MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY:

TOM VI

THEORIE DER ORTHOGONALREIHEN

VON

STEFAN KACZMARZ
DOZENT AN DER UNIVERSITÄT LWÓW

UND

HUGO STEINHAUS
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

WARSZAWA – LWÓW 1935

PRINTED IN POLAND

DRUK M. GARASIŃSKI. WARSZAWA. BRACKA 20.

VORWORT.

Die Theorie der Orthogonalreihen ist noch immer kein klassisches Kapitel der Analysis. Ihre geschichtlichen Quellen sind zweierlei. Die besser bekannte besteht aus den einzelnen Theorien der Fourier'schen, Legendre'schen, Bessel'schen und vieler anderen speziellen Reihen, an welchen das Gemeinsame zu erblicken es David Hilbert in den Anfangsjahren dieses Jahrhunderts vorbehalten blieb; die andere ist in den nun mehr als fünfzig Jahre zurückliegenden Untersuchungen skandinavischer Aktuare J. P. Gram, T. N. Thiele und ihrer Schüler zu finden. Sie haben sich das Ziel gesteckt, die in der Statistik auftretenden willkürlichen Funktionen vermittels geeigneter Orthogonalpolynome zu beherrschen. Die noch älteren Wroński'schen Versuche, das allgemeine Problem anzugreifen, blieben unverstanden und die Sturm-Liouville'sche Verallgemeinerung war an eine Klasse von Differentialgleichungen gebunden. Es darf also die skandinavische Schule als diejenige gelten, die als erste das Gemeinsame an allen Orthogonalreihen klar hervortreten ließ. I. Fredholm ist aus dieser Schule hervorgegangen und seine Theorie der Integralgleichungen, von Hilbert ausgebildet, gab Erhardt Schmidt die Anregung zu seiner grundlegenden Arbeit über Orthogonalentwicklungen. Auf diese Weise haben am heutigen Wissen beide Quellen ihren Anteil.

Gegenwärtig sind die Orthogonalreihen, von allen physikalischen und statistischen Anwendungen abgesehen, ein wichtiges Werkzeug der reinen Mathematik. Sie sind ja nichts weniger als die analytische Geometrie des Funktionenraumes bei Zugrundelegung des rechtwinkligen (=orthogonalen) Achsensystems. Nur ist der Funktionenraum unendlich komplizierter und reichhaltiger als der euklidische Raum und es bieten sich in jenem Probleme, denen kein Analogon in diesem entspricht. Eine reelle Funktion ist ein „Punkt"; die „Distanz" zweier Punkte im Funktionenraum gibt quadriert bereits ein Integral. Nun hat man die Wahl zwischen verschiedenen Integralbegriffen und es empfiehlt sich der Lebesgue'sche aus folgenden Gründen: zunächst ist er allgemein genug, um alle bekannten (nicht „zu großen") Funktionen zu fassen, des ferneren verleiht er — bei der Definition der Distanz als Integral — dem Raum die Eigenschaft der Komplettheit (den üblichen Ausdruck „Vollständigkeit" mußten wir uns für einen anderen Begriff vorbehalten); dies ermöglichte F. Riesz und E. Fischer den Hauptsatz der Theorie der Orthogonalreihen aufzustellen.

Diese Monographie behandelt die allgemeine Theorie der Orthogonalreihen einer Veränderlichen. Die Verfasser waren sich mit der Redaktion der Sammlung darüber einig, daß das Eingehen auf spezielle Orthogonalsysteme wohl den Umfang des Buches, nicht aber den Wert desselben in gleichem Maße vergrößern würde. So ist z. B. die Theorie der Bessel'schen Funktionen sowie der meisten aus der mathematischen Physik bekannten Systeme, als nicht in den Rahmen dieses Werkes passend, übergangen worden. Spezielle Orthogonalsysteme kommen wohl in diesem Buche vor, aber bloß als Beispiele. Unter den vielen schönen und wichtigen Dingen, die der Leser in diesem Buche nicht finden wird, möchten wir noch die Anwendungen auf die Theorie der Integralgleichungen erwähnen, sowie die von G. Szegö und anderen (Bochner, Bergmann, Zarankiewicz) ausgebildete Theorie der komplexen Orthogonalsysteme. Auf enzyklopädische Vollständigkeit hat also diese Monographie keinen Anspruch.

