

IV. KAPITEL.

Beispiele.

§ 1. Legendre'sche Polynome.

Schreibt man die Laplace'sche partielle Differentialgleichung, d. h. die Gleichung des Newton'schen Potentials in Polarkoordinaten r, Θ, φ und setzt für die Lösung die Gestalt $R(r) \cdot \Theta(\Theta) \cdot \Phi(\varphi)$ an, so ergibt sich für $\Theta(\Theta)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung, die nach der Substitution $\cos \Theta = t$ die Gestalt

$$\frac{d}{dt} \left\{ (1-t^2) \frac{d\Theta}{dt} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right\} \Theta(t) = 0$$

annimmt. m^2 ist hier eine Konstante, und zwar $= -\Phi''/\Phi$; letzter Ausdruck muß konstant sein, wenn $u = R\Theta\Phi$ $\Delta u = 0$ erfüllen soll. Für $m = 0$ erhält man

$$\frac{d}{dt} \left\{ (1-t^2) \frac{d\Theta}{dt} \right\} + n(n+1) \Theta(t) = 0.$$

Diese Differentialgleichung heißt die Legendre'sche. Für $n = 0, 1, 2, \dots$ lassen sich leicht zwei partikuläre Lösungen finden. Eine dieser Lösungen, ein Polynom n -ten Grades

[411]

$$(1) \quad P_n(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left\{ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right\}$$

heißt das Legendre'sche Polynom n -ten Grades. Man hat

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, & P_1(t) &= t, & P_2(t) &= 1/2(3t^2 - 1), & P_3(t) &= 1/2(5t^3 - 3t), \\ P_4(t) &= 1/8(35t^4 - 30t^2 + 3), & P_5(t) &= 1/8(63t^5 - 70t^3 + 15t), \\ P_6(t) &= 1/16(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5), & & & & & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Das Polynom $P_n(t)$ löst die Differentialgleichung auch für komplexe t -Werte.

Der Satz von Rodrigues. Es ist

$$(2) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n,$$

was durch die Ausführung der Differentiation und Vergleichung mit (1) bestätigt wird.

Es ist für natürliche n und $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} t^k P_n(t) dt = 0.$$

Beweis: (2) und partielle Integration liefern

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} t^k P_n(t) dt &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} t^k \frac{d^n (t^2 - 1)^n}{dt^n} dt \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left[t^k \frac{d^{n-1} (t^2 - 1)^n}{dt^{n-1}} \right]_{-1}^{+1} - \frac{k}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} t^{k-1} \frac{d^{n-1} (t^2 - 1)^n}{dt^{n-1}} dt. \end{aligned}$$

Nun hat aber $(t^2 - 1)^n$ die Stellen $t = \pm 1$ als n fache Nullstellen, also hat diese Stellen die $(n-1)$ -te Ableitung von $(t^2 - 1)^n$ zu (einfachen) Nullstellen. Setzt man die partielle Integration fort, so kommt als Wert des Integrals (3)

$$\frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k} (t^2 - 1)^n}{dt^{n-k}} dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \left[\frac{d^{n-k-1} (t^2 - 1)^n}{dt^{n-k-1}} \right]_{-1}^{+1} = 0,$$

denn $n-k-1$ ist ≥ 0 (und für $n-k-1=0$ ist das Symbol $\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}$ zu streichen). Die Formel (3) gibt unmittelbar

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} P_m(t) P_n(t) dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

denn für $m < n$ zerfällt das Integral (4) in Integrale (3) mit konstanten Faktoren.

Wir haben damit die Orthogonalität der Polynome $\{P_n(t)\}$ bewiesen. Für $m = n$ wird das Integral (4)

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_{-1}^{+1} (P_n(t))^2 dt &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n dt \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^n \frac{d^{2n} (t^2 - 1)^n}{dt^{2n}} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^n dt \\ &= 2 \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \int_0^1 u^n (1-u)^n du = \frac{2}{2n+1}, \end{aligned}$$

wobei zunächst n -mal partiell integriert, dann $2u$ für $1-t$ geschrieben und das so erhaltene Integral wieder durch partielle Integration ausgewertet wurde.

Damit ist das System

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t) \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad [412]$$

als ON in $\langle -1, +1 \rangle$ erkannt worden, was bereits Legendre entdeckt hat.

Die Legendre'schen Polynome sind abwechselnd gerade und ungerade Funktionen, wie aus (1) ersichtlich. Da ihr Grad genau ihrem Index gleicht, sind sie linear unabhängig. Schreibt man

$$\begin{aligned} (6) \quad c_{10} P_0(t) &= 1, \\ c_{20} P_0(t) + c_{22} P_2(t) &= t^2, \\ c_{40} P_0(t) + c_{42} P_2(t) + c_{44} P_4(t) &= t^4, \\ &\dots \end{aligned}$$

so lassen sich die Koeffizienten c_{2i2k} ($k \leq i$) so bestimmen, daß die Gleichungen identisch gelten; man erreicht dies, indem man die Koeffizienten gleicher t -Potenzen beiderseits vergleicht und dann zunächst das der höchsten Potenz entsprechende c berechnet. Ebenso verfährt man mit den ungeraden Potenzen.

Die Berechnung der c läßt sich leicht durchführen und liefert

$$\begin{aligned} (7) \quad t^k &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \left\{ (2k+1) P_k(t) + (2k-3) \frac{2k+1}{2} P_{k-2}(t) \right. \\ &\quad \left. + (2k-7) \frac{(2k+1)(2k-1)}{2 \cdot 4} P_{k-4}(t) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

eine Formel, die auch bereits Legendre bekannt war und deren Ableitung bei Hobson nachgelesen werden möge. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} 1 &= P_0(t), & t &= P_1(t), & t^2 &= \frac{2}{3} P_2(t) + \frac{1}{3} P_0(t), \\ t^3 &= \frac{2}{5} P_3(t) + \frac{3}{5} P_1(t), & t^4 &= \frac{8}{35} P_4(t) + \frac{4}{7} P_2(t) + \frac{1}{5} P_0(t), \\ t^5 &= \frac{8}{63} P_5(t) + \frac{4}{9} P_3(t) + \frac{3}{7} P_1(t), \\ t^6 &= \frac{16}{231} P_6(t) + \frac{24}{77} P_4(t) + \frac{10}{21} P_2(t) + \frac{1}{7} P_0(t), \end{aligned} \quad \text{u. s. w.}$$

[413] Vollständigkeit und Abgeschlossenheit. Auf Grund von [316] und (7) impliziert die Abgeschlossenheit der Polynome in L^2 dieselbe Eigenschaft für das System $\{P_n(t)\}$; daraus folgt ihre Vollständigkeit in bezug auf L^2 ([354]) und in bezug auf L ([358]).

