VI. KAPITEL.

Orthogonalreihen in anderen Räumen.

Im III-ten Kapitel haben wir die Orthogonalentwicklungen von Funktionen aus L^2 besprochen; jetzt wollen wir andere Räume untersuchen, insbesondere die Räume L^p $(p \geqslant 1)$, M und C (vgl. die Definitionen in I, § 3). Die Buchstaben Q, R, u. s. w. sollen hier stets einen dieser Räume bezeichnen. Viele Sätze dieses Kapitels gelten auch für die Räume L_φ des 5-ten Beispiels S. 16 (I, § 3), doch gehen wir darauf nicht näher ein. Damit die Koeffizienten $a_n = \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt$ existieren, muß von dem ON $\{\varphi_n\}$ vorausgesetzt werden, daß seine Funktionen φ_n zu dem *konjugierten* Raum gehören; zu L^p $(p > 1)$ ist $L^{p'}$ $(1/p' + 1/p = 1)$, zu L aber M konjugiert. Gehört f zu M, C oder L^p mit $p > 2$, so genügt es $\varphi_n \in L^2$ vorauszusetzen; letztere Annahme wird stets stillschweigend gemacht, sobald von einem ON die Rede ist.

§ 1. Vollständigkeit.

Wir wissen bereits ([315]), daß das aus einem inbezug auf R vollständigen System $\{f_n\}$ erhaltene Orthogonalsystem auch selbst inbezug auf R vollständig ist.

Ist die Menge $\{f\}$ vollständig inbezug auf R, so enthält sie eine abzählbare Teilmenge, die ebenfalls inbezug auf R vollständig ist. [611]

Der Beweis von [347] ist nicht mehr genügend, denn im Falle $R = L$ gehören die $\{f\}$ zu M und dieser Raum ist nicht separabel. Wir geben hier einen anderen Beweis, gültig für separable R; im Falle $R = M$ bleibt aber der Beweis [347] anwendbar.

Es sei $\{g_n\}$ überalldicht in R, z_k ein Punkt des k-dimensionalen Raumes mit

$$(1) \qquad \int_a^b f(t)\, g_1(t)\, dt, \quad \int_a^b f(t)\, g_2(t)\, dt, \quad \ldots, \quad \int_a^b f(t)\, g_k(t)\, dt$$

als Koordinaten und Z_k die Menge aller z_k mit $f \in \{f\}$. Es gibt dann ein abzählbares $\Omega_k \subset \{f\}$ so, daß für $f \in \Omega_k$ der Bildpunkt (1) eine überalldichte Teilmenge von Z_k durchläuft, denn Z_k ist als Teilmenge des k-dimensionalen kartesischen Raumes separabel. Die Menge $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ ist abzählbar. Nun aber gibt es jetzt zu jedem $f \in \{f\}$ eine Folge $\{f^{(k)}\}$ mit

$$f^{(k)} \in \Omega_k \subset \Omega, \qquad \left| \int_a^b f^{(k)}(t)\, g_i(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, g_i(t)\, dt \right| < \frac{1}{k}, \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

Es ist also, wenn $\|f\| < \varkappa(f)$ angenommen wird (was die Allgemeinheit nicht schmälert), $\{f^{(k)}\}$ gegen f schwach konvergent. Gilt also $\int_a^b \varphi(t) f(t)\, dt = 0$ für alle $f^{(k)} \in \Omega$, so ist

$$\int_a^b \varphi(t) f(t)\, dt = 0$$

für alle $f \in \{f\}$, also ist Ω vollständig inbezug auf R, w. z. b. w.

Wir können daher stets voraussetzen, daß ein inbezug auf einen Raum vollständiges System abzählbar ist.

Es bietet sich die Frage, ob die Vollständigkeit inbezug auf einen Raum etwa die Vollständigkeit inbezug auf einen anderen impliziert. Hier ist es leicht zu zeigen:

[612] *Ist $\{\varphi_n\}$ inbezug auf R vollständig und $Q \subset R$, so ist $\{\varphi_n\}$ vollständig inbezug auf Q.*

Denn $f \in Q$ impliziert $f \in R$; ist also f nicht Null, $f \in Q$ und zu allen φ_n orthogonal, so entsteht ein Widerspruch gegen die Voraussetzung. Dagegen gilt für alle $R \neq L$ der Satz:

[613] *Es gibt inbezug auf R vollständige* ON-*Systeme, die inbezug auf jeden Raum $Q \supset R$, $Q \neq R$ unvollständig sind.*

Wir wollen [613] für den Fall $R = C$ beweisen. Es sei $\{\psi_n(t)\}$ ONV inbezug auf L; das trigonometrische System hat z. B. diese Eigenschaften.

Es sei $0 \not\equiv f(t) \in M$, $f(t) \ni C$; $f(t)$ gehört somit zu jedem Q, das C umfaßt, ohne gleich C zu sein (vgl. I, 3). Da $\{\psi_n\}$ inbezug auf L vollständig ist, muß (wenigstens) ein Koeffizient $\int_a^b f(t) \psi_i(t)\, dt$ $(i = 1, 2, \ldots)$ von Null verschieden sein; wir können $\{\psi_n\}$ so umgeordnet annehmen, daß es der erste ist. Ist also $\{\alpha_n\}$ jene Koeffizientenfolge und setzt man

$$(2) \qquad g_n(t) = \alpha_n \psi_1(t) - \alpha_1 \psi_n(t) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

so ist $\{g_n(t)\}$ inbezug auf Q unvollständig, wenn $Q \supset C$, $Q \neq C$, denn es gilt

$$\int_a^b g_n(t) f(t)\, dt = \alpha_n \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_n = 0.$$

$\{g_n(t)\}$ ist aber vollständig inbezug auf C. Es sei nämlich $h(t) \in C$ und

$$(3) \qquad \int_a^b h(t)\, g_n(t)\, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ist dann $\int_a^b h(t) \psi_1(t)\, dt = 0$, so folgt aus $\alpha_1 \neq 0$ mit (2) und (3) $\int_a^b h(t) \psi_n(t)\, dt = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$, also, wegen der V-Eigenschaft von $\{\psi_n\}$, $h(t) \equiv 0$; ist aber $\int_a^b h(t) \psi_1(t)\, dt = \beta_1 \neq 0$, so ist wegen (2) und (3) $\int_a^b h(t) \psi_n(t)\, dt = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \alpha_n$ für $n \geqslant 2$, also für $n \geqslant 1$, und daher $h(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} f(t)$, was wegen $\beta_1/\alpha_1 \neq 0$, $h(t) \in C$, $f(t) \ni C$ einen Widerspruch liefert. Es hat also (3) $h(t) \equiv 0$ zur Folge und wenn man $\{g_n\}$ orthogonalisiert, so erhält man das System der Behauptung [613] für den Fall $R = C$ und ähnlich für andere R. Gleichzeitig sehen wir, daß das erhaltene System nach Adjunktion von $f(t)$ vollständig inbezug auf L wird, denn $\gamma f(t)$ (γ konstant) sind die einzigen Funktionen in L, die zu allen $g_n(t)$ orthogonal sind.

Hier werde bemerkt, daß ON-Systeme, die inbezug auf C, nicht aber auf L^2, vollständig sind, nach Angabe entsprechender Koeffizienten bereits eine stetige Funktion der Entwicklung eindeutig zuordnen, ohne aber die Existenz einer anderen (unstetigen) Funktion aus L^2 auszuschließen, welche dieselbe Entwicklung liefern würde. Aus diesem Grunde ist die paradoxe Erscheinung durchaus möglich, daß die Entwicklung einer stetigen Funktion wohl konvergieren, als Summe aber jene andere (unstetige) Funktion haben kann. Denn ein System der hier bezeichneten Art wird erst nach Adjunktion wenigstens einer geeigneten Funktion $\chi(t)$ aus L^2 inbezug auf L^2 vollständig; nur die zu der adjungierten Funktion orthogonalen stetigen Funktionen können eine „richtige" Entwicklung beanspruchen; ist aber $\{f_n\} \subset C$ und ein V inbezug auf L^2, so ist nach [373] wenigstens eine der Funktionen $f_n(t)$ zu $\chi(t)$ nicht orthogonal; diese kann (im Konvergenzfalle) nur eine „falsche" Summe liefern.

Analog zu [353] gilt:

[614] *Ein* ON $\subset R$ *läßt sich stets inbezug auf* R *in* R *vervollständigen.* Selbstverständlich wird $R \subset L^2$ vorausgesetzt. *Andererseits,*
[615] *läßt sich ein* ON $\subset R \subset Q$ *nicht immer in* R *so vervollständigen, daß die Vollständigkeit auch in* Q *bestehe.* Z. B. läßt sich das System des Satzes [613] nicht durch stetige Funktionen inbezug auf M vervollständigen.

§ 2. Abgeschlossenheit.

Wir wollen hier die Annahme der Abgeschlossenheit von $\{f_n\}$ inbezug auf R so verstehen, daß $f_n \in R$; nur für $R = C$ reicht die Voraussetzung $|\varphi_n(t)| \leqslant M_n$ f. ü. (n) hin, um der Annahme von A einen nichttrivialen Sinn zu sichern.

Wie ist ein ONA inbezug auf R beschaffen? Der Satz [316] gilt selbstverständlich. Der Satz [346] hat ein Analogon (im Inhalt und Beweis):

[621] *Jedes System* A *inbezug auf* R $(R = L^p,\ p \geqslant 1,\ R = C)$ *enthält einen abzählbaren Teil von derselben Eigenschaft.* Diesem stellt sich entgegen:

[622] *Kein abzählbares System ist inbezug auf* M *abgeschlossen.*

B e w e i s: Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ A inbezug auf M. Zu $f(t) \in M$ gibt es ein

$$w_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) \quad \text{mit} \quad \text{w. o. G. } |f(t) - w_n(t)| < 1/4.$$

Es sei nun $f_\xi(t) = 1$ für $a \leqslant t \leqslant \xi$, $f_\xi(t) = 0$ für $\xi < t \leqslant b$ $(a < \xi < b)$; es gibt ein $w_n(t, \xi)$ mit

$$|1 - w_n(t,\xi)| < 1/4 \quad (t \leqslant \xi), \quad |w_n(t,\xi)| < 1/4 \qquad (t > \xi)$$

f. ü. in $\langle a, b \rangle$, wir können also sagen, $w_n(t, \xi)$ habe für $t = \xi$ einen Sprung von der Höhe $\geqslant 1/2$.

Es ist also zu jedem ξ ein n und ein System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (mit entsprechenden $c_1, c_2, \ldots, c_n$), vorhanden, so daß $w_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$ an der Stelle $t = \xi$ einen Sprung von der Höhe $\geqslant 1/2$ aufweist. Da die Systeme $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine abzählbare Menge bilden, gibt es unter ihnen wenigstens ein System, welches zu allen ξ einer positiven Menge Ξ gehört. Die Funktionen

$$w(t,\xi) = c_1 \varphi_1(t) + \ldots + c_p \varphi_p(t)$$

(wo die c_i von ξ abhängen) haben alle für $\xi \in \Xi$ einen Sprung von der Höhe $\geqslant 1/2$. Infolgedessen hat $\int_a^t w(t,\xi)\,dt$ keine Ableitung für $t = \xi$. Es muß also eine der Funktionen $\int_a^t \varphi_i(t)\,dt$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ für $t = \xi$ ableitungslos sein. Nun aber haben diese Funktionen alle f. ü. eine Ableitung, was gegen $|\Xi| > 0$ verstößt.

Wir bemerken daß [622] die Separabilität von M ausschließt.

Die Beziehungen verschiedener Räume zueinander sind hinsichtlich der Abgeschlossenheit nicht die gleichen wie hinsichtlich der Vollständigkeit:

Ist $\{\varphi_n\}$ A *inbezug auf* R *und* $Q \supset R$, $Q \neq M$, *so ist* $\{\varphi_n\}$ A [623]
inbezug auf Q.

B e w e i s: Es sei $Q = L^q$ $(q \geqslant 1)$, $f(t) \in Q$. Nach [129] gibt es eine stetige Funktion $g(t)$ mit $\|f - g\|_q < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$; die Voraussetzung ergibt die Existenz eines $w_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$ mit $\|g - w_n\|_R < \varepsilon$, also auch mit $\|g - w_n\|_q < \varepsilon$, was $\|f - w_n\|_q < 2\varepsilon$ zur Folge hat.

Bevor wir ein Gegenstück zu [613] suchen, müssen wir das Verhältnis der Eigenschaften A und V zueinander aufklären.

V o l l s t ä n d i g k e i t u n d A b g e s c h l o s s e n h e i t. In L^2 waren diese beiden Eigenschaften äquivalent, wie die Parsevalsche Formel [371] folgern ließ. Diese Äquivalenz hört auf in umfassenderen Räumen, denn auf Grund von [613] gibt es Orthogonalsysteme, die vollständig inbezug auf L^2, jedoch unvollständig inbezug auf alle erweiterten Räume sind; solche Systeme sind inbezug auf L^2 abgeschlossen, also auch inbezug auf alle erweiterten Räume abgeschlossen und unvollständig. Es gilt aber der

[624] Satz: *Jedes inbezug auf* $R = L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *oder* $R = C$ *abgeschlossene System* $\{\varphi_n\}$ *ist inbezug auf den konjugierten Raum* $R' = L^{p'}$ $(L^\infty = M)$ *bzw.* L *vollständig.*

Ist nämlich $g(t) \in L^{p'}$ bzw. $g(t) \in L$ und $\int_a^b g(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0 \quad (n)$, $f(t)$ eine trigonometrische Funktion, $\{w_n(t)\}$ eine in R gegen $f(t)$ stark konvergente Folge von φ_n-Polynomen, so ist

$$\left|\int_a^b g(t)[f(t) - w_n(t)]\,dt\right| \leqslant \|f - w_n\|_R \cdot \|g\|_{R'},$$

also

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(t)\,w_n(t)\,dt = \int_a^b g(t) f(t)\,dt;$$

da

$$\int_a^b g(t)\,w_n(t)\,dt = 0, \quad \text{so ist} \quad \int_a^b g(t) f(t)\,dt = 0,$$

also, nach [234], $g(t) = 0$ f. ü., w. z. b. w.

Obiger Satz ist eine Verallgemeinerung von [354]; eine analoge Verallgemeinerung von [355] bietet der

[625] Satz: *Jedes inbezug auf* L^p $(1 < p \leqslant \infty)$ *vollständige System ist inbezug auf den konjugierten Raum* $L^{p'}$ *abgeschlossen.*

Wäre nämlich $\{\varphi_n\}$ inbezug auf $L^{p'}$ $(p' \geqslant 1)$ nicht abgeschlossen, so wäre ein $f(t) \in L^{p'}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\int_a^b \left|f(t) - \sum_{k=1}^n d_k\,\varphi_k(t)\right|^{p'} dt > \varepsilon \tag{4}$$

für alle n und $\{d_k\}$ vorhanden. Wir bilden jetzt das System $\{f_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$f_0 = f, \quad f_1 = \varphi_1, \quad f_2 = \varphi_2, \quad \ldots$$

und wenden [171] an: soll es ein $g(t) \in L^p$ mit $\int_a^b f_k(t)\,g(t)\,dt = c_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ geben, so muß eine Konstante γ vorhanden sein, die der Ungleichung

$$\left|\sum_{k=0}^n \mu_k\,c_k\right| \leqslant \gamma\left[\int_a^b \left|\sum_{k=0}^n \mu_k f_k(t)\right|^{p'} dt\right]^{1/p'} \tag{5}$$

für alle $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n\}$ (und alle n) genügt, und diese Bedingung ist auch hinreichend. Wählt man $c_0 = 1$, $c_k = 0$ $(k > 1)$, so läuft diese Bedingung auf

$$|\mu_0|^{p'} \leqslant \gamma^{p'}\int_a^b \left|\sum_{k=0}^n \mu_k f_k(t)\right|^{p'} dt,$$

d. h. auf

$$\frac{1}{\gamma^{p'}} \leqslant \int_a^b \left|f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\mu_0}\varphi_k(t)\right|^{p'} dt \qquad (\mu_0 \neq 0)$$

hinaus. Sie ist aber wegen (4) für $\gamma = (1/\varepsilon)^{1/p'}$ erfüllt, also ist (5) für $\mu_0 \neq 0$ und (ohne weiteres) für $\mu_0 = 0$ erfüllt, somit ein von Null verschiedenes, zu allen φ_n orthogonales $g(t) \in L^p$ vorhanden.

