VII. KAPITEL.

Lakunäre Reihen.

§ 1. Lakunäre Systeme.

Das Rademacher'sche System $\{r_n(t)\}$ [225] besitzt unter anderen merkwürdigen Eigenschaften auch die folgende:

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ *und wenn* $f(t)$ *die Summe der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ [711]
bezeichnet (die sicher f. ü. konvergiert), *so ist* $f(t) \in L^p$ *für alle* p $(1 \leqslant p < \infty)$.

Dies ist eine Folgerung aus der Ungleichung [456]

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t) \right|^p dt \leqslant \left(\frac{p}{2}+1\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

unter Benutzung von [125]. Das Rademacher'sche System verdankt jene Eigenschaft seiner Unvollständigkeit, die aber (selbstverständlich) allein dazu nicht ausreicht. In diesem Kapitel kommen ON-Systeme zur Sprache, welche eben diese Eigenschaft besitzen.

Führen wir allgemeinere Definitionen ein:

Ein ON-System $\{\varphi_n\}$ heißt *lakunär von der Ordnung* p $(p>2)$ [712]
und wird mit S_p bezeichnet, wenn $\varphi_n \in L^p$ und wenn für $\{a_n\} \in l^2$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ (die dann mit R_p bezeichnet wird) stets eine Funktion $f(t) \in L^p$ im Sinne der starken Konvergenz in L^2 darstellt. Die Reihe heißt dann auch *lakunär von der Ordnung* p. Mit S_∞ und R_∞ werden Systeme bzw. Reihen bezeichnet, die für alle p, $2<p<\infty$, S_p bzw. R_p sind.

[713] *Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit* $\{\varphi_n(t)\}$ *ein* S_p *sei, besteht in der Existenz eines n- und a-freien* μ_p *mit*

$$\left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mu_p \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}. \tag{1}$$

Die Hinlänglichkeit ist leicht zu sehen, denn aus (1) folgt

$$\left(\int_a^b | s_n(t) - s_m(t) |^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mu_p \sqrt{\sum_{k=m+1}^n a_k^2},$$

also ist für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ die Folge $\{s_n(t)\}$ in L^p stark konvergent gegen eine Funktion $f(t) \in L^p$.

Für die Notwendigkeit bemerken wir, daß jedes ONS_p eine additive Operation $y = U(x)$ definiert, wenn man $\{a_n\}$ mit x ($x \in l^2$) und $f(t)$ mit y ($y \in L^p$) bezeichnet. Es bezeichnet also y dasjenige der Folge $\{a_n\}$ nach [712] entsprechende $f(t)$, dessen Koeffizienten nach dem System $\{\psi_n\}$, welches mit $\{\varphi_n\}$ zusammen ein ONV bildet, sämtlich Null sind. (Ein derartiges $\{\psi_n\}$ existiert nach [353]).

Um die Stetigkeit von $U(x)$ zu zeigen, betrachten wir eine Folge $\{x_k\}$ mit $x_k = \{a_n^{(k)}\}$ und $\operatorname{Lim}_{k\to\infty} x_k = x_\infty$. Es sei $U(x_k) = y_k$ und $\operatorname{Lim}_{k\to\infty} y_k = y_\infty$. Nach [145] haben wir $y_\infty = U(x_\infty)$ zu beweisen. Nun ist aber

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b y_k(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_a^b y_\infty(t)\,\varphi_n(t)\,dt \qquad (n),$$

d. h. $\lim a_n^{(k)} = a_n^*$, wenn $\{a_n^*\}$ die Koeffizientenfolge von $y_\infty(t)$ nach $\{\varphi_n\}$ bezeichnet. Andererseits ist wegen $\operatorname{Lim}_{k\to\infty} x_k = x_\infty$

$$\lim_{k\to\infty} a_n^{(k)} = a_n^{(\infty)} \qquad (n),$$

wo $x_\infty = \{a_n^{(\infty)}\}$. Es ist also $a_n^* = a_n^{(\infty)}$, d. h. die Koeffizienten von y_∞ und $U(x_\infty)$ nach $\{\varphi_n\}$ stimmen überein. Bezeichnet man mit b (mit entsprechenden Indizes) die Koeffizienten nach $\{\psi\}$, so ist $b_n^{(k)} = 0$ (für alle endlichen n, k) also $b_n^* = 0$ (n); $b_n^{(\infty)}$ ist aber Null als Koeffizient von $U(x_\infty)$, wie oben bemerkt wurde. Wir haben also übereinstimmende Koeffizienten inbezug auf ein ONV; daher ist $y_\infty = U(x_\infty)$. $U(x)$ ist demnach linear, also

$$\| y \|_p \leqslant \mu_p \| x \|,$$

was für $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ als (1) geschrieben werden kann.

Korollar. Eine lakunäre Reihe ist stets stark konvergent.

Es sei $\{\varphi_n\}$ *ein* ONS_p; *dann gilt* [714]

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \leqslant \mu_p^{\frac{p}{p-2}} \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right| dt,$$

wo μ_p *dieselbe Konstante wie in* [713] *bezeichnet.*

Es sei nämlich $q = p - 1 > 1$; es kommt

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)\right)^2 dt = \int_a^b | s_n(t) |^{\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} + 1} dt,$$

also, nach [127] und [713],

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leqslant \left(\int_a^b | s_n(t) | \, dt\right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\int_a^b | s_n(t) |^p \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\int_a^b | s_n(t) | \, dt\right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\mu_p \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\right)^{\frac{p}{q}},$$

d. h.