Die Methode der kleinsten Quadrate. In den Anwendungen der Mathematik kommt es oft vor, daß man eine Funktion $f(t)$ möglichst genau durch ein Polynom $W_n(t)$ gegebenen Grades n in $\langle a, b \rangle$ zu approximieren sucht. Eine lineare Substitution erlaubt $\langle -1, +1 \rangle$ statt $\langle a, b \rangle$ zu betrachten. Beurteilt man die Genauigkeit der Approximation nach der Größe des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} [f(t) - W_n(t)]^2 dt$$

und beachtet die eben bewiesene Tatsache, daß $W_n(t)$ als $\sum_{k=0}^n c_k P_k(t)$ darstellbar ist, so hat man die Gram'sche Aufgabe (vgl. III),

$$\int_{-1}^{+1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^n c_k P_k(t) \right]^2 dt$$

durch Wahl der c_k zu minimieren, die nach [412] eindeutig lösbar ist. Schreibt man

$$W_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \cdot P_k(t) \sqrt{\frac{2k+1}{2}},$$

so ist ([262])

$$\sqrt{\frac{2}{2k+1}} c_k = \int_{-1}^{+1} f(t) P_k(t) \sqrt{\frac{2k+1}{2}} dt,$$

also

$$(8) \quad c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) P_k(t) dt \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

(Die Formeln (1) und (8) erlauben auch die Berechnung der

Koeffizienten c_k auf die Berechnung der Momente $\int_{-1}^{+1} f(t) t^k dt$ zurückzuführen. (8) ist die Formel zur Bestimmung der Koeffizienten in der Orthogonalentwicklung

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(t),$$

d. h. der Entwicklung in eine Legendre'sche Reihe.

Ein Beispiel. Entwickelt man $(1-2th+h^2)^{-1/2}$ nach Potenzen von $(2t-h)h$:

$$\begin{aligned} (1-2th+h^2)^{-1/2} &= (1-h(2t-h))^{-1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(2t-h)h + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2t-h)^2 h^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}(2t-h)^n h^n + \dots, \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung

$$(9) \quad |h|(2|t|+|h|) < 1,$$

so wird die durch Ausführung der Potenzierung und Auflösung der Klammern entstandene Reihe bei jeder Anordnung gegen die ursprüngliche Summe konvergieren. Der Koeffizient von h^n beträgt

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left\{ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} \mp \dots \right\},$$

ist also gleich $P_n(t)$ (vgl. (1)). Ist nun $-1 \leq t \leq 1$ und $|h| \leq 1/3$, so ist (9) erfüllt, also gilt

$$(10) \quad (1-2th+h^2)^{-1/2} = P_0(t) + P_1(t)h + P_2(t)h^2 + \dots$$

sogar gleichmäßig in t und h . Die Gleichmäßigkeit genügt aber (vgl. [251] [252]), um in der Reihe rechterhand die Legendre'sche Entwicklung der linkerhand stehenden Funktion zu erkennen. Nach (8) folgt daraus

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t) dt}{\sqrt{1-2th+h^2}} = \frac{2h^n}{2n+1} \quad (n=0, 1, \dots).$$

Die Entwicklung (10) gilt aber bei $|h| < 1$ für alle t des Intervalls $\langle -1, +1 \rangle$. Denn $(1-2th+h^2)^{-1/2}$, als Funktion der komplexen Variablen h betrachtet, hat nur $t \pm \sqrt{t^2-1}$ zu singulären Stellen; für ein reelles t des Intervalls $\langle -1, +1 \rangle$ liegen diese

Stellen auf dem Kreise $|h|=1$; gilt also (10) für kleine h (vgl. (9)), so ist sie die Taylorentwicklung und als solche für $|h|<1$ gültig.

[414] Jetzt gelangen wir leicht zur Rekurrenzrelation für Legendre'sche Polynome. Schreibt man $u(h, t)$ für $(1-2ht+h^2)^{-1/2}$, so wird

$$(11) \quad (1-2ht+h^2) \frac{\partial u}{\partial h} + (h-t)u = 0;$$

substituiert man hier für $u(h, t)$ die Reihe (10), so wird der Koeffizient von h^{n-1} links in (11) gleich

$$nP_n - 2t(n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + P_{n-2} - tP_{n-1} \quad (n \geq 2);$$

er muß verschwinden, also ist

$$(12) \quad nP_n - (2n-1)tP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2).$$

Kennt man P_0 und P_1 , so kann man leicht alle P_n mittels (12) berechnen. (12) zeigt auch, daß die Nullstellen von $P_{n-1}(t)$ ($n \geq 2$) diejenigen von $P_n(t)$ trennen.

Die Nullstellen von $P_n(t)$ sind sämtlich reell. Denn $(t^2-1)^n$ hat $t = \pm 1$ zu je n facher Nullstelle, woraus mit Hilfe von (2) zu erkennen ist, daß alle Nullstellen von $P_n(t)$ reell sind und im offenen Intervall $(-1, +1)$ liegen. Wir wollen zeigen, daß sie sämtlich verschieden sind.