Das trigonometrische System ist vollständig inbezug auf L und nicht abgeschlossen inbezug auf C, denn alle seine Funktionen haben 2π als Periode und somit können die trigonometrischen Polynome keine stetige Funktion, die in 0 und 2π verschiedene Werte annimmt, gleichmäßig annähern.

Die Vermutung, jedes inbezug auf C vollständige System sei inbezug auf L abgeschlossen, wäre irrig; nach [624] genügt es nämlich ein ON-System, vollständig inbezug auf C und unvollständig inbezug auf M, als Gegenbeispiel zu nehmen; solche Systeme gibt es nach [613].

Jetzt sind wir in der Lage zu beweisen:

Zu jedem R $(= L^p,\ 1 \leqslant p < \infty)$ *gibt es ein Orthogonalsystem,* [626] *welches wohl inbezug auf* R, *doch inbezug auf kein* $Q \subset R$ *abgeschlossen ist.*

Sei nämlich ein System inbezug auf R' (den zu R konjugierten Raum) vollständig, und unvollständig inbezug auf jeden R' umfassenden Raum; solche Systeme gibt es nach [613]. Dieses System ist nach [625] abgeschlossen inbezug auf R, doch kann es nicht inbezug auf Q abgeschlossen sein, denn sonst wäre es nach [624] inbezug auf $Q' \supset R'$ vollständig.

Aus dem in diesem Abschnitt Gesagten ergibt sich folgendes Schema:

$$\mathrm{e}\,[\mathrm{A}L^p,\ \sim \mathrm{V}L^p,\ M_n] \qquad (1 \leqslant p < 2),$$

$$\mathrm{A}L^p \supset \mathrm{V}L^{p'} \supset \mathrm{V}L^p \supset \mathrm{A}L^{p'} \qquad (p > 2),$$

$$\mathrm{V}L^p \supset \mathrm{A}L^{p'} \supset \mathrm{A}L^p \qquad (1 < p \leqslant 2),$$

$$\mathrm{e}\,[\mathrm{V}L^p,\ \sim \mathrm{A}L^p]: \quad \mathrm{A}L^{p'} \sim \mathrm{A}L^p \supset \mathrm{V}L^p \qquad (p > 2),$$

(wo „e" als „es gibt", „$\supset$" als „impliziert", „$\sim$" als „nicht" zu lesen ist). So heißt z. B. die erste Zeile, daß es inbezug auf L^p abgeschlossene unvollständige Systeme gibt (die aus beschränkten Funktionen bestehen), wenn $1 \leqslant p < 2$.

Wenn man zusätzliche Annahmen über das O-System einführt, so sichert u. U. die Abgeschlossenheit inbezug auf L^p die Vollständigkeit inbezug auf denselben Raum. Es genügt z. B. anzunehmen, jede Funktion in L^p lasse sich in L^p durch die Partialsummen ihrer Entwicklung approximieren. Denn in diesem Falle gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g(t)-s_n(t)|^p\,dt = 0$$

für $g(t) \in L^p$, $s_n(t) = \int_a^b g(u) \sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\,\varphi_k(u)\,du$. Ist also $\int_a^b g(t)\,\varphi_k(t)\,dt = 0$ (k), so folgt $\int_a^b |g(t)|^p\,dt = 0$, $g(t) = 0$ f. ü. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung der in L^2 bestehenden Beziehungen angesehen werden, die dort in der Parseval'schen Formel [371] zusammengefaßt wurden.

Wir bemerken, daß die Abgeschlossenheit eines Systems mit der Approximierbarkeit aller Polynome äquivalent ist und ferner, daß

[627] $\lim\limits_{n\to\infty} c_{nk} = \int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt$ *aus* $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - w_k\|_R = 0$ *mit* $w_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{nk}\,\varphi_k(t)$ *resultiert.*

§ 3. Verallgemeinerung des Riesz-Fischer'schen Satzes.

Im § 2 haben wir gesehen ([624] [625]), daß die Äquivalenz der Abgeschlossenheit und Vollständigkeit in allgemeinen Räumen bestehen bleibt, wenn man zwei zueinander konjugierte Räume betrachtet (nur im Falle L^2 sind beide Räume identisch).

Ein anderer grundlegender Satz ist der Riesz-Fischer'sche. Ein rein äußerliches Analogon dieses Satzes, das etwa aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p$ auf die Existenz von $f(t) \in L^p$ mit $\{a_n\}$ als Koeffizienten schließen ließe, ist sofort zu widerlegen, denn für $p > 2$ wäre $f(t) \in L^p \subset L^2$, also $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty$ und dies ist keineswegs eine Konsequenz von $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty$. Es zeigt sich, daß *der Riesz-Fischer'sche Satz in zwei Teile zu trennen ist, deren jeder einen anderen Raum betrifft.* Dies haben für das trigonometrische System W. H. Young und F. Hausdorff, für Orthogonalsysteme im allgemeinen F. Riesz geleistet.

Ist $|\varphi_n(t)| \leqslant M$ *f. ü. und* M *n-frei, so gilt bei* $1/p + 1/p' = 1$: [631]

1^0 $f(t) \in L^p$ $(1 < p \leqslant 2)$ *impliziert*

$$\left(\sum_{k=1}^\infty |a_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant M^{\frac{2-p}{p}} \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

2^0 $\{a_k\} \in l^p$ $(1 < p \leqslant 2)$ *impliziert*

$$\left(\int_a^b |f(t)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant M^{\frac{2-p}{p}} \left(\sum_{k=1}^\infty |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dabei ist $\{\varphi_n\}$ das ON-System, nach welchem die Koeffizienten a_k von $f(t)$ in 1^0 berechnet werden, und $f(t)$ in 2^0 ist eine entsprechend gewählte Funktion mit $\{a_k\}$ als Koeffizienten. Der Sinn von 1^0 ist also, daß die Endlichkeit von $\|f\|_p$ bereits die Endlichkeit von $\|\{a_k\}\|_{p'}$ zur Folge hat; 2^0 bedeutet, daß die Endlichkeit von $\|\{a_k\}\|_p$ diejenige von $\|f\|_{p'}$ impliziert; es wird eben die Existenz eines $f \in L^{p'}$ mit $\{a_k\}$ als Koeffizienten behauptet; in beiden Fällen sind die im L^p bzw. in l^p geltenden Normen gemeint. Man sieht, daß der in der Prämisse auftretende Exponent p den konjugierten Exponenten p' nicht übertrifft. Beide Teile von [631] gelten in den Grenzfällen $p = 1$, d. h. $p' = \infty$, wenn $\|f\|_\infty$ als w. o. G. von $|f(t)|$ und $\|\{a_k\}\|_\infty$ als das größte $|a_k|$ gedeutet wird.

B e w e i s von 1^0: Wir betrachten zunächst ein natürliches r und alle $f(t) \in L^p$, deren Koeffizienten die Bedingung

$$\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'} = 1 \tag{6}$$

erfüllen. Wir suchen das Minimum von

$$\int_a^b |f(t)|^p\,dt \tag{7}$$

unter der Bedingung (6). Es sei λ die untere Grenze von (7) unter dieser Bedingung und

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t)|^p\,dt = \lambda, \qquad \sum_{k=1}^{r} |a_k^{(n)}|^{p'} = 1,$$

d. h. $\{f_n\}$ die minimisierende Folge, ${}_k\{a_k^{(n)}\}$ die Koeffizientenfolge von f_n. Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit $\{f_n\}$ eine in L^p schwach konvergente Teilfolge der ursprünglichen $\{f_n\}$; nach [166] ist eine solche vorhanden; es sei $\bar{f}$ die schwache Grenze von $\{f_n\}$ und $\{\bar{a}_k\}$ die Koeffizientenfolge von $\bar{f}(t)$. Wir haben dann (nach einem bereits in I, § 7, S. 33 verwendeten Schluß)

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^p\,dt \leqslant \lambda \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \int_a^b \bar{f}(t)\,\varphi_k(t)\,dt \qquad (k);$$

(die letztere Beziehung gehört zur Definition der schwachen Konvergenz für beliebige $\varphi_k(t)\in L^{p'}$; schreibt man $\operatorname{sign}\bar{f}(t)\,.\,|\bar{f}(t)|^{p-1}$ anstatt $\varphi_k(t)$, so resultiert die Ungleichung). Wir haben also $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)} = \bar{a}_k$, daher $\sum\limits_{k=1}^{r}|\bar{a}_k|^{p'} = 1$, und infolgedessen

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^p\,dt = \lambda. \tag{8}$$

Damit ist auch $\lambda > 0$ bewiesen; wir wollen aber darüber hinaus zeigen, daß $\lambda = \lambda(r)$ einem positiven Grenzwert für $r\to\infty$ zustrebt. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die Ungleichung

$$\int_a^b |f(t)|^p\,dt \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{r}|a_k|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \geqslant \int_a^b |\bar{f}(t)|^p\,dt, \tag{9}$$

die wir unter der Nebenbedingung (6) soeben bewiesen haben, auch ohne diese gültig bleibt, denn für $f(t)\in L^p$ erfüllt die Funktion $f(t)\Bigg/\left(\sum\limits_{k=1}^{r}|a_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \psi(t)$ die Nebenbedingung (6); schreibt man ψ anstatt f in (7), so wird die Ungleichung, welche die Integrale (7) und (8) verband, mit (9) gleichbedeutend. Nun sehen wir aber, daß das linksstehende Glied von (9) für $f(t) = \bar{f}(t)$ sein Minimum erreicht, denn dann gilt das Gleichheitszeichen, weil der Nenner den Wert 1 annimmt. Setzt man also

$$f(t) = \bar{f}(t) + \eta h(t) \qquad (h(t)\in L^p),$$

so ist $\eta = 0$ eine Minimumstelle, es muß also die Ableitung nach

η für $\eta = 0$ verschwinden. Sind $\{h_k\}$ die Koeffizienten von $h(t)$, so ist $a_k = \bar{a}_k + \eta h_k$ und die Ableitung beträgt für $\eta = 0$

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^{p-1}\operatorname{sign}\bar{f}(t)\,.\,h(t)\,dt - \int_a^b |\bar{f}(t)|^p\,dt\,.\sum_{k=1}^{r}|\bar{a}_k|^{p'-1}\,h_k\operatorname{sign}\bar{a}_k\,(=0).$$

Bezeichnet man $|\bar{f}(t)|^{p-1}\operatorname{sign}\bar{f}(t)$ mit $F(t)$ und setzt $h(t)$ sukzessive gleich $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$, so kommt

$$c_k = \int_a^b F(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \int_a^b |\bar{f}(t)|^p\,dt\,.\,|\bar{a}_k|^{p'-1}\operatorname{sign}\bar{a}_k \quad (k=1,2,\dots,r); \tag{10}$$

setzt man aber $\varphi_k(t)$ für $h(t)$ mit $k > r$, so wird

$$c_k = \int_a^b F(t)\,\varphi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = r+1, r+2, \dots).$$

Dies führt, wenn man für $h(t)$ alle event. zu $\{\varphi_n\}$ orthogonalen Funktionen setzt, zu

$$F(t) = \sum_{k=1}^{r} c_k\,\varphi_k(t)$$

mit den Werten (10) für $\{c_k\}$. Die Parseval'sche Beziehung gibt

$$\int_a^b F^2(t)\,dt = \int_a^b |\bar{f}(t)|^{2p-2}\,dt = \sum_{k=1}^{r} c_k^2,$$

also

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^{2p-2}\,dt = \lambda^2.\sum_{k=1}^{r}|\bar{a}_k|^{2p'-2}. \tag{11}$$

Jetzt führen wir die Exponenten $p_1 = 2/(3-p)$ und $p_1' = p_1/(p_1-1) = 2/(p-1)$ ein; es wird

$$p_1 = \tau p + (1-\tau)(2p-2) \qquad \text{für } \tau = 2(2-p)/(3-p).$$

Die Hölder'sche Ungleichung liefert

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^{p_1}\,dt = \int_a^b |\bar{f}(t)|^{\tau p}\,.\,|\bar{f}(t)|^{(1-\tau)(2p-2)}\,dt \leqslant \left(\int_a^b |\bar{f}(t)|^p\,dt\right)^{\tau}.\left(\int_a^b |\bar{f}(t)|^{2p-2}\,dt\right)^{1-\tau}$$

und, mit Rücksicht auf (8) und (11),

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^{p_1}\,dt \leqslant \lambda^{\tau}\,.\,\lambda^{2(1-\tau)}\,.\left(\sum_{k=1}^{r}|\bar{a}_k|^{2p'-2}\right)^{1-\tau},$$

also

$$\int_a^b |\bar f(t)|^{p_1}\, dt \Big/ \left(\sum_{k=1}^r |\bar a_k|^{2p'-2}\right)^{1-\tau} \leqslant \lambda^{2-\tau}.$$

Nun war aber $2p'-2=p_1'$, $\tau=2(2-p)/(3-p)$, so daß wir zu

(12) $$\int_a^b |\bar f(t)|^{p_1}\, dt \Big/ \left(\sum_{k=1}^r |\bar a_k|^{p_1'}\right)^{p_1/p_1'} \leqslant \lambda^{p_1}$$

gelangen. Bezeichnen wir allgemein mit $\Lambda(p)$ das Minimum von

$$\int_a^b |f(t)|^p\, dt \Big/ \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'}\right)^{p/p'} \qquad \text{für } f \in L^p,$$

so folgt aus (12) ohne weiteres

$$\Lambda(p_1) \leqslant [\Lambda(p)]^{p_1} \quad \text{oder} \quad [\Lambda(p_1)]^{1/p_1} \leqslant \Lambda(p).$$

Definiert man also $\{p_j\}$ durch $p_0=p$, $p_{j+1}=2/(3-p_j)$, so kommt sukzessive

$$[\Lambda(p_2)]^{1/p_2} \leqslant \Lambda(p_1), \quad [\Lambda(p_2)]^{1/p_1 p_2} \leqslant \Lambda(p), \quad \dots,$$

(13) $$\Lambda(p) \geqslant [\Lambda(p_j)]^{1/p_1 p_2 \dots p_j} \qquad (j=1,2,\dots).$$

Jetzt schätzen wir $\Lambda(p)$ ab: es war

$$\bar a_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\, dt \qquad (k),$$

also $|\bar a_k| \leqslant M\left(\int_a^b |\bar f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} . (b-a)^{1/p'} = M\Lambda(p)^{1/p}\,(b-a)^{1/p'}$, da aber $\sum_{k=1}^r |\bar a_k|^{p'}=1$, so folgt $rM^{p'}[\Lambda(p)]^{p'/p}(b-a) \geqslant 1$ und

(14) $$\Lambda(p) \geqslant \frac{1}{r^{p/p'}(b-a)^{p/p'}M^p} = \frac{1}{r^{p-1}(b-a)^{p-1}M^p}.$$

Andererseits ist aber $(2-p_j)/(2-p_{j+1}) = 1/p_{j+1}$, also $1/p_1 p_2 \dots p_j = (2-p)/(2-p_j)$ und dies mit (13) und (14) ergibt

$$\Lambda(p) \geqslant 1/r^{(2-p)(p_j-1)/(2-p_j)}\, M^{(2-p)p_j/(2-p_j)}\, (b-a)^{(2-p)(p_j-1)/(2-p_j)}.$$

Jetzt ist noch $\lim_{j\to\infty} p_j$ zu finden. Es war $p'_{j+1}=2/(p_j-1)=2(p'_j-1)$, also $p'_{j+1}=2^j(p'-1)$, also $\lim_{j\to\infty} p'_j=\infty$, $\lim_{j\to\infty} p_j=1$, so daß schließlich

$$\Lambda(p) \geqslant \frac{1}{M^{2-p}}$$

resultiert. Die letztere untere Schranke für $\Lambda(p)$ hängt von r nicht ab und infolgedessen gilt

$$\int_a^b |f(t)|^p\, dt \geqslant \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'}\right)^{p/p'} \frac{1}{M^{2-p}}$$

für alle r, womit der Beweis von 1^0 beendet ist.

