60^2\,\text{m}\cdot\text{min}^{-2}$, czyli $5\,\text{cm}\cdot\text{sek}^{-2}=180\,\text{m}\cdot\text{min}^{-2}$.

A zatem 180 jest miarą danego przyśpieszenia w jednostkach m i min.

Wyznaczanie wymiaru. Do wyznaczania wymiarów pomocnym jest następujące

Twierdzenie. *Niech dane będą wielkości A, B, dla których*

(4) $$[A]=L^\alpha T^\beta,\qquad [B]=L^\gamma T^\delta,$$

oraz trzecia wielkość C uzależniona od A i B w taki sposób, że oznaczając przez a, b, c miary wielkości A, B, C wyrażone w dowolnych jednostkach L i T, mamy zawsze

(5) $$c=ga^pb^q,$$

gdzie liczby g, p, q nie zależą od jednostek L i T.

Przy tych założeniach jest

(I) $$[C]=L^{p\alpha+q\gamma}T^{p\beta+q\delta}.$$

Wzór ten można napisać jeszcze inaczej. Wymiar $[C]$ możemy otrzymać, rachując formalnie jak następuje:

$$[C]=(L^\alpha T^\beta)^p(L^\gamma T^\delta)^q=L^{p\alpha}T^{p\beta}L^{q\gamma}T^{q\delta}=L^{pq+q\gamma}T^{p\beta+q\delta};$$

wzorowi (I) możemy więc również nadać postać

$$[C]=[A]^p[B]^q.$$

Dowód. Obierzmy nowe jednostki L' i T' związane z poprzednimi przez równania (1), str. 49. Oznaczmy przez a', b', c' miary wielkości A, B, C przy nowych jednostkach. Mamy wedle założenia (5) $c'=ga'^p b'^q$. Na mocy (4) jest $a'=\lambda^\alpha \tau^\beta a$ i $b'=\lambda^\gamma \tau^\delta b$, zatem $c'=g(\lambda^\alpha \tau^\beta a)^p(\lambda^\gamma \tau^\delta b)^q=\lambda^{p\alpha+q\gamma}\tau^{p\beta+q\delta}c$, a stąd w myśl definicji wymiaru wynika wzór (I), c. b. d. d.

Z twierdzenia powyższego wypływają następujące wnioski:

Wniosek 1. *Jeżeli wzór* (5) *ma postać*

$$c=ab, \quad \text{to} \quad [C]=[A][B]=L^{\alpha+\gamma}T^{\beta+\delta}$$
$$c=a/b, \quad \text{,,} \quad [C]=[A]/[B]=L^{\alpha-\gamma}T^{\beta-\delta}$$
$$c=a^p, \quad \text{,,} \quad [C]=[A]^p=L^{\alpha p}T^{\beta p}.$$

Przykłady: 1. Prędkość wyraża się wzorem $v=s/t$. Zatem

$$[v]=[s]/[t]=L/T=LT^{-1}.$$

2. Przyśpieszenie p w ruchu jednostajnie przyśpieszonym wyraża się wzorem $p=v/t$. Zatem

$$[p]=[v]/[t]=LT^{-1}/T=LT^{-2}.$$

Podobny wynik otrzymamy, opierając się na wzorze $s=\frac{1}{2}pt^2$. Obliczamy z niego $p=2s/t^2$. Zatem

$$[p]=[s]/[t]^2=L/T^2=LT^{-2}.$$

3. Prędkość kątowa jest $\omega=d\varphi/dt$. Wymiar kąta φ jest L^0T^0, gdyż miara łukowa φ nie zależy od jednostek długości. Zatem

$$[\omega]=1/T=T^{-1}.$$

4. Przyśpieszenie kątowe jest $\varepsilon=d^2\varphi/dt^2$, więc

$$[\varepsilon]=1/T^2=T^{-2}.$$

Wniosek 2. Pewne stałe mogą zależeć od wyboru jednostek długości i czasu. Możemy wtedy mówić o *wymiarze* tych *stałych*.

Przykład. Np. w pewnym ruchu przyśpieszenie jest co do wartości proporcjonalne do kwadratu prędkości. Oznaczając współczynnik proporcjonalności przez k, mamy

$$p=kv^2.$$

Przy jednostkach cm, sek jest $k=2$. Obliczyć k przy jednostkach m i min. Mamy $k=p/v^2$, zatem $[k]=[p]/[v]^2=LT^{-2}/(LT^{-1})^2$, więc $[k]=L^{-1}$, skąd

$$2\,\text{cm}^{-1}=2(1/100\,\text{m})^{-1}=200\,\text{m}^{-1}.$$

W układzie jednostek m i min jest więc $k=200$.

II. Zmiana układu odniesienia

§ 12. Związek między współrzędnymi. Prędkość i przyśpieszenie punktu zależą od układu odniesienia, względem którego badamy ruch punktu. Ruch tego samego punktu będzie więc opisany odmiennie przez dwóch obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie.

Jeżeli np. jedziemy pociągiem, wówczas podróżni jadący z nami są względem nas w spoczynku. Dla obserwatora stojącego przy torze podróżni poruszają się z prędkością pociągu. Możemy to wypowiedzieć w ten sposób: względem układu odniesienia związanego z pociągiem podróżni są w spoczynku, a względem układu odniesienia związanego z ziemią podróżni poruszają się z prędkością pociągu.

Ruchy planet i słońca względem układu odniesienia związanego z ziemią są bardzo skomplikowane. Kopernik zrobił odkrycie, że ruchy planet przedstawiają się o wiele prościej, jeżeli jako układ odniesienia obierzemy układ związany ze słońcem.

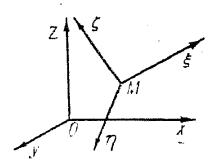
Niech dany będzie układ odniesienia $O(x, y, z)$ i drugi jeszcze układ $M(\xi, \eta, \zeta)$ poruszający się względem poprzedniego (rys. 1). Dla odróżnienia układ (x, y, z) nazywać będziemy układem stałym, a układ (ξ, η, ζ) ruchomym. Ruch tego samego punktu będzie przedstawiał się rozmaicie w obu układach.

Zajmiemy się zadaniem wyznaczenia ruchu punktu A względem jednego układu, gdy znany jest ten ruch względem innego układu.

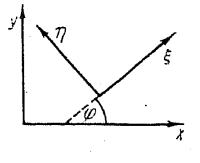
Zadanie powyższe jest bardzo ważne i spotykamy się z nim w wielu przypadkach.