Der allgemeine Standpunkt kommt auch in der Wahl der Hilfsmittel zur Geltung. Selbstverständlich wird der Lebesgue'sche Integralbegriff als bekannt vorausgesetzt; wir durften das umsomehr tun, als das in dieser Sammlung erschienene gründliche Buch von S. Saks allen diesbezüglichen Wünschen nachkommen dürfte. Diejenigen Sätze der Integrationstheorie, die wir nicht als mathematisches Gemeingut betrachten konnten, haben wir im ersten Kapitel zusammengestellt. In demselben Kapitel haben wir alles Nötige aus der Theorie der Operationen — mit oder ohne Beweise — gebracht. Es handelt sich bloß um wenige Sätze, die wir besonders in den drei letzten Kapiteln unseres Buches anwenden: hier findet der Leser den Saks'schen Satz über Folgen von Operationen, sowie die Prinzipien, die einer von uns das „Resonanzprinzip" und das „Prinzip der Kondensation der Singularitäten" genannt hat; sie geben einen Überblick der möglichen singulären Funktionen und ihrer Verteilung im Funktionenraum. Näheres über die Theorie der linearen Operationen findet der Leser im Banach'schen Buche dieser Sammlung. Wir haben es versucht, die Beweise der Operationstheorie möglichst kurz zu gestalten, wobei uns (besonders beim § 8 des ersten Kapitels) Herr S. Mazur wesentlich geholfen hat. Verhältnismäßig wenig haben wir über Fourierreihen gebracht, weil in derselben Sammlung das neue Buch von A. Zygmund über diesen Gegenstand vorliegt.

An dieser Stelle möchten wir die Frage nach der Urheberschaft der in diesem Buche behandelten einzelnen Ergebnisse und Theorien erwähnen: es war nicht unsere Absicht jedesmal nach ihrem Ursprung zu forschen, und wir haben uns damit begnügt, nur gelegentlich Sätze und Beweise mit Namen zu versehen. Die uns zugänglichen Werke und Abhandlungen haben wir in der Bibliographie genannt, um dem Leser nähere Orientierung über spezielle Fragen zu ermöglichen; es ist aber nicht der Zweck dieser Bibliographie, Prioritätsfragen zu entscheiden. Infolgedessen können manche eigenen Resultate, die wir früher nicht publiziert hatten, hier nur an der Abwesenheit von Zitaten als solche erkannt werden. Es wäre aber verfehlt, alle zitatenlosen Ergebnisse den Verfassern zuzuschreiben, da viele allgemein bekannte Sätze der Analysis und der Funktionentheorie ebenfalls ohne Literaturnachweis gelassen wurden.

Das Buch besteht im Ganzen aus acht Kapiteln. Jedes Kapitel zerfällt in einige Paragraphen. Die eckig eingeklammerten dreistelligen Nummern am Rande geben durch ihre erste Ziffer das Kapitel, durch die zweite den Paragraphen an. So ist z. B. [394] ein Satz des III-ten Kapitels und des 9-ten §. Es wird aber manchmal mit jenen Nummern eine Definition, eine Bemerkung oder bloß eine Formel bezeichnet. Findet der Leser eine Angabe wie II, 5, (25), so bedeutet die römische Zahl das Kapitel, die arabische den § und die rund eingeklammerte die Nummer der Formel im Kapitel.

Die Bibliographie besteht aus zwei Verzeichnissen. Das erste gibt eine Zusammenstellung der Abhandlungen in alphabetischer Ordnung; die zitierten Arbeiten sind durchgehend numeriert und die dem Titel folgenden eingeklammerten Nummern weisen auf die betreffende Stelle des Buches hin. Das zweite ist ein Gegenschlüssel zum ersten: es ist nach den Klammernummern geordnet und gibt die zugehörigen Ordnungsnummern des ersten Verzeichnisses an. Einige Büchertitel gehen den Verzeichnissen voran. Auf diese Weise haben wir Fußnoten entbehren können.