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1 - \frac{p}{2q}} \leqslant \mu_p^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_a^b | s_n(t) | \, dt\right)^{\frac{1}{q'}},$$

woraus der Satz, wegen $1 - p/2q = 1/2q'$, unmittelbar hervorgeht.

Setzt man

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \int_a^b f(t) \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)\, dt,$$

so kommt

$$\sum_{k=1}^n a_n^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^{p'} \, dt\right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_a^b | s_n(t) |^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

und (1) liefert den

Satz: *Es sei* $\{\varphi_n\}$ *ein* ONS_p; *dann gilt für jedes* $f(t) \in L^{p'}$ [715]

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \leqslant \mu_p \left(\int_a^b |f(t)|^{p'} \, dt\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

(Hier ist $f(t)$ irgend eine Funktion mit $f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t)$ und μ_p die Konstante aus [713]).

Es zeigt sich, daß die Entwicklung einer beliebigen Funktion $f(t) \in L^{p'}$ $(p' < 2)$ einer Funktion $\bar{f}(t) \in L^2$ entspricht, welche,
[716] nach [712], zu L^p gehört; daraus geht aber die *Unvollständigkeit der Systeme* S_p *inbezug auf* L^p hervor.

In der Tat, die Vollständigkeit würde die Abgeschlossenheit inbezug auf $L^{p'}$ bewirken ([625]) und man hätte eine Folge $\{w_n(t)\}$ von Linearformen in φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ mit $f(t)$ als starker Grenze. Nun ist aber nach [715]

$$\int_a^b [\bar{f}(t) - w_n(t)]^2 \, dt \leqslant \mu_p^2 \left(\int_a^b |f(t) - w_n(t)|^{p'} \, dt \right)^{\frac{2}{p'}},$$

also $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} w_n(t) = \bar{f}(t)$ in L^2, was mit $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} w_n(t) = f(t)$ in $L^{p'}$ in Widerspruch steht, wenn $f(t)$ außerhalb L^2 gewählt wurde.

[715] läßt sich folgendermaßen umkehren:

[717] *Hat ein ON* $\{\varphi_n\}$ *für ein gewisses* q $(1 < q < 2)$ *und jedes* $f(t) \in L^q$ *die Eigenschaft* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, *wo* $\{a_k\}$ *die Koeffizientenfolge von* $f(t)$ *bedeutet, so ist es lakunär von der Ordnung* q'.

Es ist zu zeigen, daß es zu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$ stets ein $g(t) \in L^{q'}$ mit $g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(t)$ gibt. Auf Grund von [646] genügt es die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ für sämtliche $\{a_k\} \in L^q$ (d. h. sämtliche Koeffizientenfolgen von Funktionen aus L^q) zu beweisen. Diese findet aber statt, denn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist nach Voraussetzung konvergent.

§ 2. **Vorhandensein von lakunären Systemen.**

Wir haben die einfachsten Eigenschaften der lakunären Systeme kennen gelernt, deren Vertreter das System [225] ist, welches sich sogar als S_∞ herausgestellt hat. Gibt es aber sonst lakunäre Systeme?

Hier ist folgendes Ergebnis von Wichtigkeit:

[721] *Es sei* $2 < p < \infty$, $\{\varphi_n(t)\}$ *ein* ON *und* $\{\|\varphi_n\|_p\}$ *beschränkt. Dann gibt es eine Indizesfolge* $\{n_k\}$ *so beschaffen, daß* $\{\varphi_{n_k}(t)\}$ *lakunär von der Ordnung* p *ist.*

Dem Beweise schicken wir folgendes Lemma voraus: Es gibt [722]
Konstanten $\alpha(p)$, $\beta(p)$ so, daß für alle $f(t) \in L^p$, $g(t) \in L^p$, $p > 2$ die Ungleichung

$$\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \, dt \leqslant \int_a^b |f(t)|^p \, dt + p \int_a^b |f(t)|^{p-2} f(t) \, g(t) \, dt$$
$$+ \alpha \int_a^b |g(t)|^p \, dt + \beta \sum_{j=2}^{Ep} \int_a^b |f(t)|^{p-j} \, |g(t)|^j \, dt$$

gilt. Diese Ungleichung ist eine unmittelbare Konsequenz der arithmetischen Ungleichung

$$|u + v|^p \leqslant |u|^p + p\,|v|^{p-2} uv + \alpha\,|v|^p + \sum_{i=2}^{Ep} \binom{p}{i} |u|^{p-i} \, |v|^i,$$

die man folgendermaßen ableiten kann: Man setzt

$$\omega(z) = \frac{|1 + z|^p - \left(1 + pz + \sum_{i=2}^{Ep} \binom{p}{i} z^i\right)}{|z|^p};$$

$\omega(z)$ bleibt für $|z| \to \infty$ beschränkt; für $z \to 0$ strebt $\omega(z)$ gegen Null, wie man aus der binomischen Formel für $|1 + z|^p$ abliest. Demnach gibt es eine Konstante α mit $|\omega(z)| \leqslant \alpha$ für alle z, also umsomehr mit

$$|1 + z|^p \leqslant 1 + pz + \sum_{i=2}^{Ep} \binom{p}{i} z^i + \alpha\,|z|^p;$$

setzt man b/a für z ein, so erhält man die verlangte Ungleichung.