Oznaczmy przez x_0, y_0, z_0 współrzędne początku M w układzie $O(x, y, z)$, a przez ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne początku O w układzie $M(\xi, \eta, \zeta)$. Niechaj $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ będą kątami między osiami obu układów, jak wskazuje tabelka:

osie	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3



1.



2.

Jeżeli x, y, z i ξ, η, ζ są współrzędnymi punktu A odpowiednio w układzie pierwszym i drugim, wówczas, jak wiadomo z geometrii analitycznej,

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} x &= x_0+\xi\cos\alpha_1+\eta\cos\alpha_2+\zeta\cos\alpha_3\\ y &= y_0+\xi\cos\beta_1+\eta\cos\beta_2+\zeta\cos\beta_3\\ z &= z_0+\xi\cos\gamma_1+\eta\cos\gamma_2+\zeta\cos\gamma_3 \end{aligned}$$

$$\text{(I')}\quad \begin{aligned} \xi &= \xi_0+x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1\\ \eta &= \eta_0+x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2\\ \zeta &= \zeta_0+x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

Ruch układu $M(\xi, \eta, \zeta)$ względem $O(x, y, z)$ będzie znany, jeżeli dla każdej chwili t podane będą współrzędne x_0, y_0, z_0 i kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$. Zatem współrzędne x_0, y_0, z_0, i kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ są funkcjami czasu t. Jeżeli ruch punktu A względem układu $M(\xi, \eta, \zeta)$ określony jest funkcjami $\xi=f(t)$, $\eta=\varphi(t)$, $\zeta=\psi(t)$, wówczas ruch względem układu $O(x, y, z)$ otrzymamy ze wzorów (I)

$$x=x_0+f(t)\cos\alpha_1+\varphi(t)\cos\alpha_2+\psi(t)\cos\alpha_3$$

i podobnie dla y, z.

Jeżeli ruch punktu A odbywa się w płaszczyźnie Π, to obierając osie x, y i ξ, η w tej płaszczyźnie i oznaczając przez φ kąt między osiami x a ξ (str. 53, rys. 2), otrzymamy:

$$\text{(II)}\quad x=x_0+\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi, \qquad y=y_0+\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi$$

$$\text{(II')}\quad \xi=\xi_0+x\cos\varphi+y\sin\varphi, \qquad \eta=\eta_0-x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

Jeżeli kierunki osi układu ruchomego $M(\xi, \eta, \zeta)$ nie zmieniają się, powiadamy, że układ ten porusza się ruchem *postępowym*.

W tym przypadku kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ są stałe.

Mówimy, że układ ruchomy obraca się około osi l z prędkością kątową ω, jeżeli punkty położone na osiach ξ, η, ζ obracają się około osi l z prędkością kątową ω.

Niech układ $M(\xi, \eta, \zeta)$ obraca się około osi ζ z prędkością kątową ω. Przyjmijmy, że w chwili $t=0$ układ stały $O(x, y, z)$ pokrywał się z układem ruchomym $M(\xi, \eta, \zeta)$. Mamy zatem $x_0=y_0=z_0=\xi_0=\eta_0=\zeta_0=0$. Oznaczmy przez φ kąt między osiami x, ξ. Oczywiście $\varphi=\omega t$. Ponieważ osie x, y i ξ, η leżą stale w jednej płaszczyźnie, więc na mocy (II i (II'):

$$\text{(III)}\quad x=\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t, \qquad y=\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t, \qquad z=\zeta$$

$$\text{(III')}\quad \xi=x\cos\omega t+y\sin\omega t, \qquad \eta=-x\sin\omega t+y\cos\omega t, \qquad \zeta=z.$$

Przykład 1. Ruch punktu względem układu stałego określony jest równaniami

$$\text{(1)}\qquad x=a\cos\omega t, \qquad y=b\sin\omega t,$$

a więc tor punktu jest elipsą o równaniu $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

Jak przedstawia się ruch tego punktu w układzie ruchomym o tym samym początku, jeżeli układ ten obraca się w kierunku dodatnim z prędkością kątową ω?

Zakładamy przytem, że w chwili początkowej $t=0$ oba układy się pokrywają.

Otóż oznaczając przez ξ, η współrzędne dowolnego punktu względem układu ruchomego, mamy

$$\xi=x\cos\omega t+y\sin\omega t, \qquad \eta=-x\sin\omega t+y\cos\omega t,$$

gdyż na mocy założenia kąt φ zawarty między osiami x, ξ wynosi tu ωt. Podstawiając po prawej stronie tych wzorów wyrażenia (1), otrzymujemy równania krzywej opisanej przez punkt w układzie ruchomym

$$\xi=a\cos^2\omega t+b\sin^2\omega t, \qquad \eta=(b-a)\sin\omega t\cos\omega t,$$

czyli, z uwagi na związki $\cos^2\omega t=\dfrac{1+\cos 2\omega t}{2}$, $\sin^2\omega t=\dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}$ i $\sin\omega t\cos\omega t=\frac{1}{2}\sin 2\omega t$:

$$\xi=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos 2\omega t, \qquad \eta=\frac{b-a}{2}\sin 2\omega t,$$

skąd

$$\left[\xi-\frac{a+b}{2}\right]^2+\eta^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

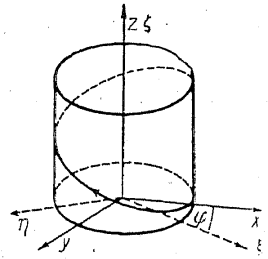
A więc: ze względu na układ ruchomy punkt opisuje koło, gdy $a\neq b$, zaś znajduje się w spoczynku, gdy $a=b$.

Przykład 2. Ruch po linii śrubowej. Ważnym przykładem ruchu punktu po krzywej przestrzennej jest *ruch śrubowy*, który powstaje w sposób następujący. Układ ruchomy (ξ, η, ζ) obraca się z prędkością kątową stałą ω około osi ζ, zaś punkt porusza się względem układu ruchomego ruchem jednostajnym z prędkością c po prostej $\xi=r$, $\eta=0$ (t. j. po prostej równoległej do osi ζ i przecinającej oś ξ w punkcie $\xi=r$).

Ruch taki powstaje np. gdy walec obraca się około swej osi z prędkością kątową ω, zaś punkt porusza się po tworzącej walca ruchem jednostajnym.