[415] Die Legendre'sche Differentialgleichung

$$(13) \quad (1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0,$$

k -mal nach t differenziert, gibt

$$(14) \quad (1-t^2) \frac{d^{k+2}P_n(t)}{dt^{k+2}} - 2(k+1)t \frac{d^{k+1}P_n(t)}{dt^{k+1}} + (n-k)(n+k+1) \frac{d^k P_n(t)}{dt^k} = 0.$$

Wäre nun α eine mehrfache Nullstelle von $P_n(t)$, so hätte man

$$(15) \quad P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0;$$

(13) zeigt, daß dann auch $P_n''(\alpha) = 0$ wäre, (denn $1-\alpha^2$ ist nicht Null, da die Nullstellen von P_n ins Innere von $(-1, +1)$ fallen). Setzt man in (14) für k die Zahlen $1, 2, \dots, n-2$ ein, so erhält man

$$(16) \quad P_n'''(\alpha) = 0, \dots, P_n^{(n)}(\alpha) = 0,$$

was im Widerspruch zur Tatsache steht, daß $\frac{d^n P_n(t)}{dt^n}$ eine von Null verschiedene Konstante ist.

Gauß hat die Nullstellen der Legendre'schen Polynome verwendet, um empirisch gegebene Funktionen zu integrieren. Betrachten wir beispielsweise den Verlauf der Temperatur während eines Tages. Wie sollen die Momente der Beobachtung gewählt werden, damit aus den Messungen die mittlere Tagestemperatur am zweckmäßigsten bestimmt werden könne, und welche Formel verbindet die mittlere Temperatur mit den beobachteten Daten? Es gab

Formeln, um das Integral $\int_{-1}^{+1} f(t) dt$ aus n Werten $y_1, \dots, y_n$ von $f(t)$ zu berechnen, die n bestimmten t -Stellen in $(-1, +1)$ entsprechen, unter der Voraussetzung, daß $f(t)$ ein Polynom vom Grade $\leq n-1$ ist; diese Formeln sind in $y_1, \dots, y_n$ linear mit konstanten Koeffizienten $A_1, A_2, \dots, A_n$. Gauß hat aber entdeckt, daß die Nullstellen $a_1, a_2, \dots, a_n$ von $P_n(t)$ die Eigenschaft haben, daß es n (ein für alle Mal bestimmte) Konstanten A_i gibt ($i = 1, 2, \dots, n$), die das Integral mittels der Formel

$$(17) \quad \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(a_i)$$

zu berechnen gestatten, sobald der Grad des Polynoms $f(t)$ $2n-1$ nicht überschreitet. Somit kann die mittlere Tagestemperatur aus drei in geeigneten Zeitpunkten angestellten Beobachtungen berechnet werden, wenn die Temperatur, als Funktion der Zeit, genau genug durch ein Polynom fünften Grades dargestellt werden kann. (Die Kenntnis dieses Polynoms ist überflüssig).

Es seien nun $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Nullstellen von $P_n(t)$ und

$$\prod(t) = \prod_{i=1}^n (t - a_i),$$

$$\varphi(t) = \prod(t) \cdot \left\{ \frac{f(a_1)}{(t-a_1)\prod'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{(t-a_2)\prod'(a_2)} + \dots + \frac{f(a_n)}{(t-a_n)\prod'(a_n)} \right\}.$$

$\varphi(t)$ ist das bekannte Lagrange'sche Interpolationspolynom höchstens $(n-1)$ -ten Grades, welches mit $f(t)$ für $t = a_1, a_2, \dots, a_n$ übereinstimmt. Schreiben wir y_i für $f(a_i)$ und integrieren, so folgt

$$(18) \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i y_i,$$

wo die A_i von $f(t)$ unabhängig sind. Die Gleichung

$$(19) \quad \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \int_{-1}^{+1} \varphi(t) dt$$

gilt aber, wenn $f(t)$ ein Polynom vom Grade $\leq 2n-1$ ist. Es ist dann nämlich $f(t) - \varphi(t)$ durch $\prod(t)$ teilbar; es folgt

$$\frac{f(t) - \varphi(t)}{\prod(t)} = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$$

und

$$f(t) = \varphi(t) + \prod(t) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k.$$

Damit (19) bei beliebigen c_k gelte, ist die Bedingung

$$(20) \quad \int_{-1}^{+1} t^k \prod(t) dt = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

notwendig und hinreichend. Damit ist aber die Richtigkeit von (17) (durch Vermittlung von (19) und (18)) erwiesen, denn $\prod(t)$ ist bis auf einen konstanten Faktor $P_n(t)$ und somit (20) mit (3) gleichbedeutend.

Die Formel für $\varphi(t)$ und (18) liefern für A_i den Wert

$$(21) \quad A_i = \int_{-1}^{+1} \frac{\prod(t) dt}{\prod'(a_i)(t-a_i)} = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t) dt}{P_n'(a_i)(t-a_i)} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Die Zahlen a_i, A_i sind für jedes n einzeln zu berechnen:

$n=1:$	$a_1=0;$	$A_1=2;$
$n=2:$	$a_1=-a_2=0.57735\dots;$	$A_1=A_2=1;$
$n=3:$	$a_1=-a_3=0.77460\dots, a_2=0;$	$A_1=A_3=5/9, A_2=8/9;$
$n=4:$	$a_1=-a_4=0.86114\dots,$	$A_1=A_4=0.34785,$
	$a_2=-a_3=0.33998\dots;$	$A_2=A_3=0.65215.$

In der Aufgabe der Temperaturbestimmung hat die Ablesung um $2^h 42^m$, um 12^h und um $21^h 18^m$ zu erfolgen; die mittlere Temperatur ist

$$T = 5/18 T_f + 4/9 T_m + 5/18 T_a.$$

T_f, T_m, T_a sind die Früh-, Mittag- und Abendtemperaturen;
 $0.7746 \times 12^h = 9^h 18^m, 12^h + 9^h 18^m = 21^h 18^m, 12^h - 9^h 18^m = 2^h 42^m;$

$$T = 1/2 \int_{-1}^{+1} f(t) dt = 1/2 [A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + A_3 f(a_3)].$$

§ 2. Tschebyscheff'sche Polynome.

