VIII. KAPITEL.

# Biorthogonale Systeme und Orthogonalpolynome.

Dieses Kapitel hat einige oft gebrauchten Erweiterungen des Begriffes *Orthogonalsystem* zum Gegenstand.

## § 1. Biorthogonale Systeme.

Die Orthogonalität ist ein mit dem Raume $L^2$ verknüpfter Begriff; es ist natürlich, von den Funktionen $\varphi_n(t)$ die Zugehörigkeit zu $L^2$ zu verlangen, wenn man das Produktintegral bilden will. Eine Verallgemeinerung auf andere Räume ist naheliegend:

Man betrachte einen Raum $R$, ein System $\{x_\alpha\}$ von Elementen dieses Raumes und ein mit $\{x_\alpha\}$ gleichmächtiges System $\{U_\alpha\}$ von in $R$ erklärten linearen Funktionalen. Wir nennen das System $\{x_\alpha, U_\alpha\}$ *biorthogonal* und *normiert* (kurz BN), wenn [811]

(B) $$U_\alpha(x_\beta) = 0 \qquad \alpha \neq \beta$$

bzw.

(N) $$U_\alpha(x_\alpha) = 1 \qquad (\alpha)$$

gilt. (Man beachte, daß obige Normierung nichts über die Normen von $U_\alpha$ und $x_\alpha$ aussagt).

*Entwicklung* eines $x \in R$ nach dem BN $\{x_\alpha, U_\alpha\}$ heißt die Reihe

(1) $$x \sim \sum_{\alpha=1}^{\infty} x_\alpha U_\alpha(x).$$

Diese Schreibweise hat als stillschweigende Voraussetzung, daß die Indizes $\alpha$ natürliche Zahlen sind, d. h. daß $\{x_\alpha\}$ abzählbar oder endlich ist. Wir zeigen nun:

*Ist $R$ separabel, so ist ein* BN *höchstens abzählbar.* [812]

Es sei $\{x_\alpha, U_\alpha\}$ ein BN. Die Annahme $\| U_\alpha \| = 1$ schränkt die Allgemeinheit nicht ein. Dann ist aber

$$1 = U_\alpha (x_\alpha - x_\beta) \leqslant \| x_\alpha - x_\beta \|$$

und man führt den Beweis genau so zu Ende, wie denjenigen von [341].

[813] Es ist auch *die lineare Unabhängigkeit der $x_n$ untereinander und der $U_n$ untereinander* leicht beweisbar. Hat man nämlich $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i = \Theta$, so ist

$$U_k(\Theta) = U_k\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i\right) = \gamma_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

also $\gamma_k = 0$ für alle $k \leqslant n$. Ähnlich beweist man den zweiten Teil.

[814] Ein BN heißt *vollständig* (kurz V), wenn $\{U_n\}$ vollständig ist, m. a. W., wenn es in $R$ kein $x$ mit $\|x\| > 0$, $U_n(x) = 0$ $(n)$ gibt.

[815] *Wenn die Entwicklung eines $x$ nach einem* BNV *stark in $R$ konvergiert, so ist $x$ ihre starke Summe.* Es ist nämlich dann

$$U_n\left(x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i U_i(x)\right) = 0 \qquad (n),$$

also

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i U_i(x).$$

[816] Die Vollständigkeit eines BN ist weder von derselben Eigenschaft des $\{x_n\}$ bedingt, noch ist das Umgekehrte der Fall. Es sei z. B. $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON, V inbezug auf $L^2$; setzt man

$$\psi_n(t) = \varphi_1(t) + \varphi_{n+1}(t); \quad \chi_n(t) = \varphi_{n+1}(t) \qquad (n),$$

so kommt

$$\int_a^b \psi_n(t)\, \chi_m(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ 1 & \text{für} \quad n = m; \end{cases}$$

nun ist aber $\{\psi_n(t)\}$ vollständig, denn aus

$$\int_a^b f(t)\, \psi_n(t)\, dt = 0$$

folgt

$$\int_a^b f(t)\, \varphi_1(t)\, dt = -\int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt,$$

was mit Rücksicht auf $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0$



$$\int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0 \qquad (n),$$

also $f(t) = 0$ f. ü. ergibt. Andererseits ist $\{\chi_n(t)\}$ unvollständig, denn $\varphi_1(t)$ ist zu allen $\chi_n(t)$ orthogonal. Wählt man einmal $\psi_n(t)$ als $x_n$ und $\int_a^b \chi_n(t)\, x(t)\, dt$ als $U_n(x)$, das andere Mal $\chi_n(t)$ als $x_n$ und $\int_a^b \psi_n(t)\, x(t)\, dt$ als $U_n(x)$, so ist das BN $\{x_n, U_n\}$ im ersten Fall unvollständig, im zweiten vollständig, $\{x_n\}$ im ersten Fall vollständig, im zweiten nicht.

Minimale Systeme. Es sei $\{x_n\}$ eine aus Elementen von $R$ bestehende Folge und $X \subset R$ die Menge derjenigen $x$, welche sich durch Linearformen der $x_n$ approximieren lassen; es ist also $x_0 \in X$ dann und nur dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n$ und $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ mit

$$\| x_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - \ldots - \gamma_n x_n \|_R < \varepsilon$$

vorhanden sind; wir sagen dann, $x_0$ sei für die $x_n$ *zugänglich.*

Das System $\{x_n\}$ heißt nun *minimal*, wenn die Beseitigung eines $x_k$ stets eine Verminderung von $X$ verursacht. Diese Definition ist eine Verallgemeinerung von [248]. Es ist darnach jedes ON minimal, dagegen z. B. $\{t^n\}$ nicht, wie aus dem Müntz'schen Satze [361] ersichtlich. Ein endliches System von linear unabhängigen Funktionen ist stets minimal. [817]

*Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Minimalität von $\{x_n\}$ ist das Nichtvorkommen von $x_k$ in $X_k$*; dabei bezeichnet $X_k$ das dem System $\{x_n\}$ $(n \neq k)$ entsprechende $X$ und die Bedingung hat für alle $k$ erfüllt zu sein. (M. a. W. soll kein $x_k$ für die übrigen $x_n$ zugänglich sein). [818]

Die Notwendigkeit ist klar, denn aus $x_k \in X_k$ folgt die Zugänglichkeit von $x_k$ für $\{x_{n \neq k}\}$, also aller $x \in X$, und $X_k = X$. Die Hinlänglichkeit liegt auf der Hand, denn $x_k \in X$, also läßt $x_k \ni X_k$ die Verminderung erkennen.

Kehren wir nun zu den biorthogonalen Systemen zurück. Setzen wir bis auf weiteres voraus, die Glieder der Folge $\{x_n\}$ seien in $L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ enthalten. Dann ist $\{U_n\}$ von der Gestalt

$$U_n(x) = \int_a^b y_n(t)\, x(t)\, dt$$

mit $y_n \in L^{p'}$ (bzw. $y_n \in M$) und man sieht, wie man die Rollen von $x_n$ und $y_n$ gegebenenfalls vertauschen kann.

Wir werden — der Kürze halber — solche Biorthogonalsysteme mit $\{x_n, y_n\}$ bezeichnen. Es bedeutet also die Definition [811] nichts anderes als

$$\int_a^b x_i(t)\, y_k(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k, \end{cases} \tag{2}$$

und die Entwicklung (1) nimmt die Gestalt

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k(t) \quad \text{mit } c_k = \int_a^b x(t)\, y_k(t)\, dt$$

an.