Niech w chwili $t=0$ układ stały (x, y, z) pokrywa się z układem ruchomym (ξ, η, ζ), zaś punkt ruchomy ma współrzędne $r, 0, 0$. Na mocy (III)

(2) $$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t, \quad z = ct.$$



Równania powyższe możemy również odczytać wprost z rysunku. Przedstawiają one parametrycznie równania linii śrubowej. Ruch punktu odbywa się więc po linii śrubowej. Różniczkując (2) otrzymamy

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t, \quad \dot{y} = r\omega\cos\omega t, \quad \dot{z} = c$$
$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t, \quad \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t, \quad \ddot{z} = 0.$$

Zatem

$$|\bar{v}| = \sqrt{r^2\omega^2 + c^2}, \qquad |\bar{p}| = r\omega^2.$$

A więc: *w ruchu śrubowym prędkość i przyśpieszenie są stałe co do wartości bezwzględnej.*

§ 13. Związek między prędkościami. Prędkość punktu A względem układu stałego (x, y, z) nazywamy *prędkością bezwzględną* i oznaczamy przez $\bar{v}_b$.

Prędkość punktu względem układu ruchomego nazywamy *prędkością względną* i oznaczamy przez $\bar{v}_w$.

Wyobraźmy sobie, że punkt A, którego ruch badamy, związany jest z układem ruchomym (ξ, η, ζ) *sztywnie*, t. zn. że jego współrzędne ξ, η, ζ nie zmieniają się. Przy tym założeniu punkt A, złączony z układem ruchomym, posiadałby pewną prędkość względem układu stałego. Prędkość tę nazywamy *prędkością unoszenia* i oznaczamy przez $\bar{v}_u$.

Możemy także powiedzieć, że prędkością unoszenia punktu A w chwili danej nazywamy prędkość punktu złączonego z układem ruchomym i pokrywającego się w chwili tej z punktem A.

Przypuśćmy np., że po korytarzu pociągu biegnie podróżny. Za układ stały obierzmy układ związany z ziemią, za układ ruchomy — układ związany z pociągiem.

Człowiek stojący przy torze będzie obserwował ruch podróżnego względem układu stałego, a człowiek siedzący w wagonie — względem układu ruchomego.

Prędkość podróżnego, jaką zaobserwuje człowiek stojący przy torze, będzie prędkością *bezwzględną*. Prędkość, jaką zaobserwuje człowiek siedzący w pociągu, będzie prędkością *względną*. Prędkością *unoszenia* będzie prędkość tego punktu podłogi korytarza, którego dotyka w danej chwili podróżny biegnący przez korytarz.

Prędkość unoszenia będzie więc w tym przypadku prędkością pociągu. Prędkość bezwzględna będzie większa lub mniejsza od prędkości unoszenia zależnie od tego, czy podróżny biegnie w kierunku ruchu pociągu, czy przeciwnie.

Zajmiemy się teraz związkami zachodzącymi między prędkością bezwzględną, względną i unoszenia.

Punkt A ma względem układu stałego współrzędne x, y, z. Zatem rzuty prędkości bezwzględnej na osie układu stałego będą:

(1) $$v_{b_x} = \dot{x}, \qquad v_{b_y} = \dot{y}, \qquad v_{b_z} = \dot{z}.$$

Podobnie, rzuty prędkości względnej na osie układu ruchomego będą

(2) $$v_{w_\xi} = \dot{\xi}, \qquad v_{w_\eta} = \dot{\eta}, \qquad v_{w_\zeta} = \dot{\zeta}.$$

Aby porównać prędkość bezwzględną ze względną, utwórzmy rzuty prędkości względnej na osie układu stałego. Otrzymamy

(3) $$v_{w_x} = \dot{\xi}\cos\alpha_1 + \dot{\eta}\cos\alpha_2 + \dot{\zeta}\cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Na mocy (I), str. 54, współrzędne x, y, z względem układu stałego wynoszą

$$x = x_0 + \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\alpha_2 + \zeta\cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Różniczkując powyższy wzór, dostaniemy więc na mocy (1)

(4) $$v_{b_x} = \dot{x} = \dot{x}_0 + \xi\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \eta\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \zeta\frac{d\cos\alpha_3}{dt} + \dot{\xi}\cos\alpha_1 + \dot{\eta}\cos\alpha_2 + \dot{\zeta}\cos\alpha_3.$$

Prędkość unoszenia otrzymamy, zakładając, że punkt A jest związany z układem ruchomym sztywnie, t. zn., że współrzędne ξ, η, ζ

są stałe, czyli że $\dot{\xi}=0$, $\dot{\eta}=0$, $\dot{\zeta}=0$. Na mocy więc (4) rzuty prędkości unoszenia na osie układu (x, y, z) wyniosą

$$v_{u_x}=\dot{x}_0+\xi\frac{d\cos\alpha_1}{dt}+\eta\frac{d\cos\alpha_2}{dt}+\zeta\frac{d\cos\alpha_3}{dt} \qquad \text{i t. d.} \tag{5}$$

Na mocy (3) i (5) otrzymujemy z (4) $v_{b_x}=v_{u_x}+v_{w_x}$ i podobnie $v_{b_y}=v_{u_y}+v_{w_y}$, $v_{b_z}=v_{u_z}+v_{w_z}$, czyli

$$\bar{v}_b=\bar{v}_u+\bar{v}_w. \tag{I}$$

Udowodniliśmy więc, że *prędkość bezwzględna równa się sumie prędkości unoszenia i prędkości względnej.*

Gdy układ ruchomy porusza się ruchem postępowym, kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ są stałe, zatem pochodne $\frac{d\cos\alpha_1}{dt}, \frac{d\cos\alpha_2}{dt}, \ldots, \frac{d\cos\gamma_3}{dt}$ są zerami. Ze wzoru (5) otrzymujemy przeto

$$v_{u_x}=\dot{x}_0, \qquad v_{u_y}=\dot{y}_0, \qquad v_{u_z}=\dot{z}_0.$$

Jeżeli więc $\bar{v}_0$ jest prędkością początku układu ruchomego, to

$$\bar{v}_u=\bar{v}_0.$$

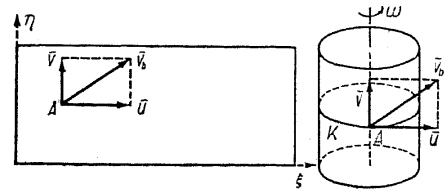
Zatem: *jeżeli układ porusza się ruchem postępowym, to prędkość unoszenia jest dla wszystkich punktów ta sama i równa się prędkości początku układu.*

Uwaga. O punkcie A mówimy, że wykonywa dwa ruchy równocześnie: jeden z prędkością względną, a drugi z prędkością unoszenia. Ruch względem układu stałego nazywamy *ruchem złożonym* z obu ruchów składowych albo ich ruchem *wypadkowym.*

Prędkość ruchu wypadkowego jest więc sumą prędkości ruchów składowych. Aby prędkość ruchu wypadkowego była określona, wystarczy podać prędkość ruchów składowych; nie potrzeba przy tym podawać, która z prędkości jest względna, a która jest prędkością unoszenia.