Eine Zusammenstellung der Abkürzungen, Bezeichnungen und Symbole dient dazu, dem Leser über eventuelle terminologische Schwierigkeiten hinwegzuhelfen; es ist kein Verzeichnis der Definitionen, sondern bloß eine alphabetische Liste mit Bezugnahme auf die Stellen, wo die Auskunft im Buche zu suchen ist; mangels einer solchen wird eine kurze Erklärung gegeben.

Bei dem Korrekturlesen gewährten uns die Herren H. Auerbach, S. Mazur, L. Sternbach und A. Zygmund freundliche Hilfe; ihnen allen und besonders Herrn Zygmund verdanken wir auch manchen wertvollen inhaltlichen Ratschlag. Allen diesen Herren sprechen wir unseren aufrichtigen Dank aus.

Viele Rechnungen und Formeln im IV-ten Kapitel haben wir dem ausgezeichneten Hobson'schen Werke „Spherical and Ellipsoidal Harmonics" entnommen.

Im nachstehenden Fehlerverzeichnis sind einige von uns nachträglich bemerkten Korrigenda angebracht.

Die Verfasser.

Lwów, im Oktober 1935.

FEHLERVERZEICHNIS.

Seite und Zeile von $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\\text{unten}\end{matrix}\right.$:	statt:	lies:
2_3	$p<2$	$p>2$
15^6	[131]	—
16^7	—	[131]
25^{11}	vom Maße $\omega-\varepsilon$	vom Maße $\geqslant\omega-\varepsilon$
32^8	Zahlsystem	Zahlensystem
70^5	Einser	Einsen
80_{11}	$\{f_i\}$	$\{f\}$
93_1	Substraktion	Subtraktion
99^{12}	zwei ersten	zwei
107_{12}	$\|h\|\leqslant{}^1/_3$	$\|h\|<{}^1/_3$
128^{13}	(0,1 ein)	(0,1) ein
162_8	$1/2\delta(t)$	$\frac{1}{2}\delta(t)$
193_{10}	$n_i((\overline{s}_{n_i}(t)$	$n_i(\overline{s}_{n_i}(t)$
196^{11}	$\\|f\\|<\varkappa(f)$	$\\|f\\|<\varkappa\quad(f)$
274_{11}	$c_{n+1}(t)$	c_{n+1}
275_{13}	>2	$=1$

I. KAPITEL.

Vorkenntnisse.

Dieses Kapitel bringt gewisse Definitionen und Sätze, die wir im ganzen Buche brauchen werden. Von diesen Sätzen sollen einige bewiesen werden.

§ 1. Konvergenz und Summierbarkeit.

Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei unendliche Folgen und

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$

dann ist folgende, nach Abel benannte Umformung oft nützlich:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k(b_k - b_{k+1}) - s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p+1}. \qquad [111]$$

Die Abel'sche Umformung kann auch so geschrieben werden:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k(b_k - b_{k+1}) - s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p}. \qquad [112]$$

In beiden Formeln darf s_k durch $s'_k = s_k + c$ ersetzt werden, wo c von k frei ist.

Es sei $q>1$ und es bezeichne l^q die Menge aller Folgen $\{x_k\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q < \infty,$$

und q' die durch $1/q + 1/q' = 1$ erklärte Zahl.

Dann gilt der Landau'sche Satz: *Ist für jede Folge $\{x_k\}$ in l^q* [113]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

konvergent, so gehört $\{a_k\}$ zu $l^{q'}$, d. h. es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q'} < \infty.$$

[886] *Die Ungleichungen*

$$|\varphi_n(t_0)| \leqq \alpha, \qquad \int_a^b w(t)\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)^2 dt < \infty$$

(mit n-freiem α) *bedingen*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t_0) = f(t_0),$$

denn der Ausdruck

$$\int_a^b w(u)\,\frac{f(u)-f(t_0)}{u-t_0}\,\varphi_n(u)\,du$$

konvergiert gegen Null für $n \to \infty$, als n-ter Koeffizient der Entwicklung von $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ nach $\{\varphi_n\}$. Dieser Satz ist z. B. auf das Legendre'sche System in jedem inneren Punkte von $(-1, +1)$ anwendbar.