[819] *Die Minimalität von $\{x_n\}$ ist notwendig und hinreichend, damit man im konjugierten Raum Elemente $y_n$ finden kann, die mit den gegebenen $x_n$ ein* BN $\{x_n, y_n\}$ *bilden.*

Obiger Satz ist allgemein, d. h. für Systeme [811] gültig; wir beschränken uns auf $R = L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, d. h. auf den Wortlaut [819]. Wir führen den Beweis für $p = 1$, der Fall $p > 1$ erfordert keine wesentliche Ergänzung.

Notwendigkeit: Wäre z. B. $x_1$ zugänglich, so hätte man

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} z_n = x_1 \quad \text{mit } z_n = \sum_{k=2}^{n} \gamma_k^{(n)} x_k \tag{3}$$

und geeigneten $\gamma_k^{(n)}$. Dann wäre aber, nach (2),

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b y_1(t)\, z_n(t)\, dt = \int_a^b x_1(t)\, y_1(t)\, dt = 1$$

und

$$\int_a^b y_1(t)\, z_n(t)\, dt = \sum_{k=2}^{n} \gamma_k^{(n)} \int_a^b y_1(t)\, x_k(t)\, dt = 0 \qquad (n).$$

Hinlänglichkeit: Man hat die Existenz eines $\{y_k(t)\}$ mit den Eigenschaften (2) zu zeigen. Es sei zunächst $k = 1$. Wir haben also das Momentenproblem

$$\int_a^b x_i(t)\, y_1(t)\, dt = \mu_i$$

mit $\mu_1 = 1$, $\mu_i = 0$ $(i = 2, 3, \ldots)$ zu lösen. Nach [171] genügt es, die Ungleichung



$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xi_i \right| \leqslant \gamma \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i(t) \right| dt$$

mit einem $n$-freien $\gamma$ für alle endlichen Zahlensysteme $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ als gültig nachzuweisen. Setzt man $z_n$ für $-\sum_{i=2}^{n} \xi_i x_i$, so ist

$$\gamma \int_a^b |\, \xi_1 x_1(t) - z_n(t)\, |\, dt \geqslant \xi_1 \tag{4}$$

die zu beweisende Ungleichung. Nun sollte aber $\{x_n\}$ minimal sein, also gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$, welches der Approximation von $x_1$ durch Linearformen der übrigen $x$ eine untere Schranke setzt (vgl. [818]); $\gamma = 1/\varepsilon_1$ ist daher in (4) eine passende Konstante. Damit ist die Existenz von $y_1(t)$ und (ähnlich) aller $y_k(t)$ bewiesen.

Wenn die Funktionen $x_n(t)$ zu $L^2$ gehören, dann ist — nach [333] — die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0$$

für $x \in X$ notwendig und hinreichend. Dies führt zu dem Ergebnis: Bezeichnet $A_n$ die Gram'sche Determinante (vgl. [312]) des Systems $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, d. h. die Determinante mit den Elementen $a_{ik} = \int_a^b x_i(t)\, x_k(t)\, dt$, und $A_n^{(i)}$ die zu $a_{ii}$ gehörende Unterdeterminante von $A_n$, so ist die Existenz von $n$-freien $\gamma^{(i)}$ mit

$$\frac{A_n^{(i)}}{A_n} < \gamma^{(i)} \tag{5} \qquad (n, i)$$

für die Minimalität von $\{x_n\}$ charakteristisch.

## § 2. Biorthogonalisierung.

Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein System aus $L^p$ $(p \geqslant 1)$ und sind die $\varphi_n$ unter- [821]
einander linear unabhängig, so lassen sie sich in ein minimales System linear transformieren, so daß — nach [817] — die Bildung eines BN möglich wird. Die Transformation kann nach einem dem Schmidt'schen ähnlichen Verfahren bestimmt werden. Es dient dazu folgendes

[822] Lemma: $\{\varphi_k\}$ *sei ein endliches System* ($k=1,2,\dots,n$), *sonst wie in* [821]; *es gibt dann ein* $y(t)$ *mit*

$$\int_a^b y(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k=1,2,\dots,n-1 \\ 1 & \text{für } k=n. \end{cases}$$

Dieses Lemma kann aus [171] gefolgert werden, wenn es uns gelingt, die Unzugänglichkeit von $\varphi_n(t)$ für die übrigen $\varphi$ zu zeigen. Nun aber führt die gegenteilige Annahme zu

$$\lim_{r\to\infty}\int_a^b |\varphi_n(t)-\gamma_1^{(r)}\varphi_1(t)-\gamma_2^{(r)}\varphi_2(t)-\dots-\gamma_{n-1}^{(r)}\varphi_{n-1}(t)|\,dt=0$$

mit geeigneten $\gamma_k^{(r)}$; dividiert man durch den absolut größten Koeffizienten $\gamma_k^{(r)}$, und bezeichnet die neuen Koeffizienten ebenfalls mit $\gamma_k^{(r)}$ ($k=1,2,\dots,n$), so werden alle $|\gamma|$ beschränkt ($\leqslant 1$). Eine Folge ${}_r\{\gamma_{k_0}^{(r)}\}$ enthält unendlich viele Einsen; das Häufungspunktverfahren liefert also

$$\int_a^b |\gamma_n^{(\infty)}\varphi_n(t)-\gamma_1^{(\infty)}\varphi_1(t)-\dots-\gamma_{n-1}^{(\infty)}\varphi_{n-1}(t)|\,dt=0,$$

mit $\gamma_{k_0}^{(\infty)}=1$, was der linearen Unabhängigkeit widerspricht; sind die $|\gamma_k^{(r)}|$ von vornherein beschränkt, so ist die Division überflüssig.

Jetzt gehen wir an die Konstruktion des BN. Wir setzen $x_1(t)=\varphi_1(t)$, wählen $y_1(t)$ der Bedingung

$$\int_a^b x_1(t)\,y_1(t)\,dt=1$$

gemäß, sonst beliebig; setzen ferner

$$x_2(t)=\alpha_1\varphi_1(t)+\alpha_2\varphi_2(t) \quad \text{mit} \quad \alpha_1+\alpha_2\int_a^b \varphi_2(t)\,y_1(t)\,dt=0,$$

und bestimmen $y_2(t)$ aus

$$\int_a^b y_2(t)\,\varphi_1(t)\,dt=0, \qquad \int_a^b y_2(t)\,x_2(t)\,dt=1,$$

wobei vom Lemma [822] Gebrauch gemacht wird. Allgemein: es sei

$$x_n=\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2+\dots+\beta_n\varphi_n$$

mit



$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_a^b \varphi_k(t)\,y_i(t)\,dt=0 \qquad (i=1,2,\dots,n-1)$$

und

$$(7) \qquad \int_a^b y_n(t)\,\varphi_k(t)\,dt=0 \qquad (k=1,2,\dots,n-1),$$

$$\int_a^b y_n(t)\,\varphi_n(t)\,dt=1/\beta_n \qquad (n).$$

(Hier ist die Annahme $\beta_n\neq 0$ zulässig, denn die $n-1$ Gleichungen (6) mit $n$ Unbekannten $\beta_k$ sind homogen).

Es bietet sich die Frage, ob zu einem minimalen System $\{x_n(t)\}$ mehr als ein System $\{y_n(t)\}$ gehört, das mit ihm ein BN bildet.

Es ist nun klar, daß $\{x_n\}$ minimal sein kann, ohne vollständig zu sein (jedes unvollständige ON ist ein Beispiel dafür); ist dann $g(t)\not\equiv 0$ und zu allen $x_n(t)$ orthogonal, so ist gleichzeitig mit $\{x_n,y_n\}$ auch $\{x_n,y_n+g\}$ ein BN.

