V. KAPITEL.

Konvergenz und Summierbarkeit.

Die Untersuchungen dieses Kapitels gelten für L^2, wo nicht ausdrücklich andere Räume genannt werden.

§ 1. Konvergenz der Orthogonalreihen.

Es ist leicht eine durchweg divergente Orthogonalreihe anzugeben; so ist z. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nt$ für alle t divergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nt$ für alle mit π inkommensurablen t, also f. ü. divergent. Dies ist kein Ausnahmsfall, denn es gilt der

S a t z: *Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein beschränktes* ON *(d. h. $|\varphi_n(t)| \leqslant \alpha$ f. ü. mit t- und n-freiem α), so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ eine notwendige Bedingung für die Konvergenz f. ü. der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$.* [511]

B e w e i s: Es sei $0 < \varkappa < 1$, $\varepsilon > 0$ und $\alpha^2 \varepsilon < \varkappa$. Es gibt eine Menge E, wo die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ konvergiert, mit $|CE| < \varepsilon$. Es ist also in E $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \varphi_n(t) = 0$ und nach dem Egoroff'schen Satze [123] dürfen wir annehmen, daß dies gleichmäßig gilt. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 \int_E \varphi_n^2(t)\, dt = 0,$$

da aber

$$\int_E \varphi_n^2(t)\, dt = \int_a^b \varphi_n^2(t)\, dt - \int_{CE} \varphi_n^2(t)\, dt > 1 - \alpha^2 \varepsilon > 1 - \varkappa,$$

so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, w. z. b. w.

Untersuchen wir jetzt, ob es für jedes ON divergente Reihen
[512] mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gibt. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß *unter den Voraussetzungen von* [511] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)$ *in einer positiven Menge divergiert*. Sonst wäre nämlich $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^2(t) = 0$ f. ü., also $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n^2(t)\,dt = 0$, gegen die N-Eigenschaft. Desgleichen:

[513] *Ist* $\{\varphi_n(t)\}$ *ein* ONV, *so gilt* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ *f. ü.*

Es sei nämlich E die Konvergenzmenge der obigen Reihe, $|E|>0$, $F \subset E$, $|F|>0$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) \leqslant \varkappa$ in F. Ferner sei $G \subset F$, $0<|G|<1/4\varkappa$ und $g(t)$ die charakteristische Funktion von G. Die Bessel'sche Ungleichung [264] liefert für die Entwicklung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ von $g(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \int_a^b g^2(t)\,dt = |G| < 1/4\varkappa$$

und die Schwarz'sche Ungleichung gibt für $t \in F$

$$(1) \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)} < \sqrt{1/4\varkappa \cdot \varkappa} = 1/2.$$

Die Vollständigkeit hat $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_G [g(t)-s_n(t)]^2\,dt = 0$, wo $s_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t)$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(t) = g(t)$ f. ü. in G zur Folge, denn es existiert dieser Limes nach (1) $\left(\text{mit } \sum\limits_{n=m}^{\infty}\right)$. Es ist daher $s_n(t) > 1/2$ für $t \in G^*$, $n > n(t)$, wo G^* ein maßgleicher Teil von G ist; dies ist aber ein Widerspruch mit (1).

[514] *Ist* $\{\varphi_n(t)\}$ *ein* ONV, *bzw. ein System wie in* [511], *so gibt es eine Folge* $\{a_n\}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *und mit*

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$$

f. ü., bzw. in einer Menge von positivem Maße.

Wir berufen uns hier auf [513], bzw. [512]. Im ersten Fall ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü., also nach dem Egoroff'schen Satze [123] ist

diese Reihe in $\langle a, b\rangle$, von einer Menge M mit beliebig kleinem Maße abgesehen, gleichmäßig divergent, d. h., es ist

$$\lim_{n\to\infty}\left[\underset{t \in CM}{\text{w. u. G.}} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(t)\right] = \infty.$$

Es gibt daher eine Menge $E_k \subset \langle a, b\rangle$ mit $|CE_k| < 1/k$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} [\underset{t \in E_k}{\text{w. u. G.}}\, s_n(t)] = \infty$, wo $s_n(t)$ die Partialsumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)$ bedeutet. Setzt man $a_{kn}^2 = 1/\underset{t \in E_k}{\text{w. u. G.}}\, s_n(t)$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_{kn} = 0$ und die Reihe (2) in E_k als Majorante von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_n^2(t)}{s_n(t)}$ divergent. Ist nun $a_n = a_{k_i n}$ für $n_i < n \leqslant n_{i+1}$, wobei $\sum\limits_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} a_{k_i n}^2 \varphi_n^2(t) > 1$ in $F_i \subset E_{k_i}$, $|F_i| > |E_{k_i}| - 1/i^2$ $|a_{k_i n}| < 1/i$, so entsteht die Behauptung.

Im zweiten Fall genügt es $\{a_n\}$ (mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) so zu wählen, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$ sei. Wäre nämlich die Reihe in (2) f. ü. konvergent, so hätte sie in einer positiven Menge M eine beschränkte Summe und man hätte (vgl. [123]) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int\limits_M \varphi_n^2(t)\,dt < \infty$; nun kann man aber, wie beim Beweise von [511], $\int\limits_E \varphi_n^2(t)\,dt > 1 - \varkappa > 0$ (mit n-freiem $\varkappa$) zeigen, was $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, gegen unsere Wahl, zur Folge hätte.

Jetzt sind wir in der Lage, die unmittelbar vor [512] gestellte Frage zu beantworten:

Unter den Voraussetzungen von [514] *existiert eine Folge* $\{b_n\}$ [515]
mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *derart, daß*

$$(3) \qquad \limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(t)\right| = \infty$$

f. ü., bzw. in einer positiven Menge gilt.

Beweis: $\{a_n\}$ sei die in (2) (erste Lesart) vorkommende Folge; es sei $b_n = \varepsilon_n a_n$ mit $\varepsilon_n^2 = 1$. Wäre für eine jede $\{\varepsilon_n\}$-Wahl der linksseitige Ausdruck (3) in einer positiven t-Menge M endlich, so hätte man

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(u) \varphi_k(t) \right| < \infty \tag{4}$$

für fast alle u und $t \in M(u)$; $r_k(u)$ ist hier die k-te Rademacher'sche Funktion. Wegen $|M(u)| > 0$ ist die ebene Menge derjenigen (t, u)-Punkte in $<a, b><0, 1>$, welche (4) erfüllen, von positivem ebenem Maße. Wendet man auf die charakteristische Funktion dieser Menge den Fubini'schen Satz über Doppelintegrale (I, § 2, Schluß) an, so kommt man auf eine positive t-Menge T derart, daß für $t_0 \in T$ die Gerade $t = t_0$ stets jene ebene Menge in einer linearen, inbezug auf u positiven Menge $U(t_0)$ schneidet. Es ist daher, für $t = t_0$, (4) für $u \in U$ richtig, wo $|U(t_0)| > 0$; [453] ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \varphi_k^2(t_0) < \infty \qquad (t_0 \in T),$$

was, wegen $|T| > 0$, mit der ersten Lesart von (2) unverträglich ist. Es gibt also eine ε_n-Folge, welche (3) f. ü. realisiert; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ hat $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ zur Folge und damit ist [515] in erster Lesart bewiesen; die zweite wird ganz analog behandelt.

Es sei wieder $\{\varphi_n(t)\}$ ein ONV. Nach [513] ist dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü., also (wegen $l \subset l^2$) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(t)| = \infty$ f. ü. Soll also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \tag{5}$$

in einer positiven Menge absolut konvergieren, so muß $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ sein.

[516] Mehr kann man nur für spezielle Systeme aussagen. Folgt aus der Konvergenz von (5) in einer positiven Menge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so sagen wir, $\{\varphi_n\}$ habe die Eigenschaft C. Soll die Konvergenz f. ü. vorausgesetzt werden, um $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ folgern zu dürfen, so heißt diese Eigenschaft c. Folgt aus der absoluten Konvergenz von (5) in einer positiven bzw. in einer mit $<a, b>$ maßgleichen Menge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, so sagt man, $\{\varphi_n\}$ habe die Eigenschaft D, beziehungsweise d.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft C *ist* [517]

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E |\varphi_n(t)|\, dt > 0 \tag{6}$$

für alle positiven E; dasselbe gilt von D.

Hinlänglichkeit: Es sei $|E| > 0$ und (5) für $t \in E$ konvergent. Nach Egoroff [123] enthält E einen Teil E_1 mit $|E_1| > |E| - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ derart, daß $a_n \varphi_n(t)$ in E_1 gleichmäßig gegen Null strebt, woraus

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \int_{E_1} |\varphi_n(t)|\, dt = 0,$$

also, wegen (6), $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ resultiert. Es ist also (6) für C hinreichend. Für D ist der Beweis ähnlich: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \varphi_n(t)|$ ist in E_1 gleichmäßig konvergent, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{E_1} |\varphi_n(t)|\, dt$$

konvergent; wegen $\int\limits_{E_1} |\varphi_n(t)|\, dt > \alpha > 0$ (mit n-freiem α) ist aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{E_1} |\varphi_n(t)|\, dt < \infty.$$

Notwendigkeit: Wäre (6) nicht erfüllt, also ein E mit $|E| > 0$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E |\varphi_n(t)|\, dt = 0$ vorhanden, so könnte man eine Folge $\{n_k\}$ mit

$$\int_E |\varphi_{n_k}(t)|\, dt < \frac{1}{k^3} \tag{k}$$

bestimmen. Man setze nun $a_{n_k} = k$, $a_n = 0$ für $n \neq n_k$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \varphi_n(t)| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{n_k} \varphi_{n_k}(t)|$ in E f. ü. konvergent, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |a_{n_k}| \cdot |\varphi_{n_k}(t)|\, dt < \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Hier ist aber $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, also weder C noch D vorhanden. Damit haben wir [517] bewiesen.

[518] **Folgerung:** C *und* D *sind äquivalent.* Für das trigonometrische System hat C bereits Cantor erkannt; D ist erst von Denjoy und Lusin bewiesen worden.

[519] Analog verläuft der Beweis des **Satzes:** *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft* c *(oder* d*) ist das Vorhandensein eines* $\varepsilon > 0$, *so daß*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E |\varphi_n(t)|\, dt > 0$$

für alle E *mit* $|CE| < \varepsilon$ *statthat.*

Bemerkung. Nach [511] ist c für beschränkte ON erfüllt, es kommt also, nach [519], solchen Systemen auch d zu. Die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist daher für die absolute Konvergenz f. ü. der betreffenden Orthogonalreihe (5) notwendig; sie ist offenbar — wegen $|\varphi_n(t)| < \alpha$ — auch hinreichend.

§ 2. Konvergenz von Orthogonalentwicklungen.

Die Sätze des § 1 betreffen Orthogonalreihen; die Voraussetzung, eine Reihe sei eine Entwicklung, wird dort nicht eingeführt. Jetzt werde diese Voraussetzung gemacht und zunächst die Konvergenz in einem Punkte untersucht. Sie hängt nicht nur von der Funktion, die entwickelt wird, sondern auch von dem System ab.

In diesen Untersuchungen kommen gewisse Begriffe und Bezeichnungen vor, die wir hier voranstellen wollen. Es sei

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t). \tag{7}$$

Die n-te Partialsumme der rechtsstehenden Entwicklung werde mit $s_n(f;t)$ oder kurz mit $s_n(t)$ bezeichnet. (7) ist mit $a_k = \int_a^b f(u)\,\varphi_k(u)\,du$ gleichbedeutend, es ist daher

$$s_n(t) = \int_a^b K_n(t, u)\, f(u)\, du \tag{8}$$

mit

$$K_n(t, u) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, \varphi_k(u). \tag{9}$$

Die Funktion

$$L_n(t) = \int_a^b |K_n(t, u)|\, du \tag{10}$$

heißt *die* n-te *Lebesgue'sche Funktion* des Systems $\{\varphi_n\}$. $K_n(t, u)$ [521]
heißt *der* n-te *Kern* des Systems $\{\varphi_n\}$. (9) und (10) spielen in der Konvergenztheorie eine wichtige Rolle.

Ist [522]

$$\limsup_{n\to\infty} L_n(t_0) = +\infty,$$

so gibt es eine stetige Funktion $f(t)$ *mit*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n(f; t_0) = +\infty.$$

Es ist nämlich $s_n(f; t_0) = \int_a^b K_n(t_0, u)\, f(u)\, du$ und [154] verbürgt die Existenz der fraglichen Funktion $f(t)$. (Im Falle des trigonometrischen Systems ist $\log n = O(L_n(t))$ für beliebiges t, was die Existenz von Fourierreihen stetiger Funktionen zur Folge hat, die an einer gegebenen Stelle t_0 divergieren). Die Bedingung $L_n(t_0) = O(1)$ ist also notwendig und hinreichend, damit $s_n(f; t_0) = O(1)$ sei für alle stetigen $f(t)$; dies folgt unmittelbar aus (8), (10) und [522].

Für den ganzen Raum L^2 reicht diese Bedingung nicht mehr aus, wie aus dem folgenden Satz ersichtlich (wo nicht einmal etwas über die Lebesgue'schen Funktionen vorausgesetzt wird):

Ist $\{\varphi_n(t)\}$ *ein* ONV, *so gibt es für fast jedes* t_0 *ein* $f(t) \in L^2$ [523]
mit an der Stelle t_0 *divergenter Entwicklung.*

Beweis: Nach [513] ist $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)$ f. ü. divergent; es sei $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t_0) = \infty$; nach [113] gibt es ein $\{a_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t_0) = +\infty$, also mehr, als zu beweisen war.

Ein verwandter Satz für beschränkte ON ist leicht aus [514] zu gewinnen. Wir können dieses Resultat verschärfen, indem wir den Raum M anstatt L^2 einführen. Dazu dient folgender

Mercer'sche Satz für ON-Systeme: *Ist* $|\varphi_n(t)|$ in $<a, b>$ [524]
unter einer n*-freien Schranke gelegen, so gilt für alle* $f(t) \in L$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0.$$

Beweis. Für $\varepsilon>0$ ist $f(t)=\bar f(t)+f_\varepsilon(t)$ mit beschränktem $\bar f(t)$ und mit $\int_a^b |f_\varepsilon(t)|\,dt<\varepsilon$; es ist

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt=\int_a^b \bar f(t)\,\varphi_n(t)\,dt+\int_a^b f_\varepsilon(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Das erste Integral rechts strebt gegen Null nach [264]; ist α eine obere Schranke aller $|\varphi_n(t)|$, so erreicht der Betrag des zweiten Integrals höchstens $\alpha\varepsilon$, es ist also $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt\right|\leqq\alpha\varepsilon$.