Przykład 1. Pociąg porusza się z prędkością $\bar{u}$; po podłodze wagonu toczy się punkt A z prędkością $\bar{v}$ względem podłogi. Jaka jest prędkość punktu A względem ziemi?

Przyjmijmy, że osie układu (x, y, z) związane są z ziemią, zaś osie ξ, η, ζ z wagonem (rys. 1). Prędkością unoszenia punktu A jest więc $\bar{u}$. Taką bowiem prędkość miałby punkt A względem ziemi, gdyby był w spoczynku względem wagonu. Prędkość względna punktu A niechaj wynosi $\bar{v}$. Zatem jego prędkość bezwzględna $\bar{v}_b$ (t. j. prędkość względem ziemi) wyniesie



1. 2.

$$\bar{v}_b=\bar{u}+\bar{v}.$$

Przykład 2. Walec obraca się około osi z prędkością kątową ω. Punkt A porusza się po tworzącej walca z prędkością $\bar{v}$ (względem tworzącej). Jaka jest prędkość bezwzględna punktu A?

Prędkość względna wynosi $\bar{v}$. Aby wyznaczyć prędkość unoszenia, zauważmy, że gdyby punkt A był z walcem związany, wówczas poruszałby się po kole K z prędkością kątową ω (rys. 2). Jeżeli więc r oznacza promień podstawy walca, to prędkość unoszenia $\bar{u}$ jest styczna do koła K i $|\bar{u}|=r\omega$. Prędkość bezwzględna $\bar{v}_b$ wynosi zatem $\bar{v}_b=\bar{v}+\bar{u}$, a ponieważ $\bar{v}\perp\bar{u}$, więc

$$|\bar{v}_b|=\sqrt{v^2+u^2}=\sqrt{v^2+r^2\omega^2} \qquad (v=|\bar{v}|, \quad u=|\bar{u}|).$$

§ 14. Związki między przyśpieszeniami. Zajmiemy się teraz związkami zachodzącymi między przyśpieszeniami punktu względem różnych układów. Przyjmijmy, że mamy dwa układy: stały (x, y, z) i ruchomy (ξ, η, ζ).

Przyśpieszenie punktu A względem układu stałego nazywamy *przyśpieszeniem bezwzględnym* $\bar{p}_b$.

Przyśpieszenie punktu względem układu ruchomego nazywamy *przyśpieszeniem względnym* $\bar{p}_w$.

Przyśpieszenie, jakie by punkt A posiadał (względem układu stałego), gdyby z układem ruchomym był związany sztywnie, nazywamy *przyśpieszeniem unoszenia* $\bar{p}_u$.

Możemy również powiedzieć, że przyśpieszeniem unoszenia nazywamy przyśpieszenie takiego punktu związanego z układem ruchomym, który w danej chwili pokrywa się z punktem A.

Jeżeli np. po korytarzu wagonu biegnie podróżny i za układ stały obierzemy układ związany z ziemią, za ruchomy zaś — związany z wagonem, to: przyśpieszeniem bezwzględnym podróżnego będzie przyśpieszenie, jakie zaobserwuje człowiek stojący przy torze, przyśpieszeniem względnym będzie przyśpieszenie, jakie zauważą podróżni jadący tym wagonem, wreszcie przyśpieszeniem unoszenia będzie przyśpieszenie względem ziemi tego punktu podłogi, którego w danej chwili dotyka biegnący podróżny.

Oznaczmy przez x, y, z współrzędne punktu A względem układu stałego, zaś przez ξ, η, ζ względem układu ruchomego.

Rzuty przyśpieszenia bezwzględnego $\bar{p}_b$ na osie x, y, z są:

(1) $$p_{b_x} = \ddot{x}, \qquad p_{b_y} = \ddot{y}, \qquad p_{b_z} = \ddot{z}.$$

Rzuty przyśpieszenia względnego $\bar{p}_w$ na osie ξ, η, ζ są:

(2) $$p_{w_\xi} = \ddot{\xi}, \qquad p_{w_\eta} = \ddot{\eta}, \qquad p_{w_\zeta} = \ddot{\zeta}.$$

Utwórzmy rzuty wektora $\bar{p}_w$ na osie układu stałego. Otrzymamy

(3) $$p_{w_x} = \ddot{\xi}\cos\alpha_1 + \ddot{\eta}\cos\alpha_2 + \ddot{\zeta}\cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Na mocy (I), str. 54, mamy

(4) $$x = x_0 + \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\alpha_2 + \zeta\cos\alpha_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Przyśpieszenie unoszenia otrzymamy, zakładając, że punkt A jest sztywnie związany z układem ruchomym, czyli że ξ, η, ζ są stałe, a więc że pochodne $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$, $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ są równe zeru.

Rzuty wektora $\bar{p}_u$ na osie x, y, z otrzymamy, różniczkując dwukrotnie równanie (4) przy założeniu, że ξ, η, ζ są stałymi:

(5) $$p_{u_x} = \ddot{x}_0 + \xi\frac{d^2\cos\alpha_1}{dt^2} + \eta\frac{d^2\cos\alpha_2}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\cos\alpha_3}{dt^2} \qquad \text{i t. d.}$$

Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ są stałe, to $p_{u_x} = \ddot{x}_0$.

A więc: *jeżeli układ porusza się ruchem postępowym, to przyśpieszenie unoszenia jest dla wszystkich punktów równe przyśpieszeniu początku układu.*

Zróżniczkujmy dwukrotnie równanie (4). Otrzymamy

(6) $$\begin{aligned}\ddot{x} = \ddot{x}_0 &+ \xi\frac{d^2\cos\alpha_1}{dt^2} + \eta\frac{d^2\cos\alpha_2}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\cos\alpha_3}{dt^2} + \\ &+ \ddot{\xi}\cos\alpha_1 + \ddot{\eta}\cos\alpha_2 + \ddot{\zeta}\cos\alpha_3 + \\ &+ 2\left(\dot{\xi}\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right) \qquad \text{i t. d.}\end{aligned}$$

Wedle (3) i (5) wyrażenia w pierwszym i w drugim wierszu oznaczają rzuty $\bar{p}_u$ i $\bar{p}_w$ na osie x, y, z.