Andererseits ist diese Erscheinung bei einem vollständigen $\{x_n\}$ unmöglich, denn sind $\{x_n,y_n\}$, $\{x_n,z_n\}$ zwei BN, so ist $y_k-z_k$ zu allen $x_n(t)$ orthogonal, also Null. Nichtdestoweniger braucht das BN selbst nicht vollständig zu sein, wie aus § 1 erhellt.

Es gibt selbstverständlich auch vollständige BN: ein solches ist z. B. $\{x_n,x_n\}$, wenn $\{x_n\}$ ein ONV ist.

## § 3. Biorthogonalentwicklungen.

Es sei $\{x_n,y_n\}$ ein BN, $x_n\in L^p$, $y_n\in L^{p'}$ ($1\leqslant p<\infty$, $L^\infty=M$); einer Funktion $f(t)\in L^p$ wird die Entwicklung

$$(8) \qquad f(t)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i(t) \quad \text{mit} \quad \xi_i=\int_a^b f(t)\,y_i(t)\,dt \qquad (i)$$

zugeordnet und, analog, einer Funktion $g(t)\in L^{p'}$ (bzw. $g(t)\in M$) die Entwicklung

$$(9) \qquad g(t)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i y_i(t) \quad \text{mit} \quad \eta_i=\int_a^b g(t)\,x_i(t)\,dt \qquad (i).$$

Die Entwicklung (8) ist—nach [811], (1) u. (2)—eine *Biorthogonalentwicklung*, ebenso wie (9), nur wird einmal nach $\{x_n,y_n\}$ das andere Mal nach $\{y_n,x_n\}$ entwickelt. Gehört $f(t)$ gleichzeitig zu $L^p$ und $L^{p'}$, so hat es zwei Entwicklungen. Die Entwicklungen (8) und (9) heißen *konjugiert* zueinander; wir nennen auch die Systeme $\{x_n,y_n\}$ und $\{y_n,x_n\}$ zueinander konjugiert.

[831] *Ist die Entwicklung einer Funktion* $f(t)\in L^p$ *nach dem* BN $\{x_n, y_n\}$ *schwach konvergent, so ist die Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$$

*für jedes* $g(t)\in L^{p'}$ *(bzw.* $g(t)\in M$*) konvergent.*

Es sei nämlich $\bar{f}(t)$ die schwache Summe von (8); man hat für $g\in L^{p'}$ (bzw. $g\in M$)

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(t)\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i(t)\,dt=\int_a^b g(t)\,\bar{f}(t)\,dt,$$

woraus nach (8) und (9)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i=\int_a^b g(t)\,\bar{f}(t)\,dt$$

folgt.

[832] *Ist die Entwicklung eines jeden* $f(t)\in L^p$ $(p>1)$ *schwach konvergent, so ist die konjugierte Entwicklung für jedes* $g(t)\in L^{p'}$ *stark konvergent.*

Beweis: Wir setzen

$$s_n(g)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i y_i(t);$$

nach [831] und laut Voraussetzung ist die Folge $\{s_n(g)\}$ schwach konvergent, da

$$\int_a^b f(t)\,s_n(g)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i.$$

Es hat also nach [164] $\|s_n(g)\|_{p'}$ eine $n$-freie obere Schranke; dies ist für alle $g(t)\in L^{p'}$ der Fall, also kann [151] auf die Folge der linearen Operationen $\{s_n(g)\}$ angewendet werden, mit dem Ergebnis, daß die Operationsnormen eine beschränkte Folge $\{\mu_n\}$ bilden. Ist $\mu$ größer als alle $\mu_n$, so kommt

$$(10)\qquad \|s_n(g)\|_{p'}\leqslant\mu\|g\|_{p'}\qquad (n,g).$$

Schreibt man $\bar{g}(t)$ für die schwache Grenze von $s_n(g)$, so wird $s_n(\bar{g})=s_n(g)$, da ja

$$\bar{\eta}_i=\int_a^b\bar{g}(t)\,x_i(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(t)\,x_i(t)\,dt=\eta_i.$$



Wüßte man nun, daß $\bar{g}$ für die $s_n(g)$ zugänglich ist, und wäre $\{\sigma_n\}$ die entsprechende Folge von Linearformen

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk}s_k,\qquad \lim_{n\to\infty}\|\bar{g}-\sigma_n\|=0,$$

so könnte man in (10) für $g$ die Differenz $\bar{g}-\sigma_n$ einsetzen und bekäme

$$\|s_n(\bar{g}-\sigma_n)\|\leqslant\mu\|\bar{g}-\sigma_n\|,\quad\text{also}\quad\|s_n(g)-\sigma_n\|\leqslant\mu\|\bar{g}-\sigma_n\|,$$

und schließlich

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n(g)-\sigma_n\|=0,\qquad\lim_{n\to\infty}\|s_n(g)-\bar{g}\|=0,$$

was der Behauptung gleichkommt.

Die Zugänglichkeit von $\bar{g}(t)$ ergibt sich aber aus folgender Überlegung: Die schwache Konvergenz bewirkt die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b s_k(t)\,\varphi(t)\,dt=\int_a^b\bar{g}(t)\,\varphi(t)\,dt\qquad(\varphi)$$

und diese zeigt ihrerseits die Unlösbarkeit des Momentenproblems

$$\int_a^b s_k(t)\,\varphi(t)\,dt=0\quad(k),\qquad\int_a^b\bar{g}(t)\,\varphi(t)\,dt=1$$

(mit $\varphi(t)$ als der Unbekannten). Es kann daher das Kriterium I, § 7, (25) für alle Zahlensysteme $\{\xi\}$ nicht erfüllt sein, es muß also — wie groß auch $\gamma$ sei — die Ungleichung

$$|\xi_1.1+\xi_2.0+\ldots+\xi_n.0|\leqslant\gamma\left\|\xi_1\bar{g}+\sum_{k=2}^{n}\xi_k s_k\right\|$$

für gewisse $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ durch ihr Gegenteil

$$\left\|\xi_1\bar{g}+\sum_{k=2}^{n}\xi_k s_k\right\|<\frac{1}{\gamma}\cdot|\xi_1|$$

ersetzt werden, was nach Division mit $\xi_1$ die behauptete Zugänglichkeit erweist.

Aus [832] folgt unmittelbar, daß unter denselben Annahmen die Entwicklung eines jeden $f(t)\in L^p$ $(p>1)$ *stark* konvergiert: man braucht bloß zu beachten, daß die konjugierte Entwicklung a fortiori schwach konvergiert, und [832] auf das konjugierte BN anzuwenden.