Beweis von 2^0: Jetzt sei $\{a_k\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty$ gegeben. Wir betrachten

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)$$

und eine willkürliche Funktion $g(t) \in L^p$ mit $\{b_k\}$ als Koeffizienten. Es ist dann

$$\left|\int_a^b g(t) f_n(t)\, dt\right| = \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^{p'}\right)^{1/p'}$$

$$\leqslant M^{(2-p)/p}\left[\int_a^b |g(t)|^p\, dt . \sum_{k=1}^n |a_k|^p\right]^{1/p},$$

wobei 1^0 benutzt wurde. Wählen wir nun für $g(t)$ die Funktion $|f_n(t)|^{p'-1}\operatorname{sign} f_n(t)$, so erhalten wir

(15) $$\left(\int_a^b |f_n(t)|^{p'}\, dt\right)^{1-1/p} \leqslant M^{(2-p)/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$

Wir können demnach aus $\{f_n\}$ eine in $L^{p'}$ gegen eine Funktion $f(t) \in L^{p'}$ schwach konvergente Folge herausgreifen, für welche die Ungleichung

$$\left(\int_a^b |f(t)|^{p'}\, dt\right)^{1/p'} \leqslant M^{(2-p)/p} . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}$$

als Konsequenz von (15) und die Beziehungen

$$\int_a^b f(t)\varphi_k(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\varphi_k(t)\, dt = a_k \qquad (k)$$

als Eigenschaft der schwachen Konvergenz gelten.

Es ist also die Existenz der in 2^0 behaupteten Funktion $f(t) \in L^{p'}$ bewiesen; wenn das System $\{\varphi_n\}$ inbezug auf $L^{p'}$ unvollständig ist, so gibt es andere Funktionen mit $\{a_k\}$ als Koeffizienten, doch brauchen sie nicht mehr die Ungleichung 2^0 zu erfüllen.

Die Vertauschung von p und p' in 1^0 oder 2^0 würde zu falschen Aussagen führen. Auf die Frage nach entsprechenden Gegenbeispielen kommen wir in § 6 zurück. Hier gehört auch die Frage nach der Rolle der Voraussetzung $|\varphi_n(t)| \leqslant M$ in [631]. Man kann zeigen, daß es beim Hausdorff-Riesz'schen Satze nicht genügt, die Funktionen $\varphi_n(t)$ einzeln als beschränkt vorauszusetzen. Das Haar'sche System [226] ist hier ein Gegenbeispiel. Betrachten wir nämlich die Gruppe $\{\chi_n^{(l)}\}$ $(l = 1, 2, \ldots, 2^n)$, die aus 2^n Funktionen besteht, und setzen $a_k = (1/2^n)^{1/2 - 1/p'}$ für $k = 2^{n+1} - 1$, sonst $a_k = 0$. Dann ist für $p < 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-p/2} < \infty.$$

Andererseits sei $s_m(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(t)$, $\varphi_k = \chi_n^{(l)}$ für $k = 2^n + l$; es ist

$$\int_0^1 |s_m(t)|^{p'} dt = \sum_1^N \int_{J_n} \left| \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/2 - 1/p'} \cdot 2^{n/2} \right|^{p'} dt,$$

wenn N die Anzahl der Funktionen derjenigen Gruppe bezeichnet, zu welcher $\varphi_m(t)$ gehört und J_n das vorletzte Teilintervall von der Länge $1/2^n$. Die Summe beträgt $\sum_1^N \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = N$ und daher ist

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \int_0^1 |s_m(t)|^{p'} dt = \infty.$$

Unsere Reihe ist demnach keine Entwicklung einer Funktion aus $L^{p'}$, wie wir dem später zu beweisenden Satz [641] entnehmen. Somit ist 2^0 (mit einem endlichen M) nicht erfüllt. Wenn wir aber den Beweis von 2^0 prüfen, so sehen wir, daß er bloß die Eigenschaft 1^0 und $\varphi_n \in L^{p'}$ (n) benutzt. In unserem Beispiel ist also auch 1^0 hinfällig.

Es ist auch leicht festzustellen, daß 2^0 für vollständige Systeme mit $\overline{\lim_{n \to \infty}}$ w. o. G. $|\varphi_n(t)| = \infty$ mit keinem endlichen M für alle p $(1 < p \leqslant 2)$ gültig sein kann. Setzt man nämlich $a_k = 0$ für $k \neq n_0$, $a_{n_0} = 1$, so ist $\varphi_{n_0}(t)$ das einzige $f(t) \in L^p$ mit $\{a_k\}$ als Koeffizientenfolge. Nun ist $\lim_{n \to \infty} p' = +\infty$ für $\lim_{n \to \infty} p = 1$, also der Grenzwert von $\left(\int_a^b |f(t)|^{p'} dt\right)^{1/p'}$ gleich w. o. G. $|\varphi_{n_0}(t)|$. Rechts steht aber in 2^0 $M^{(2-p)/p}$ mit M als Grenzwert. Schreibt man n anstatt n_0 und läßt es wachsen $(n = 1, 2, \ldots)$, so ergibt die eben bewiesene Ungleichung w. o. G. $|\varphi_n(t)| \leqslant M$ (n) einen Widerspruch mit der anfänglichen Annahme.

D e r S a t z v o n P a l e y. Wir haben bereits erwähnt, daß ein zu [631] analoger Schluß „vom großen Exponenten $(q > 2)$ auf den kleinen Exponenten $(q';\ 1/q' + 1/q = 1)$" versagt. M. a. W. leistet $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < \infty$ noch keine Gewähr für die Existenz eines $f(t) \in L^{q'}$ mit $\{a_n\}$ als Koeffizientenfolge. Es bietet sich die Frage nach stärkeren Bedingungen, etwa von der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q n^\alpha < \infty \qquad (\alpha > 0). \tag{16}$$

Ist $q > 2$ und $\alpha > q - 2$, so impliziert (16) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{q'}$ also, nach [631], die Existenz eines $f(t) \in L^q \subset L^{q'}$ mit $\{a_n\}$ als Koeffizientenfolge. (Für gewisse $\alpha < q - 2$ könnte (16) mit $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$, $f(t) \ni L^{q'}$ erfüllt sein). Jetzt untersuchen wir $\alpha = q - 2$. Es zeigt sich, daß dann $f(t)$ sogar zu L^q gehört. Hier ist aber die Bemerkung einzuschalten, daß eine Umordnung des Orthogonalsystems $\{\varphi_n\}$ mit einer entsprechenden Umordnung von $\{a_n\}$ die Existenz von $f(t)$ nicht beeinträchtigen kann, wohl aber die Konvergenz von (16). Es ist nun leicht zu sehen, daß eine Summe $\sum_{n=1} \alpha_n \beta_n$ mit $\alpha_n \geqslant 0$, $\beta_n \geqslant 0$ am größten wird, wenn beide Folgen $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ nichtfallend oder beide nichtwachsend angeordnet werden; sie wird am kleinsten, wenn eine Folge nichtwachsend, die andere nichtfallend angeordnet wird. Ist nun $\lim |a_n| = 0$, so läßt sich $\{|a_n|\}$ nichtwachsend anordnen; die Folge $\{n^\alpha\}$ ist stets monoton. Dies erleichtert das Verständnis des S a t z e s:

[632] *Es sei* $\{\varphi_n\}$ *ein ON mit* $|\varphi_n| \leqslant M$ *f. ü.*

1^0 $f(t) \in L^p$ $(1 < p \leqslant 2)$ *impliziert* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p k^{p-2} \leqslant A_p \int_a^b |f(t)|^p dt$ *mit f-freiem* A_p, *wo* $\{|a_k|\}$ *die Folge der nichtwachsend geordneten Beträge der Koeffizienten von f bezeichnet;*

2^0 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q k^{q-2} < \infty$ $(q \geqslant 2)$ *impliziert die Existenz von* $f(t) \in L^q$ *mit* a_k *als Koeffizienten und mit* $\int_a^b |f(t)|^q dt \leqslant A_q \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q k^{q-2}$, *wo* A_q *von* $\{a_k\}$ *nicht abhängt und letztere Folge in der Voraussetzung und Behauptung den Beträgen nach nichtwachsend angeordnet wurde.*

Es ist die Ungleichung 1^0 a fortiori erfüllt, wenn die $|a_k|$ ihre ursprüngliche Reihenfolge behalten, und man darf auch in 2^0 in der Voraussetzung und Behauptung den Vorbehalt der Monotonie fallen lassen, wie aus den dem Satze [632] vorgeschickten Bemerkungen folgt.

Beweis: Wir beginnen mit 2^0 für $q=4, 5, 6, \ldots$ Es ist für $q>2$

$$\sum_i^j a_k^2 \leqslant \left(\sum_i^j |a_k|^q k^{q-2}\right)^{2/q} \left(\sum_i^j \frac{1}{k^2}\right)^{1-2/q}, \tag{17}$$

also $\sum_1^{\infty} a_k^2 < \infty$, was die Existenz von $f \in L^2$ mit

$$a_k = \int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt \qquad (k)$$

impliziert. Um $f \in L^q$ zu zeigen, genügt es nach [125], wenn man z. B. für $m_\nu = 2^\nu - 1$

$$\int_a^b |s_{m_\nu}(t)|^q dt \leqslant A_q \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q k^{q-2}$$

beweist. Zu diesem Zwecke werde

$$\Phi_\nu(t) = \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} a_k \varphi_k(t), \qquad C_\nu = \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} |a_k|^q k^{q-2}$$

gesetzt; dann ist

$$J_n = \int_a^b |s_{m_n}(t)|^q dt = \int_a^b \left|\sum_{\nu=1}^n \Phi_\nu(t)\right|^q dt$$

$$\leqslant \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \ldots \sum_{\nu_q=1}^n \int_a^b |\Phi_{\nu_1}(t)\,\Phi_{\nu_2}(t) \ldots \Phi_{\nu_q}(t)|\,dt.$$

Jetzt brauchen wir die Ungleichung

$$\int_a^b |\Phi_\mu(t)\,\Phi_\nu(t)|^{q/2} dt \leqslant M^{q-2} C_\mu^{1/2} C_\nu^{1/2}\, 2^{-1/2|\nu-\mu|} \tag{18}$$

für $q \geqslant 4$. Links steht hier höchstens

$$\max |\Phi_\mu(t)|^{q/2} . |\Phi_\nu(t)|^{q/2-2} . \int_a^b \Phi_\nu^2(t)\,dt$$

$$\leqslant M^{q-2} \left(\sum_{2^{\mu-1}}^{2^\mu - 1} |a_k|\right)^{q/2} \left(\sum_{2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} |a_k|\right)^{q/2-2} \sum_{2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} a_k^2;$$

aus (17) folgt

$$\sum_{2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} a_k^2 \leqslant C_\nu^{2/q} \frac{1}{(2^{\nu-1})^{1-2/q}},$$

und die Hölder'sche Ungleichung [114] liefert

$$\sum |a_k| \leqslant \left(\sum |a_k|^q k^{q-2}\right)^{1/q} \left(\sum \frac{1}{k^{\frac{q-2}{q-1}}}\right)^{1-1/q};$$

da aber

$$\sum_{2^{\lambda-1}}^{2^\lambda - 1} 1/k^{\frac{q-2}{q-1}} \leqslant 2^{\lambda-1}/2^{\frac{q-2}{q-1}(\lambda-1)} = 2^{\frac{\lambda-1}{q-1}} \qquad (\lambda > 0 \text{ ganzzahlig}),$$

so übertrifft die linke Seite in (18) nicht

$$M^{q-2} . C_\mu^{1/2} C_\nu^{1/2-2/q} . 2^{(\mu-1)/2} . 2^{(\nu-1)(1/2-2/q)} . C_\nu^{2/q} . 2^{-(\nu-1)(1-2/q)},$$

was für $\nu \geqslant \mu$ der rechten Seite gleichkommt. (Die Ungleichung (18) bleibt für $2 < q < 4$ richtig, wenn man $1/2|\nu-\mu|$ im Exponenten durch $1/2|\nu-\mu| . |q/2 - 1|$ ersetzt; wir brauchen diese Erweiterung nicht). Wir wollen (18) auf J_n anwenden; es kommt dann

$$|\Phi_{\nu_1} . \Phi_{\nu_2} . \ldots . \Phi_{\nu_q}| = |(\Phi_{\nu_1}\Phi_{\nu_2})(\Phi_{\nu_1}\Phi_{\nu_3}) \ldots (\Phi_{\nu_{q-1}}\Phi_{\nu_q})|^{1/(q-1)}, \tag{19}$$

wo rechts $Q = \frac{1}{2} q(q-1)$ Produkte $\Phi_\alpha \Phi_\beta$ auftreten. Die Hölder-sche Ungleichung erlaubt nun die Verallgemeinerung

$$\int_a^b |f_1(t) f_2(t) \ldots f_r(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |f_1(t)|^{\lambda_1} dt\right)^{1/\lambda_1} \ldots \left(\int_a^b |f_r(t)|^{\lambda_r} dt\right)^{1/\lambda_r}$$

mit $1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \ldots + 1/\lambda_r = 1$, was mit (19) und $\lambda_i = 1/Q$ (i) zu

$$\int_a^b |\Phi_{\nu_1}(t) \ldots \Phi_{\nu_q}(t)|\, dt \leqslant \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{q} \left\{\int_a^b |\Phi_{\nu_i}(t)\, \Phi_{\nu_j}(t)|^{q/2}\, dt\right\}^{1/Q}$$

und — wegen (18) — zu

$$\int_a^b |\Phi_{\nu_1}(t) \ldots \Phi_{\nu_q}(t)|\, dt \leqslant M^{q-2} \prod_{i,j=1}^{q} C_{\nu_i}^{1/2Q}\, C_{\nu_j}^{1/2Q}\, 2^{-|\nu_i-\nu_j|/2Q}$$

$$= M^{q-2} \prod_{i=1}^{q} C_{\nu_i}^{1/q} \left\{\prod_{j=1}^{q} 2^{-|\nu_i-\nu_j|/4Q}\right\}$$

führt. Wenn wir dies in der Ungleichung für J_n substituieren und eine Verallgemeinerung der Hölder'schen Ungleichung für Summen mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_q = q$ anwenden, so kommt

$$J_n \leqslant M^{q-2} \prod_{i=1}^{q} \left\{\sum_{\nu_1=1}^{n} \sum_{\nu_2=1}^{n} \ldots \sum_{\nu_q=1}^{n} C_{\nu_i} \prod_{j=1}^{q} 2^{-|\nu_i-\nu_j|/(2q-2)}\right\}^{1/q}.$$