Oznaczmy przez $\bar{p}_C$ wektor, którego rzuty na osie x, y, z wyrażają się wzorami

(7) $$p_{C_x} = 2\left(\dot{\xi}\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right) \qquad \text{i t. d.}$$

Wektor $\bar{p}_C$ nazywamy *przyśpieszeniem Coriolisa.*

Wzór (6) na mocy (1), (3), (5) i (7) możemy napisać w postaci $p_{b_x} = p_{u_x} + p_{w_x} + p_{C_x}$. Podobnie otrzymamy $p_{b_y} = p_{u_y} + p_{w_y} + p_{C_y}$ i $p_{b_z} = p_{u_z} + p_{w_z} + p_{C_z}$. Możemy więc napisać

(I) $$\bar{p}_b = \bar{p}_u + \bar{p}_w + \bar{p}_C.$$

A więc: *przyśpieszenie bezwzględne równa się sumie przyśpieszeń: unoszenia, względnego i Coriolisa.*

Przyśpieszenie Coriolisa. Aby uzmysłowić sobie znaczenie przyśpieszenia Coriolisa, wykreślmy z początku M układu ruchomego wektor prędkości względnej $\overline{MB} = \bar{v}_w$. Współrzędne punktu B względem układu (ξ, η, ζ) wynoszą $v_{w_\xi}, v_{w_\eta}, v_{w_\zeta}$ czyli $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$. Wyobraźmy sobie, że punkt B jest sztywnie związany z układem (ξ, η, ζ). Prędkość $\bar{u}$ punktu B względem układu stałego (x, y, z) równa się zatem jego prędkości unoszenia (bo jego prędkość względna jest zerem). Pisząc $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ zamiast ξ, η, ζ, otrzymamy więc na mocy (5), str. 58:

$$u_x = \dot{x}_0 + \dot{\xi}\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\cos\alpha_3}{dt} \qquad \text{i t. d.}$$

Porównując ze wzorem (7), otrzymamy:

$$u_x = \dot{x}_0 + \tfrac{1}{2}p_{C_x}, \qquad u_y = \dot{y}_0 + \tfrac{1}{2}p_{C_y}, \qquad u_z = \dot{z}_0 + \tfrac{1}{2}p_{C_z}.$$

Jeżeli więc przez $\bar{v}_0$ oznaczymy prędkość początku układu ruchomego, to $\bar{u} = \bar{v}_0 + \frac{1}{2}\bar{p}_C$, zatem

(II) $$\bar{p}_C = 2(\bar{u} - \bar{v}_0).$$

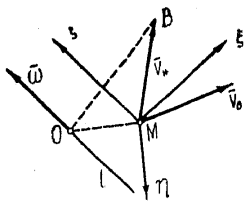
Różnica $\bar{u} - \bar{v}_0$ jest to prędkość punktu B względem początku M układu ruchomego (ξ, η, ζ) (por. § 14, str. 65, (I)).

A więc: *aby otrzymać przyśpieszenie Coriolisa, wykreślamy z początku układu ruchomego wektor prędkości względnej $\bar{v}_w$ i wyobrażamy sobie, że wektor ten jest związany sztywnie z układem ruchomym.*

Przyśpieszenie Coriolisa równa się podwojonej prędkości końca wektora $\bar{v}_w$ względem jego początku.

Wynika stąd, że *przyśpieszenie Coriolisa jest zerem, jeżeli prędkość względna jest zerem lub jeżeli układ ruchomy porusza się ruchem postępowym.*

W tych bowiem przypadkach początek i koniec wektora $\bar{v}_w$ ma tę samą prędkość. Można to również łatwo odczytać ze wzoru (7), kładąc $\dot{\xi}=0$, $\dot{\eta}=0$, $\dot{\zeta}=0$ lub $a_1=\text{const.}$, $a_2=\text{const.}$, $a_3=\text{const.}$ i t. d.



Niech układ (ξ, η, ζ) obraca się około pewnej osi l z prędkością kątową $\bar{\omega}$. Zachowując poprzednie znakowanie i obierając dowolny punkt O na osi l, otrzymamy

$$\bar{u}=\overline{OB}\times\bar{\omega}, \qquad \bar{v}_0=\overline{OM}\times\bar{\omega}.$$

Zatem $\bar{p}_C=2(\bar{u}-\bar{v}_0)=2(\overline{OB}-\overline{OM})\times\bar{\omega}$.

Lecz $\overline{OB}-\overline{OM}=\bar{v}_w$. A więc

(III) $$\bar{p}_C=2\bar{v}_w\times\bar{\omega}.$$

Widzimy więc, że *przyśpieszenie Coriolisa równa się podwojonemu iloczynowi wektorowemu wektora prędkości względnej i prędkości kątowej.*

Przyśpieszenie Coriolisa jest tedy prostopadłe do osi obrotu i prędkości względnej i wynosi

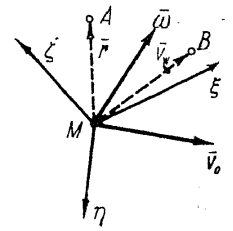
$$|\bar{p}_C|=2|\bar{\omega}|\,|\bar{v}_w|\sin\alpha,$$

gdzie α jest kątem między osią obrotu a prędkością względną. Wynika stąd, że przyśpieszenie Coriolisa jest zerem (poza tym, gdy $\bar{v}_w=0$), wówczas gdy $\alpha=0$, t. j. gdy wektor $\bar{v}_w$ jest równoległy do $\bar{\omega}$.

Wykażemy później (w rozdziale VII), że w każdej chwili prędkości punktów związanych sztywnie z układem ruchomym (ξ, η, ζ) są takie, jak gdyby układ wykonywał dwa ruchy równocześnie: jeden ruch postępowy z prędkością początku układu, a drugi obrotowy około pewnej osi, przechodzącej przez początek układu, z prędkością kątową $\bar{\omega}$.