Der Grenzfall $p = 1$ von [832] lautet:

[833] *Ist die Entwicklung* (8) *eines jeden* $f(t) \in L$ *schwach konvergent, so ist die Entwicklung* (9) *eines jeden* $g(t) \in M$ *f. ü. beschränkt.*

Denn $\{s_n(g)\}$ ist schwach konvergent, also $\|s_n\|_M \leqslant \alpha$ ($n$-frei) und w. o. G. $|s_n| \leqslant \alpha$. Und umgekehrt:

[834] *Ist die Entwicklung* (9) *eines jeden* $g(t) \in M$ *f. ü. beschränkt und* $\{x_n(t)\}$ *vollständig inbezug auf* $M$, *so ist die Entwicklung* (8) *eines* $f(t) \in L$ *stets gegen* $f(t)$ *stark konvergent.*

Beweis: Es ist

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right| \leqslant \int_a^b |f(t)| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \eta_i y_i(t)\right| dt,$$

also, nach Voraussetzung, der linksseitige Ausdruck unter einer $n$-freien Schranke gelegen. Nun ist aber

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \int_a^b r_n(f)\, g(t)\, dt,$$

wenn $r_n(f)$ die $n$-te Partialsumme von (8) bezeichnet, also nach [154] auch $\|r_n(f)\|_L$ unterhalb einer $n$-freien Schranke $\bar{\mu}(f)$. $\{r_n(f)\}$ ist aber eine Folge von linearen Operationen; wir können hier [151] (mit $F = E = L$) anwenden und erhalten die Beschränktheit der Operationsnormen: $\|r_n\| < \mu$; $\mu$ ist $n$- und $f$-frei. Es gilt daher

$$\|r_n(f)\|_L \leqslant \mu \|f\|_L \qquad (n, f).$$

Die Vollständigkeit von $\{x_n\}$ inbezug auf $M$ bewirkt die Abgeschlossenheit inbezug auf $L$; es sei also

$$(11) \qquad \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \rho_n = f \quad \text{mit } \rho_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_{nk} x_k,$$

d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \rho_n\|_L = 0$; es kommt wegen $\|r_n(f-\rho_n)\|_L \leqslant \mu \|f - \rho_n\|_L$

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n(f) - r_n(\rho_n)\|_L = 0,$$

und wegen $r_n(\rho_n) = \rho_n$

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n(f) - \rho_n\|_L = 0,$$

was mit (11) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} r_n(f) = f$ ergibt.

Aus beiden letzten Sätzen folgt für BN $\{x_n, y_n\}$ mit inbezug auf $M$ vollständigen $\{x_n\}$, daß die schwache Konvergenz von (8) für sämtliche $f \in L$ bereits die starke Konvergenz für diese Funktionenklasse sichert.



Es bleibe nicht unerwähnt, daß einige Sätze des VI-en Kapitels über Multiplikatoren sich sinngemäß auf Biorthogonalsysteme übertragen lassen.

## § 4. Biorthogonalentwicklungen in $L^2$.

Es sei $x_i(t) \in L^2$, $y_i(t) \in L^2$ für alle $i$ und $\{x_i, y_i\}$ sei ein BN. Dann hat jedes $f(t) \in L^2$ zwei Entwicklungen: (8) und (9), denn man darf $g(t) = f(t)$ wählen. Man würde aber fehlgehen, wenn man etwa die Konvergenz von $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i^2$ $\left(\text{oder } \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i^2\right)$ vermutete; diese ist nicht einmal dann notwendig, wenn die Quadratintegrale von $x_i(t)$ eine $i$-freie obere Schranke besitzen. Wir können vielmehr zeigen, daß *das* [816] *als Beispiel begleitende* BN *für ein gewisses* $f \in L^2$ [841]
*allen* $\eta_i$ *den Wert* 1 *erteilt.* Es sei nämlich $\{\varphi_i\}$ ein ONV inbezug auf $L^2$, $x_i = \varphi_1 + \varphi_{i+1}$; nach [171] genügt es die Ungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \eta_i \zeta_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \zeta_i\right| \leqslant \left(\int_a^b \left|\sum_{i=1}^{n} \zeta_i x_i(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $n, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ nachzuweisen. Nun ist aber in der Tat

$$\int_a^b \left|\sum_{i=1}^{n} \zeta_i x_i(t)\right|^2 dt = \int_a^b \left|\varphi_1(t) \sum_{i=1}^{n} \zeta_i + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \varphi_{i+1}(t)\right|^2 dt$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} \zeta_i\right|^2$$

und die Quadratintegrale der $x_i(t)$ haben alle den Wert 2.

Aus [832] ersieht man, daß die schwache (und a fortiori die starke) Konvergenz aller Entwicklungen (8) die starke Konvergenz aller konjugierten, also beider Entwicklungen zeitigt.

Bezeichnet man in diesem Falle wieder mit $r_n(t)$ und $s_n(t)$ die Partialsummen der beiden Entwicklungen (8) und (9), mit $\bar{f}(t)$ bzw. $\bar{g}(t)$ ihre starken Summen, so kommt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\bar{f}(t) - r_n(t))\,((\bar{g}(t) - s_n(t))\, dt = 0,$$

also

$$(12) \qquad \int_a^b \bar{f}(t)\, \bar{g}(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i.$$

Ist das BN und das zu ihm konjugierte System vollständig, so kann man [815] anwenden und (12) zu

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \tag{13}$$

verstärken (im Falle $f(t) = g(t)$ erhält man

$$\int_a^b f^2(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i ,$$

ein Seitenstück zu der Parseval'schen Beziehung).

Wir werden die eben gemachte Annahme mit BNVV andeuten und für solche Systeme die drei Grenzwertbeziehungen

$$1^0 \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(t) - r_n(t))^2\,dt = 0,$$

$$2^0 \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b (g(t) - s_n(t))^2\,dt = 0,$$

$$3^0 \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(t) - r_n(t))\ (g(t) - s_n(t))\,dt = 0$$

näher erörtern.

Zunächst werde bemerkt, daß jede von den Beziehungen $1^0$, $2^0$ bereits $3^0$ zur Folge hat, denn

$$\int_a^b (f(t) - r_n(t))\,(g(t) - s_n(t))\,dt$$

$$= \int_a^b (f(t) - r_n(t))\,g(t)\,dt - \int_a^b (f(t) - r_n(t))\,s_n(t)\,dt;$$

das erste Integral rechts strebt gegen Null wegen $1^0$, während das zweite gleich

$$\int_a^b f(t)\,s_n(t)\,dt - \int_a^b r_n(t)\,s_n(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$

also gleich Null ist; ebenso wird $3^0$ aus $2^0$ abgeleitet.

Ferner werde an [832] erinnert, demzufolge die Erfüllung von $1^0$ (bzw. $2^0$) für alle $f$ (bzw. $g$) die Richtigkeit von $2^0$ (bzw. $1^0$) für alle $g$ (bzw. $f$) zur Folge hat.



Wir können aber auch aus $3^0$ auf $1^0$ (und ebenso auf $2^0$) schließen. Genauer: ist $3^0$ für alle $f$ und alle $g$ erfüllt, so ist $1^0$ für alle $f$ und $2^0$ für alle $g$ gültig. In der Tat, die Voraussetzung impliziert die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ und umsomehr die Beschränktheit der Partialsummen jener Reihe; dieselben lassen sich als

$$\int_a^b r_n(f;\,t)\,g(t)\,dt$$

schreiben; diese Schreibweise deutet die Abhängigkeit des $r_n$ von $f$ an. Vermöge [152] ist also $\|r_n(f;\,t)\|_{L^2}$ unter einer $n$-freien Schranke gelegen, woraus, genau wie beim Beweise von [834],

$$\| r_n(f;\,t) \|_{L^2} \leqslant \mu \,\| f \|_{L^2}$$

folgt, nur ist jetzt $L^2$ der betrachtete Raum. Sonst ist aber der Beweis auch weiter wie jener zu führen und ergibt $1^0$. Aus dem Gesagten folgt unmittelbar:

*Sind* $\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right|$ *für alle* $f$ *und* $g$ *unter einer* $n$*-freien Schranke* [842]
*gelegen, so hat das betreffende* BNVV *die Eigenschaften* $1^0, 2^0$ *und* $3^0$.