ABKÜRZUNGEN, BEZEICHNUNGEN, SYMBOLE

(m_q^p bedeutet: m-te Seite, ^p_q-te Zeile von $^{\text{oben}}_{\text{unten}}$).

BIBLIOGRAPHIE.

1. **Banach S.** *Théorie des opérations linéaires.* Monografje Matematyczne I, Warszawa, 1932.
2. **Hardy G. H., Littlewood J. E.** and **Pólya G.** *Inequalities.* Cambridge, 1934.
3. **Hilb E. - Szász O.** *Allgemeine Reihenentwicklungen.* Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II 3, Teil C.
4. **Hobson E. W.** *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Cambridge, 1931.
5. **Knopp K.** *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Berlin, 1922.
6. **Saks S.** *Théorie de l'intégrale.* Monografje Matematyczne II, Warszawa, 1933.
7. **Shohat J.** *Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef.* Mémorial des Sciences math. LXVI, Paris, 1934.
8. **Zygmund A.** *Trigonometrical Series.* Monografje Matematyczne V, Warszawa—Lwów, 1935.

ABHANDLUNGEN.

Abkürzungen: **Ann. M.** = Annals of Mathematics.— **B. A. M. S.** = Bulletin of the American Math. Soc. — **B. A. P.** = Bulletin International de l'Académie Polonaise, Classe A de Sciences math. et nat., Cracovie. — **B. S. M.** = Bulletin de Sciences mathém. — **B. S. M. F.** = Bulletin de la Société math. de France. — **C. R.** = Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — **F. M.** = Fundamenta Mathematicae. — **G. I. A.** = Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari. — **J. L. M. S.** = Journal of the London Mathem. Soc. — **J. f. M.** = Journal für die reine und angewandte Mathematik. — **M. A.** = Mathematische Annalen. — **M. Z.** = Math. Zeitschrift. — **P. L. M. S.** = Proceedings of the London Math. Soc. — **R. L.** = Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Roma. — **R. P.** = Rend'conti del Circolo Matematico di Palermo. — **S. M.** = Studia Mathematica. — **T. A. M. S.** = Transactions of the American Math. Society.

1. **Abramesco N.** Les polynomes orthogonaux. Ann. Fac. Sc. Un. Toulouse 24 (1932) 67—87.
2. **Agnew R. P.** On doubly orthogonal series. P. L. M. S. 2, 33 (1932) 420—434.
3. **Banach S.** An example of an orthogonal development. P. L. M. S. 2, 21 (1922) 95—96. [613].
4. — Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales. C. R. 180 (1925) 1637—1640.
5. — Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires. B. S. M. 2, 50 (1926) 1—12. [562].
6. — Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen. S. M. 2 (1930) 207—220. [734—737].
7. — Sur les séries lacunaires. B. A. P. (1933) 149—154. [721—723] [732].
8. **Banach S. - Saks S.** Sur la convergence forte dans les champs L^p. S. M. 2 (1930) 51—57. [722].
9. **Banach S. - Steinhaus H.** Sur le principe de la condensation de singularités. F. M. 9 (1927) 50—61. [151] [156] [157] [565—566] [577].
10. **Bergmann St.** Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen nach Orthogonalfunktionen. M. A. 86 (1922) 238—271.

