

ROZDZIAŁ I

TEORIA WEKTORÓW

I. Działania na wektorach

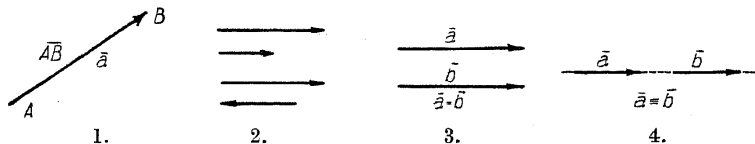
§ 1. Określenia wstępne. Wielkości, które możemy określić przy pomocy jednej liczby rzeczywistej, nazywamy *skalarami*. Skalarem jest więc masa, praca, energia kinetyczna i t. p.

Wektorem nazywamy odcinek, w którym wyróżniony jest początek i koniec. Do wektorów zaliczamy punkty i nazywamy je *wektorami zerowymi*.

Wielkości takie jak np. prędkość, przyspieszenie, siła, możemy przedstawić przy pomocy wektorów. Wektor oznaczamy bądź jedną literą z kreską u góry np. $\vec{a}$, bądź symbolem $\overline{AB}$, gdzie A oznacza początek, zaś B koniec (rys. 1). Na rysunku koniec wektora zaznaczamy strzałką. Początek wektora nazywamy także *punktem zaczepienia*.

Długością lub *wartością bezwzględną* wektora $\overline{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy ją przez $|\overline{AB}|$.

Dwa wektory mające ten sam kierunek (t. zn. równoległe) mogą mieć *zwroty* zgodne lub przeciwne (rys. 2).



Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mające równe długości, kierunki i zwroty nazywamy *równymi* (rys. 3), pisząc

$$\vec{a} = \vec{b}.$$

Dwa wektory mające równe długości i kierunki, lecz zwroty przeciwne, nazywamy *przeciwnymi*. Wektor przeciwny do $\vec{a}$ oznaczamy przez $-\vec{a}$ (p. str. 4, rys. 3).

Położeniem wektora nazywamy prostą, na której wektor leży. Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ równe i mające to samo położenie (t. zn. leżące na jednej prostej) nazywamy wektorami *równoważnymi* (str. 1, rys. 4):

$$\vec{a} = \vec{b}.$$

Dwa wektory zerowe uważamy za równe i równoważne.

Wektory równe oznaczać będziemy często jedną i tą samą literą (gdy nie będzie obawy pomyłki).

Rzutem wektora $\vec{a}$ na prostą (lub płaszczyznę) nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut początku wektora $\vec{a}$, zaś końcem rzut jego końca.

Przypuśćmy, że mamy dany w przestrzeni układ współrzędnych $O(x, y, z)$ prostokątny lub skośnokątny. Obróćmy oś x około O w płaszczyźnie xy o kąt $< \pi$ tak, by dodatnia część osi x padła na dodatnią część osi y . Jeżeli dla widza znajdującego się po tej stronie płaszczyzny xy , po której leży dodatnia część osi z , ruch ten odbywa się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, wówczas układ $O(x, y, z)$ nazywamy *lewoskrętnym*, w przeciwnym razie *prawoskrętnym*.

W książce tej używać będziemy stale układu prostokątnego lewoskrętnego (t. j. jak na rys. 1, a nie 2).

Powiadamy, że układ wektorów $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nie równoległych do jednej płaszczyzny ma *zwrot lewy* (wzgl. *prawy*), jeżeli prowadząc przez dowolny punkt O osie x, y, z równoległe do wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i zgodnie z nimi skierowane, otrzymamy układ lewoskrętny (wzgl. prawoskrętny).

§ 2. Współrzędne wektora. Niechaj $\vec{a}$ będzie dowolnym wektorem, zaś $\vec{a}'$ rzutem jego na daną oś x .

Współrzedną wektora $\vec{a}$ względem osi x nazywamy liczbę, którą oznaczamy przez a_x , określoną jak następuje: $a_x = |\vec{a}'|$, jeżeli $\vec{a}'$ ma zgodny kierunek z osią x , zaś $a_x = -|\vec{a}'|$ w przypadku przeciwnym.

Mamy oczywiście

$$(1) \quad a_x = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

gdzie α oznacza kąt między wektorem $\vec{a}$ a osią x (str. 3, rys. 2).

Przypuśćmy, że mamy dany prostokątny układ współrzędnych (x, y, z) . Oznaczając współrzędne wektora $\vec{a}$ względem osi układu przez a_x, a_y, a_z , zaś kąty, jakie $\vec{a}$ tworzy z osiami przez α, β, γ (rys. 1), otrzymamy na mocy (1):

$$(I) \quad a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

A więc: *wektory równe mają równe współrzędne względem osi układu.*

Ponieważ według znanego wzoru z geometrii analitycznej jest $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, więc na mocy (I)

$$(II) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$(III) \quad \cos \alpha = a_x / |\vec{a}|, \quad \cos \beta = a_y / |\vec{a}|, \quad \cos \gamma = a_z / |\vec{a}|.$$

Z równań (II) i (III) wynika, że współrzędne wektora określają jego długość, kierunek i zwrot.

A więc dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, mające odpowiednio równe współrzędne względem osi układu prostokątnego (t. zn. dla których $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$), są równe.

Jeżeli wektor $\vec{a}$ leży w płaszczyźnie xy (rys. 2), to

$$(IV) \quad a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \sin \alpha,$$

$$(V) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \cos \alpha = a_x / |\vec{a}|, \quad \sin \alpha = a_y / |\vec{a}|.$$

Często (gdy pomyłka jest wykluczona) rzutami wektora $\vec{a}$ na osie układu nazywamy także współrzędne a_x, a_y, a_z .

Łatwo można okazać, że jeżeli punkty A i A' mają współrzędne odpowiednio x, y, z i x', y', z' , to wektor $\vec{a} = \vec{AA'}$ ma współrzędne: $a_x = x' - x, a_y = y' - y$ i $a_z = z' - z$.

§ 3. Suma i różnica wektorów. Sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy każdy wektor, który daje się otrzymać w sposób następujący:

Z dowolnego punktu O kreślimy wektor równy wektorowi $\vec{a}$, z końca tego wektora drugi wektor równy wektorowi $\vec{b}$; wektor, którego początkiem jest O , końcem zaś koniec drugiego wektora, nazywamy *sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$* (str. 4, rys. 1) i oznaczamy przez

$$\vec{a} + \vec{b}.$$

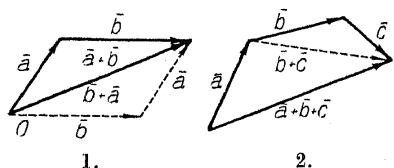
Dla wektorów przeciwnych (rys. 3) otrzymamy więc w szczególności

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0.$$

Sumę kilku wektorów np. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ otrzymujemy, tworząc sumę $\vec{b} + \vec{c}$, a następnie dodając otrzymaną sumę do wektora $\vec{a}$ (rys. 2).

Do sumy wektorów stosuje się prawa przemienności i łączności. A więc:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}, \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$

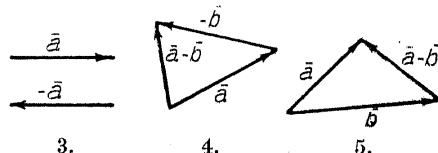


Z praw tych wynika, że suma ilużkolwiek wektorów nie zmienia się, jeżeli zmienimy porządek składników lub jeżeli kilka z nich zastąpimy ich sumą. Np.:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{e} + (\vec{b} + \vec{d}).$$

Różnicę $\vec{a} - \vec{b}$ określamy jako sumę $\vec{a} + (-\vec{b})$.
Zatem wedle definicji

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



Rys. 4 i 5 przedstawiają, jak wyznacza się różnicę.
Ponieważ

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{b} = \vec{a},$$

więc różnica dodana do odjemnika daje w wyniku odjemną.

§ 4. Iloczyn wektora przez liczbę. Iloczynem wektora $\vec{a}$ przez liczbę m nazywamy wektor, który ma ten sam kierunek co $\vec{a}$, długość $|m|$ razy większą, a zwrot zgodny z $\vec{a}$ lub przeciwny, zależnie od tego czy $m > 0$, czy $m < 0$. Iloczyn $\vec{a}$ przez m oznaczamy przez $m\vec{a}$.

Jeżeli $m = 0$ lub $\vec{a} = 0$, to $m\vec{a} = 0$.

Mamy oczywiście (p. str. 5, rys. 1 dla $m = 2$):

$$(-m)\vec{a} = -m\vec{a}.$$

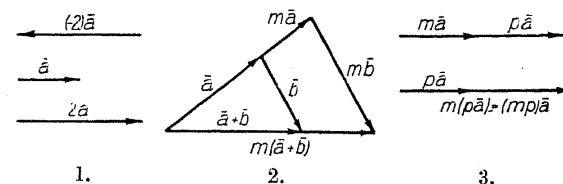
Wynika stąd, że

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

Dla iloczynu łatwo dowieść prawa rozdzielności sumy względem iloczynu i prawa łączności:

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}, \quad (m + p)\vec{a} = m\vec{a} + p\vec{a}, \quad m(p\vec{a}) = (mp)\vec{a},$$

gdzie m i p oznaczają liczby (rys. 2 i 3). Z powyższych praw wynikają zwykłe reguły algebraiczne dodawania i mnożenia.