Die q-fache Summe überschreitet nicht

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} 2^{-|\nu|/(2q-2)}\right)^{q-1} = B \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu,$$

also

$$J_n \leqslant B M^{q-2} \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu = A_q \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu.$$

Wir haben also den Satz für $q = 4, 5, \ldots$ bewiesen und für $q = 2$ ist er evident. Es sei jetzt $q > 2$, sonst beliebig. Ist

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i, \qquad f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t),$$

$$S_r(f_n) = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^r k^{r-2}, \qquad J_r(f_n) = \int_a^b |f_n(t)|^r\, dt,$$

$$\lambda_p^p(n) = \text{o. G.}\ \frac{S_p(f_n)}{J_p(f)}, \qquad \mu_q^q(n) = \text{o. G.}\ \frac{J_q(f_n)}{S_q(f_n)} \quad (p \leqslant 2 \leqslant q),$$

so gibt dieselbe Überlegung, welche in [631] beim Beweise von (10) benutzt wurde, folgendes: ist f_n diejenige Funktion, welche $\mu_q^q(n)$ liefert, so ist

$$\int_a^b |f_n(t)|^{q-1} \operatorname{sign} f_n(t) . \varphi_k(t)\, dt = \mu_q^q(n) . |a_k|^{q-1} . \operatorname{sign} a_k . k^{q-2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Es sei

$$g(t) = |f_n(t)|^{q-1} \operatorname{sign} f_n(t), \qquad b_k = \mu_q^q(n) . |a_k|^{q-1} \operatorname{sign} a_k . k^{q-2};$$

nach der Definition von $\lambda_p(n)$ haben wir

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p k^{p-2} \leqslant \lambda_p^p(n) \int_a^b |g(t)|^p\, dt,$$

oder

$$\mu_q^{pq}(n) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{(q-1)p} k^{(q-1)p-2} \leqslant \lambda_p^p(n) \int_a^b |f_n(t)|^{p(q-1)}\, dt.$$

Ist nun $p(q-1) \geqslant 2$, so erhalten wir

$$\mu_q^{pq}(n) \leqslant \lambda_p^p(n)\, \mu_{p(q-1)}^{p(q-1)}(n).$$

Es ist aber leicht $\lambda_p(n) \leqslant \mu_{p'}(n)$ festzustellen, denn für $f \in L^p$,

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t), \qquad h_n(t) = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p-1} k^{p-2} \operatorname{sign} a_k . \varphi_k(t)$$

gilt

$$\int_a^b f(t)\, h_n(t)\, dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |h_n(t)|^{p'}\, dt\right)^{1/p'} \leqslant \mu_{p'}(n) . S_{p'}^{1/p'}(h_n) . J_p^{1/p}(f),$$

$$\int_a^b f(t)\, h_n(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p k^{p-2} = S_p(f_n) = S_{p'}(h_n),$$

also

$$S_p(f_n) \leqslant \mu_{p'}(n) . S_p^{1/p'}(f_n) . J_p^{1/p}(f),$$

was die fragliche Ungleichung impliziert. Wir dürfen demnach schreiben:

$$\mu_q(n) \leqslant \mu_{p'}^{1/q}(n) . \mu_{p(q-1)}^{1/q'}(n).$$

Es sei nun $\alpha > \beta \geqslant 2$. Setzen wir $p' = \alpha$, $p(q-1) = \beta$, so ist $q = 1 + \beta(\alpha-1)/\alpha$, also $\beta < q < \alpha$. Ist $\mu_\alpha(n) < K$, $\mu_\beta(n) < K$, so gibt es ein q mit $\mu_q(n) < K$. Andererseits ist für $q_i \geqslant 2$, $q_i \to q$ $\mu_q(n) \leqslant \underline{\lim}\, \mu_{q_i}(n)$, denn

$$\frac{J_q(f_n)}{S_q(f_n)} = \lim_{i\to\infty} \frac{J_{q_i}(f_n)}{S_{q_i}(f_n)} \leqslant \underline{\lim}_{i\to\infty}\, \mu_{q_i}^{q_i}(n).$$

Es folgt, daß die Gesamtheit der q zwischen c und $c+2$, für welche $\mu_q^q(n) \leqslant \max(A_c, A_{c+2})$ gilt, überalldicht und abgeschlossen ist, also alle q umfaßt. Damit ist 2° bewiesen. Die Ungleichung $\lambda_p(n) \leqslant \mu_{p'}(n)$ ist aber gleichbedeutend mit 1°, so daß [632] vollständig begründet wurde.

Bemerkungen. 1° Wenn $\{a_n\}$ beide Bedingungen $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{p'}<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p n^{p-2}<\infty$ erfüllt ($p<2$), so braucht es noch nicht die Koeffizientenfolge einer Funktion aus L^p zu sein. So ist z. B. die lakunäre trigonometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^n t}{\sqrt{n}}$ keine Entwicklung, nicht einmal die Entwicklung einer Funktion aus L (vgl. VII, § 4).

2° Das Beispiel, welches die Behauptungen [631] für das Haar'sche System als ungültig erkennen ließ, ist zugleich ein Gegenbeispiel für die Behauptungen [632] für jenes System. Es folgt nämlich eine schwächere Abart von [631] aus [632] (vgl. das Zygmund'sche Buch).

3° In [632] ist $p-2$ durch keinen absolut kleineren Exponenten ersetzbar. Es habe nämlich $f(t)$ $a_k=k^{-1/p'-\alpha}$ zu Koeffizienten, $2\alpha>1-2/p'$. Es gehört nämlich $f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta}\cos nt$ zu L^p für alle $1/p'<\beta<1/2$, es gilt jedoch hier $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p k^{p-2+\varepsilon}=\infty$ für $\varepsilon=1-p(1-\beta)$. Ebensowenig kann $a_k=1/\sqrt{k}$ die Koeffizientenfolge eines $f\in L^q$ mit $q\geqslant 2$ vorstellen, obwohl $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^q k^{q-2-\varepsilon}<\infty$ für $\varepsilon>q/2-1$ erfüllt ist. Nichtdestoweniger ist nach [114] und [631] die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(t)$ die Entwicklung einer zu allen L^p mit $1\leqslant p<\infty$ gehörenden Funktion, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^\alpha k^{\alpha-1}$ für ein $\alpha\geqslant 1$ konvergiert.

§ 4. Bedingungen dafür, daß eine Reihe eine Entwicklung sei.

Wir gehen jetzt dazu über, notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, damit eine Orthogonalreihe eine Orthogonalentwicklung sei. Die bis jetzt angegebenen Bedingungen waren für L^p-Räume ($p<2$) notwendig, für L^q-Räume, $q>2$, hinreichend. Jetzt wollen wir die Reihen selbst, nicht bloß ihre Koeffizienten, betrachten und zwar unter gewissen zusätzlichen Annahmen. Es bezeichne T eine Summationsmethode mit der zeilenfiniten Matrix

$$\begin{array}{l}
b_{11}\ b_{12}\ \ldots\ b_{1n_1}\\
b_{21}\ b_{22}\ \ldots\ldots\ b_{2n_2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_{k1}\ b_{k2}\ \ldots\ldots\ldots\ b_{kn_k}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Wir betrachten die T-Transformierten der Kerne des Systems,

$$K_i(s,t)=\sum_{k=1}^{n_i}b_{ik}\left(\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(s)\,\varphi_j(t)\right).$$

Die T-Transformierten der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(t)$ sind

$$\sigma_i(t)=\sum_{k=1}^{n_i}b_{ik}\,s_k(t).$$

Die *zusätzlichen Annahmen* seien:

$$1^0\quad |\varphi_n(t)|<M_n\quad f.\,ü.,\qquad\qquad 2^0\quad \int_a^b|K_i(s,t)|\,ds<A\quad f.\,ü.$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t)$ *die Entwicklung eines* $f\in L^p$ $(1<p<\infty)$ *sei, ist — unter obigen Annahmen — die Existenz einer Konstanten* $\varkappa$ *mit* [641]

$$\|\sigma_n(t)\|_p<\varkappa. \tag{20}$$

Hinlänglichkeit: Nach [165] existiert wegen (20) eine gegen ein $f(t)\in L^p$ schwach konvergente Teilfolge $\{\sigma_{n_\nu}(t)\}$, d. h. es ist

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b\sigma_{n_\nu}(t)\,\varphi_k(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt\qquad (k=1,2,\ldots);$$

berücksichtigt man die Toeplitz'schen Beziehungen

$$\lim_{k\to\infty}(b_{k1}+b_{k2}+\ldots+b_{kn_k})=1,\qquad \lim_{i\to\infty}b_{ik}=0,$$

so folgt $a_k=\int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt$, w. z. b. w.

Notwendigkeit: Es sei $f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t)$, $f(t)\in L^p$. Dann ist $\sigma_n(t)=\int_a^b f(s)\,K_n(s,t)\,ds$. Die Hölder'sche Ungleichung liefert

$$|\sigma_n(t)| \leqslant \left[\int_a^b |K_n(s,t)|\,|f(s)|^p\,ds\right]^{1/p} \cdot \left[\int_a^b |K_n(s,t)|\,ds\right]^{1/p'},$$

$$\int_a^b |\sigma_n(t)|^p\,dt \leqslant \int_a^b dt \left[\int_a^b |K_n(s,t)|\,|f(s)|^p\,ds\right] . A^{p/p'}$$

und die Vertauschung der Integrationsfolge gibt

$$\int_a^b |\sigma_n(t)|^p\,dt \leqslant A^{1+p/p'} \int_a^b |f(t)|^p\,dt, \quad \text{d. h.} \quad \|\sigma_n(t)\| \leqslant \varkappa.$$

Ein analoger Satz gilt in Raume M:

[642] *Bei denselben Annahmen ist die Bedingung* w. o. G. $|\sigma_n(t)| < \varkappa$ (d. h. $\|\sigma_n(t)\|_M < \varkappa$) *notwendig und hinreichend dafür, daß* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *die Entwicklung einer beschränkten Funktion sei.*

Die Hinlänglichkeit läßt sich wie beim letzten Satz beweisen; der Notwendigkeitsbeweis verläuft, wie folgt: es sei $|f(t)| < \beta$; dann ist

$$|\sigma_n(t)| = \left|\int_a^b f(u)\,K_n(t,u)\,du\right| \leqslant A\,.\,\beta,$$

w. z. b. w.

Hier werde bemerkt, daß die Annahme 2^0 notwendig ist, wenn die Ungleichung $\|\sigma_n\|_M < \varkappa$ für alle beschränkten Funktionen erfüllt sein soll. Denn die Verneinung von 2^0 führt nach [155] zu einer stetigen Funktion $g(t)$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} \text{ w. o. G.} \int_a^b K_n(t,u)\,g(u)\,du = +\infty,$$

was mit $\|\sigma_n\|_M < \varkappa$ $(f \in M)$ unvereinbar ist.

Es bleiben noch die Räume der stetigen Funktionen und der integrierbaren Funktionen (C und L) zu besprechen. In keinem von beiden sind die Bedingungen $\|\sigma_n(t)\| < \varkappa$ hinreichend; dies ist leicht an dem trigonometrischen System zu sehen, wo die ersten arithmetischen Mittel eine T-Methode mit 2^0 liefern und wo z. B. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt$ die Bedingung $\|\sigma_n(t)\|_L < \varkappa$ erfüllt, ohne eine Entwicklung zu sein (S. 57). Für C ist die Begründung noch einfacher, denn die Bedingung $\|\sigma_n\| < \varkappa$ ist hier für M und C die gleiche;

da sie für M notwendig ist, kann sie nicht für die engere Klasse C hinreichend sein.

Bemerkungen. Für das Haar'sche und das Franklin'sche System ([226] und [443]) sind die Annahmen 1^0 und 2^0, die dem Satz [641] vorangehen, mit der Matrix der identischen Substitution als T erfüllt; es ist $\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s)\,\varphi_k(t)\right| dt < \varkappa$, wie wir aus [526] erkennen. Für das trigonometrische System ist $\sigma_n(t) = 1/n\,(s_1(t) + \ldots + s_n(t))$, wie bereits erwähnt. Begnügt man sich mit einem Raume L^p, so kann die Annahme 1^0 durch $\varphi_n \in L^{p'}$ ersetzt werden und die Annahme, daß T zeilenfinit ist, dadurch, daß $K_n(s,t)$ als Funktion von t zu $L^{p'}$ gehört.

Jetzt geben wir eine Bedingung an, die für alle L^p (einschließlich $p=1$) gilt, aber in M versagt, weil es in diesem Raume keine abgeschlossenen Systeme gibt:

Unter den Annahmen 1^0 *und* 2^0 *ist* [643]

$$\lim_{m \geqslant n \to \infty} \|\sigma_m(t) - \sigma_n(t)\|_p = 0 \tag{21}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß eine Orthogonalreihe die Entwicklung einer Funktion aus L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ *sei.*

Die Hinlänglichkeit resultiert aus der Existenz einer starken Grenze f, d. h. einer Funktion in L^p mit $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(t) - f(t)\|_p = 0$, woraus unmittelbar $a_k = \int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt$ folgt.

Um die Notwendigkeit darzutun, bemerken wir zunächst, daß der Beweis von [641] die Ungleichung $\|\sigma_n[f]\| \leqslant \gamma \|f\|$ (auch für $p=1$) impliziert, also auch

$$\|\sigma_n[f] - \sigma_n[g]\| \leqslant \gamma \|f - g\|. \tag{22}$$

Es sei jetzt $\{g_k(t)\}$ eine gegen $f(t)$ stark konvergente Folge von beschränkten Funktionen, wie z. B. die in [129] konstruierten. Gelingt es $\lim_{m \geqslant n \to \infty} \|\sigma_m[g] - \sigma_n[g]\| = 0$ für diese g_k zu zeigen, so folgt (21) für $f(t)$, denn es ist $\|\sigma_m[f] - \sigma_n[f]\| \leqslant \|\sigma_m[f] - \sigma_m[g_k]\| + \|\sigma_m[g_k] - \sigma_n[g_k]\| + \|\sigma_n[g_k] - \sigma_n[f]\|$ und (22) erlaubt das erste und dritte Glied rechts abzuschätzen. Es sei $g_k(t) = h(t)$; $h(t)$ ist beschränkt, also $h \in L^2$ und

$$\lim_{m \geqslant n \to \infty} \int_a^b |\sigma_m[h] - \sigma_n[h]|^2 \, dt = 0,$$

was aus der Bessel'schen Ungleichung und den charakteristischen Eigenschaften der T-Methoden sofort folgt. Es kommt ($\delta > 0$)

$$\int_a^b (\sigma_m - \sigma_n)^2 \, dt < \delta^{2+p}$$

für genügend große m und n, es ist also $|\sigma_m(t) - \sigma_n(t)| > \delta$ bloß auf einer t-Menge E vom Maße $\leqslant \delta^p$. Daraus folgt

$$\|\sigma_m - \sigma_n\|_p = \left(\int_a^b |\sigma_m - \sigma_n|^p \, dt\right)^{1/p} = \left(\int_E + \int_{CE}\right) \leqslant (2^p \beta^p A^p |E| + \delta^p (b-a))^{1/p},$$

wenn $|h(t)| \leqslant \beta$. Es ergibt sich schließlich

$$\|\sigma_m - \sigma_n\|_p \leqslant ((2\beta A \delta)^p + (b-a)\delta^p)^{1/p} = \delta((2\beta A)^p + (b-a))^{1/p}.$$

Ebenso wie früher für M, können wir zeigen, daß die Annahme 2^0 für L wesentlich ist. Wäre sie nämlich nicht erfüllt, so wäre ([155]) eine beschränkte Funktion $h(t)$ vorhanden mit $\limsup_{n \to \infty} |\sigma_n(t)| = \infty$ in einer positiven Menge; dann wäre aber ([153]) $\limsup_{n \to \infty} \int_a^b \sigma_n[h] f(t) \, dt = +\infty$ für ein geeignetes $f \in L$ und, wegen

$$\text{(23)} \qquad \int_a^b \sigma_n[h] f(t) \, dt = \int_a^b \sigma_n[f] h(t) \, dt,$$

$\limsup_{n \to \infty} \int_a^b \sigma_n[f] h(t) \, dt = +\infty$, was ([127]) $\limsup_{n \to \infty} \int_a^b |\sigma_n[f]| \, dt = \infty$ ergibt und $\lim_{m \geqslant n \to \infty} \|\sigma_m[f] - \sigma_n[f]\|_L = 0$ ausschließt. Dagegen ist 2^0 für L^p-Räume mit $p > 1$ nicht mehr notwendig, denn es hat z. B. das trigonometrische System die Eigenschaft

$$\lim_{m \geqslant n \to \infty} \int_0^{2\pi} |s_m(t) - s_n(t)|^p \, dt = 0,$$

obwohl

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u) \right| du > \lambda \log n$$

mit t- und n-freiem, positivem λ gilt.