11. **Berry A. C.** The Fourier transform identity theorem. Ann. M. 2, 32 (1931) 227—232. [875].
12. **Birnbaum Z. W. - Orlicz W.** Verallgemeinerung konjugierter Potenzen. S. M. 3 (1931) 1—67.
13. **Bochner S.** Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. M. Z. 14 (1922) 180—207.
14. **Borgen S.** Über $(C, 1)$-Summierbarkeit von Reihen orthogonaler Funktionen. M. A. 98 (1928) 125—150. [582] [586].
15. **Caccioppoli R.** Sull' approsimazione per polinomi delle funzioni definite in campi illimitati. G. I. A. 3 (1932) 364—375. [874] [876].
16. **Chen Kien Kwong.** On the system of normalized orthogonal functions. Tôhoku Math. Journ. 30 (1928) 1—9.
17. — On the series of orthogonal functions. Proc. Imp. Ac. Japon. 4 (1928) 36—37. [551].
18. — On the conditions for the completeness of the system of orthogonal functions. Jap. Journ. of Math. 6 (1929) 81—87. [373].
19. — On the theorem of Zygmund in the theory of the series of orthogonal functions. Tôhoku Math. Journ. 30 (1929) 472—475.
20. **Chokhate J.** Sur la sommation de certaines séries de fonctions orthogonales. C. R. 188 (1924) 1475—1478.
21. **Fichtenholz G.** Sur la notion de la fermeture des systèmes de fonctions. R. P. 50 (1926) 385—398. [613].
22. **Fischer E.** Sur la convergence en moyenne. C. R. 144 (1907) 1022—1024, 1148—1150. [354—356] [383].
23. **Franklin Ph.** A set of continuous orthogonal functions. M. A. 100 (1928) 522—529. [443].
24. **Gagaeff B.** Sur l'unicité du système de fonctions orthogonales invariant relativement à la dérivation, C. R. 188 (1929) 222—225.
25. — Über Sturm-Liouvillesche Reihen mit Lücken. J. f. M. 166 (1932) 204—207.
26. **Gram J. P.** On Räekkendviklinger bestemte ved Hjaelp of de mindste Kvadraters Methode. Kopenhagen 1879. [312].
27. — Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate. J. f. M. 94 (1883) 41—73. [233] [261—263] [332, 333] [883].
28. **Haar A.** Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. M. A. 69 (1910) 331—371 und 71 (1912) 38—53. [226] [235] [441—442] [522] [526].
29. — Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme. M. Z. 31 (1929) 128—137.
30. — Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme. M. Z. 31 (1930) 769—798.
31. **Hermite Ch.** Sur un nouveau développement en série de fonctions. C. R. 58 (1864) 93—100 und 266—273. [484].
32. **Hilbert D.** Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 5. Mitt. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1906) 439—480. [267] [371—372].
33. **Hille E. - Tamarkin J. D.** On the summability of Fourier series II. Ann. M. 2, 34 (1931) 329—348. [644].
34. **Hobson E. W.** On the convergence of series of orthogonal functions. P. L. M. S. 2, 12 (1913) 297—308. [535].
35. **Jerosch F. - Weyl H.** Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten. M. A. 66 (1909) 67—80. [535].
36. **Kaczmarz S.** Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen. M. Z. 23 (1925) 263—270. [583—584].
37. — Über die Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. M. A. 96 (1925) 148—151. [585].
38. — Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen. M. Z. 26 (1927) 99—105. [586—587].
39. — Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux. S. M. 1 (1929) 87—121. [582] [551—556] [575] [591].
40. — Über ein Orthogonalsystem. Comptes Rendus du I Congrès d. math. des pays slaves, Warszawa (1929) 189—192. [461—463].