Dzielenie wektora przez liczbę (różną od zera) określamy jako mnożenie przez odwrotność tej liczby. A więc:

$$\frac{\vec{a}}{m} = \frac{1}{m} \vec{a}.$$

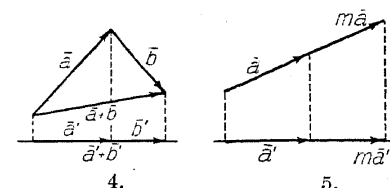
§ 5. Współrzędne sumy i iloczynu. Łatwo można okazać, że rzut (na prostą lub płaszczyznę) sumy wektorów równa się sumie rzutów tych wektorów (rys. 4). A więc:

$$\text{Rzut}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Rzut } \vec{a} + \text{Rzut } \vec{b}.$$

Podobnie rzut iloczynu wektora przez liczbę równa się iloczynowi rzutu wektora przez tę liczbę (rys. 5). A więc:

$$\text{Rzut}(m\vec{a}) = m \text{ Rzut } \vec{a}.$$

Jeżeli wektor $\vec{a}$ ma współrzędne a_x, a_y, a_z , a wektor $\vec{b}$ ma współrzędne b_x, b_y, b_z , wówczas wektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ ma współrzędne $s_x = a_x + b_x, s_y = a_y + b_y, s_z = a_z + b_z$.



Wynika to z twierdzenia o rzucie sumy.

Podobnie z twierdzenia o rzucie iloczynu wektora przez liczbę wynika, że wektor $\vec{c} = m\vec{a}$ ma współrzędne $c_x = ma_x, c_y = ma_y, c_z = ma_z$.

Jeżeli np. $\vec{d} = 5\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c}$, to:

$$d_x = 5a_x - 3b_x - 2c_x,$$

$$d_y = 5a_y - 3b_y - 2c_y,$$

$$d_z = 5a_z - 3b_z - 2c_z.$$

§ 6. Rozkład wektora. Sumę wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o wspólnym początku, lecz różnym położeniu (tj. nie leżących na jednej prostej), przedstawia przekątna równoległoboku zbudowanego na tych wektorach. Podobnie sumę trzech wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, o wspólnym początku, lecz nie leżących na jednej płaszczyźnie, przedstawia przekątna równoległościanu zbudowanego na tych wektorach.

Na powyższych twierdzeniach opiera się rozkład danego wektora na sumę dwóch lub trzech wektorów o danych kierunkach.

Przypuśćmy, że mamy dany wektor $\vec{s}$ i dwie proste l i m nie równoległe, leżące w pewnej płaszczyźnie równoległej do $\vec{s}$. Jeżeli chcemy przedstawić wektor $\vec{s}$ jako sumę dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ równoległych do l i m , to tworzymy równoległobok o bokach równoległych do l i m , którego przekątną jest $\vec{s}$. W tym celu kreślimy z początku i końca wektora $\vec{s}$ proste równoległe do l i m . Boki otrzymanego równoległoboku wyznaczają wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 1).

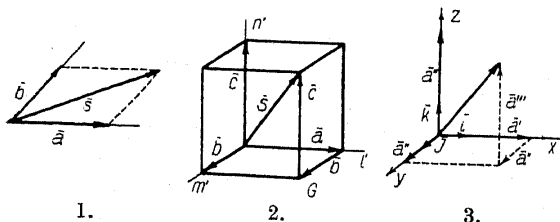
Łatwo zauważyć, że taki rozkład jest możliwy w jeden tylko sposób.

Podobnie, jeżeli dany jest wektor $\vec{s}$ i trzy proste l , m , n nie równoległe do jednej płaszczyzny i chcemy przedstawić wektor $\vec{s}$ jako sumę trzech wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ równoległych do l , m , n , to budujemy równoległościan o krawędziach równoległych do l , m , n ,

którego przekątną jest $\vec{s}$. Kreślimy zatem z początku O wektora $\vec{s}$ proste l' , m' , n' równoległe do l , m , n ; następnie z końca wektora $\vec{s}$ prostą równoległą do n aż do punktu G

przecięcia tej prostej z płaszczyzną prostych l' , m' ; wreszcie z punktu G kreślimy proste równoległe do l i m . Punkty przecięcia tych prostych z prostymi l' i m' są końcami wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, których początkiem jest O . Wektor $\vec{c}$ jest równy wektorowi łączącemu punkt G z końcem wektora $\vec{s}$ (rys. 2).

Jeden tylko taki rozkład jest możliwy, ponieważ istnieje jeden tylko równoległościan o krawędziach równoległych do l , m , n i o przekątnej $\vec{s}$.



Szczególnym przypadkiem takiego rozkładu jest przedstawienie wektora przy pomocy wektorów jednostkowych. Oznaczamy rzuty wektora $\vec{a}$ na osie układu (x, y, z) przez $\vec{a}'$, $\vec{a}''$, $\vec{a}'''$. Mamy oczywiście (str. 6, rys. 3):

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}'' + \vec{a}'''.$$

Obierzmy na osiach układu wektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ o długości 1, skierowane zgodnie z odpowiednimi osiami. Z określenia współrzędnych a_x , a_y , a_z (§ 2, str. 2) wynika, że

$$\vec{a}' = a_x \vec{i}, \quad \vec{a}'' = a_y \vec{j}, \quad \vec{a}''' = a_z \vec{k}.$$

Zatem

$$(I) \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Wektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ nazywamy wektorami jednostkowymi. Wzór (I) wyraża wektor $\vec{a}$ przy pomocy współrzędnych i wektorów jednostkowych.

§ 7. Iloczyn skalarowy. Iloczynem skalarowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzących kąt φ (p. rys. obok), nazywamy liczbę $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$.

Iloczyn skalarowy oznaczamy przez $\vec{a} \cdot \vec{b}$ lub $\vec{a}\vec{b}$. Zatem

$$(I) \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Iloczyn skalarowy jest zerem nie tylko w przypadku gdy $\vec{a} = 0$ lub $\vec{b} = 0$, lecz także gdy $\vec{a} \perp \vec{b}$, wtedy bowiem $\varphi = \pi/2$, więc $\cos \varphi = 0$. Jeżeli zaś $\vec{a} \neq 0$ i $\vec{b} \neq 0$, to iloczyn skalarowy może być dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy φ jest kątem ostrym czy rozwartym.

Iloczyn nie zależy od porządku czynników. Mamy bowiem

$$\vec{b}\vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = \vec{a}\vec{b}.$$

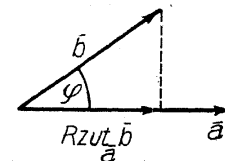
Wyrażenie $|\vec{b}| \cos \varphi$ przedstawia rzut wektora $\vec{b}$ na oś wyznaczoną przez wektor $\vec{a}$ i zgodnie z nim skierowaną. Rzut ten nazywamy rzutem $\vec{b}$ na kierunek $\vec{a}$ i oznaczamy przez $\text{Rzut}_{\vec{a}} \vec{b}$. Zatem:

$$\text{Rzut}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi, \quad \text{Rzut}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Na mocy więc (I):

$$(1) \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \text{Rzut}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Rzut}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Zatem iloczyn skalarowy równa się iloczynowi długości jednego wektora przez rzut drugiego na kierunek pierwszego.



Prawo rozdzielności. Na mocy określenia iloczynu mamy

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = |\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}).$$

Ponieważ $\text{Rzut}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a} + \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b}$, więc

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = |\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b}.$$

Lecz $|\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a} = \bar{a}\bar{c}$ i $|\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b} = \bar{b}\bar{c}$; zatem

$$(II) \quad (\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}.$$

Podobnie postępując, otrzymamy

$$(III) \quad (\bar{a} - \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}.$$

A więc dla sumy i różnicy zachodzi prawo rozdzielności względem iloczynu. Wynikają stąd zwyczajne prawa mnożenia sumy przez sumę.

Np. $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{c} + \bar{d}) = (\bar{a} + \bar{b})\bar{c} + (\bar{a} + \bar{b})\bar{d} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{d}$.

Prawo łączności. Niechaj m oznacza jakąkolwiek liczbę. Zatem

$$(m\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}| \text{Rzut}_{\bar{b}}(m\bar{a}) = m\bar{b} \text{Rzut}_{\bar{b}}\bar{a}, \quad \text{skąd } (m\bar{a})\bar{b} = m(\bar{a}\bar{b}).$$

Niechaj teraz m, n oznaczają liczby. Na mocy poprzedniego wzoru jest $(m\bar{a})(n\bar{b}) = m\{\bar{a} \cdot (n\bar{b})\} = m\{n(\bar{a}\bar{b})\}$, więc

$$(IV) \quad (m\bar{a})(n\bar{b}) = (mn)(\bar{a}\bar{b}).$$

Wynikają stąd zwykle prawa mnożenia wielomianu przez wielomian.

Np. $(2\bar{a} - 3\bar{b})5\bar{c} = 10\bar{a}\bar{c} - 15\bar{b}\bar{c}$, $(4\bar{a} - 2\bar{b})(3\bar{c} + \bar{d}) = 12\bar{a}\bar{c} - 6\bar{b}\bar{c} + 4\bar{a}\bar{d} - 2\bar{b}\bar{d}$.

Kwadrat wektora. Kwadrat skalarowy $\bar{a}^2$ określamy jako iloczyn $\bar{a} \cdot \bar{a}$. Zatem $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| |\bar{a}| \cos 0$, więc, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$, stąd $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Otrzymujemy stąd:

$$(V) \quad \begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b})^2 &= (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2, \\ (\bar{a} - \bar{b})^2 &= (\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2, \\ (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) &= \bar{a}^2 - \bar{b}^2. \end{aligned}$$

Dwa pierwsze wzory możemy napisać w postaci:

$$(VI) \quad \begin{aligned} |\bar{a} + \bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos \varphi + |\bar{b}|^2, \\ |\bar{a} - \bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos \varphi + |\bar{b}|^2. \end{aligned}$$

Wzory te wyrażają t. zw. *twierdzenie Carnota*, znane z trygonometrii.

Przedstawienie analityczne iloczynu skalarowego. Niech $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ oznaczają wektory jednostkowe (str. 7). Z określenia iloczynu skalarowego otrzymujemy:

$$(2) \quad \bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1, \quad \bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{i} = 0.$$

Przedstawiając wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ w postaci $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$ (p. str. 7), możemy iloczyn $\bar{a}\bar{b}$ napisać w postaci

$$\bar{a}\bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k})(b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}).$$

Wymnażając w myśl reguł mnożenia i opierając się na wzorach (2), dostajemy

$$(VII) \quad \bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć iloczyn skalarowy dwóch wektorów, gdy znane są ich współrzędne.

Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są do siebie prostopadłe, to $\bar{a}\bar{b} = 0$, zatem

$$(VIII) \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Naodwrot, jeżeli $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, to wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są do siebie prostopadłe, o ile są różne od zera. Zatem wzór (VIII) przedstawia *warunek prostopadłości* wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ (różnych od zera).

§ 8. Iloczyn wektorowy. Iloczynem wektorowym wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nazywamy wektor $\bar{c}$ spełniający warunki następujące:

1) Długość. Jeżeli φ oznacza kąt, jaki tworzą wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$, to

$$(I) \quad |\bar{c}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \varphi.$$

2) Kierunek. Wektor $\bar{c}$ jest prostopadły do wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$.

Jeżeli więc np. wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wychodzą z jednego punktu, to wektor $\bar{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ (p. rysunek).

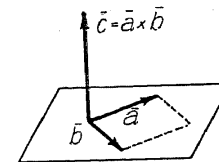
3) Zwrot. Zwrot układu wektorów $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ jest zgodny z przyjętym układem współrzędnych, t. zn. lewy.

Iloczyn wektorowy oznaczamy przez

$$\bar{a} \times \bar{b}.$$

Ze wzoru (I) wynika, że $|\bar{c}|$ jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{a} = 0$ lub $\bar{b} = 0$ lub $\varphi = 0$ lub $\varphi = \pi$.

Zatem: *iloczyn wektorowy jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest zerem, lub gdy czynniki są do siebie równoległe.*



Jeżeli iloczyn jest zerem, to odpadają oczywiście warunki 2) i 3). W szczególności mamy

$$(II) \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

Uwaga. Wartość bezwzględna iloczynu wektorowego wynosi $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ (p. wzór (I)). Wyrażenie to przedstawia pole równoległoboku zbudowanego na wektorach odpowiednio równych wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i wychodzących z jednego punktu (p. rys. na str. 9).

Zmiana porządku czynników. Jeżeli zmienimy porządek czynników, to otrzymamy iloczyn

$$\vec{b} \times \vec{a}.$$

Iloczyn $\vec{a} \times \vec{b}$ ma (na mocy określenia iloczynu) długość i kierunek te same, co iloczyn $\vec{b} \times \vec{a}$, lecz zwrot przeciwny. Zatem

$$(III) \quad \vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

A więc: wraz ze zmianą porządku czynników zmienia się znak iloczynu wektorowego.

Prawo łączności. Opierając się na określeniu iloczynu wektorowego, łatwo można wykazać następujące związki (gdzie m i n oznaczają liczby):

$$(IV) \quad m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}),$$

$$(V) \quad (m\vec{a}) \times (n\vec{b}) = (mn)(\vec{a} \times \vec{b}).$$

$$\text{Np. } 3\vec{a} \times \vec{b} = 3(\vec{a} \times \vec{b}); \quad 2\vec{a} \times 3\vec{b} = 6(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Prawo rozdzielności względem sumy. Dla iloczynu wektorowego zachodzą wzory:

$$(VI) \quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}; \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Wyprowadzimy najpierw wzór pierwszy. Możemy oczywiście przyjąć, że $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ mają wspólny początek O .

Założmy na razie, że $|\vec{c}| = 1$. Poprowadźmy przez O płaszczyznę $\Pi \perp \vec{c}$. Połóżmy

$$(1) \quad \vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

i oznaczmy przez $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{s}'$ rzuty wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{s}$ na płaszczyznę Π (p. rys. na str. 11). Mamy oczywiście

$$(2) \quad \vec{s}' = \vec{a}' + \vec{b}'.$$

Niechaj φ będzie kątem zawartym między $\vec{c}$ i $\vec{a}$. Zatem $|\vec{a}'| = |\vec{a}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{c}| \sin \varphi$, gdyż założyliśmy, że $|\vec{c}| = 1$. A więc

$$(3) \quad |\vec{a}'| = |\vec{c} \times \vec{a}| \quad \text{i podobnie} \quad |\vec{b}'| = |\vec{c} \times \vec{b}|, \quad |\vec{s}'| = |\vec{c} \times \vec{s}|.$$

Obróćmy teraz wektory $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{s}'$ o 90° w płaszczyźnie Π około O od ręki lewej ku prawej, względem człowieka mającego stopy w początku, zaś głowę w końcu wektora $\vec{c}$. Otrzymamy wektory $\vec{a}''$, $\vec{b}''$, $\vec{s}''$. Będzie na mocy (2)

$$(4) \quad \vec{s}'' = \vec{a}'' + \vec{b}'',$$

$$(5) \quad |\vec{a}''| = |\vec{a}'|, \quad |\vec{b}''| = |\vec{b}'|, \quad |\vec{s}''| = |\vec{s}'|.$$

Wektor $\vec{a}''$ jest prostopadły do $\vec{a}$ i $\vec{c}$; zwrot układu wektorów $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{a}''\}$ jest lewy. Ponieważ nadto na mocy (3) i (5) mamy $|\vec{a}''| = |\vec{c} \times \vec{a}|$, więc $\vec{a}'' = \vec{c} \times \vec{a}$ i podobnie $\vec{b}'' = \vec{c} \times \vec{b}$, $\vec{s}'' = \vec{c} \times \vec{s}$. Na mocy więc (4) i (1) otrzymujemy

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

Wzór powyższy udowodniliśmy przy założeniu, że $|\vec{c}| = 1$. Udowodnimy go teraz w przypadku ogólnym. Niechaj $\vec{h}$ będzie wektorem o długości 1, zgodnie skierowanym z wektorem $\vec{c}$. Zatem

$$(6) \quad |\vec{h}| = 1 \quad \text{i} \quad \vec{c} = |\vec{c}| \vec{h},$$

skąd na mocy prawa łączności

$$(7) \quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \vec{h} \times (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \{ \vec{h} \times (\vec{a} + \vec{b}) \}.$$

Ale na mocy wzoru udowodnionego dla przypadku $|\vec{c}| = 1$ i na mocy prawa łączności jest kolejno:

$$|\vec{c}| \{ \vec{h} \times \vec{a} + \vec{h} \times \vec{b} \} = |\vec{c}| \{ \vec{h} \times \vec{a} \} + |\vec{c}| \{ \vec{h} \times \vec{b} \} = (|\vec{c}| \vec{h}) \times \vec{a} + (|\vec{c}| \vec{h}) \times \vec{b},$$

skąd na mocy (6) i (7) otrzymujemy już w całej ogólności:

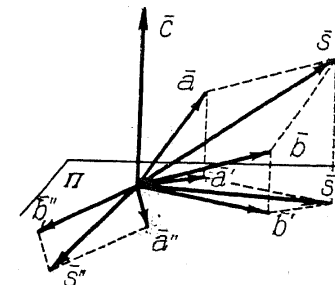
$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

Drugi ze wzorów (VI) możemy otrzymać z pierwszego, stosując wzór (III):

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = -\{ \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) \} = -\{ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} \} = -(\vec{c} \times \vec{a}) - (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Ze wzoru (VI) wynika łatwo wzór

$$(VII) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}.$$



$$\begin{aligned}\text{Np. } (2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (5\bar{c} + 2\bar{d}) &= 10\bar{a} \times \bar{c} + 4\bar{a} \times \bar{d} - 15\bar{b} \times \bar{c} - 6\bar{b} \times \bar{d}, \\ (\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) &= \bar{a} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{a} - \bar{b} \times \bar{b} = -2\bar{a} \times \bar{b}, \\ (3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (5\bar{a} - 2\bar{b}) &= -16\bar{a} \times \bar{b}.\end{aligned}$$

Współrzędne iloczynu wektorowego. Oznaczając przez $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ wektory jednostkowe (str. 7), mamy:

$$\begin{aligned}(8) \quad \bar{i} \times \bar{i} &= \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0, \\ (9) \quad \bar{i} \times \bar{j} &= -(\bar{j} \times \bar{i}) = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = -(\bar{k} \times \bar{j}) = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = -(\bar{i} \times \bar{k}) = \bar{j}.\end{aligned}$$

Kładąc

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

otrzymamy

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}).$$

Wykonując mnożenie, dostajemy na mocy (8) i (9):

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}.$$

Dla $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ jest więc

$$(VIII) \quad c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

§ 9. Iloczyn kilku wektorów. ^{1o} Weźmy najpierw pod uwagę iloczyn $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$. Kładąc $\bar{r} = \bar{b} \times \bar{c}$, otrzymamy

$$\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a}\bar{r} = a_x r_x + a_y r_y + a_z r_z.$$

Ponieważ $r_x = b_y c_z - b_z c_y$ i. t. d., więc

$$\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Wzór powyższy możemy napisać w postaci

$$(I) \quad \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Ze znanych własności wyznaczników wynika łatwo wzór

$$(II) \quad \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c}(\bar{a} \times \bar{b}).$$

Przypuśćmy, że wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ mają początek w początku układu. Z geometrii analitycznej wiadomo, że objętość V czworokąta o krawędziach $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ wynosi $\frac{1}{6}$ wartości wyznacznika (I). A więc $V = \frac{1}{6} \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$.

Zatem: warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (o wspólnym początku) leżały w jednej płaszczyźnie, jest, by $V = 0$, czyli by $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = 0$.

Jeżeli zaś nie zakładamy, że $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ mają wspólny początek, to — jak łatwo widzieć — warunek $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = 0$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ były równoległe do jednej płaszczyzny.