Konstruieren wir jetzt folgendes BNVV: Es sei $\{\varphi_i(t)\}$ ein ONV; es werde

$$x_i(t) = \varphi_i(t) - \varphi_{i+1}(t), \qquad y^i(t) = \sum_{k=1}^{i} \varphi_k(t)$$

gesetzt. Daß dem System $\{x_i, y_i\}$ beide V zukommen, ist ohne weiteres sichtbar, denn

$$\int_a^b f(t)\,x_i(t)\,dt = 0 \qquad (i)$$

führt zu

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_i(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,\varphi_{i+1}(t)\,dt \qquad (i),$$

also wegen [265] zu

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_i(t)\,dt = 0 \qquad (i), \tag{14}$$

d. h. zu $f(t) = 0$ f. ü.; ist aber $\int_a^b f(t)\,y_i(t)\,dt = 0$ für alle $i$, so kommt

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_1(t)\,dt = 0, \qquad \int_a^b f(t)\,(y_{i+1}(t) - y_i(t))\,dt = 0,$$

also noch einmal (14) und $f(t) = 0$ f. ü.

[843] *Für dieses* BNVV *existieren vier Funktionen* $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$ *mit*

α) $1^0$ *richtig,* $2^0$ *richtig* $(f_1)$,

β) $1^0$ *richtig,* $2^0$ *falsch* $(f_2)$,

γ) $1^0$ *falsch,* $2^0$ *richtig* $(f_3)$,

δ) $1^0$ *falsch,* $2^0$ *falsch* $(f_4)$.

Es sei nämlich $f(t) \in L^2$; die Koeffizienten $\xi_i, \eta_i$ lassen sich durch die

$$c_i = \int_a^b f(t)\,\varphi_i(t)\,dt$$

als $\xi_i = c_1 + c_2 + \ldots + c_i$, $\eta_i = c_i - c_{i+1}$ ausdrücken, was den Beziehungen $1^0$ und $2^0$ die Gestalt

$$(1^0) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^n c_i\,\varphi_i(t) + \varphi_{n+1}(t) \sum_{i=1}^n c_i\right]^2 dt = 0,$$

$$(2^0) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^n c_i\,\varphi_i(t) + c_{n+1}(t) \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\right]^2 dt = 0$$

verleiht. Wegen [373] ergeben sich daraus, als charakteristische Bedingungen für $1^0$, bzw. $2^0$

$$1_0 \quad \sum_{i=1}^\infty c_i = 0, \qquad\qquad 2_0 \quad \lim_{n\to\infty} n c_{n+1}^2 = 0.$$

Nun können wir aber $\{c_i\}$ beliebig vorschreiben, wenn nur auf die Konvergenz von $\sum_{i=1}^\infty c_i^2$ geachtet wird. Wir wählen also viererlei $\{c_i\}$:

(α) $\quad |c_{n+1}| \leqslant |c_n|, \qquad \sum_{n=1}^\infty c_n = 0;$

es gilt $1_0$ und $2_0$.

(β) $\quad c_i = (-1)^i/i$ für $i \neq 10^k+1$, $i \geqslant 2$ ($k$ ganzzahlig),

$c_i = (-1)^k/k$ für $i = 10^k + 1$, $\qquad c_1 = -\sum_{i=2}^\infty c_i;$

$1_0$ gilt, $2_0$ nicht, denn es ist $n c_{n+1}^2 = 10^k/k^2$ für $n = 10^k$.



(γ) $\quad c_i = 1/i \log(i+1)$;

$1_0$ gilt nicht, $2_0$ ja.

(δ) $\quad c_i = 1/i$ für $i \neq 10^k+1$, $\qquad c_i = 1/k$ für $i = 10^k+1$;

hier gilt weder $1_0$ noch $2_0$.

In allen vier Beispielen ist $\{c_i\} \in l^2$, so daß die in [843] angesagten Funktionen tatsächlich existieren.

Im Falle δ) (und nur in diesem) kann man noch die Unterfälle

$\delta_1$) $\int_a^b (f - r_n)\,(f - s_n)\,dt \to 0,$ $\qquad \delta_2$) „$\delta_1$) falsch"

unterscheiden. Unser Beispiel (δ) entspricht nun dem Unterfall $\delta_2$), denn

$$(15) \quad \int_a^b (f(t) - r_n(t))\,(f(t) - s_n(t))\,dt = \int_a^b f^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^n \xi_i\,\eta_i$$
$$= \int_a^b f^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 + c_{n+1} \sum_{i=1}^n c_i,$$

also ist für die Folge (δ), wegen

$$c_{n+1} \sum_{i=1}^n c_i \geqslant 1/k \log 10^k > 2,$$

Null als Grenzwert von (15) ausgeschlossen. Um den Unterfall $\delta_1$) zu erhalten, genügt es in (δ) $c_i = 1/k^2$ (anstatt $= 1/k$) für $i = 10^k + 1$ zu setzen.

Die Konvergenz von $\sum_{i=1}^\infty \xi_i\,\eta_i$ ist — wie wir bereits bemerkt haben — für $1^0$, wie auch für $2^0$, notwendig; hier geben wir noch eine andere Bedingung:

*Die Konvergenz der Folge* [844]

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_i\,\xi_k\,\alpha_{ik} \qquad \textit{mit} \quad \alpha_{ik} = \int_a^b x_i(t)\,x_k(t)\,dt$$

*bzw. der Folge*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_i\,\eta_k\,\beta_{ik} \qquad \textit{mit} \quad \beta_{ik} = \int_a^b y_i(t)\,y_k(t)\,dt$$

*ist für die starke Konvergenz der Entwicklung* (8) *bzw.* (9) *nach dem* BN $\{x_n, y_n\}$ *notwendig.*

Wir haben nämlich

$$\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} \xi_i \xi_k a_{ik} = \sum_{i=m+1}^{n} \xi_i \int_a^b x_i(t)[s_n(t) - s_m(t)]\,dt = \int_a^b [s_n(t) - s_m(t)]^2\,dt,$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \xi_i \xi_k a_{ik} = \int_a^b [s_n(t) - s_m(t)]\, s_m(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=m+1}^{n} \xi_i \xi_k a_{ik},$$

woraus der Satz für die erste Lesart folgt; ähnlich beweist man die zweite Lesart.

## § 5. **Relativ-orthogonale Systeme.**

Ein Funktionensystem $\{\varphi_n(t)\}$ mit einer Funktion $w(t) \geqq 0$, die ihm die Eigenschaft

$$(16) \qquad \int_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,\varphi_m(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \qquad (n, m)$$

verleiht, gibt zu einem BN Anlaß, und zwar ist dann $\{\varphi_n(t), w(t)\,\varphi_n(t)\}$ ein BN. Man könnte auch $\psi_n(t) = \sqrt{w(t)}\,\varphi_n(t)$ einführen und $\{\psi_n(t)\}$, also ein ON, betrachten; indessen bilden die Systeme $\{\varphi_n\}$ in anbetracht einer ihnen angepaßten Definition der Abgeschlossenheit und Vollständigkeit (vgl. [871], [872]) eine Klasse für sich; wir
[851] wollen sie als *die relativ zu $w(t)$ orthogonalen Systeme* (kurz RO) bezeichnen. (Führt man die Variable $s$ vermittels

$$s = \int_a^t w(t)\,dt = v(t)$$

ein, so bilden die Funktionen $\Phi_n(s) = \varphi_n[v^{-1}(s)]$ in $<0, v(b)>$ ein gewöhnliches ON).