Ohne 2^0, aber mit 1^0, können wir zeigen:

Die Eigenschaften [644]

$$\text{(24)} \qquad \lim_{m \geqslant n \to \infty} \|\sigma_m[f] - \sigma_n[f]\|_p = 0 \qquad \textit{für alle } f \in L^p$$

$$\text{(25)} \qquad \lim_{m \geqslant n \to \infty} \|\sigma_m[f] - \sigma_n[f]\|_{p'} = 0 \qquad \textit{für alle } f \in L^{p'}$$

sind äquivalent ($1 < p < \infty$).

Beweis: (24) hat die Konvergenz von $\left\{\int_a^b \sigma_n[f] g(t) \, dt\right\}$ für $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ zur Folge, also — wegen (23) — die Konvergenz von $\left\{\int_a^b \sigma_n[g] f(t) \, dt\right\}$. Es ist demnach die Folge $\{\sigma_n[g]\}$ im Raume $L^{p'}$ schwach konvergent, also ist nach [152] $\|\sigma_n[g]\|_{p'} < \varkappa'$ (mit n-freiem $\varkappa'$) und (nach [151]) $\|\sigma_n[g]\|_{p'} \leqslant \varkappa \|g\|_{p'}$; die letzte Ungleichung setzt uns in die Lage weiter wie beim Beweise von [643] zu verfahren, um (25) zu erhalten. Ebenso folgt (24) aus (25).

Im Falle des Raumes C ist die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz von $\{(\sigma_n t)\}$ wie leicht ersichtlich, hinreichend, jedoch nicht notwendig. So ist z. B. $\{\sigma_n(t)\}$ für das trigonometrische System [223] nicht gleichmäßig konvergent, wenn die stetige Funktion, die man entwickelt, an den Stellen 0 und 2π verschiedene Werte annimmt.

Das allgemeine Riesz-Fischer'sche Problem. Die Bedingungen dafür, daß eine Folge $\{a_n\}$ im Falle eines allgemeinen Orthogonalsystems eine Koeffizientenfolge sei, sehen ganz anders aus. Diese Frage wollen wir gleich allgemeiner fassen: Eine Funktionenfolge $\{f_n\}$ und eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ sind gegeben; welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung $f(t)$ des unendlichen Gleichungssystems

$$\int_a^b f(t) f_i(t) \, dt = a_i \qquad (i)?$$

In dieser Form haben wir das Momentenproblem des I-ten Kapitels (§ 7) wieder vor uns. Der dort bewiesene Satz [171] liefert, als *notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $\{a_n\}$ [645] *die Koeffizientenfolge einer Funktion* $f(t) \in L^p$ ($p > 1$) *oder* $f(t) \in M$ *sei,*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k\right| \leqslant \gamma \left(\int_a^b \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'},$$

bzw.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k\right| \leqslant \gamma \int_a^b \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t)\right| dt$$

für alle endlichen Zahlensysteme $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Hier wird $\varphi_k(t) \in L^{p'}$ bzw. $\varphi_k(t) \in M$ vorausgesetzt, eine Annahme, welche die Existenz von $\int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt$ (k) sichert.

Polare Bedingungen. Kehren wir jetzt zu den Annahmen zurück, die wir am Anfang dieses § gemacht haben, d. h. zu den Ungleichungen 1⁰, 2⁰, die dem Satz [641] vorangehen. Wir können dann, wie wir gesehen haben, notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, damit eine Orthogonalreihe eine Entwicklung inbezug auf einen Raum sei. Diese Bedingungen betreffen die $\sigma_n(t)$, d. h. die T-Transformierten der Partialsummen. [645] zeigt einen anderen Typus von Bedingungen. Einen dritten Typus stellt folgender Satz vor:

[646] *Unter den Annahmen* 1^0 *und* 2^0 *besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *die Entwicklung einer Funktion aus* L^p $(p>1)$, L, *bzw.* M *sei, in der* T*-Summierbarkeit der Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \tag{26}$$

für alle Koeffizientenfolgen $\{g_n\}$ *von Funktionen* $g(t)$ *aus dem konjugierten Raum* $L^{p'}$, *bzw.* M, *bzw.* L.

Notwendigkeit: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ sei die Entwicklung von $f(t) \in L^p$ $(p \geqslant 1)$; es folgt für $g(t) \in L^{p'}$ (bzw. für $g(t) \in M$)

$$T_i = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} \sum_{j=1}^{k} a_j g_j = \int_a^b \sigma_i[f;t]\, g(t)\, dt$$

und

$$T_i - T_j = \int_a^b (\sigma_i[f;t] - \sigma_j[f;t])\, g(t)\, dt;$$

[127] gibt für $p > 1$

$$|T_i - T_j| \leqslant \left(\int_a^b |\sigma_i - \sigma_j|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^{p'} dt\right)^{1/p'}, \tag{27}$$

und die starke Konvergenz von $\{\sigma_n[f;t]\}$ bewirkt die Konvergenz der rechten Seite gegen Null. Es ist demnach $\{T_i\}$ konvergent, d. h. (26) T-summierbar. Für $p=1$ tritt an Stelle von (27) die Ungleichung

$$|T_i - T_j| \leqslant \text{w. o. G.}\, |g(t)| \,.\int_a^b |\sigma_i - \sigma_j|\, dt$$

und es wird dann ganz analog weiter geschlossen.

Im Falle $f(t) \in M$ benutzt man die Identität

$$T_i = \int_a^b \sigma_i[f;t]\, g(t)\, dt = \int_a^b \sigma_i[g;t]\, f(t)\, dt$$

und wiederholt obige Schlüsse, indem man $g(t) \in L$ beachtet.

Hinlänglichkeit: Die T-Summierbarkeit von (26), d. h. die Konvergenz von $\{T_i\}$, wo

$$T_i = \int_a^b \sigma_i(t)\, g(t)\, dt, \qquad \sigma_i(t) = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} \sum_{j=1}^{k} a_j \varphi_j(t), \tag{28}$$

impliziert die schwache Konvergenz von $\{\sigma_i(t)\}$ in L^p $(p \geqslant 1)$. Die schwache Grenze $f(t) \in L^p$ dieser Folge hat die Eigenschaft

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^b \sigma_i(t)\, g(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

für alle $g \in L^{p'}$ (bzw. $g \in M$); für $g(t) = \varphi_j(t)$ folgt daraus

$$\int_a^b f(t)\, \varphi_j(t)\, dt = \lim_{i\to\infty} \int_a^b \sigma_i(t)\, \varphi_j(t)\, dt = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=j}^{n_i} b_{ik}\, a_j = a_j.$$

Es bleibt noch der Fall $p = \infty$, d. h. $L^p = M$. Dann ist $\{T_i\}$ in (28) für alle $g \in L$ konvergent, also ist nach [153] $|\sigma_i(t)| \leqslant \gamma$, was bereits die Existenz einer beschränkten Funktion mit der Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ verbürgt.

Der Beweis der Hinlänglichkeit geht also ohne die Annahmen 1⁰ und 2⁰. Aus diesem Beweise ersehen wir die Beziehung

$$\lim_{i\to\infty} T_i = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt;$$

es ist aber nicht gesagt, daß $f(t)$ in dieser Formel diejenige Funktion $\bar{f}(t)$ ist, die uns die Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ gegeben hat. Es kann sehr wohl $\bar{f}(t) \neq f(t)$ sein, wenn $\{\varphi_n\}$ inbezug auf den f-Raum nicht abgeschlossen ist.

§ 5. **Multiplikatoren.**

A und B seien zwei Funktionenräume, $\{\varphi_n\}$ ein ON-System.
[651] Wenn die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft hat, jede Koeffizientenfolge $\{\alpha_n\}$, die einer Funktion $f(t) \in A$ nach $\{\varphi_n\}$ zukommt, in eine Koeffizientenfolge $\{\beta_n = \lambda_n \alpha_n\}$ einer Funktion $g(t) \in B$ zu verwandeln, so heißt $\{\lambda_n\}$ ein *Multiplikator* der Klasse (A, B), in Zeichen:

$$\{\lambda_n\} \in (A, B).$$

Dieser Begriff trat zuerst beim trigonometrischen System auf; bei beliebigen $\{\varphi_n\}$ hat als erster M. Riesz die Frage nach den Multiplikatoren angegriffen. Es sind hier zwei Fragenkomplexe zu unterscheiden. Der erste besteht in den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine Folge $\{\lambda_n\}$ zu (A, B) gehöre; diese Probleme werden wesentlich erleichtert, wenn man ein spezielles $\{\varphi_n\}$ untersucht; der zweite betrifft ebenfalls die Charakterisierung der Klassen (A, B), doch ist diese nicht selbständig, sondern durch die Beziehungen zwischen den verschiedenen Klassen (A, B) vermittelt. Einige von diesen Beziehungen, wie $(L, L^2) \subset (M, L^2)$ oder $(L, C) \subset (L, M)$, sind trivial. Ebenso ist im ersten Komplex die Beschränktheit von $\{|\lambda_n|\}$ als notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_n\} \in (L^2, L^2)$ eine unmittelbare Folge des Riesz-Fischer'schen Satzes.

Wir fangen mit dem zweiten Fragenkomplex an.

[652] Ein Lemma. *Es sei* 1^0 $\{\lambda_n\} \in (A, B)$, 2^0 $\{\varphi_n\}$ ON *und* V *inbezug auf* B, $\varphi_n \in B$, 3^0 $f(t) \in A$, $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n$, $g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \varphi_n$; *Behauptung*: $g = U(f)$ *ist eine lineare Operation.*

Beweis: Nach [144] ist bloß die Stetigkeit von $U(f)$ zu beweisen und nach [145] genügt dazu die Feststellung, daß aus

$$(29) \qquad \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_A = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \|U(f_k) - h\|_B = 0$$

die Gleichung $h = U(f)$ folgt. Nun ist aber

$$(30) \qquad U(f_k) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^{(k)} \varphi_n(t), \quad \text{wenn } f_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} \varphi_n(t);$$

die zweite Beziehung (29) liefert

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b U(f_k)\, \varphi_n(t)\, dt = \int_a^b h(t)\, \varphi_n(t)\, dt,$$

also nach (30)

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_n \alpha_n^{(k)} = \int_a^b h(t)\, \varphi_n(t)\, dt \qquad (n),$$

und daraus — nach der ersten Beziehung (29) —

$$\lambda_n \alpha_n = \int_a^b h(t)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

Die Entwicklung von $U(f)$ ist demnach mit derjenigen von $h(t)$ identisch und die Vollständigkeitsannahme läßt $h(t) = U(f)$ folgern, w. z. b. w.

Unter den Voraussetzungen 1^0 *und* 2^0 *von* [652] *ist* $\{\lambda_n\}$ *ein* [653]
Multiplikator von (B', A'), *wenn man mit* A' *bzw.* B' *die Räume der in* A *bzw.* B *erklärten linearen Funktionale bezeichnet.*

Definition. Ist $F(x)$ ein Funktional, so nennt man $\sum_{n=1}^{\infty} x_n F(\varphi_n)$ die *Entwicklung* dieses Funktionals nach $\{\varphi_n\}$ und $\{F(\varphi_n)\}$ heißt die *Koeffizientenfolge* dieser Entwicklung. Diese Koeffizienten sind Zahlen; setzt man für x_n die Werte $\int_a^b x(t)\, \varphi_n(t)\, dt$ ein, so gibt die Reihe formell den Wert von $F(x)$ als Summe, wie man durch Anwendung des Operators F auf die Gleichung $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n(t)$ verifiziert.

Beweis von [653]: Es sei $F(x)$ ein lineares Funktional in B, d. h. $F \in B'$. Die Operation $g = U(f)$ ist nach [652] linear und $g \in B$ für $f \in A$, also ist $F(U(f)) = \Phi(f)$ ein in A erklärtes, lineares Funktional. $F_n = F(\varphi_n)$ sind die Koeffizienten des Funktionals $F(x)$ nach $\{\varphi_n\}$ und nach der Definition von $U(f)$ ist $U(\varphi_n) = \lambda_n \varphi_n(t)$, also $\Phi(\varphi_n) = F(U(\varphi_n)) = F(\lambda_n \varphi_n) = \lambda_n F(\varphi_n) = \lambda_n F_n$.

Bezeichnet man mit Φ_n die Koeffizienten von $\Phi(f)$ nach $\{\varphi_n\}$, so kommt $\Phi_n = \Phi(\varphi_n) = \lambda_n F_n$, womit $\{\lambda_n\} \in (B', A')$ bewiesen ist.

Wir bemerken nun, daß für $A = L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ $A' = L^{p'}$ ist ($L^{p'}$ ist für $p' = \infty$ als M zu lesen). Dies ist so zu verstehen, daß ein lineares Funktional $H(f)$ in A nach [147] als $\int_a^b h(t) f(t)\, dt$ mit $h \in L^{p'}$ geschrieben werden kann und die Koeffizienten $H_n = H(\varphi_n)$ gleich $\int_a^b h(t) \varphi_n(t)\, dt$, d. h. gleich den Koeffizienten von $h(t)$ nach $\{\varphi_n\}$ sind. Dagegen ist für $A = M$ (oder $A = C$) $A' \supset L$. Diese Bemerkungen und Satz [653] erlauben die Identität einiger Klassen (A, B) abzuleiten.

[654] *Es sei* $\{\varphi_n\}$ *ein* ON, $\varphi_n \in M$, $\{\varphi_n\}$ *vollständig inbezug auf* L^r, $r = \min(p', q)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q < \infty$; *alsdann ist*

$$(L^p, L^q) = (L^{q'}, L^{p'}).$$

Hier ist zu beweisen, daß $\{\lambda_n\} \in (L^p, L^q)$ die Beziehung $\{\lambda_n\} \in (L^{p'}, L^{q'})$ impliziert und umgekehrt. Das erste ist eine Folge von [653], das zweite ebenfalls, denn die Vollständigkeit von $\{\varphi_n\}$ inbezug auf L^r bewirkt die Vollständigkeit inbezug auf $L^{p'}$ und L^q.