^{2o} Weźmy teraz pod uwagę iloczyn $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$. Oznaczmy ten iloczyn przez $\bar{u}$ i położmy $\bar{r} = \bar{b} \times \bar{c}$. Zatem

$$u_x = a_y r_z - a_z r_y = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z).$$

Dodając i odejmując składnik $a_x b_x c_x$, otrzymamy

$$u_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z b_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z),$$

skąd $u_x = b_x(\bar{a}\bar{c}) - c_x(\bar{a}\bar{b})$ i podobnie $u_y = b_y(\bar{a}\bar{c}) - c_y(\bar{a}\bar{b})$, $u_z = b_z(\bar{a}\bar{c}) - c_z(\bar{a}\bar{b})$. Zatem

$$(III) \quad \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

^{3o} Ze wzorów (I), (II) i (III) wynikają wzory następujące:

$$(IV) \quad (\bar{a} \times \bar{b})(\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a}\bar{c})(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})(\bar{b}\bar{c}),$$

$$(V) \quad (\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{b}[\bar{a}(\bar{c} \times \bar{d})] - \bar{a}[\bar{b}(\bar{c} \times \bar{d})].$$

§ 10. Funkcje wektorowe. Jeżeli każdej liczbie t przedziału (t', t'') przypisany jest wektor $\bar{w}$, wówczas powiadamy, że w przedziale (t', t'') określoną mamy funkcję wektorową i piszemy

$$(1) \quad \bar{w} = \bar{F}(t),$$

Współrzędne w_x, w_y, w_z są również funkcjami (już w zwykłym sensie czyli liczbowymi) zmiennej t . Zatem:

$$(2) \quad w_x = f(t), \quad w_y = \varphi(t), \quad w_z = \psi(t).$$

Powyższe trzy funkcje określają dokładnie funkcję wektorową (1).

Granica. Powiadamy, że funkcja wektorowa (1) ma granicę $\bar{w}_0$ dla t dążącego do t_0 , co piszemy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{F}(t) = \bar{w}_0,$$

gdy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = w_{0,x}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = w_{0,y} \quad \text{ i } \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = w_{0,z}.$$

Ciągłość. Funkcja wektorowa (1) jest *ciągła dla* t_0 , jeżeli $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{F}(t) = \bar{w}_0$, gdzie $\bar{w}_0 = \bar{F}(t_0)$.

Oczywiście zachodzą wówczas związki:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \psi(t_0).$$

Funkcje f, φ, ψ są więc wtedy ciągłe dla $t = t_0$. Na odwrót, jeżeli f, φ, ψ są ciągłe dla t_0 , to funkcja wektorowa $\bar{w} = \bar{F}(t)$ jest również ciągła dla t_0 .

Pochodna. Oznaczamy przez Δt przyrost zmiennej t , a przez $\Delta \bar{w}$ odpowiedni przyrost wektora $\bar{w}$. Więc $\bar{w} + \Delta \bar{w} = \bar{F}(t + \Delta t)$, zatem $\Delta \bar{w} = \bar{F}(t + \Delta t) - \bar{F}(t)$, skąd

$$\frac{\Delta \bar{w}}{\Delta t} = \frac{\bar{F}(t + \Delta t) - \bar{F}(t)}{\Delta t}.$$

Granice $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta t}$ nazywamy *po pochodną* funkcji $\bar{F}(t)$ w punkcie t .

Pochodną oznaczamy przez $\frac{d\bar{w}}{dt}$, $\bar{w}'$ lub $\bar{F}'(t)$.

Ponieważ wektor $\Delta \bar{w}$ ma współrzędne

$$\Delta w_x = f(t + \Delta t) - f(t), \quad \Delta w_y = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t), \quad \Delta w_z = \psi(t + \Delta t) - \psi(t),$$

więc

$$w'_x = f'(t), \quad w'_y = \varphi'(t), \quad w'_z = \psi'(t).$$

Pochodne wyższych rzędów określamy w zwykły sposób: a więc drugą pochodną jako pochodną pierwszej pochodnej, trzecią pochodną jako pochodną drugiej pochodnej i t.d. Wyższe pochodne oznaczamy przez

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dt^2}, \quad \frac{d^3 \bar{w}}{dt^3}, \quad \dots \quad \text{lub} \quad \bar{w}'', \bar{w}''', \quad \dots \quad \text{i t. d.}$$

Łatwo wykazać, że

$$w''_x = f''(t), \quad w''_y = \varphi''(t), \quad w''_z = \psi''(t) \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli funkcje $\bar{w} = \bar{F}(t)$ i $\bar{v} = \bar{\Psi}(t)$ mają pochodne, to zachodzą wzory:

$$(I) \quad \frac{d(\bar{w} \pm \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt} \pm \frac{d\bar{v}}{dt},$$

$$(II) \quad \frac{d(m\bar{w})}{dt} = m \frac{d\bar{w}}{dt} \quad (\text{gdzie } m \text{ jest liczbą}),$$

$$(III) \quad \frac{d(\bar{w}\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt} \bar{v} + \bar{w} \frac{d\bar{v}}{dt},$$

$$(IV) \quad \frac{d(\bar{w} \times \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{v} + \bar{w} \times \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Wyprowadzimy wzór (III). Mamy $\Delta(\bar{w}\bar{v}) = (\bar{w} + \Delta \bar{w})(\bar{v} + \Delta \bar{v}) - \bar{w}\bar{v}$, więc

$$\frac{\Delta(\bar{w}\bar{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta t} \bar{v} + \bar{w} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} + \Delta \bar{w} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t},$$

skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy (III).

Funkcje wektorowe wielu zmiennych. Możemy również rozpatrywać funkcje wektorowe wielu zmiennych. Np. funkcja wektorowa

$$\bar{w} = \bar{F}(\xi, \eta, \zeta)$$

jest funkcją trzech zmiennych ξ, η, ζ . Rzuty wektora $\bar{w}$ są wówczas określone pewnymi funkcjami

$$w_x = f(\xi, \eta, \zeta), \quad w_y = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad w_z = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

Granice, ciągłość i pochodne cząstkowe funkcji wektorowych kilku zmiennych łatwo już podać, wzorując się na przypadku jednej zmiennej.

§ 11. Moment wektora. Moment wektora względem punktu. Przypuśćmy, że mamy dany wektor $\overline{AB}$ i punkt O . *Momentem wektora $\overline{AB}$ względem punktu O* nazywamy wektor $\bar{M}$, spełniający warunki następujące:

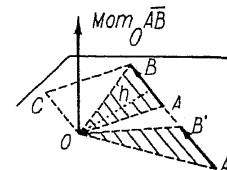
(1) $|\bar{M}|$ równa się podwójnemu polu trójkąta OAB czyli

$$|\bar{M}| = |\overline{AB}| \cdot h,$$

gdzie h oznacza odległość punktu O od $\overline{AB}$.

(2) Kierunek wektora $\bar{M}$ jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez O i $\overline{AB}$.

(3) Układ wektorów $(\overline{AB}, \overline{OA}, \bar{M})$ ma zwrot zgodny z układem współrzędnych, t. j. zwrot lewy.



Moment wektora $\overline{AB}$ względem punktu O oznaczać będziemy symbolem

$$\text{Mom}_O \overline{AB}.$$

Moment jest zerem tylko w przypadkach, gdy $\overline{AB} = 0$ lub gdy przedłużenie wektora $\overline{AB}$ przechodzi przez O . Jeżeli moment jest zerem, wówczas warunki (2) i (3) odpadają.

Dla wektorów równoważnych (str. 2) zachodzi następujące

Twierdzenie 1. *Wektory równoważne mają względem tego samego punktu momenty równe.*

Dowód. Przyjmijmy, że $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Zatem wektory $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ są równe i leżą na tej samej prostej. Łatwo stwierdzić, że momenty obu wektorów względem O mają ten sam kierunek i zwrot. Mają również tę samą długość, gdyż trójkąty OAB i $OA'B'$ mają równe powierzchnie (równe podstawy i wspólną wysokość). A więc $\text{Mom}_O \overline{AB} = \text{Mom}_O \overline{A'B'}$, c. b. d. d.

Moment jako iloczyn wektorowy. Weźmy pod uwagę iloczyn wektorowy $\overline{AB} \times \overline{OA}$. Zauważmy, że iloczyn powyższy ma ten sam kierunek i zwrot, co $\text{Mom}_O \overline{AB}$. Mamy również $|\overline{AB} \times \overline{OA}| = |\text{Mom}_O \overline{AB}|$. Bez względu bowiem wartość iloczynu równa się polu równoległoboku $OACB$ (p. rys. na str. 15), zatem podwójnemu polu trójkąta OAB . A więc

$$\text{Mom}_O \overline{AB} = \overline{AB} \times \overline{OA}.$$

Gdybyśmy zamiast wektora $\overline{AB}$ wzięli wektor równoważny $\overline{A'B'}$, wówczas mielibyśmy

$$\text{Mom}_O \overline{A'B'} = \overline{A'B'} \times \overline{OA'}.$$

Na mocy więc poprzedniego twierdzenia

$$\text{Mom}_O \overline{AB} = \overline{A'B'} \times \overline{OA'} = \overline{AB} \times \overline{OA'}.$$

A więc: jeżeli A' jest dowolnym punktem na prostej, na której leży wektor $\overline{AB}$, wówczas

$$\text{Mom}_O \overline{AB} = \overline{AB} \times \overline{OA'}.$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli dwa wektory równe mają względem pewnego punktu równe momenty, to są równoważne.*

Dowód. Zakładamy, że

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad \text{i} \quad \text{Mom}_O \overline{AB} = \text{Mom}_O \overline{A'B'}.$$

Zatem $\overline{AB} \times \overline{OA} = \overline{A'B'} \times \overline{OA'}$, skąd $\overline{AB} \times \overline{OA} = \overline{AB} \times \overline{OA'}$, więc $\overline{AB} \times (\overline{OA} - \overline{OA'}) = 0$. Ponieważ zaś $\overline{OA} - \overline{OA'} = \overline{A'A}$, więc

$$\overline{AB} \times \overline{A'A} = 0.$$

Lecz $\overline{AB} \times \overline{A'A} = \text{Mom}_{A'} \overline{AB}$, więc

$$\text{Mom}_{A'} \overline{AB} = 0.$$

Wynika stąd, że punkt A' leży na przedłużeniu wektora $\overline{AB}$. Ponieważ nadto $\overline{AB}$ jest równoległy do $\overline{A'B'}$, więc $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ leżą na tej samej prostej.