[852] Unter den RO verdienen *die relativ-orthogonalen Polynome* besondere Beachtung; damit werden Polynome $\varphi_n(t)$ gemeint, deren Grad stets dem Index gleicht und die relativ zu einem $w(t)$ (im endlichen oder unendlichen Intervall) orthogonale Systeme darstellen (kurz ROP); $n$ nimmt die Werte $0, 1, 2, \ldots$ an.

[853] *Zu einem jeden in $<a, b>$ integrierbaren $w(t) \geqq 0$ gibt es stets ein bis auf die Faktoren $\pm 1$ eindeutig bestimmtes* ROP-*System.*

Beweis: (16) $(n \neq m)$ ist jetzt gleichbedeutend mit

$$(17) \qquad \int_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,t^k\,dt = 0 \qquad (k < n;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Setzt man $\varphi_n(t) = a_0(t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n)$, so gibt (17)



$$(18) \qquad a_n \lambda_k + a_{n-1} \lambda_{k+1} + \ldots + a_1 \lambda_{n+k-1} + \lambda_{n+k} = 0 \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

mit $\lambda_i = \int_a^b w(t)\,t^i\,dt$ $(i)$ als das zur Bestimmung der $a_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ dienende Gleichungssystem (im Falle eines unendlichen Intervalls muß die Existenz der $\lambda_i$ einzeln vorausgesetzt werden). Die Determinante von (18) ist die Diskriminante der quadratischen Form in $h$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{i+j} h_i h_j = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n-1} h_i t^i\right]^2 w(t)\,dt,$$

und als solche positiv. Damit ist die eindeutige Bestimmbarkeit der $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dargetan und die Bedingung der Normiertheit gibt $a_0$.

Beispiele.

1. $w(t) = 1$, $<a, b> = <-1, 1>$ liefert die Legendre'schen Polynome [411] und

2. $w(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, $<a, b> = <-1, 1>$ führt zu Tschebyscheff'schen Polynomen [421].

3. Allgemeiner: $w(t) = (1 + t)^{\alpha-1}(1 - t)^{\beta-1}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $<a, b> = <-1, 1>$ liefert

$$\varphi_n(t) = (1 + t)^{1-\alpha}(1 - t)^{1-\beta} \frac{d^n}{dt^n}[(1 + t)^{n+\alpha-1} \cdot (1 - t)^{n+\beta-1}],$$

also die *Jacobi'schen Polynome*, die u. a. 1. und 2. als Sonderfälle umfassen.

4. $w(t) = t^{\alpha-1} e^{-ht}$, $\alpha > 0$, $h > 0$, $<a, b> = <0, \infty)$ gibt die Laguerre'schen Polynome [481] und

5. $w(t) = e^{-ht^2}$, $h > 0$, $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ die Hermite'schen Polynome [484].

6. Für ein gegebenes $w(t)$ können noch andere RO erhalten werden: 1° indem man nach Schmidt [313] das System

$$\{\sqrt{w(t)}\,t^{k+n}\} \qquad (k > 0 \text{ fest}, n = 0, 1, \ldots)$$

orthogonalisiert, so daß

$$\{\sqrt{w(t)}\,t^k\,\psi_n(t)\}$$

mit Polynomen $\psi_n(t)$ $n$-ten Grades entsteht (ist $k$ nicht ganzzahlig, so ist das entsprechende RO kein ROP relativ zu $w$); 2° indem man $\{\sqrt{w(t)}\, t^{k_n}\}$ mit $k_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n = \infty$ orthogonalisiert, wobei die letzte Bedingung die Vollständigkeit sichert.

## § 6. **Eigenschaften der relativ-orthogonalen Polynome.**

Wir machen den Ansatz

$$\alpha_{n+1}\,\varphi_{n+2}(t) = (t + \beta_{n+2})\,\varphi_{n+1}(t) + P(t) \tag{19}$$

$(n)$

mit einem Polynom $P(t)$ von höchstens $n$-tem Grade. Da nach (17)

$$\int_a^b w(t)\,\varphi_k(t)\,G(t)\,dt = 0 \tag{20}$$

für jedes Polynom $G(t)$ vom Grade $< k$ statthat, so folgt aus (19)

$$\int_a^b P(t)\,G(t)\,w(t)\,dt = 0$$

für alle Polynome $G(t)$, deren Grad $n-1$ nicht übertrifft. Daraus ergibt sich, da (17) eindeutig lösbar ist, $P(t) = \varkappa\varphi_n(t)$; (19) multipliziert mit $w(t)\,\varphi_n(t)$ und integriert ergibt

$$\int_a^b w(t)\,t\,\varphi_{n+1}(t)\,\varphi_n(t)\,dt + \varkappa = 0,$$

also

$$\varkappa = -\int_a^b w(t)\,t\,\varphi_{n+1}(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Andererseits liefert die Multiplikation mit $w(t)\varphi_{n+2}(t)$ und Integration

$$\alpha_{n+1} = \int_a^b w(t)\,t\,\varphi_{n+2}(t)\,\varphi_{n+1}(t)\,dt,$$

d. h. $\varkappa = -\alpha_n$. Wir gewinnen damit die *rekurrente Beziehung*

[861] $$\alpha_{n+1}\,\varphi_{n+2}(t) = (t + \beta_{n+2})\,\varphi_{n+1}(t) - \alpha_n\,\varphi_n(t) \quad (n = -1, 0, 1, \ldots)$$

(wo $\varphi_{-1}(t)$ die identische Null bezeichnet) und die *Christoffel-Darboux'sche Identität*

[862] $$K_n(t,u) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t)\,\varphi_i(u) = \frac{p_n}{p_{n+1}}\,\frac{\varphi_{n+1}(t)\,\varphi_n(u) - \varphi_n(t)\,\varphi_{n+1}(u)}{t-u}$$

mit $p_n$ als Koeffizienten von $t^n$ in $\varphi_n(t)$ $(p_n > 0)$.



Beweis von [862]: Die Beziehung [861] multipliziert mit $t^n w(t)$ und integriert liefert

$$0 = \int_a^b w(t)\,\varphi_{n+1}(t)\,t^{n+1}\,dt - \alpha_n \int_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,t^n\,dt;$$

da nun

$$\int_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,p_n\,t^n\,dt = \int_a^b w(t)\,\varphi_n^2(t)\,dt = 1,$$

so ist

$$\int_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,t^n\,dt = \frac{1}{p_n}, \quad \text{also} \quad \frac{\alpha_n}{p_n} = \frac{1}{p_{n+1}}, \quad \alpha_n = \frac{p_n}{p_{n+1}};$$

multipliziert man also [861] mit $\varphi_{n+1}(u)$, so kommt

$$\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}\varphi_{n+2}(t)\varphi_{n+1}(u) + \frac{p_n}{p_{n+1}}\varphi_n(t)\,\varphi_{n+1}(u) = (t + \beta_{n+2})\,\varphi_{n+1}(t)\,\varphi_{n+1}(u) \tag{21}$$

und die Vertauschung von $t$ und $u$ liefert eine analoge Beziehung, die von (21) subtrahiert

$$\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_{n+1}(t)\,(t-u) \tag{22}$$

$$= \frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}(\varphi_{n+2}(t)\,\varphi_{n+1}(u) - \varphi_{n+2}(u)\,\varphi_{n+1}(t)) - \frac{p_n}{p_{n+1}}(\varphi_{n+1}(t)\,\varphi_n(u) - \varphi_{n+1}(u)\,\varphi_n(t))$$

ergibt. Jetzt braucht man bloß (22) über $n = -1, 0, 1, \ldots, m-1$ zu summieren, um [862] (mit $n = m$) zu erhalten.