[525] *Unter der Voraussetzung von* [524] *gibt es ein positives E derart, daß für ein beliebiges $t_0\in E$ eine beschränkte Funktion vorhanden ist, deren Entwicklung an der Stelle t_0 divergiert.*

Beweis. E sei die Menge aller t, für welche $\varphi_n(t)$ nicht gegen Null konvergiert. Nach dem Beweis von [512] ist $|E|>0$. Es sei $t_0\in E$; wäre die Entwicklung einer jeden beschränkten Funktion $f(t)$ in t_0 konvergent, so wäre ein endlicher

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K_n(t_0,u)\,f(u)\,du$$

für alle beschränkten f vorhanden. Nach [163] gäbe es dann ein $g(u)\in L$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K_n(t_0,u)\,f(u)\,du=\int_a^b g(u)\,f(u)\,du \qquad (f);$$

$g(u)$ ist nichts anderes als die schwache Grenze von $\{K_n(t_0,u)\}$. Man wähle $f(t)=\varphi_p(t)$. Es folgt

$$\varphi_p(t_0)=\int_a^b g(u)\,\varphi_p(u)\,du;$$

für $p\to\infty$ konvergiert das Integral nach [524] gegen Null und $\varphi_p(t_0)$ nicht.

Bemerkung. Läßt man die Voraussetzungen [523] und [524] fallen, so kann man ein System finden, welches jedem $f(t)\in L$ eine durchweg konvergente Entwicklung zuordnet.

Ein derartiges System ist z. B. $\{\varphi_n(t)=\sqrt{2^{n+1}}$ in $(1/2^{n+1},1/2^n)$, sonst $0\}$; es ist ON aber nicht V. Es ist hier stets für $p>n$, $t\in(1/2^{n+1},1/2^n)$

$$s_p(f;t)=a_n\sqrt{2^{n+1}},$$

also ist $\{s_p\}$ konvergent für $t\in(0,1)$ (aber auch für $t=0$, $t=1$). Dagegen bleibt [525] richtig, wenn man die Voraussetzung der Vollständigkeit inbezug auf L^2 einführt. Unser Beispiel zeigt auch, daß ohne diese Voraussetzung [513] nicht gilt.

Gleichmäßige Konvergenz. Jetzt wollen wir die Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz einer Orthogonalentwicklung im ganzen Intervall betrachten.

Es sei $\{\varphi_n\}$ ein ON. *Folgende zwei Bedingungen sind für die gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung einer jeden stetigen Funktion gegen diese Funktion im ganzen Definitionsintervall $<a,b>$ notwendig und hinreichend:* [526]

1^0 *Jede stetige Funktion kann in $<a,b>$ durch entsprechende Linearformen der $\{\varphi\}$ gleichmäßig approximiert werden;*

2^0 *Die Lebesgue'schen Funktionen des Systems sind in $<a,b>$ gemeinsam beschränkt.*

1^0 ist notwendig, denn $s_n(f;t)$ sind die approximierenden Linearformen für $f(t)$. Wäre 2^0 nicht erfüllt, so hätte man eine Indexfolge $\{n_i\}$ und eine Punktfolge $\{t_i\}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty}L_{n_i}(t_i)=+\infty$; nach [154] würde dann eine stetige Funktion $f(t)$ mit

$$\limsup_{i\to\infty}\int_a^b K_{n_i}(t_i,u)\,f(u)\,du=+\infty,$$

d. h. mit $\limsup s_{n_i}(f;t_i)=+\infty$ vorhanden sein, was gegen die gleichmäßige Konvergenz verstößt.

Sei jetzt 1^0 und 2^0 erfüllt. Es sei $|L_n(t)|<\lambda$. Zu $\varepsilon>0$ gibt es ein $w_k(t)=\alpha_1\varphi_1(t)+\ldots+\alpha_k\varphi_k(t)$ mit $|f(t)-w_k(t)|<\varepsilon/2\lambda$ in $<a,b>$; für $m>k$, $n>k$ ist

$$s_m(w_k;t)\equiv s_n(w_k;t)\equiv w_k(t);$$

es ist ferner (wir unterdrücken t in $s\ldots(\ldots;t)$)

$$s_m(f)-s_n(f)=s_m(f-w_k)-s_n(f-w_k),$$

also — wegen (8) —

$$|s_m(f)-s_n(f)| \leqslant \left|\int_a^b K_m(t,u)\,[f(u)-w_k(u)]\,du\right|$$

$$+\left|\int_a^b K_n(t,u)\,[f(u)-w_k(u)]\,du\right|,$$

was mit $|L_n(t)|<\lambda$

$$|s_m(f)-s_n(f)|<2\lambda\,.\,\varepsilon/2\lambda=\varepsilon$$

liefert. Die gleichmäßige Konvergenz von $\{s_n(t)\}$ ist bewiesen. Nach [246] und [373] hat aber 1^0 die Vollständigkeit von $\{\varphi_n\}$ inbezug auf L^2 zur Folge; es muß also $\lim_{n\to\infty} s_n(t)=f(t)$ sein.

Bemerkung. [526] zeigt, daß die Lebesgue'schen Funktionen des Haar'schen und des Franklin'schen Systems gemeinsam beschränkt sind.

Setzt man für $\{\varphi_n\}$ die Stetigkeit voraus und ersetzt 2^0 durch

3^0 $s_n(f;t)=O(1)$ *für alle stetigen* $f(t)$,

so gelangt man zu einem Teilintervall von $<a,b>$, wo die Entwicklungen sämtlicher stetigen Funktionen gleichmäßig gegen diese konvergieren. Es genügt nämlich ein $<a_1,b_1>$ in $<a,b>$ zu finden, wo $\{L_n(t)\}$ gemeinsam beschränkt ist und den Beweis von [526] fast wörtlich zu wiederholen. Ist aber ein solches $<a_1,b_1>$ nicht vorhanden, so gibt es einen Punkt t_1 in (a,b) und einen Index n_1 mit $L_{n_1}(t_1)>1$; dann ist $L_{n_1}(t)>1$ in einer Umgebung I_1 von t_1. In I_1 liegt im Innern ein t_2 mit $L_{n_2}(t_2)>2$, u. s. w. Ist t_0 ein Punkt des Produktes aller I_k, so ist

$$L_{n_k}(t_0)>k \qquad (k),$$

was aber nach [522] der Annahme 3^0 widerspricht.

Die eben gefundenen Teilintervalle der gleichmäßigen Konvergenz liegen überalldicht in $<a,b>$.

Wesentlich-gleichmäßige Konvergenz. Ist eine Funktion bloß beschränkt, so können wir nicht verlangen, daß ihre Entwicklung gleichmäßig konvergiere, denn für stetige ON ist die Reihensumme stetig. Hier ist die wesentlich-gleichmäßige Konvergenz am Platze. Dieser Begriff wurde seinerzeit unzweckmäßig definiert, bevor der Egoroff'sche Satz [123] allgemein bekannt war, der die damalige Definition als mit der Konvergenz f. ü. identisch erwies. Die richtige Definition lautet:

Eine Funktionenfolge heißt wesentlich-gleichmäßig konvergent in $<a,b>$, wenn sie nach Ausschluß einer Menge vom Maße Null gleichmäßig konvergiert. [527]

Ist nun die Entwicklung einer jeden beschränkten Funktion wesentlich-gleichmäßig konvergent?

Die Antwort ist für jedes Orthogonalsystem negativ. [528]

Der Beweis soll nur für L^2-vollständige Systeme geführt werden. Nach [121] sind alle $\varphi_n(t)$ auf einer perfekten, positiven Menge P stetig. t_0 sei ein Punkt von P, wo P (beiderseits) die Dichte 1 hat. $f(t)$ sei $=1$ für $t\leqslant t_0$ und $=0$ für $t>t_0$. Ist die Entwicklung von $f(t)$ wesentlich-gleichmäßig konvergent, also in $P-Q$ gleichmäßig konvergent, wo $|Q|=0$, so ist die Summe der Reihe auf $P-Q$ stetig. Diese Summe ist f. ü. gleich $f(t)$ (nach der Konstruktion [382]), $f(t)$ hat aber eine Unstetigkeit in t_0, die durch Entfernung einer Nullmenge nicht behoben werden kann.

Sind die $L_n(t)$ nicht gemeinsam wesentlich-beschränkt, so liefert [155] eine stetige Funktion mit nicht wesentlich-gleichmäßig konvergenter Entwicklung.

§ 3. Konvergenz fast überall.

Bis jetzt konnten wir nicht behaupten, daß es Entwicklungen mit positiver Divergenzmenge gibt; die Sätze der vorigen §§ geben höchstens überalldicht liegende Divergenzpunkte. Folgendes Beispiel ist also nötig, um zu zeigen, daß die Konvergenz f. ü. keine selbstverständliche Erscheinung bildet:

Es gibt ein ONV *und ein $f(t)\in L$ mit fast überall divergenter Entwicklung.* [531]

Es sei $\varphi_1(t)=1$ in $<0,1>$, $\varphi_2(0)=\varphi_2(1/2)=2$; $\varphi_2(t)$ sei in $<0,1/2>$ symmetrisch inbezug auf $t=1/4$; es sei ferner $2\geqslant\varphi_2(t)\geqslant 1/2$, $\int_0^{1/2}\varphi_2^2(t)\,dt=1/2$; ein solches $\varphi_2(t)$ ist vorhanden und kann stetig gewählt werden; in $(1/2,1>$ sei $\varphi_2(t)=-\varphi_2(t-1/2)$. Dann ist

$$\int_0^1 \varphi_2^2(t)\,dt=1, \qquad \int_0^1 \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,dt=0, \qquad 1/2\leqslant|\varphi_2(t)|\leqslant 2.$$

Allgemein: $<0,1>$ werde in 2^{n-1} gleiche abwechselnd geschlossene und offene Intervalle geteilt; $\varphi_n(t)$ sei stetig in $<0,2^{1-n}>$, symmetrisch inbezug auf $t=2^{-n}$, $\varphi_n(0)=\varphi_n(2^{1-n})=n\geqslant\varphi_n(t)\geqslant 1/2$,

$\int\limits_0^{2^{1-n}} \varphi_n^2\,dt = 2^{1-n}$; im nächsten Intervall soll das Bild der Funktion φ_n an der t-Achse gespiegelt werden, im übernächsten dasselbe wie in $<0, 2^{1-n}>$ sein, u. s. w. abwechselnd (also $\varphi_n(1) = -n$). Es folgt

$$\int\limits_0^1 \varphi_n^2(t)\,dt = 1, \qquad \int\limits_0^1 \varphi_i(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0, \qquad 1/2 \leqslant |\,\varphi_n(t)\,| \leqslant n \qquad (i < n),$$

wobei die Orthogonalität eine Folge der Verteilung der inbezug auf die Vorzeichen verschiedenen, sonst aber kongruenten Funktionsbilder ist. Es ist $\max\limits_n |\varphi_n(t)| = n$; nach [153] gibt es ein $f(t) \in L$ mit

$$\text{(11)} \qquad \limsup_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = +\infty.$$

$\{\varphi_n(t)\}$ werde zu einem ONV $\{\psi_n(t)\}$ ergänzt ([353]); (11) liefert $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, wenn

$$a_n = \int\limits_0^1 f(t)\,\psi_n(t)\,dt$$

geschrieben wird. Nun ist aber $|\varphi_n(t)| \geqslant 1/2$, also, für jedes t,

$$\limsup_{n\to\infty} |\,a_n\,\psi_n(t)\,| = \infty,$$

d. h. mehr als [531] verlangt. (Die Eigenschaft V wurde hier nur inbezug auf M bewiesen; sie inbezug auf L zu beweisen reicht [353] nicht hin).

Dasselbe Beispiel setzt eine Schranke einer eventuellen Erweiterung des Mercer'schen Satzes [524].

Das Problem der Konvergenz durchweg hat keinen Sinn für allgemeine ON, weil ja stets die Werte der Funktionen in einer Nullmenge so abgeändert werden können, daß in dieser Menge Divergenz resultiert; dazu genügt es, daß unendlich viele Koeffizienten von Null verschieden seien. Natürlich ist nur die Frage nach der Konvergenz fast überall. Hier beschränken wir uns auf L^2 und fragen zunächst, ob es eine f. ü. konvergente Teilfolge von $\{s_n(f;t)\}$ gibt. Der Riesz-Fischer'sche Satz [356] und die Konstruktion [382] geben eine positive Antwort auf diese Frage mit dem Vorbehalt, daß die Indizes $\{n_i\}$ nicht ein für allemal (d. h. für alle Funktionen $f(t)$) bestimmt werden sollen. Doch kann die Dichte jener Indexfolge verstärkt werden:

Die Zahlen $v(n)$ mögen mit n gegen $+\infty$ wachsen; es sei [532]
$\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^2\,v(n) < \infty$. *Ferner sei $\{n_k\}$ eine Indexfolge mit*

$$\text{(12)} \qquad k \leqslant v(n_k) < k+1;$$

dann ist die Folge $\{s_{n_k}(t)\}$, d. h. $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n_k} a_i\,\varphi_i(t)\right\}$ f. ü. konvergent.

Beweis: $f(t)$ sei die Funktion mit

$$\int\limits_a^b [f(t) - s_n(t)]^2\,dt = \sum_{i=n+1}^\infty a_i^2 = r_n, \quad \text{also} \quad \int\limits_a^b [f(t) - s_{n_k}(t)]^2\,dt = r_{n_k}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^\infty r_{n_k}$ ist konvergent, denn [111] und (12) geben

$$\sum_{k=1}^\infty r_{n_k} = \sum_{k=1}^\infty (r_{n_k} - r_{n_{k+1}})\,k + \lim_{k\to\infty} k\,r_{n_{k+1}} \leqslant \sum_{i=1}^\infty a_i^2\,v(i).$$

Nach [124] ist also $\sum\limits_{k=1}^\infty [f(t) - s_{n_k}(t)]^2 < \infty$ f. ü., was $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k}(t) = f(t)$ f. ü. zur Folge hat.

Die Konstruktion [382] lieferte bloß $k^2 \leqslant v(n_k) < (k+1)^2$. Eine weitere Verschärfung wird sich als eine Folgerung aus [535] ergeben.