Korollar. $(L^p, L^p) = (L^{p'}, L^{p'})$ $(1 < p < \infty)$.

Folgender Grenzfall ist in [654] nicht enthalten:

[655] *Ist* $\{\varphi_n\}$ ONV *inbezug auf* L *und beschränkt, so hat man* $(L^p, L) = (M, L^{p'})$ *für* $1 \leqslant p < \infty$.

Beweis: $\{\lambda_n\} \in (L^p, L)$ impliziert nach [653] $\{\lambda_n\} \in (M, L^{p'})$. [653] genügt aber nicht für den umgekehrten Schluß, weil man hier mit dem Fall $A = M$ zu tun hat, und auf $\{\lambda_n\} \in (L^p, L)$ schließen will, während man mit der vorhergehenden Bemerkung bloß $\{\lambda_n\} \in (B', A')$ mit $A' \supset L$ erreicht.

Es sei $\{\lambda_n\} \in (M, L^{p'})$ und $f(t) \in L^p$ $(p > 1)$. Nach [652] ist die Operation $g(t) = U[h(t)]$, $h \in M$, $g \in L^{p'}$ linear, also ([146]) $\| g \|_{p'} \leqslant \varkappa \| h \|_M$. Es folgt

$$\left| \int_a^b g(t) f(t)\, dt \right| \leqslant \varkappa \| h \|_M \cdot \| f \|_p.$$

Insbesondere hat man für das Polynom $w_k(t) = \sum_{i=1}^{m(k)} c_i^{(k)} \varphi_i(t)$

$$(31) \qquad \left| \int_a^b U(h)\, w_k(t)\, dt \right| = \left| \int_a^b U(w_k)\, h(t)\, dt \right| \leqslant \varkappa \| h \|_M \cdot \| w_k \|_p.$$

$\{\varphi_n\}$ ist inbezug auf L, also auch inbezug auf L^p vollständig und es ist ([625]) eine Folge $\{w_k(t)\}$ mit $\lim_{k\to\infty} \| f - w_k \|_p = 0$ vorhanden; dies und (31) ergeben die Konvergenz von $\left\{ \int_a^b U(w_k)\, h(t)\, dt \right\}$ für alle $h \in M$. Nach [163] gibt es ein $\bar{f}(t) \in L$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b U(w_k)\, h(t)\, dt = \int_a^b \bar{f}(t)\, h(t)\, dt \qquad (h);$$

setzt man hier $h(t) = \varphi_n(t)$, so kommt

$$\int_a^b \bar{f}(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_a^b U(w_k)\, \varphi_n(t)\, dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_a^b \lambda_n \varphi_n(t)\, w_k(t)\, dt = \lambda_n \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt,$$

womit $\{\lambda_n\} \in (L^p, L)$ gezeigt ist. Analog wird der in der Behauptung [655] enthaltene Grenzfall $(L, L) = (M, M)$ behandelt.

Jetzt gehen wir zu solchen Klassen (A, B) über, wo der eine Raum mit C identisch ist.

Es sei $\varphi_n \in L^p$ *und* $\{\varphi_n\}$ ONV *inbezug auf* L^p; *alsdann ist* [656]

$$(C, L^p) = (M, L^p) \qquad (p > 1).$$

Die Relation $(M, L^p) \subset (C, L^p)$ ist klar; es bleibt $(C, L^p) \subset (M, L^p)$ zu zeigen. Es sei $\{\lambda_n\} \in (C, L^p)$, $f(t) \in C$, $U(f) \in L^p$ und $h(t) \in M$; $\{f_n(t)\}$ bestehe aus stetigen Funktionen und sei f. ü. gegen $h(t)$ konvergent, so daß $\| f_n \|_C \leqslant \| h \|_M$ für alle n gelte (vgl. [129]). $U(f)$ ist linear, es ist also $\| U(f_n) \|_p \leqslant \varkappa \| h \|_M$. Nach [165] enthält $\{U(f_n)\}$ eine schwach konvergente Teilfolge, die wir ebenfalls mit $\{U(f_n)\}$ bezeichnen wollen und die ein $g(t) \in L^p$ als schwache Grenze besitzt. Es gilt demnach für jede Funktion φ aus $L^{p'}$, insbesondere für $\varphi(t) = \varphi_k(t)$, die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b U(f_n)\, \varphi(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (k).$$

Andererseits ist wegen $f_n(t) \to h(t)$ f. ü.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b U(f_n)\,\varphi_k(t)\,dt = \lambda_k\int_a^b h(t)\,\varphi_k(t)\,dt,$$

also $\lambda_k\int_a^b h(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,\varphi_k(t)\,dt$ (k), was $\{\lambda_n\}\,\epsilon\,(M, L^p)$ begründet.

Bemerkung. $(C, M) = (M, C)$ ist unrichtig, denn $\{1\}$ gehört zu (C, M) ohne zu (M, C) zu gehören. Ebensowenig darf man $(C, L) = (M, L)$ schreiben, wofür das trigonometrische System ein Gegenbeispiel liefert.

[657] *Ist aber* $\{\varphi_n\}$ ON *abgeschlossen inbezug auf* C *und sind alle* $\varphi_n\,\epsilon\, C$, *so hat man* $(C, C) = (M, M)$.

Der Beweis für $(C, C) \subset (M, M)$ ist dem Beweise von [656] analog; man hat nur zu beachten, daß die schwache Grenze von $U(f_n)$ jetzt ein $g(t)\,\epsilon\, M$ ist; $(M, M) \subset (C, C)$ wird aber folgendermaßen bewiesen: ist $f(t)\,\epsilon\, M$, so ist die Operation $U(f)$ in M linear, nach [652]; die Abgeschlossenheit inbezug auf C liefert für $h(t)\,\epsilon\, C$ eine Polynomfolge $\{w_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\| w_n - h\|_C = 0$, was $\lim\limits_{n\to\infty}\| U(w_n) - U(h)\|_M = 0$ impliziert, also ist $U(h)$ als Grenze einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen stetig, w. z. b. w.

[658] *Unter den Voraussetzungen:* $\{\varphi_n\}$ ON, $\varphi_n\,\epsilon\, C$, $\{\varphi_n\}$ A *inbezug auf* L^p, *ist* $(L^p, M) = (L^p, C)$ $(p \geqslant 1)$.

Beweis: Es genügt $(L^p, M) \subset (L^p, C)$ zu zeigen. Es sei $\{\lambda_n\}\,\epsilon\,(L^p, M)$, $f(t)\,\epsilon\, L^p$ und $U(f)$ die in [652] definierte Operation, die $f(t)$ in eine beschränkte Funktion $g(t) = U(f)$ verwandelt. Die Abgeschlossenheit liefert eine Polynomfolge $\{w_n\}$ mit f als starker Grenze. Die Stetigkeit von $U(f)$ gibt

$$\lim_{m\geqslant n\to\infty}\| U(w_n) - U(w_m)\|_M = 0,$$

es ist also die aus den stetigen Funktionen $g_n(t) = U(w_n)$ bestehende Folge gleichmäßig konvergent und daher $U(f)$ eine stetige Funktion von t. Nach [624] ist aber $\{\varphi_n\}$ V inbezug auf M, also $U(f)$ eindeutig erklärt.

Bemerkung. In den Sätzen dieses § darf die Bedingung der Vollständigkeit durch die Annahme ersetzt werden, daß die einer Toeplitz'schen Methode entsprechenden Lebesgue'schen Funktionen f. ü. $O(1)$ sind.

§ 6. Weiteres über Multiplikatoren.

Wir gehen zum ersten Problemkomplex des § 5 über, um einige Eigenschaften der Klassen an sich zu behandeln. Wir wollen hier zunächst den Begriff des Multiplikators erweitern:

Es seien $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ zwei ON; wir setzen voraus, daß für $x\,\epsilon\, A$, [661]
$y\,\epsilon\, B$ die Integrale $\int_a^b x(t)\,\varphi_n(t)\,dt$, $\int_a^b y(t)\,\psi_n(t)\,dt$ stets existieren; es habe $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft, die Entwicklung einer jeden Funktion $x(t)\,\epsilon\, A$ nach $\{\varphi_n\}$ in die Entwicklung einer Funktion $y(t)\,\epsilon\, B$ nach $\{\psi_n\}$ zu verwandeln; wir sagen dann, $\{\lambda_n\}$ gehöre zur Klasse $(A\varphi, B\psi)$. Dann gilt der

Satz: *Voraussetzungen:* 1^0 $\{\psi_n\}$ *ist vollständig inbezug* [662]
auf B, 2^0 $\psi_n\,\epsilon\, B(n)$, 3^0 $\varphi_n\,\epsilon\, A(n)$, 4^0 $\{\lambda_n\}\,\epsilon\,(A\varphi, B\psi)$, 5^0 *die Zahlen* a_{ik} *sind beliebig (reell).*

Behauptung: Die Konvergenz von $x_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n} a_{nk}\,\varphi_k(t)$ *nach der A-Norm impliziert die Konvergenz von* $y_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n}\lambda_k\, a_{nk}\,\psi_k(t)$ *nach der B-Norm.*

Wie in [652], beruht der Beweis darauf, daß der Operation $y = U(x)$ (die wegen 1^0 eindeutig ist) die Stetigkeit zukommt. Ist also x_∞ die starke Grenze von $\{x_n\}$ und $y_\infty = U(x_\infty)$, so ist $\lim\| y_n - y_\infty\|_B = 0$. (Der besondere Fall $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\,\varphi_k(t)$ möge vom Leser ausdrücklich formuliert werden).

Setzt man (wie in [662]) $\{\psi_n\}$ V *inbezug auf B, und außerdem* [663]
$\{\varphi_n\}$ A *inbezug auf A voraus, so folgt aus der Behauptung* [662]

$$\{\lambda_n\}\,\epsilon\,(A\varphi, B\psi).$$

Beweis: Es sei $x_\infty\,\epsilon\, A$; es gibt ($\{\varphi_n\}$ ist A) eine Matrix $\| a_{ik}\|$, so daß $x_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n} a_{nk}\,\varphi_k(t)$ stark gegen x_∞ konvergiert. Setzt man $y_n = U(x_n)$, $y_\infty = U(x_\infty)$, so konvergiert $\{y_n\}$ stark (= nach der B-Norm) gegen y_∞. Man hat zu zeigen, daß die Entwicklung von $y_\infty(t)$ nach $\{\psi_n\}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\, c_k\,\psi_k(t)$ ist, wo man mit c_k die Integrale

$\int_a^b x_\infty(t)\,\varphi_k(t)\,dt$ bezeichnet. Nun ist aber $c_k = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,\varphi_k(t)\,dt$,

$\int_a^b y_\infty(t)\,\psi_k(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b y_n(t)\,\psi_k(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_k\int_a^b x_n(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \lambda_k c_k$, w. z. b. w.

[664] *Es sei* $\{\varphi_n\}$ ON *und* A *inbezug auf* A, $\{\psi_n\}$ ON *und* V *inbezug auf* B; *die notwendige und hinreichende Bedingung für* $\{\lambda_n\}\in(A\varphi, B\psi)$ *ist die Existenz eines* n- *und* ξ-*freien* γ *derart, daß die Ungleichung*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\xi_k\,\psi_k(t)\right\|_B \leqslant \gamma\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,\varphi_k(t)\right\|_A \tag{32}$$

für alle endlichen Zahlensysteme $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *stattfinde.*

Beweis: Die Notwendigkeit folgt aus [662], weil die Operation $y = U(x)$ stetig ist. Setzen wir nun (32) voraus und es sei $x_\infty(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,\varphi_k(t)$, $x_\infty\in A$. Es sei ferner $x_n = \sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}\,\varphi_k(t)$ und $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$. Setzt man in (32) $a_{nk}-a_{mk}$ für ξ_k, so strebt für $n,m\to\infty$ die rechte Seite gegen Null, also auch die linke. Daraus mit [663] folgt $\{\lambda_n\}\in(A\varphi, B\psi)$.

Der Satz [664] gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_n\}\in(A, B)$ an, wenn wir darin $\varphi_n = \psi_n$ annehmen. Andere Bedingungen sind in den nunmehr folgenden Sätzen enthalten.

[665] *Ist* $\{\varphi_n\}$ ON *und jedes* φ_n *beschränkt, so ist die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\,\varphi_i^2(t)\leqslant\varkappa \qquad (n) \tag{33}$$

mit einem n- *und* t-*freien* $\varkappa$ *notwendig und hinreichend für* $\{\lambda_i\}\in(L, L^2)$.

Beweis: Es sei $\{\lambda_k\}\in(L, L^2)$, $f(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,\varphi_k(t)$, $f(t)\in L$; soll dann $\{\lambda_k c_k\}$ die Koeffizientenfolge einer Funktion aus L^2 sein, so muß nach [171] für alle $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,c_k\,\xi_k\right|\leqslant \text{const.}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2} \tag{34}$$

stattfinden. Hier ist die linke Seite gleich

$$\left|\int_a^b f(t)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\xi_k\,\varphi_k(t)\,dt\right|. \tag{35}$$

Ist nun $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2<\infty$ festgelegt, so ist

$$F_n(f) = \int_a^b f(t)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\bar{\xi}_k\,\varphi_k(t)\,dt \tag{36}$$

das allgemeine Glied einer Folge von Funktionalen, deren Normen ([151]) gemeinsam beschränkt sind, wie aus (34) und (35) ersichtlich; nach [147] muß also $\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\text{w. o. G.}}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\bar{\xi}_k\,\varphi_k(t)\right|\leqslant\mu$ sein, mit einem n-freien μ. Andererseits ist

$$\left\{U_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\xi_k\,\varphi_k(t)\right\}$$

eine Folge von linearen Operationen, wo $x = \{\xi_i\}$ zum Raume l^2 gehört, und M der Gegenraum ist. Nach [151] sind die $\|U_n\|$ unter einer n-freien Schranke gelegen. Wenn es uns also die Ungleichung

$$\|U_n\|\geqslant\omega_n = \text{w. o. G}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\,\varphi_i^2(t)}$$

zu zeigen gelingt, so haben wir die Notwendigkeit von (33) dargetan. Es gibt nun eine positive t-Menge E mit $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\,\varphi_i^2(t)}>\omega_n-\varepsilon$; nach [121] kann man ein positives $E_0\subset E$ finden, worauf alle $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ stetig sind. Es sei $t_0\in E_0$ ein Punkt von der Dichte 1 für E_0. Dann ist für

$$\xi_i = \lambda_i\,\varphi_i(t_0)\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\,\varphi_i^2(t_0)}$$

die Summe $\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ gleich 1, und

$$|U_n(x)|_{t=t_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\,\varphi_i^2(t_0)}\,,$$

also $|U_n(x)|\geqslant\omega_n-2\varepsilon$ in einer positiven t-Menge (da t_0 ein Stetigkeitspunkt und Dichtepunkt ist). Es folgt $\|U_n(x)\|\geqslant\omega_n-2\varepsilon$, also $\|U_n\|\geqslant\omega_n$, w. z. b. w.

Setzen wir jetzt voraus, (33) sei erfüllt. Dann ist

$$\|U_n(x)\|\leqslant\sqrt{\varkappa}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}\,,$$

also
$$|F_n(f)| \leqslant \sqrt{\varkappa}\int_a^b |f(t)|\,dt \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}\,.$$

Damit ist aber (wegen (36) und (35)) (34) mit einer ξ- und n-freien Konstanten erfüllt, und die (hinreichende) Bedingung [171] ergibt die Existenz eines $g(t)$ mit
$$\int_a^b g(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \lambda_n c_n \qquad (n),$$

d. h. die Hinlänglichkeit von (33).