Jetzt können wir an den Beweis von [721] gehen. Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ reelle Zahlen. Man setze

$$(2) \qquad f_n(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r) = \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \varphi_i(t) \right|^{p-2} \cdot \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \varphi_i(t) \cdot \varphi_n(t) \, dt$$

und nehme $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i^2 \leqslant 1$ an; dann strebt f_n mit $1/n$ gegen Null und zwar *gleichmäßig* für alle Zahlensysteme $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$, welche obige Annahme erfüllen. Sonst hätte man nämlich ein $\varepsilon > 0$, eine Indexfolge $\{n_k\}$ und eine Folge $\{(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \ldots, \gamma_r^{(k)})\}$ mit $f_{n_k}(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \ldots, \gamma_r^{(k)}) \geqslant \varepsilon$. Wegen $|\gamma_i| \leqslant 1$ gäbe es eine Teilfolge (die keine neue Bezeichnung erhält) $\{(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \ldots, \gamma_r^{(k)})\}$ mit dem Grenzpunkt $(\gamma_1^{(\infty)}, \gamma_2^{(\infty)}, \ldots, \gamma_r^{(\infty)})$. In diesem Punkte wäre $\lim_{n \to \infty} f_n = 0$, also $\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = 0$, ein Widerspruch.

Es sei also $|f_n| \leqslant 1/r$ für $n > s(r)$. Es sei ferner $r_1 = 1$, $r_{n+1} = \max(1 + r_n, s(r_n))$ (also $r_n \geqslant n$); wir behaupten, $\{\varphi_{r_n}(t)\}$ sei lakunär von der Ordnung p. Es werde $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \varphi_{r_i}(t)$ mit $s_n(t)$ bezeichnet und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leqslant 1$ angenommen. Nach [722] ist

$$(3)\quad J_{n+1} = \int_a^b |s_{n+1}(t)|^p\,dt \leqslant \int_a^b |s_n(t)|^p\,dt + p a_{n+1} \int_a^b |s_n(t)|^{p-2} s_n(t)\, \varphi_{r_{n+1}}(t)\,dt$$
$$+ \alpha\, |a_{n+1}|^p \int_a^b |\varphi_{r_{n+1}}(t)|^p\,dt + \beta \sum_{j=2}^{Ep} |a_{n+1}|^j \int_a^b |s_n(t)|^{p-j}\, |\varphi_{r_{n+1}}(t)|^j\,dt.$$

Nun ist $r_n \geqslant n$, $\int\limits_a^b |\varphi_n(t)|^p\,dt \leqslant \mu^p$, $|a_{n+1}|^j \leqslant |a_{n+1}|^2$ für $2 \leqslant j \leqslant p$, also, nach Anwendung von [127] auf das letzte Glied von (3),

$$J_{n+1} \leqslant J_n(1 + \beta p \mu^p a_{n+1}^2) + a_{n+1}^2(\alpha\mu^p + \beta p \mu^p) + p\frac{|a_{n+1}|}{n} = J_n(1+\beta_n) + \alpha_n$$

(die Unterscheidung $J_n \geqslant 1$, $J_n < 1$ liefert zwei Glieder mit β). Es folgt

$$J_{n+1} \leqslant (1+\beta_n)\,(1+\beta_{n-1}) \ldots (1+\beta_1)\left(J_1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$$

und die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ liefert eine n-freie und $\{a_n\}$-freie Zahl $\varkappa$ mit $J_n \leqslant \varkappa$.

Damit ist aber für alle $\{a_n\}$ die Bedingung (1) des Satzes [713] erwiesen, also ist $\{\varphi_{r_n}(t)\}$ S_p, wie behauptet.

Eine Konsequenz von [721] ist der Satz:

[723] *Aus einem beschränkten* ON *läßt sich stets ein* S_∞ *herausgreifen.*

Beweis: Es sei $\{\varphi_n\}$ das betrachtete ON, $\{\varphi_{r_n}(t)\}$ das auf Grund von [721] vorhandene lakunäre System von der Ordnung 3. Man schreibe $\varphi_n^{(1)}$ für φ_{r_n} und bezeichne das in $\{\varphi_n^{(1)}\}$ enthaltene S_4 mit $\{\varphi_n^{(2)}\}$; fährt man so fort, so entstehen unendlichviele Folgen $\{\varphi_n^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; dabei ist $\{\varphi_n^{(k)}(t)\}$ ein ONS_{k+2}. Die Diagonalfolge $\{\varphi_k^{(k)}(t)\}$ ist (abgesehen von endlichvielen Gliedern) in jeder von jenen Folgen enthalten; schreibt man ψ_n für $\varphi_n^{(n)}$, so ist $\{\psi_n(t)\}$ ein ONS_{k+2} für $k = 1, 2, \ldots$, also das gesuchte ONS_∞.