*Die Nullstellen des Polynoms $\varphi_n(t)$ sind sämtlich reell, einfach und in $(a, b)$ enthalten.* [863]

Es sei nämlich $m$ die Anzahl der Zeichenwechsel von $\varphi_n(t)$ in $(a, b)$ und $t_1, t_2, \ldots, t_m$ die betreffenden Stellen. Wir setzen

$$G(t) = \begin{cases} (t-t_1)\,(t-t_2)\ldots(t-t_m) & \text{für } m > 0, \\ 1 & \text{für } m = 0; \end{cases}$$

dann ist

$$\int_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,G(t)\,dt \neq 0, \tag{23}$$

denn der Integrand erleidet keinen Zeichenwechsel; (20) und (23) zeigen, daß der Grad $m$ von $G(t)$ wenigstens $n$ beträgt, w. z. b. w.

## § 7. Vollständigkeit und Abgeschlossenheit.

[871] Ein System $\{\varphi(t)\}$ von Polynomen heißt *vollständig* inbezug auf $L^p$ $(p \geqslant 1)$, wenn

$$\int_a^b w(t)\, f(t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (\varphi)$$

und die Integrierbarkeit von $|f(t)|^p\, w(t)$ das Verschwinden von
[872] $f(t)$ f. ü. bewirkt; es heißt *abgeschlossen* (inbezug auf $L^p$), wenn es zu jeder Funktion $f(t)$ mit integrierbarem $|f(t)|^p\, w(t)$ eine Folge von Linearformen

$$l_n(t) = a_{n0}\,\varphi_0(t) + a_{n1}\,\varphi_1(t) + \ldots + a_{nn}\,\varphi_n(t)$$

gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b w(t)\, |f(t) - l_n(t)|^p\, dt = 0.$$

Eine mehrmals benutzte Schlußweise erlaubt uns aus der Vollständigkeit inbezug auf $L^p$ die Abgeschlossenheit inbezug auf $L^{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$ zu folgern. Es genügt daher Kriterien für die Vollständigkeit aufzustellen. Es sei bemerkt, daß die Bedingung $w(t) \neq 0$ f. ü. unumgänglich ist, denn sonst ist die charakteristische Funktion der durch $w(t) = 0$ erklärten $t$-Menge von Null verschieden und zu allen $\varphi$ relativ-orthogonal.

[873] *Das Intervall $(a, b)$ sei endlich und $w(t) > 0$ f. ü. in $(a, b)$; dann ist das System $\{\varphi_n(t)\}$ der relativ-orthogonalen Polynome vollständig inbezug auf $L$.*

Es genügt aus $\int_a^b w(t)\, f(t)\, t^k\, dt = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ $f(t) = 0$ f. ü. abzuleiten. Nun ist aber $w(t)\, f(t) \in L$ und folglich, nach [358], $w(t)\, f(t) = 0$ f. ü. und $f(t) = 0$ f. ü., w. z. b. w.

Daraus folgt die Abgeschlossenheit der ROP inbezug auf $L^p$ $(p \geqslant 1)$. Das unendliche Intervall bietet insofern Schwierigkeiten, als hier der Müntz'sche Satz versagt. Wir können hier bloß eine hinreichende Bedingung angeben, die z. B. für Laguerre'sche und Hermite'sche Polynome erfüllt ist:

[874] *Es sei* $v(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, |t|^{\xi}\, dt,\quad 1/p' + 1/p = 1;$ *die Beziehungen*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, v(np')^{1/np'} = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, dt < \infty$$

*sind für die Vollständigkeit von $\{\varphi_n(t)\}$ inbezug auf $L^p$ $(p > 1)$ hinreichend.*



Beweis: Es sei $w(t)\, |f(t)|^p \in L$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, |f(t)|^p\, dt = \alpha^p$. Dann ist

$$(24) \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, f(t)\, t^k\, dt \right| \leqslant \left( \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, |t|^{p'k}\, dt \right)^{1/p'}$$

$$= \alpha\, v^{1/p'}(p'k).$$

Es werde

$$(25) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, f(t)\, t^k\, dt = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

vorausgesetzt. Die Funktion

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, w(t)\, f(t)\, dt \qquad (i = \sqrt{-1})$$

existiert wegen $\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, |f(t)|\, dt \leqslant \alpha \left( \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, dt \right)^{1/p'}$. Wir wollen die Reihendarstellung

$$(26) \qquad F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, t^n f(t)\, dt$$

begründen. Dazu genügt es

$$(27) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, |t|^n\, |f(t)|\, dt < \infty$$

zu zeigen. Nun hat aber der Koeffizient $c_n$ von $|u|^n$ in (27) nach [114] die Eigenschaft

$$(0 \leqslant)\; c_n \leqslant \frac{1}{n!}\, \alpha v(np')^{1/p'}$$

also, nach der Voraussetzung [874], die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, welche die beständige Konvergenz von (26) sichert. (25) und (26) geben jetzt $F(u) \equiv 0$. Gelingt es uns daraus $w(t)\, f(t) = 0$ f. ü. abzuleiten, so wird der Beweis erbracht sein.

Es sei also $\varphi(t) \in L$ in $(-\infty, +\infty)$; es ist dann, wie wir gesehen haben,

$$(28) \qquad F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, \varphi(t)\, dt$$

für sämtliche $u$ vorhanden und wir nennen diese Funktion die *Fourier'sche Transformierte* von $\varphi(t)$. Wir haben also zu zeigen, daß
*$F(u) \equiv 0$ das Verschwinden von $\varphi(t)$ f. ü. bewirkt.* [875]

Beweis von [875]: $1^0$ Es sei

$$g_{a,b}(t) = \begin{cases} 2a - |t-b| & \text{für} \quad |t-b| \leqq 2a \\ 0 & \text{für} \quad |t-b| \geqq 2a; \end{cases}$$

es sei ferner $f(t)$ in jedem endlichen Intervall integrierbar und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g_{a,b}(t)\, dt = 0 \tag{29}$$

für alle $a, b$; dann ist $f(t) = 0$ f. ü. Denn führt man

$$h_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |t| < a \\ 0 & \text{für} \quad |t| \geqq a \end{cases}$$

ein, so wird

$$g_{a,b}(t) = \int_{b/2-a}^{b/2+a} h_a(t - b/2 - u)\, du,$$

und (29) geht in

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{b/2-a}^{b/2+a} h_a(t - b/2 - u)\, du\, dt = \int_{b/2-a}^{b/2+a} du \int_{b/2+u-a}^{b/2+u+a} f(t)\, dt = \int_{b/2-a}^{b/2+a} \int_{b/2-a}^{b/2+a} f(u+t)\, du\, dt \tag{30}$$

über. $f(t_0) \neq 0$ impliziert $f(t+u) \neq 0$ auf der Geraden $t + u = t_0$; wäre also $f(t) \neq 0$ auf einer positiven $t$-Menge, so wäre $f(t+u) \neq 0$ auf einer ebenen Menge von positivem Maße, was gegen die Tatsache verstößt, daß das letzte Doppelintegral (30), über ein beliebiges Quadrat erstreckt, verschwindet.