Tschebyscheff hat als erster (1854) die Frage aufgeworfen, unter allen Polynomen n -ten Grades mit 1 als höchstem Koeffizienten dasjenige zu finden, welches im Intervall $<-1, +1>$ das kleinste Maximum des absoluten Betrages aufweist. M. a. W. sind die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ aus der Bedingung

$$\max_{-1 \leq t \leq +1} |t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n| = \text{Minimum}$$

zu bestimmen. Er fand als Lösung die nach ihm benannten Polynome $T_n(t)$:

$$T_0(t) = 1, \quad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n(\arccos t) \quad (n=1, 2, \dots). \quad [421]$$

Es ist $\cos n\vartheta = \cos^n \vartheta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \dots$,
 also, mit $t = \cos \vartheta$,

$$(22) \quad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ t^n - \binom{n}{2} t^{n-2} (1-t^2) + \binom{n}{4} t^{n-4} (1-t^2)^2 - \dots \right\}.$$

Der höchste Koeffizient in $T_n(t)$ ist $\frac{1}{2^{n-1}} \left\{ 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots \right\} = 1$,
 wie es sein soll. Die Maxima von $|T_n|$ liegen an den Stellen, wo $\cos n(\arccos t) = \pm 1$ ist, d. h. an den Stellen

$$t = \cos 0, \cos \pi/n, \cos 2\pi/n, \dots, \cos \pi,$$

$|T_n(t)|$ ist in $<-1, +1>$ ständig $\leq 1/2^{n-1}$; an den Stellen
 $t_k = \cos k\pi/n$ ($k=0, 1, \dots, n$) ist

$$(23) \quad T_n(t_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad (k=0, 1, \dots, n),$$

und sonst in $<-1, +1>$ ist $|T_n(t)| < 1/2^{n-1}$.

So ist z. B. $T_3(t) = t^3 - 3/4 t$; es ist daher unter allen Geraden und Parabeln zweiten Grades $y = 3/4 x$ diejenige Linie, die von $y = x^3$ in $<-1, +1>$ die kleinste Abweichung aufweist. (Diese Abweichung ist $1/4$ und wird an 4 Stellen erreicht).

[422] Die Polynome (22) sind eine und zwar die einzige Lösung des Tschebyscheffschen Problems. Sei nämlich

$$P_n(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

mit irgendwelchen a_i . Soll in $\langle -1, +1 \rangle |P_n(t)| \leq 1/2^{n-1}$ sein, so folgt aus (23)

$$P_n(t_0) \leq T_n(t_0), \quad P_n(t_1) \geq T_n(t_1), \quad \dots$$

und die Differenz $R_n(t) = T_n(t) - P_n(t)$ ist abwechselnd $\geq 0, \leq 0$ in $t_0, t_1, \dots, t_n$. Nun ist $R_n(t)$ von höchstens $(n-1)$ -tem Grade; wäre

$$(24) \quad R_n(t_0) > 0, \quad R_n(t_1) < 0, \quad R_n(t_2) > 0, \quad \dots,$$

so hätte $R_n(t)$ n Nullstellen, ein Widerspruch. Wäre z. B. $R_n(t_0) = 0$ und alles sonst wie in (24), so hätte man zwischen t_i und t_{i+1} ($i=1, 2, \dots, n-1$) je eine Nullstelle und in t_0 eine weitere, zusammen n Nullstellen. Wäre $R_n(t_k) = 0$ und

$$R_n(t_{k-1}) > 0, \quad R_n(t_{k+1}) > 0 \quad (\text{gerades } k),$$

$$R_n(t_{k-1}) < 0, \quad R_n(t_{k+1}) < 0 \quad (\text{ungerades } k),$$

so müßte t_k eine zweifache Nullstelle sein, oder aber hätte R_n eine weitere Nullstelle in (t_{k-1}, t_{k+1}) . Es bleibt wieder die Anzahl der Nullstellen wenigstens n . Ebenso zeigt man im Falle

$$R_n(t_{k-1}) \neq 0, \quad R_n(t_k) = R_n(t_{k+1}) = \dots = R_n(t_{k+p-1}) = 0, \quad R_n(t_{k+p}) \neq 0,$$

($k \geq 1, k+p \leq n$), daß die Anzahl der Nullstellen in (t_{k-1}, t_{k+p}) wenigstens $p+1$ beträgt. Ist nämlich p gerade, so haben $R_n(t_{k-1})$ und $R_n(t_{k+p})$ verschiedene Vorzeichen, es muß also in (t_{k-1}, t_{k+p}) außer den p Nullstellen $t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+p-1}$ eine weitere vorhanden oder eine von den p Nullstellen mehrfach sein. Ist p ungerade, so haben $R_n(t_{k-1})$ und $R_n(t_{k+p})$ dasselbe Vorzeichen und es gilt ein analoger Schluß. In beiden Fällen liegen in (t_{k-1}, t_{k+p}) wenigstens $p+1$ Nullstellen, wie im Falle (24). Eine letzte Möglichkeit

$$R_n(t_{k-1}) \neq 0, \quad R_n(t_k) = R_n(t_{k+1}) = \dots = R_n(t_n) = 0$$

ergibt wieder in (t_{k-1}, t_n) wenigstens $n-k+1$ Nullstellen, also so viel, wie im Falle (24) auf dieses Intervall entfällt. Es ist also $R_n(t)$ identisch Null. Es folgt daraus, daß die Ungleichung

$$|P_n(t)| = |t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n| \leq 1/2^{n-1}$$

bereits $P_n(t) = T_n(t)$ zur Folge hat. Da aber $|T_n(t)| \leq 1/2^{n-1}$, so folgt, daß ein Polynom $P_n(t)$, welches den Bedingungen von Tschebyscheff entspricht, dem Betrage nach $1/2^{n-1}$ nicht übertrifft. Es ist also [422] bewiesen und zwar in diesem Sinne, daß es genau eine Lösung gibt: (22).