[723] gilt auch für solche ON, die, ohne beschränkt zu sein, die Bedingung $\|\varphi_n(t)\|_p < \mu(p)$ (mit einem n-freien μ) für alle n oder nur für eine unendliche Teilfolge $\{n_k\}$ erfüllen.

§ 3. **Weitere Eigenschaften der lakunären Systeme.**

In § 1 und § 2 haben wir uns mit der Existenz und mit den charakteristischen Eigenschaften der lakunären Systeme beschäftigt. Jetzt gehen wir zu dem Problem über, wie die Koeffizienten einer Funktion nach einem lakunären System beschaffen sind. Wir wissen bereits auf Grund von [715], daß die Koeffizienten eines $f(t) \in L^{p'}$ nach einem ONS_p-System eine konvergente Quadratsumme haben; daraus folgt:

Ist $\{\varphi_n(t)\}$ *ein* S_∞, $q > 1$, $f(t) \in L^q$, $f(t) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t)$, *so ist* [731]
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Dieser Satz läßt sich nicht auf $q = 1$ erweitern, wie wir später ([743]) sehen werden. Aus [712] und [731] folgt *für Systeme* ONS_∞, [732]
daß *jede Funktion* $f(t) \in L^q$ $(q > 1)$, *die „in der Ebene des Systems liegt“*, d. h. deren Koeffizienten nach den zur Vervollständigung des Systems nötigen Funktionen sämtlich verschwinden, *mit jedem* $p > 0$ *integrierbar ist.* Dieser Satz bleibt ([741]) auch für $q = 1$ unter gewissen Einschränkungen richtig.

[731] läßt sich auch so ausdrücken: Ist das aus einem ON $\{\varphi_n\}$ herausgegriffene Teilsystem $\{\varphi_{n_k}\}$ ein S_∞, so ist für $f(t) \in L^q$ $(q > 1)$ stets $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 < \infty$.

Bei den lakunären Systemen spielt die Reihenfolge keine Rolle; *ein lakunäres System bleibt lakunär von derselben Ordnung, wenn* [733]
man die Reihenfolge seiner Glieder beliebig ändert.

Beweis: Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ ein R_p; nach [713] ist die Teilfolge eines S_p ebenfalls ein S_p, also ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(t)$ ein R_p und, nach dem Korollar zu [713], stark konvergent in L^p. Damit erweisen sich alle herausgegriffenen Reihen als stark konvergent, also muß nach [168] die ursprüngliche Reihe unbedingt konvergieren. Es ist also die umgeordnete Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^* \varphi_n^*(t)$ in L^p stark konvergent, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ war. Daher ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n^*(t)$ für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ stets stark konvergent (denn es gibt dann zu $\{b_n\}$ ein $\{a_n\}$ mit $a_n^* = b_n$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$). Dies beweist eben, daß $\{\varphi_n^*\}$ ein S_p ist.

Banach'sche Äquivalenzen. Lakunäre Systeme weisen u. a. gewisse Eigenschaften auf, die untereinander und mit der Eigenschaft lakunär zu sein äquivalent sind; wir können sogar zwei solche Gruppen äquivalenter Eigenschaften angeben; sie zeigen die einschlägigen Probleme in einem neuen Lichte und eröffnen einen Weg zu den Singularitäten.

I. Gruppe. Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON mit folgenden Einschränkungen: 1° alle $\varphi_n(t)$ sind beschränkt, 2° das System ist abgeschlossen inbezug auf L, 3° die laut 2° vorhandenen Linearformen $w_m(t)$, welche eine gegebene Funktion $f(t)\in L$ in L stark approximieren, können so gewählt werden, daß sie diejenigen $\varphi_n(t)$, zu welchen $f(t)$ orthogonal ist, nicht enthalten (2° und 3° bewirken bereits die Vollständigkeit inbezug auf L); $\{\psi_k(t)\}$ sei eine Teilfolge von $\{\varphi_n(t)\}$, d. h. es sei $\psi_k(t)=\varphi_{n_k}(t)$.

[734] *Unter diesen Annahmen sind die drei folgenden Aussagen paarweise äquivalent:*

α) Die Koeffizienten einer jeden integrierbaren Funktion nach $\{\psi_k\}$ haben eine endliche Quadratsumme, wenn die Funktion in der ψ-Ebene liegt.

β) Zu jeder Folge $\{a_k\}$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2<\infty$ gibt es eine stetige Funktion, deren Koeffizienten nach $\{\psi_k\}$ die a_k sind.

γ) Es gibt ein von m unabhängiges μ, so daß die Ungleichung

(4) $$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} c_n^2}\leqslant \mu\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{m} c_n\,\psi_n(t)\right|dt \qquad (m)$$

für alle $c_1, c_2, \dots, c_m$ gilt.