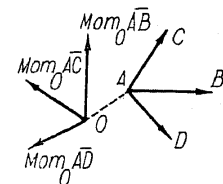
Moment sumy wektorów o wspólnym początku. Założmy, że dane są wektory $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ (t. j. oba o początku w punkcie A). Niechaj $\overline{AD}$ będzie ich sumą.

Mamy

$$\text{Mom}_O \overline{AD} = \overline{AD} \times \overline{OA} = (\overline{AB} + \overline{AC}) \times \overline{OA},$$

zatem $\text{Mom}_O \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{OA} + \overline{AC} \times \overline{OA}$, więc

$$\text{Mom}_O \overline{AD} = \text{Mom}_O \overline{AB} + \text{Mom}_O \overline{AC}.$$



Podobny wzór otrzymamy dla sumy kilku wektorów. A więc: suma momentów kilku wektorów o wspólnym początku równa się momentowi ich sumy o tym samym początku.

Współrzędne momentu. Położenie wektora $\vec{a}$ jest określone, jeśli dane są jego rzuty i współrzędne x, y, z dowolnego punktu A prostej l , na której wektor $\vec{a}$ leży. Niechaj x_0, y_0, z_0 będą współrzędnymi punktu O . Mamy

$$\text{Mom}_O \vec{a} = \vec{a} \times \overline{OA}.$$

Rzuty wektora $\overline{OA}$ wynoszą $x - x_0, y - y_0, z - z_0$. Zatem, oznaczając przez $\vec{M}$ moment względem O , otrzymamy:

$$(I) \quad \begin{aligned} M_x &= a_y(z - z_0) - a_z(y - y_0), & M_y &= a_z(x - x_0) - a_x(z - z_0), \\ M_z &= a_x(y - y_0) - a_y(x - x_0). \end{aligned}$$

Jeżeli w szczególności punkt O jest początkiem układu, to $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, a więc

$$(II) \quad M_x = a_y z - a_z y, \quad M_y = a_z x - a_x z, \quad M_z = a_x y - a_y x.$$

Przypuśćmy, że $\vec{a} = \vec{a}'$. Zatem, oznaczając przez $\vec{M}$ i $\vec{M}'$ momenty wektorów względem dowolnego punktu, mamy $\vec{a} = \vec{a}'$, $\vec{M} = \vec{M}'$ czyli

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z, \quad M_x = M'_x, \quad M_y = M'_y, \quad M_z = M'_z.$$

Na odwrót, jeżeli zachodzą powyższe równości, to $\vec{a} = \vec{a}'$ i $\vec{M} = \vec{M}'$, zatem na mocy twierdzenia 2, str. 17, wektory $\vec{a}$ i $\vec{a}'$ są równoważne.

A więc: rzuty wektora $\vec{a}$ i rzuty momentu $\vec{M}$ względem dowolnego punktu wyznaczają długość, kierunek, zwrot i położenie wektora $\vec{a}$.

Moment wektora względem prostej. Niech dane będą wektor $\vec{a}$ i prosta l . Poprowadźmy przez dowolny punkt O prostą l' płaszczyznę Π prostopadłą do l . Utwórzmy rzut $\vec{a}'$ wektora $\vec{a}$ na płaszczyznę Π .

Moment wektora $\vec{a}'$ względem O nazywamy momentem wektora $\vec{a}$ względem prostej l i oznaczamy symbolem $\text{Mom}_l \vec{a}$.

$\text{Mom}_l \vec{a}$ nie zależy oczywiście od obioru punktu O .

$\text{Mom}_l \vec{a}$ jest zerem tylko w następujących przypadkach:

- 1° gdy $\vec{a} = 0$,
- 2° gdy $\vec{a} \parallel l$, gdyż wtedy $\vec{a}' = 0$,
- 3° gdy przedłużenie $\vec{a}$ przecina l , gdyż wtedy przedłużenie $\vec{a}'$ przechodzi przez O .

Jeżeli d oznacza odległość $\vec{a}$ od l , zaś φ kąt między $\vec{a}$ i l , to łatwo można okazać, że

$$(III) \quad |\text{Mom}_l \vec{a}| = d |\vec{a}| \sin \varphi.$$

Obierzmy prostą l za oś z , płaszczyznę Π za płaszczyznę xy . Połóżmy $\vec{M} = \text{Mom}_O \vec{a}$ i $\vec{L} = \text{Mom}_l \vec{a}$. Ponieważ $\vec{a}'$ ma rzuty $a'_x = a_x$, $a'_y = a_y$, $a'_z = 0$, więc $L_x = 0$, $L_y = 0$ i $L_z = a_x y - a_y x$, gdzie x, y, z są współrzędnymi początku wektora $\vec{a}$. Widzimy więc, że $M_z = L_z$.

A zatem: $\text{Mom}_l \vec{a}$ jest rzutem na prostą l momentu wektora $\vec{a}$ względem dowolnego punktu tej prostej.

II. Układy wektorów

§ 12. Moment ogólny układu wektorów. Niech dany będzie układ wektorów:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n.$$

Oznaczmy przez $\vec{s}$ sumę układu (t. j. sumę wektorów układu). A więc

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n.$$

Obierzmy dowolny punkt O .

Momentem ogólnym lub krótko momentem układu względem O nazywamy sumę momentów poszczególnych wektorów względem O . Oznaczamy go przez

$$\vec{M}_O.$$

Mamy więc

$$\vec{M}_O = \text{Mom}_O \vec{a}_1 + \text{Mom}_O \vec{a}_2 + \dots + \text{Mom}_O \vec{a}_n.$$

Moment ogólny czasem oznaczamy też przez

$$\text{Mom}_O(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Obierzmy inny punkt O' . Mamy

$$\vec{M}_{O'} = \text{Mom}_{O'} \vec{a}_1 + \text{Mom}_{O'} \vec{a}_2 + \dots + \text{Mom}_{O'} \vec{a}_n.$$

Ponieważ $\text{Mom}_{O'} \vec{a}_1 = \vec{a}_1 \times \overrightarrow{O'A_1}$, gdzie A_1 jest początkiem wektora $\vec{a}_1$ i t. d., więc

$$\vec{M}_{O'} = \vec{a}_1 \times \overrightarrow{O'A_1} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{O'A_2} + \dots$$

Lecz $\overrightarrow{O'A_1} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}$ i t. d., zatem

$$\vec{M}_{O'} = \vec{a}_1 \times (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}) + \vec{a}_2 \times (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots$$

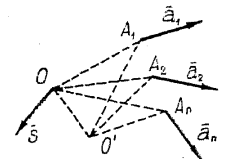
Po wymnożeniu otrzymujemy:

$$(1) \quad \vec{M}_{O'} = (\vec{a}_1 \times \overrightarrow{O'O} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{O'O} + \dots) + (\vec{a}_1 \times \overrightarrow{OA_1} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{OA_2} + \dots).$$

Lecz $\vec{a}_1 \times \overrightarrow{O'O} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{O'O} + \dots = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots) \times \overrightarrow{O'O} = \vec{s} \times \overrightarrow{O'O}$. Suma zawarta w drugim nawiasie równości (1) przedstawia moment układu względem O . Zatem

$$(I) \quad \vec{M}_{O'} = \vec{s} \times \overrightarrow{O'O} + \vec{M}_O.$$

Iloczyn $\vec{s} \times \overrightarrow{O'O}$ jest momentem względem O' sumy układu wektorów o początku O .



A więc: jeżeli zmieniamy punkt, względem którego wyznaczamy ogólny moment układu, wówczas moment ten zmienia się o moment sumy układu zaczepionej w dawnym punkcie, wziętej względem nowego punktu.

Z twierdzenia powyższego wynikają następujące wnioski:

1. Jeżeli suma układu jest zerem, to moment ogólny jest stały (t. j. nie zależy od punktu, względem którego się go wyznacza).

Jeżeli bowiem $\bar{s} = 0$, wówczas $\bar{s} \times \overline{O'O} = 0$, więc $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O$.

2. Jeżeli momenty ogólne względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej są równe, to suma układu jest zerem.

Założmy bowiem, że momenty ogólne względem punktów O, O', O'' nie leżących na jednej prostej są równe. Zatem

$$\bar{M}_O = \bar{M}_{O'} = \bar{M}_{O''}, \text{ skąd } \bar{s} \times \overline{O'O} = 0 \text{ i } \bar{s} \times \overline{O''O} = 0.$$

Jeżeli więc $\bar{s} \neq 0$, to $\bar{s} \parallel \overline{OO'}$ i $\bar{s} \parallel \overline{O''O}$, co niemożliwe, gdy O, O', O'' nie leżą na jednej prostej.

3. Jeżeli punkt, względem którego wyznaczamy moment ogólny, przesuwa się wzdłuż prostej równoległej do sumy układu, wówczas moment nie ulega zmianie.

Jeśli bowiem $\bar{s} \parallel \overline{O'O}$, to $\bar{s} \times \overline{O'O} = 0$, więc $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O$.

4. Iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę układu jest wielkością stałą (t. j. nie zależy od punktu, względem którego moment jest wyznaczony).

Pomnożmy bowiem obustronnie równość (I) skalarowo przez $\bar{s}$. Otrzymamy $\bar{s} \bar{M}_{O'} = \bar{s}(\bar{s} \times \overline{O'O}) + \bar{s} \bar{M}_O$, lecz $\bar{s} \times \overline{O'O} \perp \bar{s}$, zatem $\bar{s}(\bar{s} \times \overline{O'O}) = 0$, skąd

$$\bar{s} \bar{M}_{O'} = \bar{s} \bar{M}_O.$$

Iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę nazywa się *parametrem* układu.