Tę oś obrotu nazywamy *osią chwilowego obrotu*; $\bar{\omega}$ nazywamy *chwilową prędkością kątową.*

W każdym momencie czasu może być inna oś chwilowego obrotu i inne $\bar{\omega}$. A więc, oznaczając przez $\bar{v}_0$ prędkość początku układu M, otrzymamy na prędkość unoszenia $\bar{v}_u$ punktu A wzór



$$\bar{v}_u=\bar{v}_0+\overline{MA}\times\bar{\omega}.$$

Jeżeli więc przez B oznaczymy koniec wektora prędkości względnej wykreślonej z początku układu, zaś przez $\bar{u}$ (jak poprzednio) prędkość unoszenia punktu B, to, $\bar{u}=\bar{v}_0+\overline{MB}\times\bar{\omega}=\bar{v}_0+\bar{v}_w\times\bar{\omega}$, skąd na mocy (II), str. 61

(IV) $$\bar{p}_C=2\bar{v}_w\times\bar{\omega}.$$

Wzór (IV) przedstawia przyśpieszenie Coriolisa w przypadku ogólnym.

Przyśpieszenie Coriolisa jest więc zerem: 1° *gdy* $\bar{\omega}=0$, (t. j. gdy układ porusza się ruchem postępowym), 2° *gdy* $\bar{v}_w=0$, 3° *gdy* $\bar{\omega}\parallel\bar{v}_w$.

Przykład 1. Pociąg porusza po torze prostolinijnym z przyśpieszeniem $\bar{p}$. Po podłodze wagonu porusza się punkt z przyśpieszeniem $\bar{a}$ względem wagonu. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu względem ziemi.

Przyśpieszenie względne jest $\bar{p}_w=\bar{a}$, przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u=\bar{p}$. Ponieważ układ odniesienia związany z wagonem porusza się ruchem postępowym, więc przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C=0$. Zatem przyśpieszenie bezwzględne (t. j. przyśpieszenie względem ziemi) wynosi

$$\bar{p}_b=\bar{a}+\bar{p}.$$

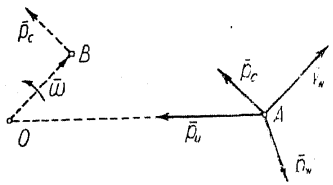
Przykład 2. Walec o promieniu r obraca się około osi z prędkością kątową ω. Po tworzącej walca porusza się punkt A z prędkością stałą $\bar{v}$ względem tworzącej. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu A względem układu stałego.

Obierzmy układ ruchomy związany z walcem, przyjmując oś walca za oś ζ. Gdyby punkt A był sztywnie związany z układem (ξ, η, ζ), wówczas posuwałby się po kole K z prędkością kątową ω. Przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ jest więc skierowane ku środkowi koła K i $|\bar{p}_u|=r\omega^2$. Przyśpieszenie względne $\bar{p}_w=0$, wedle założenia. Ponieważ prędkość względna $\bar{v}_w=\bar{v}$ jest równoległa do osi obrotu, więc przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C=0$. Zatem

$$\bar{p}_b=\bar{p}_u.$$

Przykład 3. Płaszczyzna pozioma obraca się z prędkością kątową ω około osi pionowej. Po płaszczyźnie porusza się punkt A, mający w pewnej chwili względem płaszczyzny prędkość $\bar{v}_w$ i przyśpieszenie $\bar{p}_w$. Wyznaczyć przyśpieszenie względem układu stałego w owej chwili.

Oznaczmy przez O punkt przebicia osi obrotu z płaszczyzną ruchomą. Gdyby punkt A był z płaszczyzną ruchomą związany, wówczas posuwałby się po kole o środku O i promieniu $OA = r$ z prędkością kątową ω. Zatem przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ skierowane jest do punktu O i $|\bar{p}_u| = r\omega^2$.



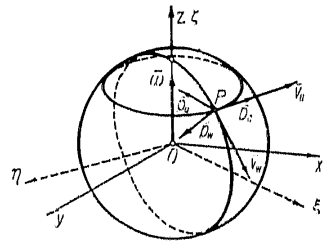
Aby wyznaczyć przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C$, obierzmy punkt O za początek układu ruchomego, związanego z płaszczyzną ruchomą i wykreślmy z punktu O wektor $\overline{OB} = \bar{v}_w$. Ponieważ prędkość punktu O jest zerem, więc $\frac{1}{2}\bar{p}_C$ równa się prędkości punktu B. Zatem $\bar{p}_C \perp \bar{v}_w$ i $|\bar{p}_C| = 2\,OB\,\omega = 2|\bar{v}_w|\,\omega$.

To samo oczywiście otrzymalibyśmy, opierając się na wzorze $\bar{p}_C = 2\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ i na tym, że wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$ ma kierunek osi obrotu, jest więc do płaszczyzny ruchomej prostopadły.

Przyśpieszenie bezwzględne otrzymamy, dodając do siebie wektory $\bar{p}_w$, $\bar{p}_u$ i $\bar{p}_C$.

Przykład 4. Kula o promieniu r obraca się dokoła stałej osi ze stałą prędkością kątową $\bar{\omega}$. Po wielkim kole, przechodzącym przez oś obrotu, porusza się punkt P ze stałą prędkością $\bar{c}$. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie tego punktu względem układu stałego (x, y, z).

Niech ξ, η, ζ oznacza układ ruchomy, którego oś ζ jest ta sama co dla układu stałego, zaś płaszczyzna $\xi\zeta$ jest płaszczyzną południka, po którym porusza się punkt P. Układ ten obraca się wraz z kulą dokoła osi z ze stałą prędkością kątową $\bar{\omega}$ (którą na rysunku przedstawia wektor narysowany na osi z).