Beweis: (4) sei erfüllt. $f(t)$ sei integrierbar und „in der ψ-Ebene gelegen", d. h. die Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\varphi_n\}$ sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\,\psi_k(t)$; nach Voraussetzung 2° und 3° gibt es Linearformen

(5) $$w_m(t)=\sum_{n=1}^{m} c_n^{(m)}\,\psi_n(t)$$

mit $\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_a^b|f(t)-w_m(t)|\,dt=0$. Nach (4) und (5) ist

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m}(c_n^{(m)})^2}\leqslant\mu\int_a^b|w_m(t)|\,dt$$

und — da wegen [627] $\lim\limits_{m\to\infty} c_n^{(m)}=a_n$ ist —

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}\leqslant\mu\int_a^b|f(t)|\,dt;$$

es folgt also α) aus γ).

Jetzt sei α) erfüllt. Es sei $w(t)$ irgend eine Form von der Gestalt (5) mit der Nebenbedingung

(6) $$\int_a^b|w(t)|\,dt=1;$$

wir wollen γ) oder die damit äquivalente Ungleichung

$$\int_a^b w^2(t)\,dt\leqslant\mu$$

ableiten. Wäre sie falsch, so könnte man aus $\{w\}$ eine Folge $\{w_i\}$ mit

(7) $$\|w_{i+1}\|_2>i^2,\qquad w_i=\sum^{m_i} c_n\,\psi_n(t) \qquad (i)$$

herausgreifen derart, daß $w_{i+1}=\sum\limits_{m_i+1}^{m_{i+1}} c_n\,\psi_n(t)$ wäre. (Im Gegenfalle wäre ein $i=k$ vorhanden, mit $\sqrt{\sum\limits_{n=m}^{p} c_n^2}\leqslant k^2\int\limits_a^b\left|\sum\limits_{m}^{p} c_n\,\psi_n(t)\right|dt$ für $p>m>m_k$; da aber, nach 2°, $|\psi_n|\leqslant\alpha$ $(n=1,2,\dots,m_k)$, so ist für jedes $w(t)=\sum\limits_{n=1}^{p} c_n\,\psi_n(t)$, $\|w\|_L=1$,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{p} c_n^2}\leqslant\alpha m_k+k^2(1+\alpha m_k)=\mu,$$

also die Aussage γ) erfüllt). Dann wäre, wegen (6), die Orthogonalreihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\,w_i(t)$ gegen ein $g(t)\in L$ stark in L konvergent; man hätte aber $g(t)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\,\psi_n(t)$ mit $b_n=\frac{1}{i^2}\int\limits_a^b w_i(t)\,\psi_n(t)\,dt$ für $m_{i-1}<n\leqslant m_i$, also, wegen (7),

$$\sum_{1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \| w_i \|_2^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^4}{i^4} = \infty,$$

was gegen α) verstößt. Damit ist die Äquivalenz von α) und γ) bewiesen.

Um die Äquivalenz von β) und γ) zu zeigen, definieren wir eine Operation $y = U(x)$ — wo $x \in C$ (= der Raum stetiger Funktionen), $y \in l^2$ — durch

$$(8) \qquad y \equiv \{y_i\}, \qquad y_i = \int_a^b x(t)\, \psi_i(t)\, dt \qquad (i).$$

Diese Operation ist linear. Nach [183] ist für die Auflösbarkeit von $y = U(x)$ bei jedem $y \in l^2$ die Existenz einer positiven Konstanten $\overline{\mu}$ mit

$$(9) \qquad \| Y(U(x)) \| \geqslant \| Y \| \overline{\mu} \qquad (Y)$$

notwendig und hinreichend; dabei ist Y das Symbol eines beliebigen linearen Funktionals in l^2; links ist die Norm des zusammengesetzten Funktionals YU, rechts diejenige von Y gemeint. Da nun ein lineares Funktional in l^2 die Gestalt $\sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i = Y(y)$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ hat, so ist $\| Y \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Ferner ist wegen (8)

$$Y(U(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_a^b x(t)\, \psi_i(t)\, dt = \int_a^b x(t) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t)\, dt,$$

also nach [147]

$$\| Y(U(x)) \| = \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t) \right| dt.$$

Es kann also (9) als

$$(10) \qquad \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{m} c_i \psi_i(t) \right| dt \geqslant \overline{\mu} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i^2}$$

geschrieben werden für alle Folgen $\{c_i\}$ mit endlichvielen von Null verschiedenen Gliedern. Somit folgt γ) aus β). Umgekehrt folgt β) aus γ), denn (10) impliziert den Fall $m = \infty$, also (9), und die Auflösbarkeit von $y = U(x)$.

Nach [714] gilt γ) für jedes $\mathrm{ONS}_p\{\psi_n\}$. Wenn also $\{\varphi_n\}$ die Voraussetzungen 1^0, 2^0, 3^0 von [734] erfüllt und $\{\psi_n\}$ eine Teilfolge von $\{\varphi_n\}$ ist, so gelten auch α) und β) für $\{\psi_n\}$. Daraus können

wir schließen, daß jedes ON $\{\varphi_n\}$, welches ein lakunäres System, d. h. ein S_p enthält, die Singularität C_p, ja sogar eine stärkere aufweist:

Es gibt positive ε_n mit $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ und eine stetige Funktion [735]
$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |^{2-\varepsilon_n} = \infty.$$