5. Rzut momentu na kierunek sumy jest wielkością stałą (przy czym zakłada się, że suma jest różna od zera).

Mamy bowiem na mocy wniosku 4 i określenia iloczynu skalarowego $|\bar{s}| \text{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_{O'} = |\bar{s}| \text{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_O$, skąd

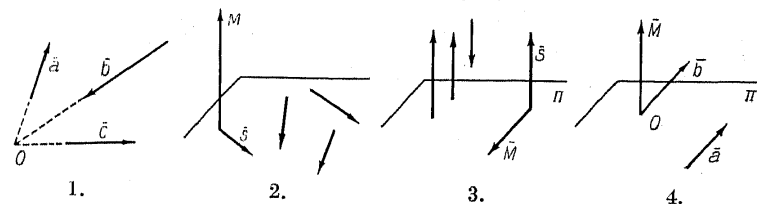
$$\text{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_{O'} = \text{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_O.$$

§ 13. Parametr. Wyznamy obecnie parametr (t. j. iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę) dla pewnych układów występujących często w mechanice.

Układem *środkowym* lub *centralnym* nazywamy układ, w którym przedłużenia poszczególnych wektorów przechodzą przez pewien stały punkt O , zwany *środkiem* (rys. 1).

Moment układu względem środka jest zerem, gdyż moment każdego wektora jest zerem. Zatem i parametr jest zerem.

A więc: parametr układu środkowego jest zerem.



Układem *plaskim* nazywamy układ, w którym wszystkie wektory leżą w jednej płaszczyźnie Π (rys. 2).

Moment ogólny układu względem dowolnego punktu O płaszczyzny Π jest prostopadły do Π , gdyż momenty poszczególnych wektorów względem O są prostopadłe do Π . Ponieważ suma leży w płaszczyźnie Π , więc suma jest prostopadła do momentu ogólnego. Wynika stąd, że parametr jest zerem.

A więc: parametr układu płaskiego jest zerem.

Układem *równoległym* nazywamy układ, w którym wszystkie wektory są równoległe (rys. 3).

Jeżeli suma $\bar{s}$ jest zerem, to parametr jest oczywiście równy zeru. Założmy więc, że $\bar{s} \neq 0$. Oierzmy dowolny punkt O . Momenty poszczególnych wektorów względem O leżą w płaszczyźnie Π prostopadłej do wektorów układu i przechodzącej przez O . Zatem moment ogólny leży również w płaszczyźnie Π . Ponieważ $\bar{s} \perp \Pi$, więc $\bar{s}$ jest prostopadły do momentu ogólnego, wobec czego parametr jest zerem.

A więc: parametr układu równoległego jest zerem.

Założmy teraz, że wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są *skośne* (t. j. nie leżące w jednej płaszczyźnie). Niechaj O będzie początkiem wektora $\bar{b}$ (rys. 4).

Moment $\bar{M}$ układu $(\bar{a}, \bar{b})$ względem O równy jest oczywiście $\text{Mom}_O \bar{a}$. Parametr K wynosi $K = \bar{M} \bar{s} = \bar{M}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{M} \bar{a} + \bar{M} \bar{b}$. Lecz $\bar{M} = \text{Mom}_O \bar{a}$ jest prostopadły do płaszczyzny Π przechodzącej

przez O i wektor $\vec{a}$. Ponieważ w płaszczyźnie Π leży wektor $\vec{a}$, zaś nie leży wektor $\vec{b}$, więc moment $\vec{M}$ jest prostopadły do $\vec{a}$, nie jest natomiast prostopadły do $\vec{b}$, skąd na mocy ostatniej równości $K = \vec{M}\vec{b} \neq 0$.

A więc: *parametr układu złożonego z dwóch wektorów skośnych jest różny od zera.*

§ 14. Układy równoważne. Dwa układy wektorów $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots)$ i $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \dots)$ nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają równe sumy i równe momenty ogólne względem każdego punktu.

Jeżeli mamy układ $(\vec{a})$ złożony z jednego tylko wektora $\vec{a}$ i układ $(\vec{a}')$ złożony z jednego tylko wektora $\vec{a}'$, to — jak wynika z twierdzenia 2, str. 17 — warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układy $(\vec{a})$ i $(\vec{a}')$ były równoważne, jest $\vec{a} = \vec{a}'$. A więc w tym przypadku pojęcie równoważności układów pokrywa się z pojęciem równoważności wektorów.

W przypadku ogólnym mamy następujące twierdzenia:

1. *Jeżeli dwa układy mają równe sumy i równe momenty ogólne względem pewnego punktu, to układy te są równoważne.*

Wynika to ze wzoru (I), str. 19. Jeżeli bowiem momenty względem punktu O są równe i sumy są równe, to momenty względem każdego punktu O' będą równe, gdyż przy zastąpieniu punktu O przez O' ulegną one równym zmianom w obu układach.

2. *Jeżeli dwa układy mają względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej równe momenty, to układy te są równoważne.*

Jeżeli bowiem oznaczmy przez O_1, O_2, O_3 punkty, względem których momenty ogólne obu układów są równe, zaś przez $\vec{s}$ i $\vec{s}'$ sumy tych układów, to otrzymamy ze wzoru (I), str. 19, $\vec{s} \times \vec{O_1O_2} = \vec{s}' \times \vec{O_1O_2}$ i $\vec{s} \times \vec{O_1O_3} = \vec{s}' \times \vec{O_1O_3}$, skąd

$$(\vec{s} - \vec{s}') \times \vec{O_1O_2} = 0 \quad \text{i} \quad (\vec{s} - \vec{s}') \times \vec{O_1O_3} = 0.$$

Gdyby było $\vec{s} - \vec{s}' \neq 0$, to mielibyśmy $\vec{s} - \vec{s}' \parallel \vec{O_1O_2}$ i $\vec{s} - \vec{s}' \parallel \vec{O_1O_3}$, co niemożliwe, bo O_1, O_2, O_3 nie leżą na jednej prostej. Jest zatem $\vec{s} - \vec{s}' = 0$, czyli $\vec{s} = \vec{s}'$, skąd na mocy poprzedniego twierdzenia wynika równoważność układów.

Z określenia parametru wnosimy natychmiast, że *układy równoważne mają równe parametry.*

Twierdzenie odwrotne jest oczywiście fałszywe.

Układy równoważne zeru. Jeżeli suma układu jest zerem, to — jak wiemy — moment ogólny jest stały. Otóż jeżeli suma układu jest zerem i moment ogólny jest zerem, układ nazywamy *układem równoważnym zeru*.

Układ równoważny zeru jest równoważny wektorowi zerowemu.

Aby przekonać się, czy układ jest równoważny zeru, wystarczy zbadać, czy jego suma i moment względem jakiegoś dowolnego punktu są równe zeru.

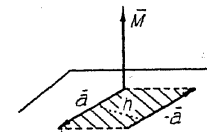
Z twierdzenia 2, str. 20 wynika łatwo, że *układ jest równoważny zeru, jeżeli moment ogólny układu względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej jest równy zeru.*

Układ trzech wektorów równoważnych zeru. Jeżeli układ złożony z trzech wektorów, jest równoważny zeru, to przedłużenia tych wektorów przechodzą przez jeden punkt (lub wektory są równoległe).

Przyjmijmy, że układ wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jest równoważny zeru. Moment ogólny względem A (początku wektora $\vec{a}$) jest więc zerem, skąd $\text{Mom}_A \vec{b} + \text{Mom}_A \vec{c} = 0$, a więc $\text{Mom}_A \vec{b} = -\text{Mom}_A \vec{c}$. Wynika stąd, że wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ leżą w płaszczyźnie Π przechodzącej przez A . Ponieważ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, więc $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$, zatem $\vec{a}$ także leży w płaszczyźnie Π . Oznaczmy przez O punkt, w którym przecinają się wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ponieważ moment ogólny układu względem O redukuje się do momentu wektora $\vec{c}$ względem O , więc $\text{Mom}_O \vec{c} = 0$, zatem $\vec{c}$ przechodzi również przez O . Wreszcie, jeżeli $\vec{a} \parallel \vec{b}$, to również $\vec{a} \parallel \vec{c}$, bo $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ (p. str. 21, rys. 1).

§ 15. Para wektorów. Parą wektorów nazywamy układ złożony z dwu wektorów $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ równoległych, lecz przeciwnie skierowanych i równych co do długości.

Ponieważ suma pary wektorów jest równa zeru, więc moment pary jest stały. Obliczając go względem początku wektora $\vec{a}$, widzimy, że moment wektora $\vec{a}$ jest zerem, moment zaś wektora $-\vec{a}$, jest prostopadły do płaszczyzny pary i równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach wchodzących w skład pary.



A więc: *moment pary wektorów jest równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach pary i jest prostopadły do płaszczyzny pary.*

Jeżeli wektory pary leżą na tej samej prostej, to oczywiście moment jest zerem.

Jeśli h oznacza odległość wektorów $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ zaś $\vec{M}$ moment pary, to

$$(1) \quad |\vec{M}| = |\vec{a}| \cdot h.$$

Do danego wektora $\vec{M}$ można zawsze znaleźć parę o momencie równym $\vec{M}$. Wystarczy na płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{M}$ obrać dowolny równoległobok o polu równym $|\vec{M}|$. Przeciwnieległe boki, odpowiednio skierowane, utworzą szukaną parę wektorów. Oczywiście, zadanie to możemy rozwiązać na nieskończenie wiele sposobów.

Dwie pary o równych momentach tworzą układy równoważne. Jeżeli więc parę wektorów dowolnie przesuniemy lub skrećimy w płaszczyźnie pary, to otrzymamy parę równoważną.