Zusätzliche Annahmen erlauben generelle Indexfolgen zu bestimmen: eine solche Voraussetzung ist z. B. die $(C,1)$-Summierbarkeit:

Ist die Entwicklung einer Funktion $f(t) \in L^2$ nach dem ON $\{\varphi_n\}$ [533]
f. ü. $(C,1)$-summierbar, so ist die Folge

$$\{s_{2^k}(f,t)\}$$

f. ü. konvergent. Hier ist $\{n_k = 2^k\}$ die generelle Indexfolge.

Es sei $\sigma_n(t) = 1/n\,[s_1(t) + s_2(t) + \ldots + s_n(t)]$; $\{\sigma_n(t)\}$ ist voraussetzungsgemäß f. ü. konvergent; man hat sukzessive

$$s_n(t) - \sigma_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\,(k-1)\,\varphi_k(t),$$

$$\int\limits_a^b [s_{2^n}(t) - \sigma_{2^n}(t)]^2\,dt = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{2^n} a_k^2\,(k-1)^2,$$

$$\sum_{n=1}^\infty \int\limits_a^b [s_{2^n}(t) - \sigma_{2^n}(t)]^2\,dt = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{2^n} a_k^2\,(k-1)^2\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^\infty \left(a_k^2\,(k-1)^2 \sum_{n=E\log_2 k}^\infty \frac{1}{4^n}\right) < \sum_{k=1}^\infty a_k^2\,(k-1)^2 \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{2}{k}\right)^2 \leqslant \frac{16}{3}\sum_{k=1}^\infty a_k^2 < \infty;$$

dies mit [124] zeigt die Konvergenz f. ü. der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}[s_{2^n}(t)-\sigma_{2^n}(t)]^2,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2^n}(t)-\sigma_{2^n}(t))=0$ f. ü., woraus die Behauptung [533] unmittelbar hervorgeht.

Ein analoger Satz für andere Summationsmethoden kommt später ([574]) vor.

Jetzt wollen wir die volle Folge $\{s_n(t)\}$ ins Auge fassen. Damit sie f. ü. konvergiere, reicht nach [532] die Bedingung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k^2<\infty$ hin, denn dann darf $v(n)=n$ und demnach in (12) $n_k=k$ gesetzt werden. Weyl, Hobson und Plancherel haben diese Bedingung immer weiter abgeschwächt; Rademacher und Menchoff haben unabhängig voneinander die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\log^2 k,$$

eine nicht mehr verbesserungsfähige Bedingung entdeckt.

[534] Ein **Hilfssatz**: $\{\varphi_k(t)\}$ $(k=1,2,\dots,n)$ sei ON; *es existiert eine Funktion* $\delta(t)\geqslant 0$ *und eine Konstante* $\varkappa$ *mit*

$$1^0\quad \left|\sum_{k=i}^{j}a_k\varphi_k(t)\right|\leqslant\delta(t)\quad \textit{für}\quad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\qquad (n>1),$$

$$2^0\quad \int_a^b\delta^2(t)\,dt\leqslant\varkappa\log^2 n\sum_{k=1}^{n}a_k^2;$$

$\delta(t)$ hängt von den φ und den a ab, dagegen ist $\varkappa$ eine absolute Konstante, also nicht einmal von der Anzahl n abhängig ($\varkappa=(6\log_2 e)^2$ ist z. B. ein zulässiger Wert).

Beweis: Sei zunächst $n=2^r$, r ganzzahlig. Schreibt man $\gamma(t)$ für $^1/_2\,\delta(t)$, so genügt

$$\left|\sum_{k=1}^{j}a_k\varphi_k(t)\right|\leqslant\gamma(t),$$

um 1^0 zu haben. Zerlegen wir das Intervall $(0,n)$ in zwei gleiche Teile $(0,2^{r-1})$, $(2^{r-1},2^r)$; wenn wir jeden dieser Teile wieder in zwei gleiche zerlegen, so haben wir eine zweite Zerlegung von $(0,n)$ (in vier Teile) definiert; wenn wir bis zur r-ten Zerlegung gelangen, so ist 1 die Länge der Teile. Ist $0<j<n$, so ist $(0,j)$ eine Vereinigung von höchstens r punktfremden Teilen, deren jeder

zu einer anderen Zerlegung gehört, wie man aus der dyadischen Darstellung von j abliest; ist $j=n$, so ist $(0,j)$ selbst als („nullte") Zerlegung zu betrachten.

Das Intervall (i,j) sei ein Symbol für die Summe $\sum\limits_{k=i+1}^{j}a_k\varphi_k(t)$. Es ist $s_j(t)=\sum\limits_{q=0}^{r}p_q(t)$; dabei sind die $p_q(t)$ Summen, deren Symbole die eben beschriebene Darstellung von $s_j(t)=(0,j)$ liefern; $p_q(t)$ entspricht der q-ten Zerlegung; manchen q wird dabei 0 als $p_q(t)$ zugeordnet. Die Schwarz'sche Ungleichung führt zu

$$s_j^2(t)\leqslant r\sum_{q=0}^{r}p_q^2(t)$$

und — a fortiori — zu

$$s_j^2(t)\leqslant r\sum_{q=0}^{r}A_q,$$

wo A_q die Summe der Quadrate aller $p_q(t)$ bezeichnet, die — bei festem q — aus $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(t)$ zu gewinnen sind. Schreibt man

$$\gamma^2(t)=r\sum_{q=0}^{r}A_q,$$

so folgt $s_j^2(t)\leqslant\gamma^2(t)$ und

$$\int_a^b\gamma^2(t)\,dt=r\sum_{q=0}^{r}\int_a^b A_q(t)\,dt=r\sum_{q=0}^{r}(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)$$

$$\leqslant(r+1)^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\left(\frac{r+1}{\log n}\right)^2.\log^2 n.\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\left(\frac{r+1}{r}\right)^2(\log_2 e)^2.\log^2 n.\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

Dies gilt im Falle $n=2^r$. Ist aber $2^r<n<2^{r+1}$, so ergänzen wir das System $\{\varphi\}$ durch $\varphi_{n+1}(t),\dots,\varphi_{2^{r+1}}(t)$ und setzen $a_{n+1}=a_{n+2}=\dots=a_{2^{r+1}}=0$. Das zu diesem neuen $\{\varphi\}$- und $\{a\}$-System zugehörige $\gamma(t)$ ist sicherlich für das ursprüngliche System ausreichend, wenn wir nur 1^0 verlangen; es ist aber, nach dem eben Bewiesenen,

$$\int_a^b\gamma^2(t)\,dt\leqslant(r+2)^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\left(\frac{r+2}{\log n}\right)^2.\log^2 n.\sum_{k=1}^{n}a_k^2;$$

es ist ferner

$$\left(\frac{r+2}{\log n}\right)^2<(\log_2 e)^2\cdot\left(\frac{r+2}{r}\right)^2\leqslant 9\,(\log_2 e)^2,$$

also in beiden Fällen

$$\int_a^b \delta^2(t)\,dt = 4\int_a^b \gamma^2(t)\,dt \leqslant 36\,(\log_2 e)^2 . \log^2 n . \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

und hiermit $\varkappa = (6\log_2 e)^2$ als eine in 2^0 stets ausreichende Konstante erkannt.

Es werde bemerkt, daß die Reihenfolge der φ und a wohl $\delta(t)$, nicht aber $\varkappa$ beeinflussen kann.

[534] setzt uns instand beweisen zu können:

[535] *Ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *f. ü. konvergent.*

Wir können nämlich [532] mit $v(n) = \log_2 n$ anwenden; es resultiert die Konvergenz f. ü. von $\{s_{2^k}(t)\}$ und es bleibt bloß

$$\lim_{k\to\infty} [s_n(t) - s_{2^k}(t)] = 0 \quad \text{f. ü.}$$

für $2^k < n < 2^{k+1}$ zu zeigen; [534] lehrt aber, daß

$$(13) \qquad |s_n(t) - s_{2^k}(t)| \leqslant \delta_k(t)$$

mit

$$\int_a^b \delta_k^2(t)\,dt \leqslant \varkappa\,(\log 2^k)^2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i^2$$

ist; daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \delta_k^2(t)\,dt \leqslant \varkappa . \log^2 2 . \sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i^2\right) \leqslant \varkappa \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 i < \infty$$

und somit $\lim_{k\to\infty} \delta_k(t) = 0$ f. ü.; (13) liefert jetzt das Verlangte.

Folgerungen. 1^0 Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \varphi_n(t)}{\log n}$ ist f. ü. konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$; nach einem Kronecker'schen Satz ist also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=2}^{n} a_i \varphi_i(t) = 0 \quad \text{f. ü.},$$

d. h. $s_n(t) = o(\log n)$ f. ü.

2^0 [532] gestattet jetzt folgende Verschärfung: $\{s_{n_k}(t)\}$ ist f. ü. konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_{n_k} \log k}{k}$ konvergiert (vgl. Beweis von [532]). Denn die letzte Bedingung ist mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k+1}^2 + a_{n_k+2}^2 + \dots + a_{n_{k+1}}^2) \log^2 k < \infty$$

äquivalent; man konstruiere ein ON $\{\Phi_k(t)\}$, indem man

$$\Phi_k(t) = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i \varphi_i(t) : \sqrt{\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2} = \frac{1}{b_k} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i \varphi_i$$

setzt (der Divisor b_k soll gleich 1 gesetzt werden, wenn der Radikand verschwindet); wendet man jetzt [535] auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Phi_k(t)$ an, so kommt die Verschärfung zustande.

3^0 [535] erlaubt die Größenordnung der Partialsummen einer Orthogonalreihe abzuschätzen und zwar ohne — wie in 1^0 — vorauszusetzen, die Reihe sei eine Entwicklung. Es ist nämlich stets

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1+2\varepsilon}} < \infty \qquad (\varepsilon > 0);$$

wird

$$c_n = \frac{a_n}{\log n . \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \qquad (n > 1)$$

gesetzt, so wird [535] auf $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$ anwendbar; die letzte Reihe konvergiert f. ü., also gilt nach dem Kronecker'schen Satz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) = o\left(\log n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad \text{f. ü.}$$

Für $a_n = 1$ (n) führt der gleiche Gedanke zu einem schärferen Resultat, wenn man $c_n = n^{-1/2}(\log n)^{-3/2-\varepsilon} (\varepsilon > 0, n > 1)$ wählt; man erhält

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = o\,(n^{1/2}(\log n)^{3/2+\varepsilon}).$$

(Man kann noch etwas weiter vordringen, wenn man geeignete $\{c_n\}$ heranzieht).

In [535] ist die Voraussetzung die schwächste unter allen jener Art. Dies soll durch Gegenbeispiele gezeigt werden; ihre Konstruktion beginnen wir mit folgendem

[536] **Lemma**: *Es gibt für jedes p $(p = 1, 2, \ldots)$ ein System $\{f_{p,m}(t)\}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2p)$ orthogonal in $\langle 0, 5\rangle$ und so beschaffen, daß*

$$1^0 \quad \int_0^5 f^2_{p,m}(t)\,dt < \frac{\varkappa_1}{p}, \qquad 2^0 \quad |f_{p,m}(t) + f_{p,m+1}(t) + \ldots + f_{p,2p-1}(t)| > \varkappa_2 \log p,$$

wobei 2^0 für alle $t \in \langle 1, 2\rangle$ gilt, m in 2^0 von t abhängt, dagegen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ absolute Konstanten sind.

Es sei für $t \in \langle 0, 4)$

$$f_{p,m}(t) = \frac{1}{k-p-m-1/2}, \text{ wo } t \in \left\langle \frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}\right) \quad k = 1, 2, \ldots, 4p,\ m = 1, \ldots, 2p;$$

es folgt

$$(14) \qquad \int_0^4 f^2_{p,m}(t)\,dt = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{(k-p-m-1/2)^2} \leqslant 2 \cdot \frac{4}{p}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = \frac{\pi^2}{p};$$

für $m > n$ hat man

$$J_{m,n} = \int_0^4 f_{p,m}(t) f_{p,n}(t)\,dt = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{k-p-m-1/2} \cdot \frac{1}{k-p-n-1/2}$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{m-n}\sum_{k=1}^{4p}\left(\frac{1}{k-p-m-1/2} - \frac{1}{k-p-n-1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{p(m-n)}\left[\sum_{j=1-p-m}^{3p-m} \frac{1}{j-1/2} - \sum_{j=1-p-n}^{3p-n} \frac{1}{j-1/2}\right]$$

$$= \frac{1}{p(m-n)}\left[\sum_{1-p-m}^{-p-n} \frac{1}{j-1/2} - \sum_{3p-m+1}^{3p-n} \frac{1}{j-1/2}\right],$$

$$(15) \qquad |J_{m,n}| \leqslant \frac{1}{p(m-n)} \cdot \left[\frac{m-n}{p+n+1/2} + \frac{m-n}{3p-m+1/2}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p+1/2} + \frac{1}{p+1/2}\right) < \frac{2}{p^2}.$$

Jetzt sollen die $\{f\}$ in $\langle 4, 5\rangle$ erklärt werden, so daß sich in $\langle 0, 5\rangle$ Orthogonalität einstellt. Die „Kranichschwärme" [321] helfen uns jetzt. Wir teilen $\langle 4, 5\rangle$ in soviel gleiche Teile, als es Zahlenpaare $[m, n]$ mit $2p \geqslant m > n$ gibt, d. h. in $s = p(2p-1)$ Teile. Wir setzen

$$(16) \quad f_{p,m}(t) = \sqrt{s \,.\, |\alpha_{mj}|} \quad \text{mit} \quad \alpha_{mj} = \int_0^4 f_{p,m}(t) . f_{p,j}(t)\,dt \quad (j = 1, 2, \ldots, m-1),$$

in den Teilintervallen, die den Einsen der ersten Gruppe im Schwarm entsprechen; in denjenigen, die den alleinstehenden Einsen zugeordnet sind, sei

$$(17) \qquad f_{p,m}(t) = -\sqrt{s \,.\, |\alpha_{mj}|} \,.\, \operatorname{sign} \alpha_{mj} \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, 2p),$$

in allen anderen Punkten sei $f_{p,m}(t) = 0$.