Die Tschebyscheff'schen Polynome bilden kein Orthogonalsystem. Man hat aber

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} T_m(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{1}{2^{m+n-2}} \int_{-1}^{+1} \cos m(\arccos t) \cos n(\arccos t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2^{m+n-2}} \int_0^\pi \cos m\vartheta \cdot \cos n\vartheta \cdot d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2^{2n-1}} & \text{für } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{für } m = n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Es erweist sich also

$$(25) \quad \left\{ \frac{2^{n-\frac{1}{2}} T_n(t)}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-t^2}} \right\} \quad (n \geq 1; -1 \leq t \leq 1)$$

als ein ON-System. Fügt man $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-t^2}}$ hinzu, so wird das System vollständig.

In der Tat, der Grad von $T_n(t)$ ist genau n . Infolgedessen kann man sukzessive 1 durch T_0 , t durch T_1 und $1, t^2$ durch T_2 , $t, 1$ linear ausdrücken, also t^n linear durch $T_n, T_{n-1}, \dots, T_0$, woraus bereits die Vollständigkeit von $\{T_n\}$ resultiert. $\{T_n\}$ ist sogar in bezug auf L vollständig, da $\{t^n\}$ es ist. Wäre nun das System (25) (mit $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-t^2}}$) unvollständig in bezug auf L^2 , so hätte man

ein $\varphi(t) \in L^2$, $\varphi(t)$ nicht f. ü. Null, mit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t) \varphi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$1/\sqrt{1-t^2}$ gehört aber zu L^2 ($-1 \leq t \leq 1$), also gehört $\psi(t) = \varphi(t)/\sqrt{1-t^2}$ zu L und es wäre $\psi(t)$ nicht f. ü. Null mit $\int_{-1}^{+1} T_n(t) \psi(t) dt = 0$ ($n=0, 1, \dots$), gegen die bewiesene L -Vollständigkeit von $\{T_n\}$.

Entwicklung nach Tschebyscheff'schen Polynomen. Schreiben wir formell

$$(26) \quad \varphi(t) \sim c_0 T_0 + c_1 T_1 + c_2 T_2 + \dots,$$

so folgt nach [255] und [423]

$$c_k = \frac{2^{k-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (k \geq 1), \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Obiges ist so zu verstehen, daß die formelle Entwicklung durch beiderseitige Division mit $\sqrt{1-t^2}$ in eine Orthogonalentwicklung nach dem System $\{T_k(t)/\sqrt{1-t^2}\}$ übergeht. Setzt man $\psi(t) = \varphi(t)/\sqrt{1-t^2}$, so folgt (formell)

$$c_k \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{T_k^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{+1} \psi(t) \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

also

$$c_k \cdot \frac{\pi}{2^{k-1}} = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad c_0 \cdot \pi = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wir entwickeln z. B. $\arccos t$ in eine Tschebyscheff'sche Reihe. Es ist ($t = \cos \vartheta$)

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$c_k = \frac{2^{k-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\arccos t \cdot T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2^k}{\pi} \int_0^\pi \vartheta \cdot \cos k\vartheta d\vartheta \\ = -\frac{2^k}{k\pi} \int_0^\pi \sin k\vartheta d\vartheta = \frac{2^k}{k^2\pi} [(-1)^k - 1].$$

Man hat also

$$\arccos t \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} T_1(t) - \frac{16}{9\pi} T_3(t) - \dots$$

Allgemein: Die Koeffizienten der Entwicklung der Funktion $\varphi(t) = f(\arccos t)$ nach den Polynomen $\{T_k(t)\}$ sind bis auf den Faktor 2^{k-1} dieselben wie die Koeffizienten der Fourierentwicklung von $f(\vartheta)$ nach $\{\cos k\vartheta\}$. Ist nämlich (26) die Tschebyscheff'sche Entwicklung und substituiert man in den Formeln für $\{c_k\}$ $t = \cos \vartheta$, so folgt ($k \geq 1$)

$$(27) \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) d\vartheta, \quad c_k = \frac{2^{k-1}}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \frac{\cos k\vartheta}{2^{k-1}} d\vartheta \\ = 2^{k-1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta.$$

Wenn man nun in der Reihe (26) $t = \cos \vartheta$ substituiert und von (27) und [421] Gebrauch macht, so entsteht die Reihe

$$1 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) d\vartheta + \sum_{k=1}^\infty \cos k\vartheta \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta,$$

d. i. die Cosinus-Entwicklung von $f(\vartheta)$ in $<0, \pi>$.

Es wird also die Entwicklung von $\varphi(t)$ nach den Tschebyscheff'schen Polynomen $\{T_k(t)\}$ Glied für Glied mit der Entwicklung von $f(\vartheta)$ in eine Cosinus-Reihe identisch, wenn man t durch $\cos \vartheta$ ersetzt und wenn $f(\vartheta)$ die Funktion ist, die durch eben diese Substitution aus $\varphi(t)$ entsteht: $f(\vartheta) = \varphi(\cos \vartheta)$. [424]

Damit wird aber die Theorie der Tschebyscheff'schen Reihen im wesentlichen auf die Theorie der Fourier-Reihen zurückgeführt.

Eine Rekurrenzformel für Tschebyscheff'sche Polynome. Es gilt bekanntlich für $|r| < 1$

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos \vartheta + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^\infty r^n \cos n\vartheta;$$

setzt man $t = \cos \vartheta$, so folgt

$$\frac{1-r^2}{1-2rt+r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^\infty r^n \cos n(\arccos t) = \sum_{n=0}^\infty r^n 2^n T_n(t), \\ 1-r^2 = (1-2rt+r^2) \sum_{n=0}^\infty r^n 2^n T_n(t),$$

und der Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$(28) \quad T_{n+1}(t) - tT_n(t) + 1/4 T_{n-1}(t) = 0.$$

Es ist $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ und daraus kann man mit Hilfe von (28) alle T_n berechnen.