§ 16. Redukcja układu wektorów. Niech dany będzie układ S złożony z wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Zajniemy się wyznaczeniem najprostszego układu równoważnego układowi S .

Obierzmy dowolny punkt O . Oznaczmy przez $\vec{s}$ sumę układu S , przez $\vec{M}$ moment ogólny względem O . Weźmy pod uwagę układ R złożony z pary $(\vec{a}, -\vec{a})$ o momencie równym $\vec{M}$ i z wektora $\vec{s}$ o początku O . Układy R i S są oczywiście równoważne, bo mają sumy równe $\vec{s}$ i momenty względem O równe $\vec{M}$.

A więc: *każdy układ wektorów równoważny jest układowi złożonemu ze sumy o początku w dowolnym punkcie O i pary o momencie równym momentowi układu względem O .*

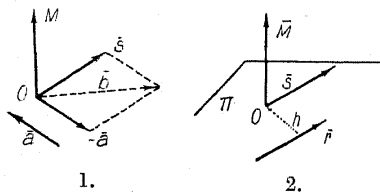
Jest to t. zw. *twierdzenie o redukcji*. Punkt O nazywamy *środkiem redukcji*.

Parę $(\vec{a}, -\vec{a})$ możemy tak dobrać, by punkt O był początkiem wektora $-\vec{a}$. Zastąpmy wektory $\vec{s}$ i $-\vec{a}$ ich sumą $\vec{b}$ o początku O (rys. 1). Układ złożony z wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest oczywiście równoważny układowi S .

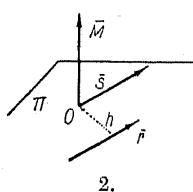
Zatem: *każdy układ wektorów równoważny jest układowi dwu wektorów, z których jeden ma początek w punkcie dowolnie obranym.*

Wszelki układ wektorów jest więc równoważny pewnemu układowi złożonemu z wektora i pary, lub z dwóch wektorów. Zajniemy się teraz wyznaczeniem warunków, przy których dany układ jest równoważny jednemu tylko wektorowi lub jednej parze.

Rozpatrzmy kolejno przypadki, w których parametr układu jest różny od zera i równy zeru.



1.



2.

1° Parametr różny od zera. Układ złożony z jednego wektora lub jednej pary jest układem płaskim, ma zatem parametr $K=0$. Jeżeli więc parametr układu S jest różny od zera, to układ S nie może być równoważny jednemu wektorowi ani parze wektorów, ponieważ układy równoważne mają równe parametry.

Założmy teraz, że układ S o parametrze $K \neq 0$ równoważny jest układowi R złożonemu z dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Parametr układu R jest zatem także różny od zera. Wynika stąd, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie, są więc skośne (p. § 13, str. 21 i 22).

Zatem: *jeżeli parametr układu jest różny od zera, to układ jest równoważny układowi dwu wektorów skośnych.*

2° Parametr równy zeru, suma różna od zera. Przypuśćmy, że parametr K układu S jest zerem, zaś suma $\vec{s} \neq 0$. Obierzmy dowolny punkt O i oznaczmy przez $\vec{M}$ moment układu S względem O . Ponieważ $K = \vec{M}\vec{s} = 0$, więc $\vec{M} \perp \vec{s}$. Przeprowadźmy przez O płaszczyznę Π prostopadłą do $\vec{M}$ (str. 24, rys. 2). Na Π możemy obrać wektor $\vec{r}$ równy wektorowi $\vec{s}$, tak, by $\text{Mom}_O \vec{r} = \vec{M}$. Odległość h wektora $\vec{r}$ od O dostaniemy z równości $|\vec{M}| = h|\vec{r}|$. Łatwo zauważyć, że układ S równoważny jest wektorowi $\vec{r}$.

A więc: *jeżeli parametr układu jest równy zeru, zaś suma różna od zera, to układ równoważny jest jednemu wektorowi.*

Wektor $\vec{r}$, któremu równoważny jest cały układ S , nazywa się *wektorem wypadkowym* lub krótko *wypadkową* układu S .

Nie należy mieszać sumy z wypadkową. Suma ma tylko określoną długość, kierunek i zwrot; wypadkowa ma ponadto określone położenie, t. j. prostą, na której leży.

3° Parametr i suma równe zeru. Założmy wreszcie, że zarówno parametr jak suma układu są równe zeru. Na mocy twierdzenia o redukcji wynika stąd, że układ jest równoważny parze wektorów. Ponieważ suma jest zerem, więc moment ogólny $\vec{M}$ jest stały.

Jeżeli $\vec{M} \neq 0$, wówczas para wektorów jest najprostszym układem równoważnym danemu. Jeżeli zaś $\vec{M} = 0$, to ponieważ z założenia suma równa się zeru, więc układ jest równoważny zeru, czyli wektorowi zerowemu.

A więc: *układ o parametrze i sumie równych zeru jest równoważny parze wektorów lub wektorowi zerowemu, zależnie od tego czy moment ogólny jest różny od zera czy równy zeru.*

Powyższe wyniki zebrane są w następującej tabelce:

Parametr	Suma	Moment	Najprostszy układ równoważny
$K \neq 0$	—	—	wektor i para lub dwa wektory skośne
$K = 0$	$\bar{s} \neq 0$	—	wektor wypadkowy
	$\bar{s} = 0$	$\bar{M} \neq 0$	para wektorów
	$\bar{s} = 0$	$\bar{M} = 0$	wektor zerowy

Wynikają z nich łatwo twierdzenia następujące:

1. Jeżeli moment układu jest zerem względem pewnego punktu O , to układ ma wypadkową o początku w O .

2. Układ środkowy ma wypadkową zaczepioną w środku.

Twierdzenia te wynikają z twierdzenia o redukcji (str. 24), jeżeli za środek redukcji wziąć punkt O (wzgl. środek układu).

3. Układ płaski ma wypadkową albo jest równoważny parze.

4. Układ równoległy ma wypadkową albo jest równoważny parze.

Twierdzenia 3 i 4 otrzymujemy od razu z tabelki, gdyż w obu przypadkach parametr K jest zerem.

§ 17. Oś środkowa. Skretnik. Niech dany będzie układ S o sumie różnej od zera. Wyznamy miejsce geometryczne punktów, względem których moment ogólny jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$).

Obierzmy w tym celu dowolny punkt O . Niechaj $\bar{M}_O = \overline{OA}$ będzie momentem ogólnym układu względem punktu O , zaś $\overline{OB}$ rzutem $\bar{M}_O$ na $\bar{s}$.

Wyznamy teraz punkt O' , względem którego moment sumy $\bar{s}$ o początku w O , równa się $\overline{AB}$. Punkt taki znajdziemy w odległości d od O na prostej prostopadłej w punkcie O do $\overline{AB}$ i $\bar{s}$, gdzie d spełnia warunek:

$$d \cdot |\bar{s}| = |\overline{AB}|.$$

Mamy zatem $\text{Mom}_{O'} \bar{s} = \overline{AB}$ czyli

$$\bar{s} \times \overline{O'O} = \overline{AB},$$

więc na mocy (I), str. 19

$$\bar{M}_{O'} = \bar{s} \times \overline{O'O} + \bar{M}_O,$$

skąd

$$\bar{M}_{O'} = \overline{AB} + \overline{OA} = \overline{OB}.$$

A więc $\bar{M}_{O'}$ jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$, gdy $\bar{M}_O \perp \bar{s}$).

Przeprowadźmy przez O' prostą l równoległą do sumy $\bar{s}$. Dla dowolnego punktu O'' prostej l zachodzi związek $\bar{s} \parallel \overline{O'O''}$, więc $\bar{s} \times \overline{O'O''} = 0$, skąd $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_{O''}$ (p. str. 20, wniosek 3).

A więc: moment ogólny względem dowolnego punktu prostej l jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$).

Punkty poza prostą l nie posiadają powyższej własności. Jeżeli bowiem dla jakiegoś punktu O_1 moment $\bar{M}_{O_1}$ jest równoległy do $\bar{s}$ lub równy zeru, to na mocy twierdzenia 5, str. 20, mamy $\text{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_{O_1} = \text{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_{O'}$. Zatem $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_{O'}$. Wynika stąd na mocy wzoru (I), str. 19, że $\bar{s} \times \overline{O'O_1} = 0$, czyli że $\bar{s} \parallel \overline{O'O_1}$. Punkt O_1 leży więc na prostej l .

Udowodniliśmy zatem, że szukanym miejscem geometrycznym jest prosta równoległa do $\bar{s}$. Prostą tę nazywamy *osią środkową* układu.

Oś środkowa układu jest to więc prosta o tej własności, że moment ogólny względem dowolnego jej punktu jest równoległy do sumy lub równy zeru.

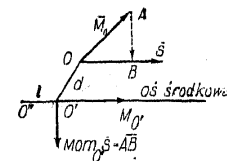
A więc: układ, którego suma jest różna od zera, posiada jedną (i tylko jedną) oś środkową.

Układ złożony z wektora i pary o momencie równoległym do wektora nazywamy *skretnikiem*.

W szczególności skretnikiem nazywamy jeden wektor lub parę.

Obierając punkt na osi środkowej, widzimy, że na mocy tw. o redukcji, str. 24, układ redukuje się do skretnika. Jeśli suma układu jest zerem, to układ redukuje się do pary wektorów, a więc również do skretnika.

Zatem: wszelki układ jest równoważny pewnemu skretnikowi.



§ 18. Środek wektorów równoległych. Niech dany będzie układ wektorów równoległych $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ o sumie różnej od zera. Oznaczmy przez $\vec{w}$ wektor o długości 1, równoległy do wektorów układu. Wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ możemy przedstawić w postaci

$$\vec{a}_1 = a_1 \vec{w}, \quad \vec{a}_2 = a_2 \vec{w}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = a_n \vec{w}$$

gdzie liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są co do wartości bezwzględnej równe długościom wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Zatem $\vec{s} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \vec{w}$. Ponieważ $\vec{s} \neq 0$, więc $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$.