$\{f\}$ ist jetzt orthogonal in $\langle 0, 5\rangle$; 1^0 ist erfüllt, denn (14), (15), (16) und (17) ergeben

$$\int_0^5 f^2_{p,m}(t)\,dt = \int_0^4 + \int_4^5 \leqslant \frac{\pi^2}{p} + \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_{mj}| + \sum_{j=m+1}^{2p} |\alpha_{mj}|$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{p} + \frac{2}{p^2}(m - 1 + 2p - m) < \frac{14}{p}.$$

2^0 ist noch zu prüfen. Es sei $t \in \langle 1, 2\rangle$, z. B. $t \in \left\langle 1 + \frac{m-1}{p}, 1 + \frac{m}{p}\right)$ $(m \leqslant p+1)$; alsdann ist

$$f_{p,m}(t) + f_{p,m+1}(t) + \ldots + f_{p,2p-1}(t) = \frac{1}{-1/2} + \frac{1}{-1-1/2} + \ldots + \frac{1}{-(2p-1-m)-1/2}$$

und

$$\left|\sum_{i=m}^{2p-1} f_{p,i}(t)\right| > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2p-m} > \log p \qquad (p > 1).$$

Im Falle $p = 1$ ist der abzuschätzende Betrag wenigstens 1, so daß 2^0 mit $\varkappa_2 = 1$ stets gilt.

Jetzt gehen wir daran, zu zeigen, daß die Ersetzung des Faktors $(\log n)^2$ in [535] durch eine Funktion $w(n)$ von schwächerem Wachstum zu einem **Gegenbeispiel** Anlaß gibt:

Ist $0 \leqslant w(n) = o(\log^2 n)$, $w(n) \leqslant w(n+1)$, so gibt es ein ON [537]
$\{\varphi_n(t)\}$ und eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit

$$1^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty, \qquad 2^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \ \textit{durchweg divergent},$$

wie zuerst Menchoff festgestellt hat.

Wir konstruieren zunächst eine Folge $\{p_k\}$ mit

$$1)\ \ p_1 = 0, \qquad 2)\ \ 1 + 2(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1}) < p_k \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$(18) \qquad 3)\ \ \frac{w(n)}{(\log n)^2} < \frac{1}{k^2} \qquad \text{für} \quad n \geqslant p_k.$$

Die Glieder der gesuchten Reihe 2^0 werden in Gruppen G_k eingeteilt werden, und zwar sollen die Glieder vom Index n zu G_k gehören, wenn $N_{k-1} < n \leqslant N_k$, wo $N_0 = 0$ und $N_k = 1 + 2(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$

die neue Folge $\{N_k\}$ definieren. Es ist offenbar $N_1=1$, $N_k-N_{k-1}=2p_k$ für $k\geqslant 2$ und, wegen 2), $N_{k-1}<p_k$, also $N_k<3p_k$ $(k\geqslant 2)$. Jetzt sollen die Glieder $\psi_k(t)=a_k\varphi_k(t)$ sukzessive aufgebaut werden. Es sei $\psi_1(t)=1$ in $<0,1>$. Weitere $\psi(t)$ werden mit Hilfe der $\{f_{p,m}\}$ aus [536] konstruiert, indem man t ganzlinear transformiert und ψ in den Teilintervallen von $<0,1>$ verschiedenen f gleichsetzt. Dies mag bis zu den Gliedern der Gruppe G_k einschließlich geschehen sein. Da alle gewonnenen ψ streckenweise konstant sind, so gibt es eine endliche Einteilung von $<0,1>$ in $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, so daß alle jene ψ in jedem Intervall Δ konstant sind.

Seien Δ_i' und Δ_i'' die beiden Hälften von Δ_i. Die Funktion $\psi_n(t)$, aus der Gruppe G_{k+1}, werde jetzt erklärt: $n-N_k$ heiße m; es ist $0<m\leqslant 2p_{k+1}$; $h_{p,m}(t,P)$ bezeichne die Funktion, die man in $<\alpha,\beta>\equiv P$ erhält, wenn man in $f_{p,m}(u)$ das Intervall $0\leqslant u\leqslant 5$ ganzlinear auf $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ transformiert; es ist $\int\limits_{\alpha}^{\beta} h_{p,m}^2(t,P)\,dt=(\beta-\alpha)\int\limits_0^5 f_{p,m}^2(t)\,dt$; es sei nun

$$(19)\qquad \psi_n(t)=\pm\frac{h_{p_{k+1},m}(t,\Delta)}{\log p_{k+1}}\quad\text{in}\quad \begin{matrix}\Delta=\Delta_i' & \text{(oberes Vorzeichen)}\\ \Delta=\Delta_i'' & \text{(unteres Vorzeichen)}\end{matrix}\quad (i).$$

$\{\psi_n(t)\}$ ist ein Orthogonalsystem. Gehört nämlich ψ_r zu einer anderen Gruppe als ψ_s und $r>s$, so ist in allen Δ der ψ_r enthaltenden Gruppe ψ_s konstant, aber das Integral von $\psi_r(t)$ über ein solches Δ Null, wie (19) zeigt. Ist $\psi_r\in G_k$, $\psi_s\in G_k$, so ist

$$\int\limits_0^1\psi_r(t)\,\psi_s(t)\,dt=\sum_i\Bigl(\int\limits_{\Delta_i'}\psi_r\,\psi_s\,dt+\int\limits_{\Delta_i''}\psi_r\,\psi_s\,dt\Bigr),$$

aber

$$\int\limits_{\Delta_i'}\psi_r(t)\,\psi_s(t)\,dt=\frac{1}{\log^2 p_k}\int\limits_{\Delta_i'}h_{p_k,m_r}(t)\,h_{p_k,m_s}(t)\,dt=0,$$

wegen der Orthogonalität der f in [536] und desgleichen für Δ_i''.

Jetzt möge die Eigenschaft [537] 1⁰ bei der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,\varphi_n(t)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)$ nachgewiesen werden. Es ist $\int\limits_0^1\psi_1^2(t)\,dt=1$ und für $n>1$

$$\int\limits_0^1\psi_n^2(t)\,dt=\sum_i\frac{1}{\log^2 p_k}\Bigl[\int\limits_{\Delta_i'}h_{p_k,m}^2(t)\,dt+\int\limits_{\Delta_i''}h_{p_k,m}^2(t)\,dt\Bigr]$$
$$=\sum_i\frac{|\Delta_i|}{\log^2 p_k}\int\limits_0^5 f_{p_k,m}^2(t)\,dt<\frac{\varkappa_1}{p_k\log^2 p_k}$$

(nach [536] 1⁰). $\varphi_n(t)$ ist normiert, also ist in $\psi_n(t)=a_n\,\varphi_n(t)$ $(n>1)$

$$a_n^2=\int\limits_0^1\psi_n^2(t)\,dt<\frac{\varkappa_1}{p_k\log^2 p_k},$$

und, wegen $p_{k-1}<N_{k-1}<n\leqslant N_k$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\,w(n)\leqslant\varkappa_1\sum_{k=2}^{\infty}\frac{N_k-N_{k-1}}{p_k\log^2 p_k}\,w(N_k)$$
$$=2\varkappa_1\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log^2 p_k}\cdot\frac{w(N_k)}{\log^2 N_k}\cdot\log^2 N_k<2\varkappa_1\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log^2 N_k}{(k-1)^2\log^2 p_k},$$

wobei (18) und die darauffolgenden Ungleichungen zur Anwendung gelangen; u. a. war auch $N_k<3p_k$ $(k\geqslant 2)$, also ist (mit geeignetem $\varkappa_3$) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n^2\,w(n)<\varkappa_3\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^2}<\infty$, w. z. b. w.

[537] 2⁰ bleibt zu beweisen. Die Gliedergruppe G_k von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)$ stammt von den $f_{p,m}(t)$ mit festem p; es ist nämlich in Δ_i'

$$\psi_n(t)=\frac{h_{p,m}(t,\Delta_i')}{\log p}$$

mit $m=n-N_{k-1}$, $p=p_k$; nach [536] 2⁰ gibt es ein Teilintervall von Δ_i' von der Länge $|\Delta_i'|/5$, wo $m(t)$, also auch $n(t)$, der Ungleichung

$$(20)\qquad |\psi_n(t)+\psi_{n+1}(t)+\dots+\psi_{n+r}(t)|>\varkappa_2$$

gemäß bestimmbar ist; $n+r=N_{k-1}+2p-1$ definiert r. Ähnlich ist es in Δ_i''. Demnach gilt (20) in E_k vom Maß $1/5$.

E sei $=\limsup\limits_{k\to\infty}E_k$, d. h. $E=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(E_k+E_{k+1}+\dots)$. Wir behaupten die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)$ in E. Denn jedes $t\in E$ gehört zu unendlich vielen E_k, also ist Ungleichung (20) für unendlich viele n realisiert.

Das Maß von E ist 1; man hat nämlich:

$$|E| = \lim_{k\to\infty} |E_k + E_{k+1} + \ldots|,$$

andererseits ist $|C(E_k + E_{k+1})| = |CE_k . CE_{k+1}| = (1 - {}^1/_5)^2$, denn CE_k besteht aus endlich vielen Intervallen und es wird daraus CE_{k+1}, indem von jedem Intervall nur ${}^4/_5$ übrig bleibt. Es folgt $|E_k + E_{k+1}| = 1 - ({}^4/_5)^2$, $|E_k + E_{k+1} + \ldots + E_{k+s}| = 1 - ({}^4/_5)^{s+1}$, also

$$|E| = \lim_{s\to\infty} (1 - ({}^4/_5)^s) = 1.$$

In CE, welches das Maß Null hat, sollen jetzt die $\varphi_n(t)$ abgeändert werden, so daß $\psi_n(t) = 1$ in CE sei. Dadurch wird weder die Orthogonalität noch die Normierung gestört und die Divergenz in $<0,1>$ erreicht. Es ist leicht aus $<0,1>$ ein beliebiges $<a,b>$ zu machen; desgleichen bietet die Vervollständigung von $\{\varphi_n\}$ keine Schwierigkeit. —

Es gibt beschränkte ON $\{\varphi_n\}$ und entsprechende $\{a_n\}$, $w(n)$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty$, $0 \leqslant w(n) = o(\log n)$ und durchweg divergentem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$. Doch ist es nicht bekannt, ob für beschränkte ON die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log n$ bereits die Konvergenz f. ü. der Orthogonalreihe sichert.

§ 4. Unbedingte Konvergenz.

[535] verbürgt die Konvergenz einer Orthogonalreihe; der Satz sagt aber nichts darüber aus, wie sich die Reihe nach einer Umordnung der Glieder verhalten wird. Wann ist aber eine Reihe bei jeder Anordnung konvergent, von einer Nullmenge abgesehen (die mit der Anordnung variieren darf)?

Da genügt eine ein wenig stärkere Bedingung:

[541] *Es sei* $\lim\limits_{n\to\infty} w(n) = +\infty$, $w(n) \leqslant w(n+1)$, *und eine wachsende Indexfolge* $\{n_k\}$, *sowie eine Konstante* $\varkappa'$ *mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w(n_k)} < \infty, \qquad \log n_{k+1} < \varkappa' \log n_k \tag{k}$$

vorhanden; die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) \log^2 n$$

hat die Konvergenz f. ü. der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *bei jeder Anordnung zur Folge.*

Beweis: $n = g(s)$ sei die Funktion, welche die Umordnung definiert, d. h. $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{g(s)} \varphi_{g(s)}(t)$ sei die neue Anordnung von (5). H_k sei die Menge der natürlichen s mit $n_{k-1} < s \leqslant n_k$ $(n_0 = 0)$. G_k sei $g(H_k)$, d. h. die aus den Zahlen

$$g(n_{k-1}+1),\ g(n_{k-1}+2),\ \ldots,\ g(n_k)$$

bestehende Menge; diese Zahlen sollen — unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge — mit

$$g_1(k),\ g_2(k),\ \ldots,\ g_{r_k}(k)$$

bezeichnet werden; $r_k = n_k - n_{k-1}$. [534] liefert für $1 \leqslant n \leqslant m < r_k$

$$\left|\sum_{i=n}^{m} a_{g_i} \varphi_{g_i}(t)\right| \leqslant \delta_k(t) \quad \text{mit} \quad \int_a^b \delta_k^2(t)\,dt \leqslant \varkappa \log^2 r_k . \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^2 .$$

Nach Voraussetzung ist also

$$w(n_{k-1}) \int_a^b \delta_k^2(t)\,dt \leqslant \varkappa\, w(n_{k-1}) . \varkappa'^2 \log^2 n_{k-1} . \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^2$$

$$\leqslant \varkappa_4 \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^2 w(i) \log^2 i .$$

Für $1 = n = m = r_k$ ist

$$w(n_{k-1}) \int_a^b \delta_k^2(t)\,dt \leqslant \varkappa_4\, a_{n_k}^2 w(n_k) \log^2 n_k .$$

Summiert man beiderseits, so kommt

$$\sum_{k=1}^{\infty} w(n_{k-1}) \int_a^b \delta_k^2(t)\,dt \leqslant \varkappa_4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) \log^2 n,$$

was die Konvergenz f. ü. von

$$\sum_{k=1}^{\infty} w(n_{k-1})\, \delta_k^2(t) \tag{21}$$

bewirkt. Sei t_0 ein Konvergenzpunkt der letzten Reihe, $\varepsilon > 0$,

j so, daß $\sum\limits_{k=j}^{\infty}\frac{1}{w(n_k)}<\varepsilon^2$, N so, daß für $m\geqq n>N$ die Zahlen $g(s)$ $(n\leqq s\leqq m)$ zu den Gruppen G_k mit $k\geqq j$ gehören; dann ist

$$\left|\sum_{s=n}^{m} a_{g(s)}\varphi_{g(s)}(t_0)\right|\leqq\sum_{k=j}^{\infty}\delta_k(t_0)\leqq\sqrt{\sum_{k=j}^{\infty}\delta_k^2\, w(n_{k-1})\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{w(n_k)}}\leqq\varepsilon\rho_{j-1},$$

wo ρ_ν^2 den ν-ten Rest der Reihe (21) bezeichnet. Damit ist die Konvergenz f. ü. der umgeordneten Reihe begründet worden.

Als Anwendung bekommen wir den Satz:

[542] *Ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^{2-\varepsilon}<\infty$ *für ein positives* $\varepsilon<2$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t)$ *f. ü. konvergent und zwar bei jeder Anordnung.*

Man ordnet $\{|a_n|\}$ in eine nichtwachsende Folge $\{|a_{n(s)}|\}$ um, deduziert aus $\sum\limits_{s=1}^{\infty}|a_{n(s)}|^{2-\varepsilon}<\infty$ $\lim\limits_{s\to\infty}s\,|a_{n(s)}|^{2-\varepsilon}=0$, daraus $a_{n(s)}^2<s^{-\frac{2}{2-\varepsilon}}$ für große s, also

$$\sum_{s=1}^{\infty}a_{n(s)}^2(\log s)^2(\log\log s)^{1+\varepsilon}<\infty;$$

hier hat $w(n)=(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ die Eigenschaften der Voraussetzung von [541] (z. B. mit $n_k=2^{2^k}$), was den Beweis abschließt.