$2^0$ Führen wir nun die in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2 \sin au}{u}\right)^2 e^{-ibu}$$

ein. Wir werden zeigen, daß $g_{a,b}(t)$ die Fourier'sche Transformierte von $G(u)$ ist. In der Tat haben wir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\, e^{itu}\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2 \sin au}{u}\right)^2 e^{iu(t-b)}\, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(a - (t-b)/2)\, u + \sin^2(a + (t-b)/2)\, u - 2 \sin^2 (t-b)\, u/2}{u^2}\, du$$

$$+ \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 au \sin(t-b)\, u}{u^2}\, du.$$

Das zweite Integral rechterhand verschwindet wegen $\sin(-t) = -\sin t$; unter Anwendung der Formel



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin au}{u}\right)^2 du = \pi |a|$$

erhält man also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\, e^{itu}\, du = \left|a - \frac{t-b}{2}\right| + \left|a + \frac{t-b}{2}\right| - 2\left|\frac{t-b}{2}\right| = g_{a,b}(t).$$

$3^0$ Um [875] zu zeigen, genügt es nach $1^0$ zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,b}(t)\, \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\, F(u)\, du$$

zu gelangen (vgl. (28)). Es ist aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,b}(t)\, \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, . \, dt \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\, e^{itu}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\, . \, du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{itu}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\, F(u)\, du.$$

Damit sind [875] und [874] endgültig bewiesen.

Die Vollständigkeit der Orthogonalpolynome in $(0, \infty)$ gewinnt man wie die eben bewiesenen Sätze, denn man hat bloß $w(t) = 0$ für $t < 0$ zu setzen. In diesem Falle ist aber ein einfacherer Beweis möglich. Es sei nämlich

$$\int_0^\infty w(t)\, f(t)\, t^k\, dt = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots;\ w(t)\, |f(t)|^p \in L;\ p > 1), \tag{31}$$

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ut}\, w(t)\, f(t)\, dt. \tag{32}$$

Das Integral (32) existiert: es ist ja vermöge $e^{-ut} \leqq 1$ für $u \geqq 0$

$$|F(u)| \leqq \left(\int_0^\infty w(t)\, |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} . \left(\int_0^\infty w(t)\, dt\right)^{1/p'} .$$

Setzt man

$$c_n = \int_0^\infty w(t)\, t^n\, dt \tag{33}$$

und ist

$$\frac{1}{n} (c_{np'})^{\frac{1}{np'}} = o(1), \tag{34}$$

so wird

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{(-ut)^n}{n!}\, w(t)\, f(t)\, dt < \infty,$$

also

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n!} \int_0^\infty t^n\, w(t)\, f(t)\, dt.$$

Die Voraussetzung (31) liefert $F(u)=0$ für sämtliche $u \geqq 0$; andererseits gibt die Substitution $e^{-t}=\tau$ in (32)

$$(0=)\, F(u)=\int_1^0 \tau^u w(\log\tau) f(\log\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

also ist nach [358] $w(\log\tau) f(\log\tau)=0$ f. ü., d. h. $f(t)=0$ f. ü. Damit ist aber gezeigt:

[876] *Ist $w(t)$ in $(0,\infty)$ integrierbar und haben die in* (33) *erklärten $c_n$ die Eigenschaft* (34), *so ist das relativ zu $w(t)$ orthogonale Polynomsystem inbezug auf $L^p$ $(p>1)$ vollständig.*

Obige Annahmen über $w(t)$ sind für die Vollständigkeit keineswegs notwendig. Andererseits führt nicht jede in $(0,\infty)$ integrierbare Funktion $w(t)$ zu einem vollständigen ROP; wir wissen ja ([392]), daß $\{t^n\}$ in $(0,\infty)$ inbezug auf $L$ unvollständig ist.

## § 8. Entwicklungen nach relativ-orthogonalen Polynomen.

[881] *Entwicklung von $f(t)$ nach einem* ROP $\{\varphi_n(t)\}$ heißt die Reihe

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t), \qquad \text{wo} \quad a_n=\int_a^b w(t) f(t)\, t^n\, dt \qquad (n).$$

[882]
$$\int_a^b w(t) f^2(t)\, dt<\infty \quad \textit{impliziert} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2<\infty.$$

Es ist nämlich auf Grund der Definition von $\{\varphi_n\}$ als ROP:

$$0\leqq\int_a^b\left[f(t)-\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(t)\right]^2 w(t)\, dt=\int_a^b w(t) f^2(t)\, dt-\sum_{i=0}^{n} a_i^2.$$

[883] *Unter allen Polynomen $G_n(t)$ $n$-ten Grades erteilt das Polynom $\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(t)$ dem Integral*

$$\int_a^b [f(t)-G_n(t)]^2 w(t)\, dt$$

*den kleinsten Wert.*

Es ist nämlich $G_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\varphi_i(t)$ für jedes $n$ und man hat das Minimum von

$$\int_a^b\left[f(t)-\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\varphi_i(t)\right]^2 w(t)\, dt$$

durch geeignete Wahl der $\gamma_i$ zu realisieren, was — ebenso wie in [262] — $\gamma_i=a_i$ (für alle $i$) ergibt.



Auf Grund der in § 7 befindlichen Betrachtung über Vollständigkeit und Abgeschlossenheit folgt aus [883] *für* ROPV

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[f(t)-\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(t)\right]^2 w(t)\, dt=0, \tag{884}$$

*wenn die Voraussetzung von* [882] *erfüllt ist.*

Unter denselben Voraussetzungen wie [884] gilt

$$\int_a^b w(t) f^2(t)\, dt=\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2. \tag{885}$$

K o n v e r g e n z. Die Partialsummen der Entwicklung [881] gestatten die Darstellung

$$s_n(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(t)$$

$$=\int_a^b w(u) f(u)\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(t)\varphi_k(u)\, du=\int_a^b w(u) f(u) K_n(t,u)\, du.$$

Bemerken wir, daß

$$\int_a^b w(u) K_n(t,u)\, du=1 \quad \text{f. ü.}$$

ist; in der Tat, für $f(t)\equiv 1$, ist $a_n=0$ $(n>0)$ und $a_0=\int_a^b w(u)\varphi_0(u)\, du$, also $a_0\varphi_0(t)=\int_a^b w(u)\varphi_0^2(u)\, du=1$, denn $\varphi_0(t)=\text{const.}$ Demnach

$$f(t)=\int_a^b w(u) f(t) K_n(t,u)\, du,$$

also

$$s_n(t)-f(t)=\int_a^b w(u)[f(u)-f(t)] K_n(t,u)\, du. \tag{35}$$

Die Formel [862] für den Kern $K_n(t,u)$ bringt (35) auf die Gestalt

$$s_n(t)-f(t)=\frac{p_n}{p_{n+1}}\int_a^b w(u)\,[f(u)-f(t)]\,\frac{\varphi_{n+1}(t)\varphi_n(u)-\varphi_n(t)\varphi_{n+1}(u)}{t-u}\, du.$$

Ist $p_n=O(p_{n+1})$, so kann man ähnliche Konvergenzkriterien wie in der Theorie der Fourierreihen aufstellen, z. B.:

[886] *Die Ungleichungen*

$$|\varphi_n(t_0)| \leqslant \alpha, \qquad \int_a^b w(t)\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)^2 dt < \infty$$

(mit $n$-freiem $\alpha$) *bedingen*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t_0) = f(t_0),$$

denn der Ausdruck

$$\int_a^b w(u)\frac{f(u)-f(t_0)}{u-t_0}\,\varphi_n(u)\,du$$

konvergiert gegen Null für $n\to\infty$, als $n$-ter Koeffizient der Entwicklung von $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ nach $\{\varphi_n\}$. Dieser Satz ist z. B. auf das Legendre'sche System in jedem inneren Punkte von $(-1,+1)$ anwendbar.