Beweis: Wir wählen eine Folge positiver Zahlen $\{\beta_k\}$ mit $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \infty$ derart, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^{\beta_k}$ für alle $\vartheta \in (0,1)$ divergiert. Setzt man dann $\eta_k = \frac{2}{\beta_k + 1}$, so ist $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$ und es gibt eine Folge $\{c_k\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{2-\eta_k} = \infty.$$

Ist nun $\{\varphi_{n_k}(t) = \psi_k(t)\}$ das lakunäre Teilsystem von $\{\varphi_n\}$, so gibt es nach [734] eine stetige Funktion $f(t)$ mit

$$c_k = \int_a^b f(t)\, \psi_k(t)\, dt;$$

ist also $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$, so hat man für eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_{n_k} = \eta_k$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2-\varepsilon_n} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{2-\eta_k} = \infty.$$

Selbstverständlich ist der Beweis für die Singularität C_p und C_∞ noch einfacher, denn es tritt $\varepsilon > 0$ an Stelle von ε_n.

II. Gruppe. Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON und: 1^0 alle $\varphi_n(t)$ gemeinsam beschränkt, 2^0 jede beschränkte Funktion als gewöhnlicher Grenzwert einer f. ü. konvergenten Folge von Linearformen der φ darstellbar, 3^0 die laut 2^0 vorhandenen Linearformen $w_n(t)$, die gegen eine gegebene Funktion $f(t) \in M$ f. ü. konvergieren, so bestimmbar, daß sie gemeinsam beschränkt sind und die zu $f(t)$ orthogonalen $\varphi_n(t)$ nicht enthalten; $\{\psi_k(t)\}$ sei eine Teilfolge von $\{\varphi_n(t)\}$.

[736] *Unter diesen Annahmen sind die drei folgenden Aussagen paarweise äquivalent:*

α) Die Koeffizienten jeder beschränkten Funktion nach $\{\psi_k\}$ bilden eine absolut konvergente Reihe, wenn die Funktion in der ψ-Ebene liegt.

β) Zu jeder Folge $\{a_k\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ gibt es eine integrierbare Funktion, deren Koeffizienten nach $\{\psi_k\}$ die a_k sind.

γ) Es gibt ein von m unabhängiges μ, so daß die Ungleichung

$$\text{(11)} \qquad \sum_{n=1}^{m} |c_n| \leqslant \mu \cdot \underset{a\leqslant t\leqslant b}{\text{w. o. G.}} \left| \sum_{n=1}^{m} c_n \psi_n(t) \right| \qquad (m)$$

für alle $c_1, c_2, \ldots, c_m$ gilt.

Beweis: (11) sei erfüllt, $f(t)$ sei beschränkt und „in der ψ-Ebene gelegen"; die Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\varphi_n\}$ sei also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(t)$. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $\{w_m(t)\}$ mit den Eigenschaften 2^0 und 3^0. Ist

$$\text{(12)} \qquad w_m(t) = \sum_{n=1}^{m} c_n^{(m)} \psi_n(t),$$

so kommt wegen (11) und 3^0

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{(m)}| \leqslant \mu \cdot \underset{a\leqslant t\leqslant b}{\text{w. o. G.}} |w_m(t)| \leqslant \mu\varkappa$$

und, da nach [627] $\lim\limits_{m\to\infty} c_n^{(m)} = a_n$ ist,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \mu\varkappa.$$

So folgt α) aus γ). Die Umkehrung ist ebenfalls in Anlehnung an den Beweis von [734] unter sinngemäßer Änderung der Normen zu beweisen.

Jetzt haben wir noch die Äquivalenz von β) und γ) zu zeigen. Wir definieren eine Operation $y = U(x)$, mit L als Raum der unabhängigen Variablen x und mit l^∞ (= der Raum aller Folgen $\{y_i\}$ mit $y_i \to 0$) als Gegenraum, durch

$$y \equiv \{y_i\}, \qquad y_i = \int_a^b x(t)\, \psi_i(t)\, dt \qquad (i).$$

Damit diese lineare Operation $y = U(x)$ für jedes $y \in l^\infty$ eine Lösung $x \in L$ zulasse, ist wieder — nach [183] — eine Bedingung der Gestalt (9) notwendig und hinreichend. Ihr Sinn ist aber ein anderer: ein lineares Funktional in l^∞ hat die Form $Y(y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i y_i$ mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$, also ist $\|Y\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|$; es ist zwar wieder

$$Y(U(x)) = \int_a^b x(t) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t)\, dt,$$

aber nach [147]

$$\|Y(U(x))\| = \underset{a\leqslant t\leqslant b}{\text{w. o. G.}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(t) \right|,$$

denn $Y(U(x))$ ist jetzt eine in L erklärte Operation. Die Ungleichung (9) ergibt also als Analogon zu (10)

$$\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\text{w. o. G.}} \left| \sum_{i=1}^{m} c_i \psi_i(t) \right| \geqslant \bar{\mu} \sum_{i=1}^{m} |c_i| \qquad (\bar{\mu} > 0)$$

und der Beweis wird ähnlich wie derjenige von [734] abgeschlossen.