Es möge noch ein Satz über unbedingte Konvergenz angegeben werden:

[543] *Ist* $w(t)$ *mit* t *gegen* $+\infty$ *wachsend,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/w(n)<\infty$ *und*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\, w[\log|\log|a_n||]\log^2|a_n|<\infty,\qquad\lim_{n\to\infty}a_n=0,\tag{22}$$

so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t)$ *f. ü. (unbedingt) konvergent.*

(22) bleibt bei jeder Umordnung der Reihe bestehen. Wir können also voraussetzen, $\{|a_n|\}$ sei nichtwachsend. Auch die Annahme $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=1$ schadet nicht der Allgemeinheit. G_n sei die Gesamtheit der a_m mit $1/n>|a_m|^2\geqq 1/n+1$ und $A(m)=w(\log\log\sqrt{n})$ für $a_m\in G_n$. Dann ist $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m^2A(m)\log^2 m<\infty$, denn es gilt (22) und

$$w(\log|\log|a_m||)\geqq w(\log\log\sqrt{n})=A(m),$$
$$\log^2 m\leqq 4\log^2 n\leqq 16\log^2|a_m|,$$

da in G_n höchstens n Elemente vorkommen $(\Sigma a_n^2=1)$, was $m\leqq 1+2+\ldots+n\leqq n^2$ impliziert. Auf diese Weise sind die zu [541] erforderlichen Bedingungen realisiert: $A(m)$ wächst gegen $+\infty$, $\log_2\log_2\sqrt{n_k}=k$ gibt $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1/A(n_k)<\infty$ (wegen $\Sigma\,1/w(n)<\infty$) und $\log n_{k+1}=2\log n_k$. Es ist daher die umgeordnete, also auch die ursprüngliche Reihe f. ü. unbedingt konvergent.

§ 5. Die Bedeutung der Lebesgue'schen Funktionen für die Konvergenz.

Die Ausführungen der §§ 3 und 4 über Konvergenz betreffen allgemeine ON. Will man schärfere Ergebnisse erlangen, so muß man die Systeme spezialisieren. Eine Eigenschaft, welche mehr oder weniger scharfe Konvergenzsätze zeitigt, ist die Größenordnung der Lebesgue'schen Funktion $L_n(t)$. Bevor über diese etwas vorausgesetzt wird, möge eine allgemeingültige Abschätzung vorgenommen werden:

Für jedes ON *ist* $L_n(t)=o(\sqrt{n(\log n)^{1+\varepsilon}})$ *f. ü. für jedes* $\varepsilon>0$. [551]

Dies hat als Grund die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}\int_a^b\varphi_n^2(t)\,dt=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}.$$

Es ist nämlich dann (nach [124]) auch $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\varphi_n^2(t)/n(\log n)^{1+\varepsilon}$ f. ü. konvergent, also auch (nach dem oft benutzten Kronecker'schen Satz)

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(t)=o(n\log^{1+\varepsilon}n)\quad\text{f. ü.}\tag{23}$$

Die Schwarz'sche Ungleichung gibt aber $L_n^2(t)\leqq(b-a)\int\limits_a^b K_n^2(t,u)\,du$ $=(b-a)\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k^2(t)$, was mit (23) zu [551] führt.

Ist ein ON *beschränkt, so ist sogar* $L_n(t)=O(\sqrt{n})$, denn [552]

$$L_n^2(t)\leqq(b-a)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(t)\leqq A^2(b-a)\,n$$

gilt f. ü., wegen $|\varphi_n(t)| \leqslant A$ f. ü. (n). Dies ist die beste Abschätzung, weil das Rademacher'sche System genau diese Größenordnung liefert. [552] läßt eine Variante zu: man kann die Beschränktkeit des ON durch die Bedingung $L_n(t) = \text{const.}$ ersetzen. Dann ist nämlich

$$L_n(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_n(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b |K_n(t,u)|\,du\,dt,$$

also

$$L_n^2(t) \leqslant \int_a^b\int_a^b K_n^2(t,u)\,dt\,du = n.$$

Um zu anderen Konvergenzkriterien zu gelangen, brauchen wir den

[553] Hilfssatz: *$F(\xi,\eta,t)$ sei in den Variabeln ξ,η symmetrisch und für jedes in $<a,b> <a,b>$ integrierbare $\lambda(\xi,\eta) = t$ integrierbar in $<a,b> <a,b>$; $\lambda(\xi,\eta)$ sei $= \min[\lambda(\xi),\lambda(\eta)]$; Behauptung:*

$$\left|\int_a^b\int_a^b F(\xi,\eta,\lambda(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant 2\int_a^b d\eta \int_a^b |F(\xi,\eta,\lambda(\eta))|\,d\xi.$$

Beweis. Das Quadrat $<a,b> <a,b>$ werde in zwei Mengen M_1, M_2 zerlegt:

$$M_1 = E[\lambda(\xi) \leqslant \lambda(\eta)], \qquad M_2 = E[\lambda(\xi) > \lambda(\eta)];$$

offenbar ist $\lambda(\xi,\eta) = \lambda(\xi)$ in M_1, $\lambda(\xi,\eta) = \lambda(\eta)$ in M_2. Demnach:

$$\left|\int_a^b\int_a^b F(\xi,\eta,\lambda(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant \iint_{M_1} |F(\xi,\eta,\lambda(\xi))|\,d\xi\,d\eta + \iint_{M_2} |F(\xi,\eta,\lambda(\eta))|\,d\xi\,d\eta$$
$$\leqslant \int_a^b\int_a^b [|F(\xi,\eta,\lambda(\xi))| + |F(\xi,\eta,\lambda(\eta))|]\,d\xi\,d\eta.$$

Im letzten Integral darf $F(\xi,\eta,\lambda(\xi))$ durch $F(\eta,\xi,\lambda(\xi))$ ersetzt werden; tut man es und vertauscht ξ und η, so kommt

$$\left|\int_a^b\int_a^b F(\xi,\eta,\lambda(\xi,\eta))\right| d\xi\,d\eta \leqslant 2\int_a^b d\eta \int_a^b |F(\xi,\eta,\lambda(\eta))|\,d\xi.$$

[554] *Ist $w(n)$ positiv und nichtabnehmend, $L_n(t) \leqslant \varkappa w^2(n)$ in einer t-Menge E, $f(t) \in L^2$, $s_n(t)$ die Partialsumme der Entwicklung von $f(t)$, so ist*

$$s_n(t) = O(w(n))$$

fast überall in E.

Beweis: $s_n(t) = \int_a^b f(u)\,K_n(t,u)\,du$; sei

$$v_n(t) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{s_k(t)}{w(k)} = \frac{s_p(t)}{w(p)}, \qquad p = p(t,n).$$

$\{v_n(t)\}$ ist nichtabnehmend; wir werden zeigen, daß $J_n = \int_E v_n(t)\,dt$ einem Grenzwert zustrebt, um hieraus — auf Grund von [124] — die Existenz von $\lim_{n\to\infty} v_n(t)$ f. ü. in E zu folgern.

$$J_n = \int_E dt \int_a^b \frac{f(u)\,K_p(t,u)}{w(p)}\,du = \int_a^b du\,.\,f(u) \int_E \frac{K_p(t,u)}{w(p)}\,dt,$$

und, wegen [127],

$$J_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(u)\,du\,.\int_a^b \left[\int_E \frac{K_p(t,u)}{w(p)}\,dt\right]^2 du.$$

Der zweite Faktor rechts ist aber, wenn $p(t_1,n) = q$ geschrieben wird,

$$(24)\quad \int_a^b du\left[\int_E \frac{K_p(t,u)}{w(p)}\,dt \int_E \frac{K_q(t_1,u)}{w(q)}\,dt_1\right] = \int_E\int_E\int_a^b \frac{K_p(t,u)\,K_q(t_1,u)}{w(p)\,w(q)}\,du\,dt\,dt_1.$$

Die Orthogonalität gibt

$$\int_a^b K_p(t,u)\,K_q(t_1,u)\,du = K_r(t,t_1) \quad \text{mit } r = \min(p,q).$$

Infolgedessen ist das Integral (24) höchstens gleich

$$\int_E\int_E \frac{|K_r(t,t_1)|}{w^2(r)}\,dt\,dt_1,$$

dieses Integral aber übertrifft nicht — nach [553] —

$$2\int_E dt_1 \int_E \frac{|K_q(t,t_1)|}{w^2(q)}\,dt \leqslant 2\varkappa\,|E|.$$

Damit ist der Beweis zu Ende. Ist $L_n(t)$ beschränkt in E, so ist $s_n(t)$ f. ü. in E beschränkt, wie ersichtlich.

Ist $w(n)$ positiv und gegen $+\infty$ wachsend, $L_n(t) \leqslant \varkappa w^2(n)$ in [555]
E und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w^2(n) < \infty$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ f. ü. in E konvergent.

Beweis. Wählt man $\{n_k\}$ gemäß $k \leqslant w^2(n_k) < k+1$ für $k > w^2(1) - 1$, so wird $\{s_{n_k}(t)\}$ laut Annahme und [532] f. ü. konvergent. Es bleibt also $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n(t) - s_{n_k}(t)) = 0$ f. ü. in E für $n_k < n < n_{k+1}$ zu zeigen. Wird $\{c_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$, $c_{n+1} \geqslant c_n > 0$, und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\, w(n)\, c_n < \infty$$

bestimmt und $b_n = a_n\, w(n)\, c_n$ gesetzt, so folgt nach [111]

$$s_n(t) - s_{n_k}(t) = \sum_{i=n_k+1}^{n} b_i \varphi_i(t) \frac{1}{c_i w(i)} = \sum_{i=n_k+1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} b_j \varphi_j(t)\right)\left(\frac{1}{c_i w(i)} - \frac{1}{c_{i+1} w(i+1)}\right)$$
$$- \frac{1}{c_{n_k+1}\, w(n_k+1)} \sum_{j=1}^{n_k} b_j\, \varphi_j(t) + \frac{1}{c_{n+1}\, w(n+1)} \sum_{j=1}^{n} b_j\, \varphi_j(t).$$

Nach [554] ist $\left|\sum\limits_{j=1}^{i} b_j\, \varphi_j(t)\right| < \alpha(t)\, w(i)$ f. ü. in E, also

$$|s_n(t) - s_{n_k}(t)| < \alpha(t)\, w(n_{k+1}) \left[\frac{1}{c_{n_k}\, w(n_k)} - \frac{1}{c_{n+1}\, w(n+1)}\right] + \frac{\alpha(t)\, w(n_k)}{c_{n_k}\, w(n_k)}$$
$$+ \frac{\alpha(t)\, w(n)}{c_n\, w(n)} \leqslant \alpha(t) \sqrt{k+2} \left[\frac{1}{c_{n_k}\sqrt{k}} - \frac{1}{c_{n+1}\sqrt{k+2}}\right] + \frac{2\alpha(t)}{c_{n_k}},$$

wo das rechte Glied unabhängig von n gegen Null strebt.

Bemerkung. Unter der Voraussetzung $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = +\infty$ mit [554] ist nach [555] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \varphi_n(t)}{w(n)}$ f. ü. in E konvergent; daraus folgt (Satz von Kronecker)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(t) = o\,(w(n)) \quad \text{f. ü. in } E,$$

also eine schärfere Variante von [554] (die aber ohne $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = +\infty$ falsch wäre). Ein noch einfacheres Raisonnement gibt den

[556] Satz: *$L_n(t) \leqslant \varkappa$ in E und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ haben die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(t)$ f. ü. in E zur Folge.*

Dann ist nämlich eine Folge $\{w(n)\}$ mit den Eigenschaften [555] bestimmbar und jener Satz anwendbar.

[555] ergibt für das trigonometrische System die Bedingung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \log k < \infty$ als hinreichend für die Konvergenz von

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ f. ü., denn die Lebesgue'schen Konstanten haben hier die Größenordnung $\log n$, also ist $\sqrt{\log(n+1)}$ ein passendes $w(n)$.

§ 6. **Allgemeines über Konvergenz.**

Wir betrachten in diesem § beliebige Systeme und untersuchen das Konvergenzverhalten der Entwicklungen von Funktionen einer gegebenen Klasse. $s_n(f;t) = \int_a^b K_n(t,u) f(u)\, du$ ist eine lineare Operation im Raume X, der mit der betrachteten Funktionenklasse identisch ist (z. B. $X = L$, $X = L^2$, u. s. w.). Setzt man $s_n(f;t) = F_n(f)$ und wendet [159] an, so sieht man, daß *einem jeden System ON $\{\varphi_n\}$* [561]
und dem Raume X eine Menge $T \subset \langle a, b \rangle$ entspricht, so daß

1^0 $\limsup\limits_{n\to\infty} |s_n(f;t)| < \infty$ f. ü. in T für jedes $f \in X$,

2^0 $\limsup\limits_{n\to\infty} |s_n(f;t)| = \infty$ f. ü. in CT für jedes $f \in X$ mit Ausnahme eines (event. leeren) Teiles von X von erster Kategorie.

T kann vom Maße Null sein, wie es bei dem trigonometrischen System für $X = L$ der Fall ist. Es existiert nämlich ein Kolmogoroff'sches Beispiel einer integrierbaren Funktion, deren Fourierentwicklung überall unbeschränkt divergiert, so daß 2^0 überall in $\langle 0, 2\pi \rangle$ für dieses besondere $f \in L$ gilt. In diesem Falle lehrt [561], daß die „meisten" integrierbaren Funktionen die Eigenschaft des Kolmogoroff'schen Beispiels teilen. Dagegen hat T das Maß 1, wenn $\{\varphi_n\}$ das Haar'sche System ist und $X = L$.

T kann ein beliebiges Maß haben: wählt man z. B. ein $\{\varphi_n\}$, welches in einer Hälfte des Intervalls mit dem (auf diese Hälfte reduzierten) Haar'schen, in der zweiten mit dem (reduzierten) trigonometrischen System identisch ist, so hat T, für $X = L$, die Hälfte der Intervallänge als Maß.

Ist $X = L^2$, so ist die Entwicklung einer beliebigen Funktion aus L^2 f. ü. in T konvergent; dies folgt aus 1^0, wenn man ähnlich wie beim Beweise von [556] verfährt.