41. — Sur les multiplicateurs des séries orthogonales. S. M. 4 (1933) 21–26. [652—656] [658].
42. — Notes on orthogonal series I, II. S. M. 5 (1935) 24—28, 103—106. [536] [574] [592—593].
43. **Kaczmarz S.-Steinhaus H.** Le système orthogonal de M. Rademacher. S. M. 2 (1930) 231—247. [461—463] [711].
44. **Khintchine J.** Über dyadische Brüche. M. Z. 18 (1923) 109—116 [456].
45. **Khintchine J.-Kolmogoroff A.** Über die Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt wurden. Rec. math. de Moscou 32 (1925) 668—677. [452—453].
46. **Kolmogoroff A.** Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier. F. M. 5 (1924) 96—97. [533].
47. — Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux. C. Rend. Ac. Sc. U. R. S. S. 1 (1934) 291—294.
Kolmogoroff A-Khinthine J. Siehe *45.*
48. **Kolmogoroff A.-Menchoff D.** Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. M. Z. 26 (1927) 432—441.
49. **Kostitzin V.** Quelques remarques sur les systèmes complets de fonctions orthogonales. C. R. 156 (1913) 292—295. [323—324].
50. **Laguerre E.** Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$. B. S. M. F. 7 (1879) 72—81. [481].
51. **Lauricella G.** Sulla chiusura dei systemi di funzioni ortogonali. R. L. 5, 21 (1912) 675–685. [353] [373].
52. — Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. R. P. 29 (1910) 155–163. [354–355].
53. **Legendre A. M.** Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, Mém. math.-phys. prés. à l'Ac. Sc. 10 (1785) 411—434. [411—412] [354—355].
54. **Lerch.** O hlavni větě theorie funkci vytvořujicich. Rozpravy České Akad. v Praze 1 (1892) 1—7. [357].
55. **Levin S.** Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundene Eigenschaften von Funktionenfolgen. M. Z. 32 (1930) 491—511. [818–819] [844].
56. **Mc Coy M. H.** Note on the existence of a positive function orthogonal to a given set of functions. B. A. M. S. 36 (1930). [878–882].
57. **Mazur S.** Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. S. M. 4 (1933) 70–84 [182].
58. **Mazur S.-Orlicz W.** Zur Theorie der linearen metrischen Räume. Voraussichtlich S. M. 6. [183].
59. **Menchoff D.** Sur les séries de fonctions orthogonales I. F. M. 4 (1923) 82—105. [535—537], II. F. M. 8 (1926) 56—108. [586—587], III. F. M. 10 (1927) 375—420. [542].
60. — Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales. C. R. 180 (1925) 2011—2013. [586].
Menchoff D.-Kolmogoroff A. Siehe *48.*
61. **Müntz Ch.** Über den Approximationssatz von Weierstrass „Schwarz Festschrift" (1914) 303—312. [361—364].
62. — Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation. M. Z. 21 (1924) 96—110. [247].
63. **Orlicz W.** Zur Theorie der Orthogonalreihen. B. A. P. (1927) 81 — 115. [512—513] [517–519] [523] [541–543].
64. — Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen. I. S. M. 1 (1929) 1–39. [613] [641 — 643] [646] [657] [666] [673 — 675], II. S. M. 1 (1929) 241 — 255. [692] [694], III. B A. P. (1932) 229—238, [676—679] [695—696].
65. — Einige Bemerkungen über die Divergenzpunktmengen von Orthogonalentwicklungen. S. M. 2 (1930) 72–86. [525] [567].
66. — Einige Bemerkungen über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen. S. M. 2 (1930) 87—90. [528].