Die Differentialgleichung für $T_n(t)$ resultiert aus der Differentialgleichung für $y = \cos n\vartheta$. Diese lautet:

$$\frac{d^2 y}{d\vartheta^2} + n^2 y = 0.$$

Es ist aber $y(\vartheta) = \cos n\vartheta = 2^{n-1} T_n(t)$, wo $t = \cos \vartheta$, und

$$\frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} = \frac{d}{d\vartheta} \frac{dT_n(t)}{d\vartheta} = \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{dT_n(t)}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{d\vartheta^2}$$

$$= \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} \sin^2 \vartheta - \frac{dT_n(t)}{dt} \cos \vartheta = \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} (1 - t^2) - \frac{dT_n(t)}{dt} t.$$

Es ist daher ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$(1 - t^2) T_n''(t) - t T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0,$$

wo die Striche die Differentiation nach t bedeuten.

§ 3. Das trigonometrische System.

Dieses System ist uns bereits bekannt. In $\langle -\pi, \pi \rangle$ bilden die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

ein ON-System. Dieses System ist aus akustischen Untersuchungen entstanden. Die physikalische These, daß jede Schwingung eine Summe von harmonischen Schwingungen vorstellt, würde mathematisch bedeuten, daß eine beliebige Funktion in eine Fourierreihe entwickelbar ist. Eine Fourierreihe heißt die Entwicklung

$$f(t) \sim a_0 + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \dots$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k \geq 1),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \, dt \quad (b_0 = 0),$$

(also eine Orthogonalentwicklung in Sinne von [255]).

Schreibt man

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

so kommt

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) [1/2 + \cos(u-t) + \cos 2(u-t) + \dots + \cos n(u-t)] \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \cdot \frac{\sin(n+1/2)(u-t)}{2 \sin \frac{u-t}{2}} \, du.$$

Die letzte Formel ist der Ausgangspunkt der Theorie der Fourierreihen. Es folgt aus ihr insbesondere:

Ist $|f(u)|$ in $\langle u_0 - \pi, u_0 + \pi \rangle$ integrierbar und ist daselbst auch [431]

$$\left| \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \right|$$

integrierbar, wenn man die ursprünglich in $\langle -\pi, +\pi \rangle$ definierte meßbare Funktion $f(u)$ periodisch darüber hinaus fortsetzt, so ist die Fourierentwicklung von $f(u)$ in $u = u_0$ gegen $f(u_0)$ konvergent.

Die Fejér'sche Methode. Wir haben die Formel

$$\frac{1}{2} + \cos \vartheta + \dots + \cos n\vartheta = \frac{\sin(n+1/2)\vartheta}{2 \sin 1/2 \vartheta}$$

benutzt. Summiert man abermals, so kommt

$$\sum_{k=0}^n \frac{\sin(k+1/2)\vartheta}{2 \sin 1/2 \vartheta} = \frac{-1}{2 \sin \vartheta/2} \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k+1)\vartheta - \cos k\vartheta}{2 \sin \vartheta/2}$$

$$= \frac{1 - \cos(n+1)\vartheta}{4 \sin^2 \vartheta/2} = 1/2 \left(\frac{\sin(n+1/2)\vartheta}{\sin \vartheta/2} \right)^2.$$

Für die Fourier'schen Reihen folgt daraus

$$s_0(t) + s_1(t) + \dots + s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k+1/2)(t-u)}{2 \sin(t-u)/2} \, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \left(\frac{\sin(n+1/2)(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 \, du,$$

oder aber

$$\sigma_n(t) = \frac{s_0(t) + s_1(t) + \dots + s_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \left(\frac{\sin(n+1/2)(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 \, du.$$

Für $f(u) = \text{const.} = f(t)$ ist $s_0(t) = s_1(t) = \dots = s_n(t) = f(t)$, also $\sigma_n(t) = f(t)$; man hat also stets

$$(29) \quad f(t) - \sigma_n(t) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} [f(t) - f(u)] \left(\frac{\sin(n+1/2)(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 \, du;$$

($f(t)$ wird als periodisch vorausgesetzt).

Bezeichnet man den Integranden mit $\Phi(t, u)$, so soll für $0 < \varepsilon < \pi$

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\pi} \Phi(t, u) du = 0$$

fürs erste bewiesen werden; es ist in der Tat $\left| \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\pi} \Phi(t, u) du \right|$

$$\leq \frac{1}{2(n+1)\pi} \left\{ \pi \cdot \frac{|f(t)|}{\sin^2 \varepsilon/2} + \frac{1}{\sin^2 \varepsilon/2} \int_0^\pi |f(u)| du \right\}. \text{ Ebenso beweist man}$$

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\pi}^{t-\varepsilon} \Phi(t, u) du = 0.$$

Es bleibt noch der Grenzwert von $\frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Phi(t, u) du$ für $n \rightarrow \infty$ zu berechnen. Ist $f(u)$ für $u=t$ stetig und ε so klein, daß

$$\mu_1 \leq f(t) - f(u) \leq \mu_2$$

für $|t-u| < \varepsilon$ mit endlichen μ_1, μ_2 gelte, so ist der betrachtete Ausdruck in den Grenzen

$$\frac{\mu_1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du, \quad \frac{\mu_2}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du$$

gelegen. Nun ist aber

$$\frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\pi}^{t-\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t+\varepsilon}^{t+\pi} = 0,$$

somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du = 1,$$

also

$$(32) \quad \begin{aligned} \mu_1 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Phi(t, u) du \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Phi(t, u) du \leq \mu_2. \end{aligned}$$



Ist also μ_1 die untere, μ_2 die obere Grenze von $f(t) - f(u)$ in $< t-\varepsilon, t+\varepsilon >$, so sind $\liminf$ und $\limsup$ von $f(t) - \sigma_n(t)$ für $n \rightarrow \infty$ wegen (29), (30), (31) und (32) zwischen eben diesen Grenzen gelegen. Da $f(t) - \sigma_n(t)$ von ε frei ist, $\mu_1(\varepsilon)$ und $\mu_2(\varepsilon)$ aber mit ε beliebig klein werden, so folgt

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t_0) = f(t_0)$$

für jede integrable Funktion $f(t)$ an jeder Stetigkeitsstelle t_0 .