[562] *Ist $\{\varphi_n\}$ inbezug auf X abgeschlossen und T die t-Menge des Satzes* [561], *so ist die Entwicklung einer jeden Funktion $f(t) \in X$ nach $\{\varphi_n\}$ f. ü. in T gegen $f(t)$ konvergent.*

Beweis: Nach [561] haben die linearen Operationen $s_n(f;t)$ die dort mit 1^0 bezeichnete Eigenschaft, es sind also die Voraussetzungen des Lemmas [158] erfüllt, wenn man die Bedingung $\omega > 0$ fallen läßt; die damaligen T_x, $x(\tau)$, $u(\ldots n)$ heißen jetzt T, $f(t)$, $s_n(\ldots)$. Wir brauchen hier nicht die Behauptung des Lemmas, sondern den Gedankengang des Beweises. Darnach gibt es eine Zahlenfolge $\{m_p\}$, eine Folge $\{K_p\}$ von Kugeln in X und eine Folge von t-Mengen $R^{(p)}(f)$, so daß für $f \in K_p$, $t \in R^{(p)}(f)$

$$|s_n(f;t)| \leqslant m_p$$

für alle n gilt; es ist $R^{(p)}(f) \subset T$ und $|T - R^{(p)}(f)| < \delta_p$ mit $\lim\limits_{p\to\infty} \delta_p = 0$. Ist ρ_p der Radius von K_p, $f_0 \in X$, $\|f_0\| \leqslant \rho_p/pm_p$ und z_p der Mittelpunkt von K_p, so liegt $z_p + pm_p f_0 = y_p$ in K_p, also ist

$$|s_n(pm_p f_0;t)| \leqslant |s_n(z_p;t)| + m_p \leqslant 2m_p$$

und $|s_n(f_0;t)| \leqslant 2/p$ für $t \in R^{(p)}(z_p) \times R^{(p)}(y_p) = R^{(p)}$. Nach Voraussetzung gibt es Linearformen $l_i(t)$ in den φ_n mit $\lim\limits_{i\to\infty} \|f - l_i\| = 0$, wenn f gegeben ist; wählt man $i(p)$ so, daß $\|f - l_i\| \leqslant \rho_p/pm_p$ sei, so ist

$$|s_n(f;t) - s_n(l_i;t)| \leqslant 2/p$$

für $t \in R^{(p)}$ und alle n, also — für große n —

$$|s_n(f;t) - l_{i(p)}(t)| \leqslant 2/p$$

für $t \in R^{(p)}$. Die Folge $\{l_i(t)\}$ enthält eine f. ü. in $<a,b>$ gegen $f(t)$ konvergente Teilfolge $\{\bar{l}_i(t)\}$; betrachtet man diese anstatt $\{l_i\}$ und bezeichnet $\limsup\limits_{p\to\infty} R^{(p)}$ mit R^∞, so ist $|T - R^\infty| = 0$ und die letzte Ungleichung liefert in R^∞, d. h. f. ü. in T, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f;t) = f(t)$.

Zufallsartige Vorzeichen. Ist $\{r_n(t)\}$ das Rademacher'sche System [225] und betrachtet man in

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) r_n(u) \tag{25}$$

die $a_n \varphi_n(t)$ als Koeffizienten, so ist (25) nach [452] für fast alle u des Intervalls $<0,1>$ konvergent, sobald $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t)$ konvergiert. Dies ist aber für fast alle t in $<a,b>$ der Fall, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, denn es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n^2 \varphi_n^2(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

und daher [124] anwendbar. Sei E die im Rechteck $0 \leqslant u \leqslant 1$, $a \leqslant t \leqslant b$ gelegene ebene Menge der (t,u)-Punkte, die durch die Konvergenz von (25) erklärt ist. Wendet man auf die charakteristische Funktion $F(u,t)$ von E den Fubini'schen Satz an, so kommt

$$\int_a^b dt \left\{\int_0^1 F(u,t)\,du\right\} = \int_0^1 du \left\{\int_a^b F(u,t)\,dt\right\}.$$

Nun ist aber links $F(u,t) = 1$ für fast alle u und dies für fast alle t richtig, also ist $b-a$ der Wert des Doppelintegrals. Da $F(u,t)$ nur die Werte $0, 1$ annimmt, so muß $F(u,t)$ für fast alle t Eins sein und zwar bei fast allen u, sonst stände rechts weniger als $b-a$. Damit ist gezeigt, daß die Reihe (25) bei fast allen u die Eigenschaft hat f. ü. in $a \leqslant t \leqslant b$ zu konvergieren.

Erinnern wir uns jetzt an die probabilistische Deutung der $\{r_n(t)\}$ in [455], so können wir sagen:

Für ein ON $\{\varphi_n\}$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ *ist die Reihe* [563]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \varphi_n(t) \tag{26}$$

mit der Wahrscheinlichkeit 1 *f. ü. in $<a,b>$ konvergent, wenn die Vorzeichen $\pm$ zufallsartig und gleichwahrscheinlich bestimmt werden.*

Ein Gegenstück dazu ist der

Satz: *Ist* $\{\varphi_n\}$ ON *und* $\liminf\limits_{n\to\infty} \int_H \varphi_n^2(t)\,dt > 0$ *für alle positiven* [564] *$H \subset <a,b>$, so ist im Falle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$ die Reihe* (26) *mit der Wahrscheinlichkeit* 1 *f. ü. in $<a,b>$ divergent.*

Beweis: Wäre $|H|>0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t)<\infty$ in H, so wäre nach [123]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_{H^*} \varphi_n^2(t)\,dt<\infty, \qquad |H^*|>0,$$

für ein gewisses $H^* \subset H$. Daraus läßt die Voraussetzung auf $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2<\infty$ schließen. Es ist also in unserem Falle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t)=\infty$ f. ü. in $<a, b>$. Wendet man jetzt [453] an und erklärt E als die (ebene) Divergenzmenge von (25), so kann man fast wörtlich den mit der Definition von E beginnenden zweiten Teil des Beweises von [563] wiederholen.

Divergenz. Hier ist der zweite Teil von [561] wichtig, der die Existenz von f. ü. in CT divergenten Entwicklungen sichert. Auch das Prinzip der Kondensation der Singularitäten bringt neue Ergebnisse:

[565] *Ist $\{\varphi_n\}$ ein ON und $\{t_p\}$ eine Punktfolge ($t_p \in <a, b>$), so daß jedem t_p ein $f_p(t) \in R$ mit einer für $t=t_p$ divergenten Entwicklung entspricht, so gibt es ein $f(t) \in R$, dessen Entwicklung in allen t_p divergiert.*

Definiert man nämlich $F_{pq}(f)=s_q(f; t_p)$ für $f \in R$ und wendet [157] bzw. [156] an, je nachdem, ob $f_p(t)$ für $t=t_p$ bloß Divergenz oder unbeschränkte Divergenz der Entwicklung aufweist, so erhält man [565], sogar mit einer Spezialisierung des Divergenzcharakters in der Behauptung. [157] liefert auch den

[566] Satz: *Gibt es eine Intervallfolge $\{<\alpha_p, \beta_p>\}$ und eine zugehörige Funktionenfolge $\{f_p(t)\}$ ($f_p \in L$), so daß für alle p*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} |s_n(f_p; t)|\,dt=\infty \tag{27}$$

gilt, so kann man in (27) $f_p(t)$ durch eine geeignete p-freie Funktion $f(t) \in L$ ersetzen.

Man braucht bloß $F_{pq}(f)$ in [157] als $\int_{\alpha_p}^{\beta_p} s_q(f; t)\,dt$ zu definieren. [566] läßt sich insbesondere auf Fourierreihen anwenden; man erreicht sogar sämtliche $<\alpha, \beta>$ in (27).

Das Prinzip der Verdichtung der Singularitäten führt bloß zu abzählbaren Divergenzmengen. In gewissen Fällen kann die Mächtigkeit des Kontinuums nachgewiesen werden:

Gibt es zu jedem $t_0 \in <a, b>$ eine stetige Funktion, deren Entwicklung in t_0 divergiert, so gibt es eine stetige Funktion, deren Entwicklung eine Divergenzmenge von der zweiten Kategorie, also von der Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. [567]

Beweis: Nach [121] sind alle $\varphi_n(t)$ gleichzeitig in einer positiven, perfekten Menge D stetig. Sei A die Menge der $t \in D$, zu welchen es stetige Funktionen mit $\limsup_{n\to\infty} |s_n(t)|=\infty$ gibt. Ist A in D überalldicht, so können wir, nach [565], eine stetige Funktion mit $\limsup_{n\to\infty} |s_n(f; t)|=\infty$ in Z finden, wobei $Z \subset A$ und überalldicht in D ist. Dieselbe Beziehung gilt aber auch in einer Menge $Z^* \supset Z$, die von der zweiten Kategorie ist, also die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat.

Es sei nämlich $F_{n,m}=E[|s_n(f; t)| \leqq m] \times D$, $F_m=\prod_{n=1}^{\infty} F_{m,n}$; die $F_{m,n}$ sind abgeschlossen, denn die $\varphi_n(t)$ sind auf D stetig, also ist F_m abgeschlossen. $\sum_{m=1}^{\infty} F_m$ ist von der ersten Kategorie in D, sonst wäre ein F_m von der zweiten, also in $<\alpha, \beta> \times D$ überalldicht ($<\alpha, \beta> \subset <a, b>$) und damit (weil abgeschlossen) mit dem Teil $<\alpha, \beta> \times D$ des (perfekten) D identisch; in diesem Teil wäre $|s_n(f; t)| \leqq m$ für alle n, was der Eigenschaft von Z, überalldicht in D zu sein, widerspricht. $\sum_{m=1}^{\infty} F_m$ ist also von der ersten, daher die komplementäre Menge $Z^*=D-\sum_{m=1}^{\infty} F_m$ von der zweiten Kategorie; in Z^* gilt aber offenbar $\limsup_{n\to\infty} |s_n(f; t)|=\infty$.

Ist aber A nicht überalldicht in D, so gibt es einen Teil $<\alpha, \beta> \times D$ von D, in welchem die Partialsummen der Entwicklungen aller stetigen Funktionen beschränkte Folgen bilden. Es sei $\{g_n(t)\}$ im Raume C (der stetigen Funktionen) überalldicht. Wäre für ein jedes $g_n(t)$ die Divergenzmenge von der ersten Kategorie in D, so gäbe es ein $t_0 \in <\alpha, \beta> \times D$ als Konvergenzpunkt für alle $g_n(t)$. t_0 wäre aber ein Konvergenzpunkt für sämtliche stetigen Funktionen, gegen die Voraussetzung. Denn die Partialsummen $s_n(f; t_0)$ $(f \in C)$ sind beschränkt, also [151] mit $F_n(f) = s_n(f; t_0)$ anwendbar und $|s_n(f; t_0)| \leqslant M \|f\|$. Daraus folgt

$$|s_n(f; t_0) - s_n(g_k; t_0)| \leqslant M \|f - g_k\| < \varepsilon$$

für entsprechende k, was den Konvergenzcharakter von t_0 für $f(t)$ beweist. Es gibt also ein $g_n(t)$ mit einer Divergenzmenge zweiter Kategorie in D.

§ 7. Allgemeine Summationsmethoden.

Es gibt fast überall divergente Entwicklungen, wie wir in [537] gesehen haben; diese Tatsache läßt die Heranziehung linearer Summationsmethoden als erwünscht erscheinen. Sie sind oft leistungsfähig und nur im Falle einer gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergenten Reihe von vornherein wirkungslos, doch kann die letzte Erscheinung für Funktionen aus L^2 nur in Nullmengen auftreten, da $s_n(t)$ gegen die entwickelte Funktion $f(t)$ stark, also auch asymptotisch konvergiert (vgl. [162]). Die Existenz einer Summationsmethode, die allen Entwicklungen aus L^2 gerecht wäre, ist demnach nicht ohne weiteres abzuweisen. Wir werden aber zeigen, daß eine solche Behauptung unzutreffend wäre.

Die Mehrzahl der bisherigen Sätze dieses Kapitels gilt auch für Summationsmethoden; die Beweise bleiben oft fast unverändert, wir werden also bloß die Sätze angeben. So nimmt [515]
[571] jetzt die Gestalt an: *Einem jeden* ON $\{\varphi_n\}$, *welches beschränkt oder inbezug auf* L^2 *vollständig ist, entspricht eine Folge* $\{b_n\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *und mit*

$$\limsup_{n\to\infty} |\sigma_n(t)| = \infty$$

f. ü. (bzw. in einer positiven Menge), wobei $\sigma_n(t)$ *das Resultat der Substitution von* $\{s_n(t)\}$ *in die n-te Zeile der zeilenfiniten, linearen Summationsmethode T bedeutet.*

Es möge hinzugefügt werden, daß $\{|b_n|\}$ von T nicht abhängt. Ist

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk}\, s_k(t), \qquad T_n(t, u) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk}\, K_k(t, u),$$

so kann man schreiben:

$$\sigma_n(t) = \int_a^b T_n(t, u) f(u)\, du.$$

Dann gilt, analog zu [522]:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b |T_n(t_0, u)|\, du = \infty \tag{572}$$

impliziert die Existenz einer stetigen Funktion $f(t)$ *mit*

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(f; t_0) = +\infty.$$

Für jede Summationsmethode T gilt das Analogon zu [523] und für zeilenfinite T das Analogon zu [525]. Ferner:

Damit die Entwicklung einer jeden stetigen Funktion nach dem [573]
ON $\{\varphi_n\}$ *gleichmäßig gegen diese Funktion T-summierbar sei, ist die Abgeschlossenheit von* $\{\varphi_n\}$ *inbezug auf C und die Ungleichung*

$$\int_a^b |T_n(t, u)|\, du \leqslant \varkappa$$

(mit n- und t-freiem $\varkappa$*) notwendig und hinreichend.*

Für die Summierbarkeit f. ü. gilt eine Erweiterung von [533]:

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *f. ü. T-summierbar, so ist* $\{s_{n_i}(t)\}$ [574]
für geeignete $\{n_i\}$ *f. ü. konvergent.*

Beweis: $\{\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}\, s_k(t)\}$ ist f. ü. konvergent (mit $b_{i,k}$ bezeichnen wir die Elemente von T). Es sind ferner die drei Bedingungen 1° 2° 3° aus [119] erfüllt. Ist $J_n = \int_a^b [s_n(t) - \sigma_n(t)]^2\, dt$, so genügt es $\{n_i\}$ so zu bestimmen, daß $\sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i}$ konvergent sei. Es ist aber

$$s_n(t) - \sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) [1 - b_{n,k} - b_{n,k+1} - \ldots]$$
$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \varphi_k(t) [b_{n,k} + b_{n,k+1} + \ldots],$$

also, wenn man $\sum_{j=k}^{\infty} b_{n,j}$ mit $B_{n,k}$ bezeichnet,

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 (1 - B_{n,k})^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 B_{n,k}^2.$$

Wird $\sum_{j=1}^{k-1} b_{n,j} = S_{n,k}$ gesetzt und die Differenz $1 - S_{n,k} - B_{n,k}$ mit R_n bezeichnet, so ist $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ nach [119] 1°. Jetzt soll $\{n_i\}$ rekurrent erklärt werden:

α) es sei $|R_{n_i}| < 1/i$,

β) für $l \leqslant n_{i-1}$ $(n_0 = 0)$ sei $|S_{n_i, l+1}| < 1/i$ ([119] 2⁰),

γ) für $l > n_i$ sei $|1 - S_{n_{i-1}, l+1}| < 1/(i-1)$ ([119] 1⁰).