Sind die φ_n *gemeinsam* beschränkt, so folgt aus [665] unmittelbar $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 < \infty$ als notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_i\} \epsilon (L, L^2)$ (die Notwendigkeit erhält man durch Integration von (33)). Dieselbe Annahme führt für $1 < p < 2$ zu $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{p'} < \infty$ als einer notwendigen aber nicht hinreichenden Bedingung für $\{\lambda_i\} \epsilon (L, L^p)$.

[666] *Hat* $\{\varphi_n\}$ *die in* [665] *vorausgesetzten Eigenschaften und ist es außerdem vollständig inbezug auf* M, *so ist* $L_n(t) \leqslant \alpha$ *f. ü.* (α *n- und t-frei*) *eine notwendige und hinreichende Bedingung für* $\{\lambda_n\} \epsilon (M, M)$ ($L_n(t)$ ist die Lebesgue'sche Funktion; vgl. [521]), *wo* $\{\lambda_n\}$ *eine monotone, konvergente Folge bezeichnet.*

Beweis: Es sei $h(t) \epsilon M$, $h(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} h_i \varphi_i(t)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i h_i \varphi_i(t) \sim g(t) \epsilon M$. Ist $h(t)$ fest, so kann $g(t) = U(x)$ (mit $x = \{\lambda_i\}$) als eine lineare Operation angesehen werden, die jedem x eine beschränkte Funktion zuordnet. Diese Zuordnung ist eindeutig, denn $\{\varphi_n\}$ ist vollständig. Die x-Menge kann nämlich durch die Normierung
$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| + \max_{(n)} |\lambda_n|$$
zu einem B-Raum gemacht werden (wenn x eine Folge von beschränkter Schwankung bedeutet, d. h. eine Folge, für welche der eben erklärte Ausdruck $\|x\|$ endlich ist).

Nach [146] haben wir $\|U(x)\| \leqslant \mu \|x\|$. Wählt man $x = \{\lambda_i\}$ mit $\lambda_i = 1$ für $i \leqslant n$, $\lambda_i = 0$ für $i > n$, so wird
$$\|x\| = 2, \quad \|U(x)\| = \underset{a \leqslant t \leqslant b}{\text{w. o. G.}} \left| \sum_{i=1}^{n} h_i \varphi_i(t) \right| \leqslant 2\mu \text{ für } h(t) \epsilon M$$
und μ von h (nicht von n) abhängig. Da nun

$$U(x) = \int_a^b h(u) \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(u)\,\varphi_k(t)\,du,$$
so ist nach [155]
$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(u)\,\varphi_k(t) \right| du \leqslant \alpha,$$
was die Notwendigkeit der Bedingung erweist. Die Hinlänglichkeit ist unmittelbar, denn es ist
$$\sum_{k=1}^{n} h_k \lambda_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{n} s_k(t)(\lambda_k - \lambda_{k+1}) + s_n(t)\lambda_{n+1} \text{ mit } s_k(t) = \sum_{i=1}^{k} h_i \varphi_i(t),$$
also ist nach [642]
$$\text{w. o. G.} \left| \sum_{k=1}^{n} h_k \lambda_k \varphi_k(t) \right| \leqslant \varkappa \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| + |\lambda_{n+1}| \right).$$

§ 7. Singuläre Entwicklungen und singuläre Funktionen.

Bei der Diskussion der Sätze [631] und [632], welche in zwei verschiedenen Richtungen den Riesz-Fischer'schen Satz verallgemeinern, haben wir bemerkt, daß die Umkehrungen jener Sätze nicht gelten, d. h., daß es Orthogonalsysteme gibt, für welche diese Umkehrungen versagen. Wir sprechen dann von einer *Singularität* des Systems und lassen dabei die in den erwähnten Sätzen vorkommende Annahme der gemeinsamen Beschränktheit fallen.

Definitionen. Ein ON $\{\varphi_n\}$ hat die *schwache Hardy-Littlewood'sche Singularität* $\mathfrak{h}_p$ ($p \neq 2$), wenn es eine Folge $\{c_n\}$ mit [671]
$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$ gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$ keine Entwicklung einer Funktion aus L^p ist; dabei ist $1 < p < \infty$; im Falle $p = 1$ tritt an Stelle von $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$ die Bedingung $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$; im Falle $p = \infty$ ist p' als 1 und L^p als M zu lesen.

Ein ON $\{\varphi_n\}$ hat die *starke Hardy-Littlewood'sche Singularität* $\mathfrak{H}_p$, wenn es eine Folge $\{c_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q < \infty$ für alle $q > \min(2, p')$ gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$ keine Entwicklung einer Funktion aus L^p ist; dabei ist $1 < p < \infty$; im Falle $p = 1$ ist $p' = \infty$, im Falle $p = \infty$ ist p' als 1 und L^p als M zu lesen.

Vermittels lakunärer Reihen (vgl. VII) kann man zeigen, daß das trigonometrische System die Singularitäten $\mathfrak{h}_p$ für $1 \leqslant p < 2$ besitzt. Die Singularität $\mathfrak{h}_2$ kommt offenbar nie vor und $\mathfrak{h}_p$ mit $p > 2$ ist bei beschränkten Systemen unmöglich. Das Haar'sche System besitzt die Singularität $\mathfrak{h}_p$ für $2 < p < \infty$, wie wir gesehen haben. Die Singularität $\mathfrak{H}_p$ kann bei beschränkten Systemen vorkommen, sogar mit $p = 2$.

Obige Singularitäten knüpfen an den ersten Teil des Satzes [631] an und beziehen sich auf die Existenz von Reihen mit bestimmten Konvergenzeigenschaften. Man erhält eine zweite Gruppe von Singularitäten, wenn man den zweiten Teil des erwähnten Satzes hervorhebt und Funktionen von bestimmten Eigenschaften sucht.

[672] Ein ON $\{\varphi_n\}$ weist die *schwache Carleman'sche Singularität* $\mathfrak{c}_p$ $(p \neq 2)$ auf, wenn es eine Funktion $f(t) \in L^p$ gibt, deren Koeffizienten $\{f_n\}$ die Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^{p'} = \infty$ haben. Für $p = \infty$ ist L^p als M, p' als 1 zu verstehen, für $p = 1$ ist $\limsup_{n\to\infty} |f_n| = \infty$ die verlangte Eigenschaft der Koeffizienten.

Ein ON $\{\varphi_n\}$ hat die *starke Carleman'sche Singularität* $\mathfrak{C}_p$, wenn für ein gewisses $f(t) \in L^p$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q$ für alle q mit $0 < q < \max(2, p')$ divergiert.

Bevor wir die Singularitäten beider Arten näher betrachten, wollen wir ihre gegenseitigen Beziehungen beleuchten. Dazu dient uns folgendes

[673] Lemma: *Voraussetzungen:* $\{\varphi_n\}$ *ist ein* ON, *vollständig inbezug auf* Q, $\varphi_n \in Q$; P, *der Raum der Koeffizientenfolgen* $x = \{c_k\}$ *sei vom Typus* F (vgl. [136]) *und habe die Eigenschaften:*

1^0 $\lim_{n\to\infty} (x^{(n)}, x) = 0$ *impliziert* $\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)} = c_k$ *für alle* k (hier ist $x^{(n)} \in P$, $x^{(n)} = \{c_k^{(n)}\}$ gemeint);

2^0 *eine Folge wie* $(c_1, c_2, \dots, c_r, 0, 0, \dots)$ *gehört stets zu* P;

3^0 $\lim_{r\to\infty} (c_1, c_2, \dots, c_r, 0, 0, \dots) = \{c_n\}$.

Behauptung: Ist jedes $x \in P$ *eine Koeffizientenfolge eines* $f \in Q$ *nach* $\{\varphi_n\}$, *so ist*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \right\|_Q = 0. \tag{37}$$

Beweis: Setzt man $f(t) = U(x)$, so ist die Operation U additiv, wie ersichtlich. Diese Operation ist stetig; es konvergiere nämlich $x^{(n)} = \{c_k^{(n)}\}$ gegen $x^{(0)} = \{c_k^{(0)}\}$; nach 1^0 folgt aus $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} U(x^{(n)}) = y^{(0)}$, daß die Koeffizienten von $y^{(0)}$ die Zahlen $c_k^{(0)}$ sind; die Vollständigkeit ergibt $y^{(0)} = U(x^{(0)})$, also ist nach [145] $U(x)$ stetig. Es sei nun

$$x^{(n)} = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0, 0, \dots);$$

nach 3^0 ist $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \{c_k\} = x$, also $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} U(x^{(n)}) = U(x)$, d. h. (37), w. z. b. w.

Dieses Lemma gestattet folgenden Satz zu begründen:

Die Singularitäten $\mathfrak{h}_p$ *und* $\mathfrak{c}_{p'}$ *sind äquivalent, wenn* $\{\varphi_n\}$ *vollständig inbezug auf* L^p, $\varphi_n \in L^p$ *und* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *ist.* [674]

Es sei zunächst $1 < p < \infty$ und $\{\varphi_n\}$ habe die Singularität $\mathfrak{h}_p$; es existiert demnach eine Folge $\{c_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$, ohne eine Koeffizientenfolge eines $f(t) \in L^p$ zu sein. Infolgedessen gibt es nach [646] eine Funktion $g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(t) \in L^{p'}$ mit divergenter Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_k g_k$; es muß also $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^p = \infty$ sein, womit das Vorkommen der Singularität $\mathfrak{c}_{p'}$ bewiesen ist. Der Beweis benutzt nur die Eigenschaften $\varphi_n \in L^p$, $\varphi_n \in L^{p'}$ (n) des ON.

Jetzt habe $\{\varphi_n\}$ die Singularität $\mathfrak{c}_{p'}$, nicht aber $\mathfrak{h}_p$; es ist dann jede Folge $\{c_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$ die Koeffizientenfolge eines $f(t) \in L^p$. Nach dem Lemma [673] mit $Q = L^p$ gilt also (37). Wählt man irgend ein $g(t) \in L^{p'}$ und bezeichnet mit $s_n(t)$ die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)$, mit g_k die Koeffizienten von g, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} c_k g_k = \int_a^b s_n(t)\, g(t)\, dt,$$

also

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k g_k - \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \| g \|_{p'} \cdot \| f - s_n \|_p,$$

was die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$ für alle $\{c_n\} \in l^{p'}$ sichert; nach [113] impliziert das letztere $\{g_n\} \in l^p$, schließt also die Singularität $\mathrm{C}_{p'}$ aus. Damit ist für $1 < p < \infty$ [674] in beiden Teilen bewiesen. Die Grenzfälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind analog zu behandeln; man benutze den Umstand, daß die nullkonvergenten Folgen einen F-Raum mit $(\{a_n\}, \{b_n\}) = \max_{1 \leq k < \infty} |a_k - b_k|$ bilden.

[675] *Unter den Voraussetzungen wie in* [674] *sind die Singularitäten* H_p *und* $\mathrm{C}_{p'}$ *äquivalent.*

B e w e i s: Es sei wieder $1 < p < \infty$ und H_p komme dem System $\{\varphi_n\}$ zu, d. h. es sei $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q < \infty$ für $q > \min(2, p')$ und $\{c_n\}$ keine Koeffizientenfolge für L^p. $\mathrm{C}_{p'}$ sei nicht realisierbar, also zu jedem $g(t) \in L^{p'}$ eine Zahl $\alpha < \max(2, p) = \min(2, p')$ mit $\sum |g_n|^\alpha < \infty$ vorhanden. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n$ für alle $g \in L^{p'}$ konvergent, d. h. $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$ nach [646] die Entwicklung eines $f(t) \in L^p$, gegen die Annahme. Umgekehrt: kommt H_p dem System $\{\varphi_n\}$ nicht zu, d. h. ist, für jedes $\{c_i\}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^q < \infty$ für $q > \min(2, p')$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \sim f(t) \in L^p$, so ist die Formel (37) anwendbar, denn die Menge aller $\{c_i\}$ ist ein F-Raum, wenn man die Distanz zweier Folgen $x = \{c_k\}$, $y = \{d_k\}$ als

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{[x-y]_n}{1 + [x-y]_n}$$

mit

$$[x-y]_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k - d_k|^{r_n}\right)^{\frac{1}{r_n}}, \qquad r_n = \min(2, p') + 1/n$$

erklärt. Tatsächlich gilt dann $(x, y) = (x - y, \Theta)$, $\lim_{n \to \infty} (\tau_n x, \Theta) = 0$ für $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ (wegen $(\tau_n x, \Theta) \leq |\tau_n| . (x, \Theta)$ für $|\tau_n| < 1$) und $\lim_{k \to \infty} \tau x_k = \Theta$ für $\lim_{k \to \infty} x_k = \Theta$, denn für $|\tau| \leq 1$ ist

$$(\tau x_k, \Theta) \leq |\tau| . (x_k, \Theta),$$

und für $|\tau| > 1$ ist

$$(\tau x_k, \Theta) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\tau| . (x_k, \Theta)_n}{1 + (x_k, \Theta)_n} = |\tau| . (x_k, \Theta);$$

der Raum ist auch komplett, also ein F-Raum.

(37) mit $Q = L^p$ liefert die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i$ für die Koeffizientenfolge $\{g_i\}$ einer beliebig in $L^{p'}$ gewählten Funktion $g(t)$; diese Konvergenz findet für alle $\{c_i\} \in l^q$ statt $(q > \min(2, p'))$, also ist nach [115] $\sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^\alpha < \infty$ für ein gewisses $\alpha(g) < \max(2, p)$, d. h. $\mathrm{C}_{p'}$ nicht vorhanden. Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ gestatten eine analoge Behandlung.

Bis jetzt haben wir in diesem § die Vollständigkeit des ON inbezug auf L^p vorausgesetzt. Wenn wir statt dessen die $\varphi_n(t)$ einzeln als beschränkt annehmen und eine Summationsmethode $\{b_{ik}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_i)$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b |K_i(t, u)|\, du < \varkappa \qquad \left(K_i(t, u) = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(t)\, \varphi_j(u)\right) \qquad (i)$$

wählen, so bleiben die Behauptungen richtig und die Beweise werden einfacher, weil sie auf [646] u. f. gestützt werden können.

Bevor wir an die Frage nach der Existenz der Singularitäten herantreten, ist folgender H i l f s s a t z zu beweisen:

Es sei $\{f_n(t)\}$ *eine Folge integrierbarer Funktionen und* $\{n_i\}$ [676]
bezeichne irgend eine Folge von Indizes; die Ungleichung

$$(38) \qquad \int_a^b |f_{n_1}(t) + f_{n_2}(t) + \ldots + f_{n_j}(t)|\, dt < \mu$$

sei mit einem $\{n_i\}$*- und j-freien* μ *erfüllt. Dann ist* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t) < \infty$ *f. ü.*

Bezeichnet $\{r_n(u)\}$ das Rademacher'sche System, so folgt aus (38)

$$(39) \qquad \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\, r_k(u) \right| dt < 2\mu.$$

Nun gilt aber für $\{r_n(u)\}$ die erste Ungleichung [457]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 8 \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k\, r_k(u) \right| du,$$

welche mit (39) für $c_k = f_k(t)$ beiderseits integriert

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_k^2(t)}\, dt \leq 8 \int_0^1 du \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\, r_k(u) \right| dt \leq 16\mu$$

ergibt. Jetzt führt [124] unmittelbar zu der Behauptung.