Man kann auch daran ähnliche Bemerkungen wie dort knüpfen, doch ist es über γ) nicht bekannt, ob es jedem ONS_p zukommt. Die Äquivalenz von β) und γ) zeigt, daß in diesem Falle eine Erweiterung von [731] auf $q=1$ unstatthaft wäre, ja es ist sogar für jedes System $\{\varphi_n\}$, welches den Annahmen der II-ten Gruppe genügt und ein Teilsystem $\{\psi_k\}$ von der Eigenschaft γ) besitzt, folgende Singularität vorhanden:

Es gibt ein $\{\lambda_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ und eine integrierbare Funktion [737]
$f(t) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\lambda_n} = \infty.$$

Beweis: Wir wählen positive Zahlen μ_k mit $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = +\infty$ derart, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \vartheta^{\mu_k}$ für alle $\vartheta \in (0,1)$ divergiert. Es gibt dann eine Folge $\{c_k\}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{\mu_k} = \infty.$$

Ist $f(t)$ die nach der Äquivalenz $\beta) \equiv \gamma$) aus [736] vorhandene integrierbare Funktion mit

$$c_k = \int_a^b f(t)\,\psi_k(t)\,dt, \qquad f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \qquad c_k = a_{n_k},$$

so gilt für eine Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\lambda_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$, $\lambda_{n_k} = \mu_k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\lambda_n} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{\mu_k} = \infty.$$

Die Bestimmung von $\{\mu_k\}$ als $\{\log\log(k+2)\}$ ist ausreichend; $\{c_k\}$ kann dann als $\{1/\log(k+1)\}$ gewählt werden; diese Wahl genügt auch für die schwächere Singularität mit $\lambda_n = \lambda > 0$.

§ 4. **Anwendungen.**

Das Rademacher'sche System $\{r_n(t)\}$ ist lakunär; es ist S_∞, wie wir am Anfang dieses Kapitels gesehen haben. Infolgedessen erfüllt dieses System die Ungleichung der Behauptung [714], wie wir es bereits in [457] bestätigt finden. Nun ist aber das Rademacher'sche System ein Teilsystem des in [461] erklärten Walsh-schen Systems; nach [463] haben die dort erklärten Teilsummen $p_{2^n}(t)$, die wir mit $w_n(t)$ bezeichnen können, diejenigen Eigenschaften, die wir als „Annahmen" dem Satz [734] vorausschickten. Es ist also jener Satz anwendbar und ergibt für jede integrierbare, in der r-Ebene gelegene Funktion $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Ebenso sind die für die Äquivalenzen [736] ausreichenden Annahmen der II-ten Gruppe erfüllt (mit denselben $w_n(t)$), also bilden die Koeffizienten a_n eines $f(t) \in M$ (f aus der r-Ebene) stets eine absolut konvergente Reihe.

Eine trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k t + b_k \sin n_k t)$$

ist für genügend stark wachsende Folgen $\{n_k\}$ (z. B. für $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$) ebenfalls lakunär, worüber man näheres im Zygmund'schen Buche dieser Sammlung lesen kann. Das interessante System [471] besitzt auch diese Eigenschaft.

Das System $\{r_n(t)\}$ ([225]) mag uns jetzt dazu dienen, zu stärkeren Ergebnissen als [563] zu gelangen. Und zwar:

Es sei $\int_a^b |g_n(u)|^p\,du < \gamma$ *für alle* n, $p > 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$; *dann ist für fast alle* t *die Reihe* [741]

$$\text{(13)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, g_n(u)\, r_n(t)$$

f. ü. in $\langle a, b\rangle$ *gegen eine Funktion* $G_t(u) \in L^p$ *konvergent.*

Beweis: Es ist nach Voraussetzung $\int_a^b |g_n(u)|^p\,du$, also auch $\int_a^b g_n^2(u)\,du$ beschränkt, daher $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 g_n^2(u)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 |g_n(u)|^p$ nach [124] für fast alle u des Intervalls $\langle a, b\rangle$ konvergent. Ist also u_0 ein derartiges u, so konvergiert nach [452]

$$\text{(14)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, g_n(u_0)\, r_n(t)$$

f. ü. in $\langle 0, 1\rangle$. Bezeichnet man mit $s_n(u, t)$ die n-te Partialsumme von (13), so liefert die Khintchin'sche Ungleichung [456]

$$\int_a^b |s_n(u,t)|^p\,dt \leqslant \varkappa \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 g_k^2(u)\right)^{\frac{p}{2}},$$

wo $\varkappa$ nur von p abhängt; die Hölder'sche Ungleichung [114] gibt aber

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 g_k^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 |g_k|^p,$$

also ist

$$\text{(15)} \qquad \int_0^1 |s_n(u_0,t)|^p\,dt \leqslant \varkappa \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 |g_k(u_0)|^p.$$

Bezeichnet man mit $s_\infty(u_0, t)$ die Summe von (14), so ist nach [125] und (15)

$$\int_0^1 |s_\infty(u_0,t)|^p\,dt \leqslant \varkappa \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 |g_k(u_0)|^p.$$

Schreibt man hier u statt u_0 und integriert beiderseits nach u, so kommt

$$\int_a^b du \int_0^1 |s_\infty(u,t)|^p\,dt \leqslant \varkappa\gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

also auch (nach Vertauschung der Integrationsfolge)

$$\int_0^1 dt \int_a^b |s_\infty(u,t)|^p\, du < \infty,$$

was die behauptete Endlichkeit von $\int_a^b |s_\infty(u,t)|^p\, du$ für fast alle t ergibt.