67. — Konjugierte Exponentenfolgen. S. M. 3 (1931) 200—211.
68. — Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen. S. M. 4 (1933) 27—32. [514—515] [571].
Orlicz W.-Birnbaum Z. W. Siehe *12.*
Orlicz W.-Mazur S. Siehe *58.*
69. **Paley R. E. A. C.** Some theorems on orthogonal functions. S. M. 3 (1931) 226—238. [632].
70. — Note on a theorem of Kolmogoroff and Menchoff. M. Z. 37 (1933) 669—673.
71. — A remarkable system of orthogonal functions. P. L. M. S. 34 (1932) 241—279. [461—463].
72. **Paley R. E. A. C.-Zygmund A.** On some series of functions (1). Proc. Cambr. Ph. Soc. 26 (1930) 337 — 357. [451] [456] [563—564] [711] [741]. (2). Proc. Cambr. Ph. Soc. 26 (1930) 458—474. [471] [473] [474–475] [742—743].
73. **Pell A.** Biorthogonal systems of functions. T. A. M. S. 12 (1911) 135–164.
74. **Plancherel M.** Sätze über Systeme beschränkter Orthogonalfunktionen. M. A. 68 (1910) 270—278. [511].
75. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. C. R. 157 (1913) 539–542. [535].
76. **Plessner A.** Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen. J. f. M. 155 (1925) 15–25. [553].
77. **Rademacher H.** Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. M. A. 87 (1922) 112 — 138. [225] [236] [322] [452] [532] [534 — 535] [551–552].
78. **Riesz F.** Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. C. R. 144 (1907) 615—619, 734—736. [266] [356].
79. — Über orthogonale Funktionensysteme. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1907) 116–122. [266] [356] [381] [383].
80. — Sur les ensembles de fonctions. C. R. 143 (1906) 738—741. [341].
81. — Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel. M. Z. 18 (1923) 117–124. [631].
82. **Riesz M.** Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. Acta Math. 49 (1926) 465—497. [654].
83. **Saks S.** On some functionals. T. A. M. S. 35 (1933) 549 — 556. [158] [159] [561].
Saks S.-Banach S. Siehe *8.*
84. **Saks S.-Tamarkin J. D.** On a theorem of Hahn-Steinhaus. Ann. M. 2, 34 (1933) 595 - 601. [155].
85. **Sansone G.** Sulla conv rgenza parziale degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. R. L. 6, 13 (1931) 842—847.
86. — Sulle serie lacunari di polinomi di Legendre. Ann. Sc. norm. sup. Pisa 2, 2 (1933) 289—296.
87. **Schauder J.** Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. M. Z. 26 (1927) 47–65. [242—244].
88. — Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems. M. Z. 28 (1928) 317–320.
89. **Schmidt E.** Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Diss. Göttingen 1905. M. A. 63 (1907) 433—476. [261—264] [311] [313—314] [331] [353].
90. **Severini C.** Sulla teoria di chiusura dei systemi di funzioni ortogonali. R. P. 36 (1913) 177—202 [269] [353] [354—355] [373].
91. — Sopra i systemi complementari dei systemi non chiusi di funzioni ortogonali I. R. L. 30 (1921) 92—95. II. 129–132. [353].
92. — Sulla convergenza delle serie dei funzioni ortogonali. R. L. 6, 2 (1925) 470–475, 542—548, 3 (1926) 13–18.
93. **Sestini G.** Un teorema sugli sviluppi in serie lacunari di funzioni di Sturm-Liouville. Ist. Lomb. Rend. 2, 66 (1933) 481—490.
94. — Sulle serie lacunari di polinomi di Legendre. Ist. Lomb. Rend. 2, 66 (1933) 689—696.

95. **Steinhaus H.** An example of a thoroughly divergent orthogonal development. P. L. M. S. 2, 20 (1920) 123—126. [531].

96. — Sur les développements orthogonaux. B. A. P. (1926) 11 — 39 [115] [526] [573] [646].

97. — Zur Konvergenzfrage bei dem Rademacherschen Orthogonalsystem. Rec. math. de Moscou (1928) 39—42.

98. — Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie de séries orthogonales. S. M. 1 (1929) 191 - 200. [662-664].

99. — Sur la probabilité de la convergence de séries. S. M. 2 (1930) 21—39. [471] [474—475].

100. — Sur les suites complètes. S. M. 4 (1933) 142—145. [491—492].

101. — Przykłady rozwinięć biortogonalnych. Mathesis Polska 9 (1934) 33—40. [816] [843].

Steinhaus H. - Banach S. Siehe *9.*

Steinhaus H. - Kaczmarz S. Siehe *43.*

102. **Stieltjes Th. J.** Recherches sur les fractions continues. Ann. Fac. Sc. Toulouse 8 (1894) 1—122. [392].

103. **Stone M. H.** Three theorems on normal orthogonal sets. B. A. M. S. 31 (1925) 17—21.

104. — A note on the theory of infinite series. Ann. M. 2, 32 (1931) 233—238. [517—519].

105. **Szász O.** Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen. M. A. 77 (1916) 482—496. [361—363].

106. — Über die Approximation stetiger Funktionen durch gegebene Funktionenfolgen. M. A. 104 (1931) 155—160. [491].