Obierzmy dowolny punkt O' i oznaczmy przez $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ wektory $\vec{O'A}_1, \vec{O'A}_2, \dots, \vec{O'A}_n$, gdzie $A_1, A_2, \dots, A_n$ są początkami wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. A więc

$$\vec{M}_{O'} = a_1 \vec{w} \times \vec{r}_1 + a_2 \vec{w} \times \vec{r}_2 + \dots + a_n \vec{w} \times \vec{r}_n$$

czyli

$$(1) \quad \vec{M}_{O'} = \vec{w} \times \sum a_i \vec{r}_i.$$

Obierzmy punkt O tak, by

$$(2) \quad \vec{r} = \vec{O'O} = \frac{\sum a_i \vec{r}_i}{\sum a_i}.$$

Na mocy wzoru (I), str. 19, jest

$$(3) \quad \vec{M}_O = \vec{s} \times \vec{OO'} + \vec{M}_{O'}.$$

Ponieważ

$$\vec{s} \times \vec{OO'} = (\sum a_i \vec{w}) \times (-\vec{r}) = -\vec{w} \times \sum a_i \vec{r}_i,$$

więc według (2) jest $\vec{s} \times \vec{OO'} = -\vec{w} \times \sum a_i \vec{r}_i$. Stąd na mocy (1) i (3) wynika, że $\vec{M}_O = 0$.

Zatem wypadkowa układu przechodzi przez O (str. 26, tw. 1).

Zauważmy, że wedle (2) położenie punktu O nie zależy od kierunku $\vec{w}$ wektorów $\vec{a}_i$. Jeżeli więc skreślimy wektory $\vec{a}_i$ około ich punktów zaczepienia, to wypadkowa znowu przejdzie przez O .

Punkt O nazywa się *środkiem układu wektorów* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Jeżeli współrzędne początków A_i oznaczmy przez x_i, y_i, z_i , współrzędne zaś środka przez x_0, y_0, z_0 , to obierając punkt O' w początku układu, otrzymamy na mocy (2)

$$(4) \quad x_0 = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}, \quad y_0 = \frac{\sum a_i y_i}{\sum a_i}, \quad z_0 = \frac{\sum a_i z_i}{\sum a_i}.$$

§ 19. Przekształcenia elementarne układu. Następujące przekształcenia układu wektorów nazywamy *elementarnymi*:

a) dodanie do układu (lub usunięcie z niego) dwóch wektorów leżących na jednej prostej, równych co do długości, lecz przeciwnie skierowanych,

b) dodanie do układu (lub usunięcie z niego) kilku wektorów o wspólnym początku i o sumie równej zeru.

Przekształcenia elementarne nie zmieniają oczywiście sumy ani momentu układu. Stosując zatem do układu przekształcenia elementarne, otrzymamy zawsze układy z nim równoważne. Przekształcenia elementarne grają ważną rolę w teorii ciała sztywnego.

Łatwo wykazać, że przy pomocy przekształceń elementarnych możemy:

1) punkt zaczepienia wektora przesunąć do dowolnie obranego punktu na prostej, na której wektor leży,

2) kilka wektorów o wspólnym początku zastąpić ich sumą o tym samym początku,

3) jeden wektor zastąpić kilkoma wektorami o tym samym początku co wektor dany i o sumie równej wektorowi danemu.

Dowód: 1) Przypuśćmy, że wśród wektorów danego układu występuje wektor $\vec{a}$ o początku A .

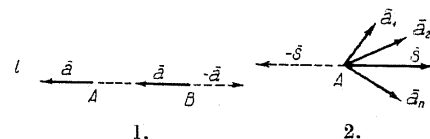
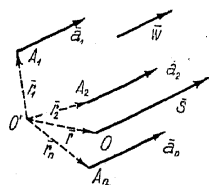
Obierzmy na prostej l , na której $\vec{a}$ leży, dowolny punkt B . Dodajmy do układu dwa wektory $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ o początku B . Wykonaliśmy więc przekształcenie elementarne (a). Usuńmy teraz

z układu wektory: $\vec{a}$ (o początku A) i $-\vec{a}$. Będzie to przekształcenie elementarne (b). Operacje, jakie wy-

konaliśmy na układzie, sprowadzają się do przesunięcia punktu zaczepienia wektora $\vec{a}$ z A do B (p. rys. 1).

2) Przypuśćmy, że punkt A jest początkiem wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Dodajmy do układu dwa wektory o początku A : wektor $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ i wektor $-\vec{s}$ (przekształcenie elementarne (a)). Usuńmy teraz wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, -\vec{s}$ (przekształcenie elementarne (b)). Operacje, jakie wykonaliśmy, sprowadzają się do zastąpienia wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ich sumą $\vec{s}$ (p. rys. 2).

3) dowodzi się podobnie.



Udowodnimy teraz następujące twierdzenia:

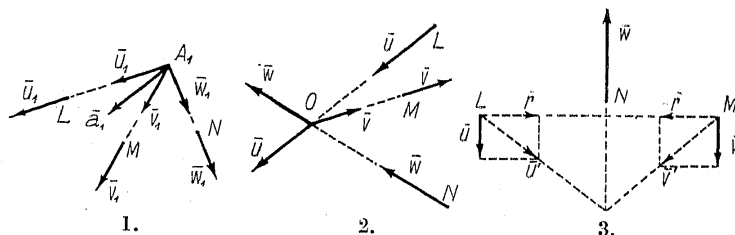
Twierdzenie 1. *Wszelki układ wektorów można sprowadzić przy pomocy przekształceń elementarnych do układu z nim równoważnego, złożonego z trzech wektorów.*

Dowód. Przypuśćmy, że mamy układ wektorów $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ zaczepionych odpowiednio w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$. Obierzemy trzy dowolne punkty L, M, N nie leżące na jednej prostej i takie, by w płaszczyźnie przechodzącej przez L, M, N nie leżał żaden z punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ponieważ proste A_1L, A_1M i A_1N nie leżą w jednej płaszczyźnie, więc wektor $\vec{a}_1$ możemy zastąpić trzema wektorami $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1$ o początku A_1 , leżącymi na prostych A_1L, A_1M, A_1N , przy czym oczywiście $\vec{a}_1 = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ (rys. 1). Wektory $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1$ możemy przesunąć wzdłuż prostych, na których leżą, odpowiednio do punktów L, M, N . W ten sposób zastąpiliśmy wektor $\vec{a}_1$ wektorami $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1$ zaczepionymi w punktach L, M, N . Podobnie zastąpimy każdy z wektorów $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ trzema wektorami zaczepionymi w L, M, N .

Wektory o początku L zastąpmy teraz ich sumą $\vec{u}$, zaczepioną również w L . Podobnie wektory o początkach M i N zastąpmy sumami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zaczepionymi odpowiednio w M i N .

W ten sposób przy pomocy przekształceń elementarnych sprowadziliśmy dany układ do układu złożonego z trzech wektorów, c. b. d. o.



Twierdzenie 2. *Układ równoważny zeru można przy pomocy przekształceń elementarnych sprowadzić do wektora zerowego.*

Dowód. Załóżmy, że układ $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ jest równoważny zeru. Na mocy tw. 1 możemy go zastąpić przy pomocy przekształceń elementarnych układem złożonym z trzech wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, zaczepionych odpowiednio w punktach L, M, N . Układ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ jest równoważny zeru, bo jest równoważny układowi danemu (przekształcenia elementarne nie zmieniają bowiem sumy ani momentu).

Na mocy twierdzenia ze str. 23, wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ są albo równoległe albo ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie O (str. 30, rys. 2). W drugim przypadku możemy punkty zaczepienia wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ przenieść do O , a następnie wektory te usunąć, gdyż suma ich jest zerem.

Założmy więc, że wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ są równoległe (str. 30, rys. 3). Gdyby $\vec{u} + \vec{v} = 0$, byłoby oczywiście $\vec{w} = 0$. Układ sprowadzałby się zatem do pary $\vec{u}, \vec{v}$. Ponieważ moment jest zerem, więc wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ leżałyby na tej samej prostej; ponieważ nadto $\vec{u} + \vec{v} = 0$, więc moglibyśmy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ usunąć. Niech więc $\vec{u} + \vec{v} \neq 0$. Dodajmy dwa wektory $\vec{r}$ i $-\vec{r}$ leżące na prostej LM i zaczepione odpowiednio w L i M . Wektory $\vec{u}$ i $\vec{r}$ o początku L możemy zastąpić ich sumą $\vec{u}'$ zaczepioną również w L . Podobnie wektory $\vec{v}$ i $-\vec{r}$ możemy zastąpić ich sumą $\vec{v}'$ zaczepioną w M . Wektory $\vec{u}'$ i $\vec{v}'$ nie są równoległe, zatem wektory $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}$ możemy jak poprzednio usunąć. A więc układ równoważny zeru sprowadziliśmy przy pomocy przekształceń elementarnych do wektora zerowego, c. b. d. o.

Twierdzenie 3. *Jeżeli dwa układy wektorów są równoważne, to przy pomocy przekształceń elementarnych można jeden układ sprowadzić w drugi.*

Dowód. Załóżmy, że układ wektorów $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ zaczepionych w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest równoważny układowi wektorów $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r)$ zaczepionych w punktach $B_1, B_2, \dots, B_r$.

Dodajmy do pierwszego układu wektory $\vec{b}_1, -\vec{b}_1$ o początku B_1 , wektory $\vec{b}_2, -\vec{b}_2$ o początku B_2 itd. Ponieważ wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, -\vec{b}_1, -\vec{b}_2, \dots, -\vec{b}_r$ tworzą układ równoważny zeru, więc na mocy tw. 2 możemy układ ten przy pomocy przekształceń elementarnych usunąć, t. j. zastąpić wektorem zerowym. Po usunięciu zostanie układ $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r)$.