Der Satz (33) läßt sich verschärfen: *Die Beziehung $\lim \sigma_n(t) = f(t)$ [432] gilt nämlich in ganz $< -\pi, \pi >$ gleichmäßig, wenn $f(t)$ in diesem Intervall stetig und $f(\pi) = f(-\pi)$ ist.* Denn die Abschätzung von (30) läßt sich gleichmäßig einrichten, indem man $|f(t)|$ durch das Maximum von $|f(t)|$ ersetzt. Die beiden Grenzen μ_1, μ_2 in (32) von $f(t) - f(u)$ in $t-\varepsilon \leq u \leq t+\varepsilon$ können durch die Wahl von ε allein beliebig nahe aneinander gebracht werden, denn f ist in $(-\infty, \infty)$ gleichmäßig stetig, wenn man es periodisch fortsetzt. Diese Verschärfung heißt der Fejér'sche Satz.

Die Vollständigkeit und Abgeschlossenheit des [433] trigonometrischen Systems. Der Fejér'sche Satz hat die Abgeschlossenheit des trigonometrischen Systems in bezug auf CP d. h. auf den Raum der in $< -\pi, \pi >$ stetigperiodischen Funktionen zur Folge. Diese Funktionen sind aber überalldicht in L^2 . Dazu genügt es zu zeigen, daß sie in C im Sinne der L^2 -Norm überalldicht sind. Ist aber $f(t)$ stetig und ändert man $f(t)$ in $< -\pi, -\pi+\varepsilon >$, so daß die neue Funktion $f_\varepsilon(t)$ in $-\pi$ den Wert $f(\pi)$ annimmt, in $-\pi+\varepsilon$ den Wert $f(-\pi+\varepsilon)$, in $< -\pi, -\pi+\varepsilon >$ linear verläuft und sonst mit $f(t)$ übereinstimmt, so wird

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f_\varepsilon(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{-\pi+\varepsilon} (f(t) - f_\varepsilon(t))^2 dt \leq 4M^2\varepsilon,$$

wo $M = \max |f(t)|$. Es ist also $\|f - f_\varepsilon\|_{L^2}$ mit ε beliebig klein und $f_\varepsilon \in CP$, w. z. b. w.

Damit ist aber auch die Vollständigkeit in bezug auf L^2 bewiesen worden. In [234] haben wir gesehen, daß das trigonometrische System in bezug auf L ebenfalls vollständig ist. (Daraus kann wieder die Vollständigkeit in bezug auf L^2 , die L^2 - und L -Abgeschlossenheit nach den Sätzen des III-ten Kapitels (§ 5 u. 7) abgeleitet werden).

Näheres über das trigonometrische System findet man in dem Zygmund'schen Buche (Bd. V dieser Sammlung).

§ 4. Das Haar'sche System.

In seiner Doktordissertation (1910) hatte sich Alfred Haar zur Aufgabe gestellt, ein Orthogonalsystem zu konstruieren, welches für eine beliebige stetige Funktion eine konvergente Entwicklung liefert. Seit Du Bois-Reymond (1876) weiß man, daß diese Eigenschaft dem trigonometrischen System nicht zukommt; sie fehlt auch bei den aus der mathematischen Physik bekannten Systemen. Das (bereits in [226] beschriebene) Haar'sche System ist ein ONV, wie wir schon wissen. Wir werden zeigen, daß die Entwicklung einer stetigen Funktion nach dem System [226] gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.

Es seien $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8$ acht beliebige Zahlen, $\gamma_0^{(0)}, \gamma_0^{(1)}, \gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_2^{(3)}, \gamma_3^{(3)}, \gamma_3^{(4)}$ die acht ersten Haar'schen Funktionen. Wir suchen acht Zahlen c_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), so daß die Summe

$$(34) \quad s(t) = \sum_{i=1}^8 c_i \gamma_i(t)$$

(wo γ die acht Haar'schen Funktionen durchläuft) in den offenen Intervallen $(k-1/8, k/8)$ ($k = 1, 2, \dots, 8$) konstant und gleich d_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) sei. Diese Aufgabe führt auf das Gleichungssystem (Punkte bedeuten Nullen):

$$(35) \quad \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + c_3\sqrt{2} + & . & + c_5\sqrt{4} + & . & + & . & + & . & = d_1 \\ c_1 + c_2 + c_3\sqrt{2} + & . & - c_5\sqrt{4} + & . & + & . & + & . & = d_2 \\ c_1 + c_2 - c_3\sqrt{2} + & . & + & . & + c_6\sqrt{4} + & . & + & . & = d_3 \\ c_1 + c_2 - c_3\sqrt{2} + & . & + & . & - c_6\sqrt{4} + & . & + & . & = d_4 \\ c_1 - c_2 + & . & + c_4\sqrt{2} + & . & + & . & + c_7\sqrt{4} + & . & = d_5 \\ c_1 - c_2 + & . & + c_4\sqrt{2} + & . & + & . & - c_7\sqrt{4} + & . & = d_6 \\ c_1 - c_2 + & . & - c_4\sqrt{2} + & . & + & . & + & c_8\sqrt{4} = d_7 \\ c_1 - c_2 + & . & - c_4\sqrt{2} + & . & + & . & + & . & - c_8\sqrt{4} = d_8. \end{array}$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, die vierte von der dritten, die sechste von der fünften und die achte von der siebenten, so bekommt man c_5, c_6, c_7, c_8 . Setzt man die gefundenen Werte ein und subtrahiert die dritte Gleichung von der zweiten und die siebente von der sechsten, so erhält man c_3 und c_4 ; dann

liefert die vierte und fünfte Gleichung c_1 und c_2 . Hätten wir, anstatt acht, 2^p Zahlen d_i , so könnten wir ebenso 2^p Koeffizienten c_i eindeutig bestimmen derart, daß die Summe $\sum_{i=1}^{2^p} c_i \gamma_i$ in jedem der 2^p gleichen Teilintervalle einen konstanten Wert d_k annähme.