107. **Takahashi Tatsuo.** Note on the system of the orthogonal functions. Proc. Imp. Ac. Jap. 10 (1934) 541—543. [526].

Tamarkin J. D. - Hille E. Siehe *33.*

Tamarkin J. D. - Saks S. Siehe *84.*

108. **Toeplitz O.** Über lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz. 22 (1911) 113—119. [119].

109. **Tchebycheff P.** Théorie des mécanismes. Mém. prés. à l'Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg. 7 (1854) 539—568. [421—423].

110. **Verblunsky S.** Some theorems on generalized Fourier constants. P. L. M. S. 2, 37 (1934) 33—62. [457].

111. **Vitali G.** Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali. R. L. 5, 30 (1921) 498—501.

112. **Walsh J. L.** A closed set of normal orthogonal functions. Am. Journ. Math. 55 (1923) 5—24. [461—462].

113. — A property of Haar's system of orthogonal functions. M. A. 90 (1923) 38 45.

114. **Weyl H.** Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten. M. A. 67 (1909) 225 - 245. [535].

Weyl H. - Jerosch F. Siehe *35.*

115. **Zarankiewicz K.** Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. Zeitschr. f ang. Math. u. Mech. 14 (1934) 97—104.

116. **Zygmund A.** Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz. M. Z. 25 (1926) 297—298. [583—584].

117. — Remarque sur la sommabilité des séries de fonctions orthogonales. B. A. P. (1926) 185—191. [583—584].

118. — Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales. F. M. 10 (1927) 356—362. [581—584].

119. — Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales. B. A. P. (1917) 295—308.

120. — Un théorème sur les séries orthogonales. S. M. 2 (1930) 181—182. [582].

121. — O zachowaniu się pewnych szeregów funkcyjnych. Mathesis Polska 8 (1933) 76—87.

Zygmund A. - Paley R. E. A. C. Siehe *72.*

ZITATENNACHWEIS.

(Die eckig eingeklammerten Zahlen bezeichnen die Stelle dieses Buches, die klammerlosen geben die Nummer des Zitats in der Bibliographie an, die rund eingeklammerten die Seite des zitierten Buches).

INHALTSVERZEICHNIS.

Die „Mathematischen Monographien" erscheinen als kartonierte Oktavbände von ungefähr 150 bis 300 Seiten.

Bis jetzt sind erschienen:

Band I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, VIII+256 Seiten, Preis 3 Dollar U.S.A.
Band II. S. Saks, Théorie de l'intégrale (vergriffen), X + 292 Seiten, Preis 4 Dollar U.S.A.
Band III. C. Kuratowski, Topologie I, X+288 Seiten, Preis 4,50 Dollar U.S.A.
Band IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, VI+194 Seiten, Preis 3,50 Dollar U.S.A.
Band V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, IV + 332 Seiten, Preis 5 Dollar U.S.A.
Band VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, VI + 300 Seiten, Preis 5 Dollar U.S.A.

In Vorbereitung (unter anderen):

S. Banach, Théorie générale des opérations,
C. Kuratowski, Topologie II,
S. Mazur, Allgemeine Limitierungstheorie,
S. Saks, Theory of Integral (englische, neu bearbeitete Auflage),
J. Schauder, Partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus,
A. Tarski, Arithmetik der Kardinalzahlen.

Die Bände sind portofrei gegen eine direkt an

„MONOGRAFJE MATEMATYCZNE"
SEMINAR. MATEMAT. UNIWERS.
WARSZAWA (Polen), OCZKI Nr. 3,

gerichtete Bestellung unter gleichzeitiger Überweisung des Betrages (oder dessen Einzahlung auf das Polnische Postscheckkonto P.K.O. N°.45.177 Prof. Dr. K. Kuratowski „Monografje Matematyczne", Warszawa) zu beziehen. Auch in Buchhandlungen erhältlich.

Der Preis dieses Bandes beträgt 5 Dollar U.S.A.

Die Mitglieder der Polnischen Mathematischen Gesellschaft erhalten jeden Band zum Vorzugspreise von 15 zł. (in 3 Monatszahlungen).