Dasselbe Resultat läßt sich folgendermaßen probabilistisch deuten (vgl. [455]): unter den Voraussetzungen von [741] hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n g_n(u)$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 eine Summe, die zu L^p gehört.

Der Satz [741] bleibt richtig, wenn die Zahlen a_n und die
[742] Funktionen $g_n(u)$ komplexe Werte annehmen. *So ist* z. B. *für*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \qquad |z| = 1, \qquad G_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n r_n(t), \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\int_0^{2\pi} |G_t(e^{iu})|^p\, du < \infty \qquad (p > 2)$$

für fast alle t. In diesem Satze ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n r_n(t)$ für $|z|=1$ f. ü. in $<0,1>$ mitgemeint. Wir überlassen dem Leser die probabilistische Deutung dieser, sowie die Formulierung analoger Sätze mit den Funktionen des Satzes [471] an Stelle von $\{r_n(t)\}$. Weitere Anwendungen auf die analytischen Funktionen findet man in einer gemeinsamen Arbeit von Paley und Zygmund.

Die Funktionen $r_n(t)$ dienen u. a. dazu, die Wahrscheinlichkeit für die Konvergenz (oder Divergenz) von Reihen zu bestimmen, deren Glieder mit zufallsartigen Vorzeichen $\pm$ versehen werden. Wenn wir nun eine Reihe haben und es dem Zufall überlassen (mit gleicher Wahrscheinlichkeit für beide Fälle), ob wir ein Glied streichen oder stehen lassen, so sind an Stelle von $r_n(t)$ die Funktionen $v_n(t) = {}^1/_2 + {}^1/_2\, r_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zu benutzen.

[743] *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe*

$$(16) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(t)$$

in einer positiven t-Menge $(C,1)$*-summierbar sei, besteht in der Konvergenz von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *und der* $(C,1)$*-Summierbarkeit von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Hinlänglichkeit ergibt sich aus der Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$$

und [452]. Diese Darstellung zeigt auch, daß die Notwendigkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ bereits die Notwendigkeit der ganzen Bedingung impliziert. Es sei also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Bezeichnen wir mit $\{\sigma_n\}$, $\{\tau_n\}$ die Folgen der arithmetischen Mittelwerte der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$. $\{n_k\}$ und $\{n_k'\}$ seien Indizesfolgen und zwar durch die Ungleichung $\sigma_{n_k} > 0$, bzw. $\sigma_{n_k'} < 0$ definiert. Da unendlichviele a_n von Null verschieden sind, ist wenigstens eine der beiden Folgen unendlich; es sei z. B. $\{n_k\}$ unendlich. Aus [564] (vgl. auch die Bemerkungen nach [576]) folgt

$$\limsup_{k\to\infty} |\tau_{n_k}(t)| = \infty$$

in einer t-Menge E mit $|E| = 1$. Es ist $E = E_1 + E_2$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} \tau_{n_k}(t) = +\infty \quad \text{für } t \in E_1, \qquad \liminf_{k\to\infty} \tau_{n_k}(t) = -\infty \quad \text{für } t \in E_2.$$

Ist nun T diejenige t-Menge, für welche (16) $(C,1)$-summierbar ist, so ist wenigstens eine der beiden Mengen TE_1, TE_2 positiv; sie heiße F. F hat in einem gewissen Intervall $({}^p/_{2^q}, {}^{p+1}/_{2^q})$ eine relative Dichte $> {}^1/_2$; ist $\bar{F}$ das Spiegelbild von F inbezug auf den Mittelpunkt des erwähnten Intervalls, so ist $F\bar{F}$ positiv. In jedem $t \in F\bar{F}$ gilt nun

$$\limsup_{k\to\infty} \tau_{n_k}(t) = +\infty, \qquad \liminf_{k\to\infty} \tau_{n_k}(t) = -\infty,$$

(denn die $r_n(t)$ sind von einem n an ungerade inbezug auf den besagten Mittelpunkt). Es ist also in einem positiven Teil von T

$$\limsup_{k\to\infty} (\tau_{n_k} + \sigma_{n_k}) = +\infty,$$

ein Widerspruch.

Bemerkung. Derselbe Satz und Beweis gilt für alle Toeplitz'schen Summationsmethoden.

[744] Satz. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\infty$. *Streicht man in der trigonometrischen Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\vartheta)$$

zufallsartig die Glieder, so erhält man mit der Wahrscheinlichkeit 1 *eine nichtfourier'sche Reihe.*

Beweis: Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(\vartheta)=\infty$ für fast alle ϑ, also ist—für solche ϑ — die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\vartheta)\, v_n(t) \tag{17}$$

f. ü. in $0 \leqslant t \leqslant 1$ nicht $(C, 1)$-summierbar, wie [743] lehrt. Infolgedessen ist für fast alle t die Reihe (17) nicht $(C,1)$-summierbar f. ü. in $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, also — für fast alle t — keine Fourierreihe inbezug auf ϑ, w. z. b. w.