[677] *Ein beschränktes oder inbezug auf L^2 vollständiges* ON *besitzt stets die Singularität* $\mathfrak{c}_\infty$.

Es sei nämlich $|\varphi_n(t)| < \gamma$, $\{c_k\}$ beschränkt und divergent; es ist dann $\{c_k\}$ nach dem Mercer'schen Satze [524] keine Koeffizientenfolge einer Funktion $f(t) \in L$. Infolgedessen gibt es nach [646] eine Funktion $g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t) \in M$, mit divergenter Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$; es muß also $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$ divergieren, worin eben $\mathfrak{c}_\infty$ besteht.

Im Falle, wo $\{\varphi_n\}$ inbezug auf L^2 die Eigenschaft V hat, ist der Hilfssatz [676] nötig. Es ist dann nach [513] $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü., also die Behauptung [676] nicht erfüllt und infolgedessen (38) zu verneinen. Dies führt zu einer Folge $\{n_i\}$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{k} \varphi_{n_i}(t) \right| dt = \infty,$$

also — nach [154] — zu einer stetigen Funktion $h(t)$ (mit $\{h_n\}$ als Koeffizientenfolge) von der Eigenschaft

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} h_{n_i} = +\infty,$$

was $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n| = \infty$, also $\mathfrak{c}_\infty$ impliziert.

[678] *Ein beschränktes* ON *besitzt stets die Singularitäten* $\mathfrak{c}_p$ *für alle* $p > 2$.

Wäre für jedes $f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \in L^p$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{p'}$ konvergent, so könnte man eine Reihe $\sum_{k=1}^{n} |d_k|^p < \infty$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty$ wählen und man hätte $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k c_k| < \infty$ für alle $f \in L^p$, also — wieder nach [154] —

$$\int_a^b \left| \sum_{i=1}^{j} d_{n_i} \varphi_{n_i}(t) \right| dt < \mu,$$

was nach [676] $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(t) < \infty$ f. ü. ergibt. Letztgeschriebene Reihe ist in E gleichmäßig konvergent, wobei nach [123] die Komplementärmenge CE dem Maße nach kleiner als ε angenommen werden darf. Wählt man ε so, daß

$$\int_E \varphi_n^2(t)\, dt > \frac{1}{2} \qquad (n)$$

sei (vgl. [611]), so kommt

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < 2 \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \int_E \varphi_k^2(t)\, dt = 2 \int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \varphi_k^2(t) \right) dt < \infty,$$

also ein Widerspruch.

In der obigen Beweisführung können wir $f(t) \in C$ statt $f(t) \in L^p$ annehmen. Es gibt also nach [678] für jedes $q < 2$ ein $f_q(t) \in C$, $f_q(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(q)} \varphi_k(t)$, so daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(q)}|^q = \infty.$$

Wenden wir [156] an, mit $x \in C$, $x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$ und $F_{\alpha\beta}(x) = (c_1, c_2, \ldots, c_\beta)$, $F_{\alpha\beta}(x) \in l^{2-1/\alpha}$, so bekommen wir den Satz:

Für ein beschränktes ON *ist die Bestimmung einer stetigen* [679]
Funktion $g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t)$ *mit* $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^q = \infty$ *für jedes* $q < 2$ *möglich.*

Umsomehr besitzen solche Systeme die Singularität C_p für $p > 2$.

§ 8. Die Singularitäten K_p und L_p.

Die Singularitäten des § 7 sind Gegenbeispiele für die Umkehrungen der Sätze vom Typus [631]. Nun sind die Umkehrungen des Satzes [632] ebenfalls unrichtig. Diese Tatsache rechtfertigt folgende

D e f i n i t i o n e n: Ein ON-System besitzt die *Singularität* $\mathfrak{l}_p$ [681]
$(1 \leqslant p < \infty)$, wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |c_n|^p$ gibt, ohne daß die Folge $\{c_n\}$ eine Koeffizientenfolge einer Funktion aus L^p sei. Wenn man in dieser Bedingung den in der Reihe auftretenden Exponenten p durch jedes $q < \max(2, p)$, $q > 0$, ersetzen darf, so heißt die *Singularität* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Die Singularität $\mathfrak{l}_2$ ist unmöglich, wie der Riesz-Fischer'sche Satz lehrt. Dagegen besitzt jedes ON die Singularität L_2: es genügt $c_n = 1/\sqrt{n}$ zu setzen.

[682] Ein ON besitzt die *Singularität* k_p $(1 \leqslant p < \infty)$, wenn es eine Funktion $f(t) \in L^p$ gibt, deren Koeffizienten c_n die Eigenschaft $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |c_n|^p = \infty$ aufweisen; es besitzt *die Singularität* K_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, wenn man in dieser Reihe den Exponenten p durch jedes $q > \min(2, p)$ ersetzen darf. Man sieht sogleich die Unmöglichkeit von k_2; die Singularität K_2 kommt in jedem ON-System vor, wie das Beispiel $c_n = n^{-1/2} \log^{-1}(n+1)$ zeigt. (K_∞ hat einen bestimmten Sinn, denn $q > \min(2, \infty)$ heißt soviel als $q > 2$ und L^∞ ist als M zu lesen).

Die neuen Singularitäten sind (wie diejenigen des § 7) miteinander verknüpft. Es gelten folgende Äquivalenzen:

[683] *Ist* $\{\varphi_n\}$ *ein* ON, *vollständig inbezug auf* L^p, *und* $\varphi_n \in L^p$ (n), *so sind* l_p *und* $k_{p'}$ *miteinander äquivalent* $(p > 1)$.

Es sei nämlich $k_{p'}$ nicht vorhanden, also für jedes $f(t) \in L^{p'}$, $f(t) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$, die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} n^{p'-2} < \infty \tag{40}$$

erfüllt. Ist dann $\{d_n\}$ irgend eine Folge mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^p n^{p-2} < \infty, \tag{41}$$

so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n d_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^p n^{p-2}\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} \frac{1}{n^{2-p'}}\right)^{1/p'}$$

absolut konvergent. Es bewirkt also (41) die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ für alle $f(t) \in L^{p'}$; daher ist $\{d_n\}$ nach [646] die Koeffizientenfolge einer Funktion $g(t) \in L^p$ und damit l_p ausgeschlossen. l_p impliziert daher $k_{p'}$.

Es sei jetzt $k_{p'}$, d. h. eine Funktion $f(t) \in L^{p'}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} n^{p'-2} = \infty$ vorhanden. Betrachten wir die Gesamtheit der Folgen $\{d_n\} = x$, die (41) erfüllen. Definiert man $\|x\|$ als $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n|^p n^{p-2}\right)^{1/p}$, so wird diese Gesamtheit zu einem Raum X vom Typus B. Ist $g(t) \in L^p$

eine Funktion mit $\{d_n\}$ als Koeffizientenfolge, so hat man nach dem Lemma [673], wenn l_p nicht vorhanden,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| g(t) - \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k(t) \right|^p dt = 0.$$

Daraus folgt die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ für alle $x \in X$. Wählen wir aber

$$d_n = |c_n|^{p'-1} n^{p'-1} \operatorname{sign} c_n,$$

so ist (41) erfüllt und dennoch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ divergent. Damit ist gezeigt, daß dieser Folge $\{d_n\}$ kein $g(t) \in L^p$ entsprechen kann, also die Singularität l_p als vorhanden erwiesen.

Unter den Voraussetzungen von [683] *sind* L_p *und* $K_{p'}$ *miteinander äquivalent.* [684]

Der Beweis dafür ist eine fast wörtliche Wiederholung des Beweises für [675] mit der Änderung, daß jetzt die Entfernung zweier Elemente $x = \{a_k\}$, $y = \{b_k\}$ als

$$(x, y) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(x, y)_n}{1 + (x, y)_n} \text{ mit } (x, y)_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|^n k^{n-2}\right)^{1/n} \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

definiert wird.

[683] *und* [684] *gelten bei der Voraussetzung der Beschränktheit der Lebesgue'schen Funktionen für eine bestimmte Summationsmethode auch ohne Vollständigkeit.* [685]

Wenden wir uns jetzt zur Frage nach der Existenz der Singularitäten k_p und K_p.

Ein beschränktes ON *besitzt stets die Singularität* k_p *für jedes* $p > 2$. [686]

Ist nämlich (40) und (41) für zwei Folgen $\{c_n\}$ und $\{d_n\}$ erfüllt, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ absolut konvergent. Ist aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$, was für $p > 1$ mit (40) verträglich ist, so resultiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$$

in einer positiven t-Menge; nach dem Lemma [676] muß also für eine Folge $\{n_i\}$

$$\limsup_{k\to\infty} \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{k} c_{n_i} \varphi_{n_i}(t) \right| dt = \infty$$

sein. Nach [154] gibt es dann eine stetige Funktion $g(t)$ (mit $\{g_n\}$ als Koeffizienten) mit

$$\limsup_{k\to\infty} \int_a^b g(t) \sum_{i=1}^{k} c_{n_i} \varphi_{n_i}(t)\, dt = +\infty,$$

d. h. mit $\sum_{i=1}^{\infty} g_{n_i} c_{n_i} = +\infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n c_n| = \infty$; damit ist aber gezeigt, daß die $\{g_n\}$-Folge nicht für $\{d_n\}$ in (41) eingesetzt werden darf, w. z. b. w.

Das Kondensationsprinzip [156], zusammen mit [686], führt, wie in [679], zum Ergebnis:

[687] *Ein beschränktes* ON *besitzt stets die Singularität* K_∞, *also auch* K_p, *für* $p > 2$.

§ 9. Majoranten und Divergenzfaktoren.

Die Sätze dieses Kapitels erlauben nicht immer zu entscheiden, ob eine Folge $\{a_n\}$ als Koeffizientenfolge einer Funktion in einem Raume auftreten kann. Hier sollen hinreichende Bedingungen erörtert werden, und zwar folgender Art:

[691] Ist für $|a_n| \leqslant d_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ stets $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge für L^q, so heißt die Folge $\{d_n\}$ eine *Majorante für* L^q; sie ist offenbar nicht nur von q sondern auch vom Orthogonalsystem abhängig; wir verlangen ferner $d_n \geqslant 0$ (n).

[692] *Damit* $\{d_n\}$ *eine Majorante für* L^q *sei* $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$, *ist (bei einem inbezug auf* L^q *vollständigen* ON *und* $\varphi_n \in L^q$) *die Konvergenz von* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n$ *für sämtliche Koeffizientenfolgen* $\{c_n\}$ *der Funktionen* $f(t) \in L^{q'}$ *notwendig und hinreichend.*

H i n l ä n g l i c h k e i t: Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n$ bewirkt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n d_n$ für $|\lambda_n| < \alpha$; diese Konvergenz findet statt für alle $f(t) \in L^{q'}$ $(f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n)$, also ist $\{\lambda_n d_n\}$ eine Koeffizientenfolge für L^q (nach [646]), w. z. b. w.

N o t w e n d i g k e i t: Ist $\{d_n\}$ eine Majorante, so ist $\{\lambda_n d_n\}$ für $|\lambda_n| < \alpha$ die Koeffizientenfolge eines $g(t) \in L^q$. Damit ist aber eine additive Operation $g(t) = U(x)$ im Raume l^∞ aller beschränkten Folgen $\{\lambda_n\} = x$ eindeutig erklärt; dieser Raum ist vom Typus B, wenn man $\|x\|$ als o. G. $|\lambda_n|$ definiert, aber bei der Bestimmung der oberen Grenze diejenigen λ_j streicht, für welche d_j verschwindet. Nach [673] ist $U(x)$ stetig. Es gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| g(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k d_k \varphi_k(t) \right|^q dt = 0,$$

und daraus folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n d_n$ für alle $f(t) \in L^{q'}$; setzt man $\lambda_n = \operatorname{sign} c_n$, so ergibt sich $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n < \infty$, w. z. b. w.

[693] Das Majorantenproblem erweist sich damit als eng mit dem Problem der *Divergenzfaktoren* verknüpft: diesen Namen legen wir den Gliedern einer Folge $\{d_n\}$ $(d_n \geqslant 0)$ bei, wenn es im Raume R ein $f(t)$ gibt, dessen Koeffizienten $\{c_n\}$ die Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n = \infty$ zukommt. Dies ist eine Verallgemeinerung der Singularität c_∞ $(R = M,\ d_n = 1)$.

Der Satz [692] läßt sich jetzt so fassen: Damit $\{d_n\}$ eine Majorante für P sei, ist es notwendig und hinreichend, daß $\{d_n\}$ keine Divergenzfaktorenfolge für den zu P konjugierten Raum P' sei. Diese Bemerkung führt zu neuen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Majoranten.

Es sei $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\varphi_n \in L^p$, $\{\varphi_n\}$ ON *und* V *inbezug auf* L^p; *damit* $\{d_n\}$ *eine Majorante für* L^p *sei, ist das Erfülltsein der Ungleichung* [694]

$$\int_a^b \left| \sum_{i=1}^{m} d_{n_i} \varphi_{n_i}(t) \right|^p dt < \varkappa \qquad (m) \tag{42}$$

für alle Indexfolgen $\{n_i\}$ *(mit einem* $\{n_i\}$*- und* m*-freien* $\varkappa$*) notwendig und hinreichend. (Für* $p = \infty$ *ist links statt des Integrals die w. o. G. des Integranden zu schreiben).*

B e w e i s: Wir wissen bereits, daß die Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n < \infty$ für alle $f \in L^{p'}$, wo $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$, notwendig und hinreichend ist. Daraus folgt

$$\left|\int_a^b f(t) \sum_{i=1}^{n} d_i \varphi_i(t)\, dt\right| < \alpha \qquad (n),$$

also, nach [152] bzw. [154],

$$\limsup_{m\to\infty} \int_a^b \left|\sum_{i=1}^{m} d_i \varphi_i(t)\right|^p dt < \infty$$

(mit entsprechender Lesart für $p = \infty$). Dies gilt für jede Folge $\{d_{n_i}\}$, womit die Notwendigkeit von (42) erwiesen ist. Die Hinlänglichkeit ist ersichtlich, denn (42) bewirkt

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_{n_i} d_{n_i}\right| \leqslant \varkappa\, \|f\|.$$

Im Raume L^p ist die Bedingung (42) mit der unbedingten starken Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(t)$ äquivalent, wie der Satz [168] lehrt. Es ist leicht festzustellen, daß im Raume M dieselbe Be-
[695] dingung mit $\sum_{n=1}^{\infty} d_n |\varphi_n(t)| < \varkappa$ f. ü. gleichbedeutend ist. *Sind die φ_n gemeinsam beschränkt, so kommt $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ für M, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$ für L als charakteristische Eigenschaft der Majoranten.* Die Hinlänglichkeit der letzten Eigenschaft folgt aus dem Riesz-Fischer'schen Satze [356], die Notwendigkeit daraus, daß [694] und [676] die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(t)$ f. ü. und für gemeinsam beschränkte φ_n die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$ ergeben.

[696] Als Anwendung zeigen wir, daß *für jedes* ON, *welches aus beschränkten Funktionen besteht und inbezug auf L vollständig ist, eine nullkonvergente Folge $\{a_n\}$ existiert, ohne eine Koeffizientenfolge für L zu sein.* Denn nach [513] gibt es ein $\{d_n\}$ mit $d_n \geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$. Nach [676] kann die Bedingung des Satzes [694] nicht erfüllt sein, $\{d_n\}$ ist demnach keine Majorante, also ist ein $\{a_n\}$ mit $|a_n| \leqslant d_n$ vorhanden, so beschaffen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ keinem $f(t)$ aus L entspricht.