Prędkość punktu P względem układu ruchomego, t. j. prędkość względna $\bar{v}_w$, jest wektorem o długości c, stycznym do południka (po

którym porusza się P). Prędkość unoszenia $\bar{v}_u$ równa się prędkości punktu równoleżnika przechodzącego przez P. Ponieważ punkt ten porusza się po kole o promieniu $\varrho = r\cos\varphi$, gdzie φ oznacza szerokość geograficzną tego równoleżnika (t. j. kąt zawarty między promieniem OP a płaszczyzną równika), więc prędkość $\bar{v}_u$ jest styczna do równoleżnika i wynosi $\varrho\omega = r\omega\cos\varphi$. Prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{v}_u$ są do siebie prostopadłe, zatem $|\bar{v}_b| = \sqrt{c^2 + r^2\omega^2\cos^2\varphi}$. Prędkość bezwzględna $\bar{v}_b$ tworzy z południkami kąt ϑ określony wzorem $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{|\bar{v}_u|}{|\bar{v}_w|} = \frac{r\omega}{c}\cos\varphi$. Ponieważ punkt P porusza się po południku ze stałą prędkością c, więc przyśpieszenie względne $\bar{p}_w$ jest skierowane ku środkowi kuli i $|\bar{p}_w| = c^2/r$. Podobnie, przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ jest skierowane ku środkowi równoleżnika (przechodzącego przez P) i $|\bar{p}_u| = \varrho\omega^2 = r\omega^2\cos\varphi$. Przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C = 2\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ jest prostopadłe do $\bar{\omega}$ i $\bar{v}_w$, zatem jest prostopadłe do płaszczyzny południka i ma ten sam zwrot co $\bar{v}_u$. Ponieważ, jak łatwo widzieć, kąt zawarty między $\bar{\omega}$ a $\bar{v}_w$ wynosi $\pi - \varphi$, więc $|\bar{p}_C| = 2|\bar{v}_w|\,|\bar{\omega}|\sin\varphi = 2c\omega\sin\varphi$. Dodając wektory $\bar{p}_w, \bar{p}_u$ i $\bar{p}_C$, otrzymamy przyśpieszenie bezwzględne $\bar{p}_b$.

§ 15. Wyznaczanie ruchu względnego.

Dotychczas zajmowaliśmy się wyznaczaniem ruchu względem układu stałego, mając dany ruch względem układu ruchomego. Często spotykamy się z zagadnieniem odwrotnym, t. zn. mamy znaleźć ruch względem układu ruchomego, znając ten ruch względem układu stałego.

Ze wzorów (I), str. 58 i 61, otrzymujemy na prędkość względną i przyśpieszenie względne:

$$\text{(I)} \qquad \bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{v}_u, \qquad \bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_C.$$

A więc: *prędkość względną otrzymamy, dodając do prędkości bezwzględnej prędkość unoszenia ze zwrotem przeciwnym. Przyśpieszenie względne otrzymamy, dodając do przyśpieszenia bezwzględnego przyśpieszenie unoszenia i Coriolisa ze zwrotami przeciwnymi.*

Ruch względem punktu. Niech punkty A_1 i A_2 poruszają się względem pewnego układu stałego (x, y, z) z prędkościami $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$. Umieśćmy w A_2 początek układu ruchomego (ξ, η, ζ) i załóżmy, że układ ten porusza się ruchem postępowym.

Ruch punktu A_1 względem układu (ξ, η, ζ) nazywać będziemy *ruchem względnym względem punktu* A_2.

Taki ruch zauważyłby obserwator poruszający się ruchem postępowym wraz z punktem A_2.

Oznaczmy przez $\bar{v}_{1,2}$ prędkość punktu A_1 względem punktu A_2, t. zn. względem układu (ξ, η, ζ). Ponieważ prędkość unoszenia równa się prędkości $\bar{v}_2$ punktu A_2, zaś prędkość bezwzględna wynosi $\bar{v}_1$, więc $\bar{v}_1 = \bar{v}_{1,2} + \bar{v}_2$, skąd $\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ lub

(II) $$\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 + (-\bar{v}_2).$$

Oznaczając przez $\bar{p}_{1,2}$ przyśpieszenie punktu A_1 względem A_2, t. j. względem układu (ξ, η, ζ), otrzymamy z uwagi na to, że przyśpieszenie Coriolisa jest zerem, $\bar{p}_{1,2} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ lub

(III) $$\bar{p}_{1,2} = \bar{p}_1 + (-\bar{p}_2).$$

A więc: *prędkość (przyśpieszenie) punktu A_1 względem A_2 otrzymamy, dodając do prędkości (przyśpieszenia) punktu A_1 prędkość (przyśpieszenie) punktu A_2 ze zwrotem przeciwnym.*

Przykład 1. Punkty A_1 i A_2 poruszają się odpowiednio po osiach x i y ruchem jednostajnym z prędkościami c_1 i c_2. Wyznaczyć prędkość punktu A_1 względem A_2.

Szukana prędkość $\bar{v}_{1,2}$ jest różnicą prędkości punktu A_1 i punktu A_2. A więc $\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$. Rzuty prędkości $\bar{v}_{1,2}$ na osie x i y wynoszą c_1 i $-c_2$. Zatem

$$|\bar{v}_{1,2}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Przykład 2. Punkt A_1 porusza się po kole o promieniu r ruchem jednostajnym, zaś punkt A_2 porusza się w ten sposób, że znajduje się zawsze na drugim końcu średnicy przechodzącej przez A_1. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie punktu A_1 względem A_2.

Oczywiście prędkości i przyśpieszenia obu punktów są równe co do wartości i mają zwroty przeciwne. Oznaczając przez $\bar{v}$ i $\bar{p}$ prędkość i przyśpieszenie punktu A_1, otrzymamy

$$\bar{v}_{1,2} = \bar{v} - (-\bar{v}) = 2\bar{v} \quad \text{i} \quad \bar{p}_{1,2} = \bar{p} - (-\bar{p}) = 2\bar{p}.$$

Ponieważ $|\bar{v}_{1,2}| = \text{const.}$, więc przyśpieszenie styczne ruchu względnego jest zerem; zatem $\bar{p}_{1,2}$ jest przyśpieszeniem normalnym. Stąd $|\bar{p}_{1,2}| = |\bar{v}_{1,2}|^2/\varrho = 4|\bar{v}|^2/\varrho$, a ponieważ $|\bar{p}_{1,2}| = 2|\bar{p}| = 2|\bar{v}|^2/r$, więc

$$4|\bar{v}|^2/\varrho = 2|\bar{v}|^2/r \quad \text{czyli} \quad \varrho = 2r.$$

A więc ruch punktu A_1 względem A_2 odbywa się po kole o środku A_2 o promieniu $2r$, z prędkością dwa razy większą od prędkości punktu A_2.

Przykład 3. Po osi x porusza się ciało A z prędkością stałą u, wyrzucając co T sekund drobne ciałka, biegnące po osi x ruchem jednostajnym z prędkością c. Niechaj ν oznacza częstość emisji (t. j. ilość ciałek wyrzucanych na sekundę,), zaś λ odległość dwóch po sobie wyrzuconych ciałek. Mamy oczywiście $\nu = 1/T$.