Dann ist

$$(28)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n_i} a_k^2 (S_{n_i,k} + R_{n_i})^2 + \sum_{k=n_i+1}^{\infty} a_k^2 B_{n_i,k}^2\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2[(S_{n_j,k}+R_{n_j})^2+(S_{n_{j+1},k}+R_{n_{j+1}})^2+\dots]+\sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k^2[B_{n_1,k}^2+B_{n_2,k}^2+\dots+B_{n_l,k}^2],$$

wo n_j und n_l von k abhängen und wo j und l durch

$$n_{j-1} < k \leqslant n_j, \qquad n_l < k \leqslant n_{l+1}$$

gegeben sind. Von den zwei Summen rechts in (28) ist die erste, nach [119] 3⁰ und β), nicht größer als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\left[(M+1)^2 + \frac{4}{(j+1)^2} + \frac{4}{(j+2)^2} + \dots\right] \leqslant \text{const.} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

die zweite, nach α) und γ), nicht größer als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\left(\frac{4}{1^2} + \frac{4}{2^2} + \dots \frac{4}{(l-1)^2} + M^2\right) \leqslant \text{const.} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

also $\sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i} < \infty$.

[575] *Wenn eine Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *mit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ *bei allen Anordnungen sich als f. ü. T-summierbar erweist, so ist sie f. ü. konvergent.*

Beweis: Es werde $\{p_i\}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{p_i}| < \infty$ gewählt; die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i}\varphi_{p_i}(t)$ ist nach [542] f. ü. konvergent. Nach [574] ist $\{s_{n_i}(t)\}$ f. ü. konvergent. Jetzt ordnen wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ so um, daß die Stellen n_i sukzessive mit den Gliedern dieser Reihe besetzt werden; die Glieder $a_{p_i}\varphi_{p_i}(t)$ werden zunächst weggelassen und kommen dann sukzessive auf die unbesetzten Stellen. Es ist klar, daß die Partialsummen der neuen Reihe mit den Indizes n_i f. ü. konvergieren. Bezeichnet man sie mit $s'_{n_i}(t)$, und mit $s''_{n_i}(t)$ die

Partialsummen der Reihe, die aus der letzten durch Nullsetzung der Glieder mit den Indizes n_i entsteht, so ist die Folge $\{s''_{n_i}(t)\}$ auch f. ü. konvergent, denn $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i}\varphi_{p_i}(t)$ ist f. ü. konvergent. Dies hat die Konvergenz f. ü. von $\{s'_{n_i}(t) - s''_{n_i}(t)\}$ zur Folge; d. h., die ursprüngliche Reihe konvergiert f. ü. nach Nullsetzung der Glieder mit den Indizes p_i, also ist die ursprüngliche Reihe (4) selbst f. ü. konvergent.

Der Satz [575] läßt sich kurz so fassen: *eine f. ü. unbedingt summierbare Orthogonalreihe ist f. ü. unbedingt konvergent.* Es folgt daraus, daß nicht jede Orthogonalmenge eine wirksame Summationsmethode besitzt; hätte nämlich die Orthogonalmenge, welcher das Beispiel [537] entnommen war, eine f. ü. wirkende Summationsmethode, so wäre die Reihe dieses Beispiels f. ü. unbedingt summierbar, also f. ü. konvergent, was sie nicht ist. Umsoweniger gibt es eine universelle Summationsmethode. Es gibt nicht einmal eine Methode, die eine, bis auf eine Nullmenge feste, positive Konvergenzmenge liefert. Man kann sogar zu jeder Summationsmethode eine Orthogonalentwicklung finden, die nach dieser Methode überall divergiert. Dagegen existiert für jede Folge $\{a_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ eine vom ON unabhängige, wirksame T-Methode. Auf Grund von [532] gibt es dann nämlich eine Folge $\{n_j\}$ so, daß $\{s_{n_j}(t)\}$ f. ü. konvergiert. Das ist eben die gesuchte Methode: T ist durch $\|b_{i,k}\|$ gegeben, wo $b_{j,n_j} = 1$, alle anderen $b_{i,k}$ Null sind.

Wenn wir uns mit starker Konvergenz begnügen, so ist jede Methode gut. Wir hatten nämlich [576]

$$J_n = \int_a^b (s_n(t) - \sigma_n(t))^2\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 (1 - B_{n,k})^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 B_{n,k}^2,$$

also, nach den Toeplitz'schen Bedingungen,

$$J_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 (S_{n,k} + R_n)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 M^2.$$

Hier ist offenbar Null die Grenze der zweiten Summe; die erste werde in $\sum_{k=1}^{m}$ und $\sum_{k=m+1}^{n}$ zerlegt $(1 \leqslant m < n)$ und zuerst m so gewählt, daß $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon$, dann aber $n\ (> m)$ so, daß $|S_{n,k} + R_n| < \varepsilon$ für $k = 1, 2, \ldots, m$ sei; J_n hat demnach Null als Grenze, also konvergiert $\{\sigma_n(t)\}$ stark.

Die allgemeinen Ausführungen des § 6 über Konvergenz lassen sich sinngemäß auf die Toeplitz'schen Methoden übertragen. So ist z. B. ein Analogon zu [564] richtig, welches zu zeigen erlaubt, daß „fast alle" Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

keine Fourierreihen inbezug auf L sind, wenn $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ divergiert, denn sie sind mit der Wahrscheinlichkeit 1 f. ü. $(C,1)$-nichtsummierbar. Das Prinzip der Kondensation der Singularitäten liefert aber einen neuen Satz:

[577] *Gibt es zu jeder Methode T_p $(p = 1, 2, \ldots)$ eine Funktion $f_p(t)$ im Raume R, die für $t = t_0$ eine nicht T_p-summierbare Entwicklung liefert, so gibt es eine p-freie Funktion in R, deren Entwicklung im Punkte t_0 allen T_p widersteht.*

§ 8. **Cesàro'sche Mittelwerte.**

Will man in der Übertragung der Konvergenzsätze auf Summationsmethoden weiter vordringen, so muß man die letzteren spezialisieren. Wir beschränken uns hier auf Cesàro'sche Mittelwerte, obwohl die Analogien auch andere Methoden, wie z. B. die Riesz'schen typischen Mittel, umfassen.

Aus [117] folgt für $a_0 = 0$

$$\sigma_n^{(r)}(t) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^r a_k \varphi_k(t) \qquad \text{mit } A_n^r = \binom{r+n}{n},$$

wo $\sigma_n^{(r)}(t)$ das Cesàro'sche Mittel r-ter Ordnung $(r \neq -1, -2, -3, \ldots)$ vom Index n für die Reihe (4) bedeutet. Es werde

$$\delta_n^r(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k^{(r)}(t) - \sigma_k^{(r-1)}(t))^2$$

[581] gesetzt. *Dann ist $\lim_{n\to\infty} \delta_n^r(t) = 0$ für $r > 1/2$ fast überall.*

Beweis:

$$\sigma_k^{(r)} - \sigma_k^{(r-1)} = \frac{1}{A_k^r A_k^{r-1}} \sum_{j=1}^{k} (A_{k-j}^r A_k^{r-1} - A_{k-j}^{r-1} A_k^r)\, a_j \varphi_j(t)$$

$$= \frac{1}{A_k^r A_k^{r-1}} \sum_{j=1}^{k} (-j/r\, A_{k-j}^{r-1} A_k^{r-1})\, a_j \varphi_j(t),$$

also

$$\int_a^b (\sigma_k^{(r)}(t) - \sigma_k^{(r-1)}(t))^2\, dt = \frac{1}{r^2 (A_k^r)^2} \sum_{j=1}^{k} j^2 a_j^2 (A_{k-j}^{r-1})^2$$

und

$$\int_a^b \delta_{2^n}^r(t)\, dt = \frac{1}{r^2(2^n+1)} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(A_k^r)^2} \sum_{j=1}^{k} j^2 a^2 (A_{k-j}^{r-1})^2$$

$$= \frac{1}{r^2(2^n+1)} \sum_{j=1}^{2^n} j^2 a_j^2 \sum_{k=j}^{2^n} \left(\frac{A_{k-j}^{r-1}}{A_k^r}\right)^2.$$

Es ist aber $A_n^r \sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)}$, also übertrifft die innere Summe nicht

$$\sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{A_{k-j}^{r-1}}{A_k^r}\right)^2 = \sum_{k=j}^{2j} + \sum_{k=2j+1}^{\infty} < \frac{\varkappa_1}{(A_j^r)^2} \sum_{k=0}^{j} (A_k^{r-1})^2 + \varkappa_2 \sum_{k=2j+1}^{\infty} \frac{k^{2r-2}}{k^{2r}},$$

was wiederum $(r > 1/2)$ höchstens

$$\frac{\varkappa_3}{(A_j^r)^2} \sum_{k=0}^{j} A_k^{2r-2} + \frac{\varkappa_4}{j} < \frac{\varkappa_5}{j}$$

betragen kann. So kommt

$$\int_a^b \delta_{2^n}^r(t)\, dt < \frac{\varkappa_6}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} j\, a_j^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \delta_{2^n}^r(t)\, dt < \varkappa_6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} j\, a_j^2 < \varkappa_7 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty.$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} \delta_{2^n}^r(t) = 0$ f. ü.; für $2^n < k < 2^{n+1}$ ist $0 \leqq \delta_k^r \leqq 2\delta_{2^{n+1}}^r$, also ist $\lim \delta_k^r(t) = 0$ f. ü., w. z. b. w.

Daraus der Schluß:

Ist eine Orthogonalreihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ in E gegen $s(t)$ [582]
(C, r)-summierbar, $r > 1/2$, so gilt f. ü. in E

$$(29) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|s(t) - \sigma_1^{(r-1)}(t)| + |s(t) - \sigma_2^{(r-1)}(t)| + \ldots + |s(t) - \sigma_n^{(r-1)}(t)|}{n} = 0$$

und

$$(30) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|s(t) - \sigma_1^{(r-1)}(t)|^2 + |s(t) - \sigma_2^{(r-1)}(t)|^2 + \ldots + |s(t) - \sigma_n^{(r-1)}(t)|^2}{n} = 0.$$

Es genügt (30) zu begründen, denn die Schwarz'sche Ungleichung liefert dann (29). Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{n}[s(t)-\sigma_k^{(r-1)}(t)]^2=\sum_{k=1}^{n}[(\sigma_k^{(r-1)}(t)-\sigma_k^{(r)}(t))+(\sigma_k^{(r)}(t)-s(t))]^2$$

$$\leqq 2\sum_{k=1}^{n}[\sigma_k^{(r-1)}(t)-\sigma_k^{(r)}(t)]^2+2\sum_{k=1}^{n}[\sigma_k^{(r)}(t)-s(t)]^2$$

und die vorletzte Summe ist $o(n)$ nach [581], die letzte, nach der Voraussetzung, ebenfalls $o(n)$ f. ü.

[583] Der Hilfsatz [581] führt auch zu der Erkenntnis, daß *in L^2 alle (C,r) $(r>0)$ untereinander und mit dem Poisson-Abel'schen Verfahren* [118] *gleichwertig sind.* Zunächst werde die Konvergenz f. ü. von

(31) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(\sigma_n(t)-\sigma_{n-1}(t))^2$$

gezeigt (σ_n bedeutet $(1+1/n)\,\sigma_n^{(1)}$). Es genügt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\int_a^b(\sigma_n(t)-\sigma_{n-1}(t))^2\,dt<\infty$$

zu beweisen. Es ist $(n>1)$ in der Tat

$$\int_a^b(\sigma_n(t)-\sigma_{n-1}(t))^2\,dt=\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n-1}a_k\,\varphi_k(t)\,(k-1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n}\,a_n\,\varphi_n(t)\right]^2dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}a_k^2\,\frac{(k-1)^2}{n^2(n-1)^2}+\frac{a_n^2}{n^2},$$

$$n\int_a^b(\sigma_n(t)-\sigma_{n-1}(t))^2\,dt\leqq\frac{1}{(n-1)^2\,n}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\,a_k^2+\frac{a_n^2}{n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\int_a^b(\sigma_n(t)-\sigma_{n-1}(t))^2\,dt\leqq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\,a_k^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}.$$

Die letzte Reihe ist konvergent; die vorletzte ist gleich $\sum_{k=1}^{\infty}k^2\,a_k^2\left(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(k+1)^3}+\ldots\right)<\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$. Jetzt ziehen wir den Satz über Zahlenreihen heran, nach welchem die Poisson'sche Limitierbarkeit einer Folge das Gleiche für die Folge der ersten Mittelwerte $(C,1)$ impliziert. Ist also eine Orthogonalreihe aus L^2 in E nach

Poisson summierbar, so ist in E die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_n(t)-\sigma_{n-1}(t))$ nach demselben Verfahren summierbar. Dies aber in Verbindung mit der Konvergenz von (31) ergibt (nach einem reihentheoretischen Satz) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_n(t)-\sigma_{n-1}(t))$; diese Reihe ist also f. ü. in E konvergent, daher ist die Orthogonalreihe f. ü. in E $(C,1)$-summierbar. Da die Umkehrung seit Frobenius bekannt ist, so ist die Gleichwertigkeit des Poisson'schen und des $(C,1)$-Verfahrens erwiesen und zu [583] fehlt bloß der

Satz: *Ist eine Orthogonalreihe aus L^2 in E nach Poisson summierbar und $\alpha>0$, so ist sie f. ü. in E (C,α)-summierbar.* [584]

Beweis: Wir beginnen mit der Feststellung, daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(r)})^2=0\quad(r>-1/2)\quad\text{für }\varepsilon>0$$

$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{(r+1/2+\varepsilon)}=0$ zur Folge hat. In der Tat, setzt man $\sigma_n^{(\alpha)}=t_n^{(\alpha)}/A_n^{\alpha}$, so ist $t_n^{(r+1/2+\varepsilon)}=\sum_{k=1}^{n}t_k^{(r)}A_{n-k}^{-1/2+\varepsilon}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{(r)}A_k^{r}A_{n-k}^{-1/2+\varepsilon}$ eine Konsequenz der Erklärung [117] und demnach

$$|t_n^{(r+1/2+\varepsilon)}|\leqq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(r)})^2\cdot\sum_{k=1}^{n}(A_k^{r}A_{n-k}^{-1/2+\varepsilon})^2}\leqq\varkappa\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(r)})^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}A_k^{2r}A_{n-k}^{-1+2\varepsilon}}$$

$$=\varkappa\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(r)})^2}\cdot\sqrt{A_n^{2r+2\varepsilon}}=o(n^{1/2})\cdot O(n^{r+\varepsilon})=o(n^{r+1/2+\varepsilon}),$$

wie behauptet wurde.