Ponieważ prędkość względna ciałka wyrzuconego jest względem A $c-u$, więc po czasie T odległość ciałka od A wynosi $\lambda = (c-u)T$. Zatem

(1) $$\nu = (c-u)/\lambda.$$

Przypuśćmy teraz, że po osi x porusza się obserwator B z prędkością stałą v. Oznaczmy przez ν' częstość względną emisji (t. j. ilość ciałek na sekundę, napotykanych przez obserwatora), a przez T' czas między spotkaniami dwu kolejnych ciałek. Ponieważ prędkość ciałek względem B wynosi $c-v$, więc $\lambda = (c-v)T'$. Zatem

(2) $$\nu' = (c-v)/\lambda.$$

Na mocy (1) i (2) otrzymujemy

(3) $$\nu' = \nu(c-v)/(c-u) = \nu(1-v/c)/(1-u/c).$$

Załóżmy, że prędkość c jest wielka w porównaniu z prędkościami u i v.

Ponieważ dla małych x mamy $1/(1-x) = 1+x$, więc na mocy (3) jest $\nu' = \nu(1-v/c)(1+u/c) = \nu[1-(v-u)/c - vu/c^2]$. Opuszczając ostatni wyraz w nawiasie jako bardzo mały w porównaniu z pozostałymi, otrzymujemy w końcu

(4) $$\nu' = \nu[1-(v-u)/c].$$

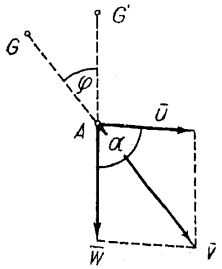
W szczególności, jeżeli $u=0$, dostaniemy

(5) $$\nu' = \nu(1-v/c).$$

Przykład 4. W przestrzeni porusza się rój drobnych ciałek z prędkością stałą $\bar{v}$. Poprzez rój porusza się ciało A z prędkością $\bar{u}$. Prędkość względna ciałek względem A wynosi więc $\bar{w} = \bar{v} - \bar{u}$. Oznaczmy przez w, v i u bezwzględne wartości tych prędkości, przez φ kąt między $\bar{w}$ i $\bar{v}$, a przez α kąt między $\bar{w}$ i $\bar{u}$. Z trójkąta o bokach $\bar{v}$, $-\bar{u}$, $\bar{w}$ otrzymujemy

(6) $$\sin\varphi = \frac{u}{v}\sin\alpha.$$

Podamy zastosowanie powyższego wzoru.



Jako układ stały obierzmy układ związany ze słońcem i gwiazdami stałymi. Pewna gwiazda G wysyła ku ziemi promienie światła biegnące z prędkością $\bar{v}$ ($v=300.000$ km/sek). Ziemia porusza się z prędkością $\bar{u}$ ($u=30$ km/sek). Promienie światła mają więc względem ziemi prędkość względną $\bar{w}$. Obserwator na ziemi, chcąc zobaczyć gwiazdę G, musi ustawić lunetę w kierunku prędkości względnej $\bar{w}$. Będzie więc widział G pozornie w miejscu G'. Kąt φ, wskazujący odchylenie od prawdziwego kierunku, możemy wyliczyć z (6).

Ponieważ v jest wielkie w porównaniu z u, więc kąt φ jest bardzo mały. Ze wzoru (6) otrzymamy

$$\sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{10.000}.$$

Dla $\alpha=\pi/2$ (t. j. $\sin\alpha=1$) otrzymujemy dla kąta φ jako wartość maksymalną $\varphi=22''$.

Przykład 5. Po okręgu koła o środku O poruszają się punkty A_1 i A_2 z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2 względem pewnego układu stałego. Obierzmy osie ξ, η układu ruchomego w płaszczyźnie koła, przyjmując O za początek, zaś prostą OA_2 za oś ξ.

Prędkość kątową punktu A_1 względem obranego układu ruchomego nazywamy *prędkością kątową* (względną) *punktu* A_1 *względem punktu* A_2; oznaczamy ją przez $\omega_{1,2}$.

Łatwo można okazać, że

$$\omega_{1,2}=\omega_1-\omega_2. \tag{7}$$

Przypuśćmy, że punkty A_1 i A_2 poruszają się z prędkościami kątowymi stałymi. Oznaczając przez T_1, T_2 odpowiednio czasy obiegów punktów A_1, A_2 w układzie stałym, zaś przez $T_{1,2}$ czas obiegu punktu A_1 względem A_2 (t. j. czas obiegu punktu A_1 w układzie ruchomym), otrzymamy: $T_1=2\pi/\omega_1$, $T_2=2\pi/\omega_2$, $T_{1,2}=2\pi/\omega_{1,2}$. Zatem na mocy (7)

$$1/T_{1,2}=1/T_1-1/T_2. \tag{8}$$

Czas obiegu dużej wskazówki na zegarku wynosi $T_1=1$ godz, małej $T_2=12$ godz. Ze wzoru (8) dostajemy: $1/T_{1,2}=1-\frac{1}{12}$, skąd $T_{1,2}=\frac{12}{11}$ godz $=1$ godz 5 min 27 sek. Zatem wskazówki pokrywają się co 1 godz 5 min 27 sek.

Podróżnikowi odbywającemu podróż naokoło ziemi w kierunku z zachodu na wschód wydaje się, że podróż jego trwała n dób, ponieważ w ciągu podróży miał n dni i n nocy. Wróciwszy jednak do miejsca, z którego podróż rozpoczął, stwierdza, że podróż trwała nie n, lecz n' dób. Jaki jest związek między n a n'?

Oznaczmy przez T_1 okres podróży, a przez T_2 czas pozornego obiegu słońca naokoło ziemi. Zatem $T_1=n'$ i $T_2=-1$ (gdyż słońce obraca się pozornie dokoła ziemi ze wschodu na zachód t. j. w kierunku przeciwnym do kierunku podróży). Podróżnik przyjmował za dobę pozorną okres czasu między jednym a drugim przejściem słońca przez południk zmienny, na którym się znajdował. Ponieważ w ciągu n dni pozornych było n' dni prawdziwych, więc doba pozorna wynosi n'/n prawdziwych. Stąd $T_{1,2}=n'/n$. Na mocy więc (8)

$$n/n'=1/n'+1 \quad \text{czyli} \quad n'=n-1.$$

Zatem prawdziwych dni upłynęło o 1 mniej niż pozornych.

Gdyby podróżnik szedł ze wschodu na zachód, to (jak łatwo widzieć) prawdziwych dni upłynęłoby o 1 więcej niż pozornych.