Unter der Voraussetzung [584] ist aber die Reihe in E $(C,1)$-summierbar, also gilt [582] mit $r=1$ in (30), d. h. $\lim_{n\to\infty}1/n\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k^{(0)}(t)-s(t))^2=0$ f. ü. in E. Hier können wir aber $\sigma_k^{(0)}(t)-s(t)$ als die Partialsummen der Reihe $[a_1\,\varphi_1(t)-s(t)]+a_2\,\varphi_2(t)+\ldots$ deuten und die Anfangsbemerkung dieses Beweises mit $r=0$ benutzen. Sie ergibt f. ü. in E

$$\lim_{n\to\infty}[\sigma_n^{(1/2+\varepsilon)}(t)-s(t)]=0$$

und erlaubt [582] nochmals, jetzt mit $r=1/2+\varepsilon$, anzuwenden, mit dem Ergebnis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(-1/2+\varepsilon)}(t)-s(t))^2=0;$$

die erwähnte Bemerkung läßt daraus auf $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_n^{(2\varepsilon)}(t)-s(t))=0$ f. ü. in E schließen, womit [584] und [583] endgültig bewiesen sind. Hierbei wurde das Resultat von O. Hölder, daß die Poisson'sche Methode stärker als jedes (C, r) $(r>0)$ ist, als bekannt vorausgesetzt.

Die Untersuchungen über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen mit Cesàro'schen Mitteln können nunmehr auf $(C,1)$ beschränkt werden. Hier kann ein einfaches Kriterium angegeben werden:

[585] *Soll eine Orthogonalreihe aus L^2 f. ü. $(C,1)$-summierbar sein, so muß die Folge $\{s_{2^n}(t)\}$ f. ü. konvergieren, und diese Bedingung ist auch hinreichend.*

Beweis: Nur die Hinlänglichkeit ist neu, denn die Notwendigkeit der Bedingung bildet den Inhalt von [533].

Setzen wir also $\{s_{2^n}(t)\}$ als f. ü. konvergent voraus. Der Schlußsatz des Beweises von [533] (welcher die damalige Voraussetzung nicht benutzt) liefert jetzt die Konvergenz von $\{\sigma_{2^n}(t)\}$ f. ü. Betrachten wir $\sigma_k(t)-\sigma_{2^n}(t)$ für $2^n<k<2^{n+1}$; es ist

$$\sigma_k(t)-\sigma_{2^n}(t)=\sum_{i=2^n}^{k-1}(\sigma_{i+1}(t)-\sigma_i(t)),$$

also

$$(\sigma_k(t)-\sigma_{2^n}(t))^2\leqslant\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}}i\,(\sigma_{i+1}(t)-\sigma_i(t))^2\cdot\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}}1/i\leqslant 3/2\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}}i\,(\sigma_{i+1}(t)-\sigma_i(t))^2.$$

Nun war aber die Reihe (31) f. ü. konvergent, also konvergiert der letztgeschriebene Ausdruck f. ü. gegen 0 und damit ist $\{\sigma_k(t)\}$ als f. ü. konvergent erkannt.

[586] *Die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n^2(\log\log n)^2$ hat für die entsprechende Orthogonalreihe die $(C,1)$-Summierbarkeit f. ü. zur Folge.*

Nach [585] genügt es die Konvergenz f. ü. von $\{s_{2^n}(t)\}$ zu beweisen. Voraussetzungsgemäß ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2^n+1}^2+\ldots+a_{2^{n+1}}^2)(\log n)^2<\infty,$$

da die Annahme von 2 als Logarithmenbasis nichts ändert. Hier ist also die Folgerung 2° aus [535] mit $n_k=2^k$ anwendbar und liefert die Konvergenz f. ü. von $\{s_{2^k}(t)\}$.

Das erreichte Resultat ist, in demselben Sinne wie bei der gewöhnlichen Konvergenz, endgültig. *Ist nämlich $0\leqslant v(n)=o\,[(\log\log n)^2]$,* [587]
$\lim\limits_{n\to\infty}v(n)=+\infty$, $v(n)$ nichtabnehmend und $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2v(n)<\infty$, so gibt es eine Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\psi_n(t),\tag{32}$$

die in keinem Punkte von $<0,1>$ $(C,1)$-summierbar ist.

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t)$ die im Gegenbeispiel [537] auftretende Reihe, mit $w(n)=v(2^n)$. Diese Reihe hat, wie wir damals gesehen haben, die Eigenschaften: α) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2w(n)<\infty$, β) es gibt eine Folge $\{n_k\}$ mit $n_{k-1}<n_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$, so daß für jedes t aus $<0,1>$ ein $m(t)$ mit

$$\left|\sum_{j=m}^{n_k-1}a_j\,\varphi_j(t)\right|>\varkappa,\qquad n_{k-1}<m(t)<n_k$$

bestimmbar ist, wenn k vorgegeben wird; dabei ist $\varkappa$ von k und t unabhängig. Von $w(n)$ wurde damals $w(n)=o(\log^2 n)$ verlangt, was durch unsere Annahme $w(n)=v(2^n)$ erfüllt ist. Setzt man nun

$$\psi_{2^n}(t)=\varphi_n(t),\quad b_{2^n}=a_n\quad\text{für}\quad n_{k-1}<n\leqslant n_k-1,$$

und definiert die anderen $\psi(t)$ als (sukzessive) gleich den noch freien φ_{n_k} und die anderen b als Null, so wird $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2v(n)<\infty$ als Konsequenz von α) und die Folge $\{s_{2^n}(t)\}$ für (32) durchweg divergent; das Kriterium [585] impliziert jetzt die Behauptung [587].

Die Kriterien für unbedingte Konvergenz lassen sich insofern nicht übertragen, als die unbedingte Summierbarkeit mit der unbedingten Konvergenz äquivalent ist ([575]), es käme also nichts Neues heraus. Dagegen hat das letzte Divergenzbeispiel ein Analogon, indem zu jeder Summationsmethode eine nirgends summierbare Orthogonalreihe vorhanden ist. Hier ist die Folge $\{s_{n_i}(t)\}$ zu betrachten, die für eine T-Methode laut [574] dieselbe Rolle spielt, wie $\{s_{2^n}(t)\}$ für $(C,1)$.

§ 9. Lebesgue'sche Funktionen und Summierbarkeit.

Für die $(C,1)$-Summierbarkeit sind gewisse zu den in [521] untersuchten Funktionen analog definierte Ausdrücke von Belang. Schreibt man

$$K_n^{(1)}(t,u)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\,\varphi_k(u)\left(1-\frac{k-1}{n}\right),\qquad L_n^{(1)}(t)=\int_a^b|K_n^{(1)}(t,u)|\,du,$$

so ist $\sigma_n(t)=\int_a^b f(u)\,K_n^{(1)}(t,u)\,du$ der erste Mittelwert vom Index n für die Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\varphi_k(t)\}$. Analog zu [554] ist

[591] $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(t)/w(n)$ *f. ü. in E vorhanden, wenn* $w(n)>0$ *nicht abnimmt und wenn* $L_n^{(1)}(t)\leqslant\varkappa\,w(n)$ *(mit t- und n-freiem* $\varkappa$*) in E gilt.*

Der Beweis ist eine Modifikation des Beweises von [554]: J_n wird als $\int_E dt\int_a^b\frac{f(u)\,K_p^{(1)}(t,u)}{w(p)}\,du$ definiert, was unmittelbar zu

$$J_n^2\leqslant A\int_E\int_E\frac{1}{w(p)\,w(q)}\sum_{k=1}^{j}\varphi_k(t_1)\,\varphi_k(t)\left(1-\frac{k-1}{p}\right)\left(1-\frac{k-1}{q}\right)dt\,dt_1$$

führt. Die Summe rechts wird zweimal der Abel'schen Umformung [111] unterworfen; es kommt

$$\sum_{k=1}^{j}K_k(t,t_1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{2k-1}{pq}\right)=\sum_{k=1}^{j}k\,K_k^{(1)}(t,t_1)\frac{2}{pq}+j\,K_j^{(1)}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{2j+1}{pq}\right),$$

also

$$J_n^2\leqslant A\int_E\int_E\frac{dt\,dt_1}{w^2(j)}\left\{\frac{2}{j^2}\sum_{k=1}^{j}k\,|K_n^{(1)}(t,t_1)|+|K_j^{(1)}(t,t_1)|\right\}$$

$$\leqslant 4A\varkappa\int_E\frac{dt}{w^2(p)}\left[\frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p}kw^2(k)+w^2(p)\right]\leqslant 8A\varkappa\,|E|,$$

und weiter verläuft der Beweis, wie früher.

Obiges bildet die Grundlage für den

[592] **Satz:** *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty}w(n)=+\infty$, $L_n^{(1)}(t)\leqslant w(n)$, $w(n)$ *nichtabnehmend und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2\,w^2(n)<\infty$, *so ist* (5) *f. ü.* $(C,1)$*-summierbar.*

Wie aus [532] ersichtlich, ist $\{s_{n_k}(t)\}$ f. ü. konvergent, wenn $k\leqslant w^2(n_k)<k+1$. Betrachten wir die Differenz

$$(33)\qquad \sigma_p(t)-s_{n_k}(t)=\sum_{i=1}^{n_k}a_i\,\varphi_i(t)\frac{i-1}{p}+\sum_{i=n_k+1}^{p}a_i\,\varphi_i(t)\left[1-\frac{i-1}{p}\right],$$

wo $n_k\leqslant p<n_{k+1}$. Die zweite Summe ist nach [111] gleich

$$(34)\qquad \frac{1}{w(n_k)}\sum_{i=n_k+1}^{p}a_i\,\varphi_i(t)\,w(n_k)\left(1-\frac{i-1}{p}\right)$$

$$=\frac{1}{w(n_k)}\left[\frac{1}{p}\sum_{i=n_k+1}^{p}\overline{s}_i(t)-\overline{s}_{n_k}(t)\left(1-\frac{n_k}{p}\right)+\overline{s}_p(t)\cdot 0\right],$$

wo $\{\overline{s_i}(t)\}$ die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty}w(n_j)\,a_i\,\varphi_i(t)$ mit $n_j\leqslant i<n_{j+1}$ bezeichnet. Die Konvergenz von $\{s_{n_k}(t)\}$ hat $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{s}_{n_k}(t)/w(n_k)=0$ zur Folge. Wegen (34) und

$$1/p\sum_{i=n_k+1}^{p}\overline{s}_i(t)=\overline{\sigma}_p(t)-n_k\,\overline{\sigma}_{n_k}(t)\,.\,1/p$$

ist die zweite Summe (33) dem Betrage nach höchstens gleich

$$\overline{\sigma}_p(t)/w(n_k)+\overline{\sigma}_{n_k}(t)/w(n_k)+\overline{s}_{n_k}(t)/w(n_k),$$

was, nach dem eben Gesagten, gegen Null strebt.

Die erste Summe (33), ebenfalls nach [111] umgeformt, liefert

$$(35)\qquad \frac{1}{p}\left[\sum_{i=1}^{k}n_i\left((\overline{s}_{n_i}(t)-\overline{\sigma}_{n_i}(t)\right)\left(\frac{1}{w(n_i)}-\frac{1}{w(n_{i+1})}\right)\right.$$

$$\left.+\,n_k(\overline{s}_{n_k}(t)-\overline{\sigma}_{n_k}(t))\,\frac{1}{w(n_{k+1})}\right].$$

Die Annahme $\sqrt{i}\leqslant w(n_i)$, $w(n_{i+1})\leqslant\sqrt{i+2}$ zeigt, daß (35) höchstens

$$\frac{\varkappa}{p}\sum_{i=1}^{k}n_i\,|\overline{s}_{n_i}(t)-\overline{\sigma}_{n_i}(t)|\,i^{-3/2}+\frac{|\overline{s}_{n_k}(t)-\overline{\sigma}_{n_k}(t)|}{w(n_k)}$$

beträgt. Auf diese Weise erhalten wir für $n_k\leqslant p<n_{k+1}$

$$\left|\sigma_p(t)-s_{n_k}(t)-\frac{\overline{\sigma}_p(t)}{w(n_k)}\right|\leqslant\frac{2}{w(n_k)}(\overline{\sigma}_{n_k}(t)+\overline{s}_{n_k}(t))+\frac{\varkappa}{n_k}\sum_{i=1}^{k}n_i\,|\overline{s}_{n_i}(t)-\overline{\sigma}_{n_i}(t)|\,i^{-3/2};$$

hier strebt, wie gesagt, $\overline{\sigma}_p(t)/w(n_k)$ gegen Null; es genügt also zu zeigen, daß die p-freie rechte Seite gegen Null konvergiert, um die Konvergenz von $\{s_n(t)\}$ darzutun. Für die zwei ersten Glieder ist dies bereits bekannt; die Ungleichung

$$\int_a^b i^{-3/2} \,|\, \overline{s}_{n_i}(t) - \overline{\sigma}_{n_i}(t) \,|\, dt \leqslant i^{-3/2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \, w^2(j)}$$

beweist die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} | s_{n_i}(t) - \overline{\sigma}_{n_i}(t) | \, i^{-3/2}$, also strebt, nach dem Kronecker'schen Satze, auch das letzte Glied gegen Null.

[593] Für $L_n^{(1)}(t) = O(1)$ liefert eine jede Funktion aus L^2 eine f. ü. $(C,1)$- (also auch (C,ε)-) summierbare Entwicklung ($\varepsilon > 0$). Den Beweis dafür erbringt man nach bereits genügend erläuterter Art.

Analoge Sätze gelten auch für $L_n^{(r)}(t) = O(w(n))$ oder $= O(1)$, wo $L_n^{(r)}(t)$ die Lebesgue'schen Funktionen für die (C,r)-Methode bezeichnen ($r = 2, 3, \dots$).