Ist n keine Potenz 2^p , so lassen sich die betreffenden Gleichungen ebenso auflösen; die Konstanzintervalle sind nicht mehr alle gleich. Nimmt man z. B. zu der Summe (34) ein neuntes Glied $c_9 \gamma_9(t)$ hinzu, so wird das erste Intervall $(0, 1/8)$ in zwei gespaltet, wo $\gamma_9(t)$ abwechselnd positiv und negativ ist; die erste Gleichung (35) muß durch zwei ersetzt werden mit d_1, d_9 als rechten Seiten und mit der neuen Unbekannten c_9 , die durch Subtraktion der zwei Gleichungen berechnet werden kann. Setzt man dann für c_9 den berechneten Wert ein und bringt es auf die rechte Seite, so erhält man zweimal dieselbe Gleichung mit d_1 als rechter Seite. Man hat dann also wieder ein System von 8 Gleichungen, genau wie (35).

Es sei nun $f(t)$ in $<0, 1>$ stetig und $s_n(t)$ die n te Partialsumme ihrer Entwicklung, $\{c_i\}$ die Koeffizientenfolge. Da $s_n(t)$ in den n Teilintervallen konstant ist, und — wie wir wissen — die Gram'sche Minimumeigenschaft besitzt, so muß $s_n(t)$ in jedem Teilintervall T_j gleich $f(\xi_j)$ sein ($j = 1, 2, \dots, n$), wo ξ_j ein Punkt des (abgeschlossenen) Teilintervalls T_j ist. Sonst könnten wir nämlich — nach der eben gelösten Aufgabe — die c_i so abändern, daß das neue $\bar{s}_n(t)$ in dem Teilintervall T_j den Wert $f(\xi_j)$ annähme, ohne von $s_n(t)$ in anderen Teilintervallen abzuweichen; war also früher $s_n(t)$ in T_j größer (kleiner) als $f(t)$, so wird jetzt das Integral $\int_0^1 (\bar{s}_n(t) - f(t))^2 dt$ kleiner als $\int_0^1 (s_n(t) - f(t))^2 dt$ werden, was gegen die Minimumeigenschaft des ursprünglichen $s_n(t)$ verstößt. Daraus folgt aber, daß das Maximum von $|f(t) - s_n(t)|$ in $<0, 1>$ die Oszillation von $f(t)$ in den Teilintervallen T_j nicht übertrifft. Wir haben zwar die Unstetigkeitsstellen von $s_n(t)$ nicht beachtet, da aber der Wert von $s_n(t)$ an einer solchen Stelle zwischen den beiderseitigen Grenzwerten liegt, so wird durch Zulassung dieser Stellen das Maximum von $|f(t) - s_n(t)|$ nicht vergrößert. Damit ist die Beziehung

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = f(t)$$

gleichmäßig in $<0, 1>$ für die Haar'sche Entwicklung der stetigen Funktion $f(t)$ bewiesen.

Es sei jetzt $f(t) \in L$. Die Partialsummen $s_n(t)$ sind — wie früher — Treppenfunktionen, d.h. konstant in gewissen Teilintervallen $\{T\}$. Die Koeffizienten $c = \int_0^1 f(t) \chi(t) dt$ hängen nur von den Mittelwerten der Funktion $f(t)$ in den beiden Intervallen, wo $\chi(t)$ von Null verschieden ist, ab. Ersetzt man also $f(t)$ durch eine Treppenfunktion $f^*(t)$, die in jedem der Teilintervalle T , die zur Definition der n ersten Haar'schen Funktionen nötig waren, gleich dem Mittelwert von $f(t)$ über das entsprechende T ist, so wird $f^*(t)$ dieselbe Partialsumme $s_n(t)$ liefern. Wir haben aber bereits gesehen (für den Fall $f \in L^2$ — und f^* gehört ja zu L^2 !), daß $s_n(t)$ ($n=2^n$) diejenige Treppen-Funktion ist, welche das Gram'sche Minimum unter allen zum betrachteten Intervallsystem gehörigen Treppenfunktionen liefert. Offenbar ist aber $f^*(t)$ selbst eine solche und $\|f^*(t) - s_n(t)\| = 0$, also ist $s_n(t) = f^*(t)$. Es ist daher im Innern eines jeden Intervalls $s_n(t)$ gleich dem Mittelwert von $f(t)$. Es gilt also (von den dyadisch-endlichen t_0 abgesehen) (36) an jeder Stelle $t = t_0$, wo das unbestimmte Integral von $f(t)$ zur Ableitung $f(t_0)$ hat, dies ist aber fast überall der Fall. Damit haben wir [442] gezeigt, daß die Haar'sche Entwicklung einer integrierbaren Funktion f.ü. gegen diese konvergiert.

Damit ist aber die Vollständigkeit in bezug auf L gesichert. Denn ist $f(t)$ zu sämtlichen $\chi(t)$ orthogonal, so ist $s_n(t) = 0$ und daraus folgt $f(t) = 0$ f.ü.

Teilt man das Intervall $<0, 1>$ nach einem anderen (als dem dyadischen) Prinzip ein, sogar ohne die Gleichheit der Teilintervalle zu verlangen, jedoch so, daß die Teilpunkte überall dicht zu liegen kommen, so erhält man analoge Systeme, welche die Konvergenz- und Vollständigkeitseigenschaften des Haar'schen Systems besitzen.

[443] Das Franklin'sche System. Die Haar'schen Funktionen sind unstetig; die Frage, ob ein Orthogonalsystem vorhanden ist, welches aus lauter stetigen Funktionen besteht und einer jeden stetigen Funktion eine gleichmäßig konvergente Entwicklung (mit der entwickelten Funktion als Summe) zuordnet, hat Ph. Franklin gelöst. Wir gelangen zu seinem Ergebnis auf einem unbeträchtlich abweichenden Wege.

Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ das Schauder'sche System [242]; es besteht aus lauter stetigen, in $<a, b>$ erklärten Funktionen und ist in bezug

auf C abgeschlossen ([243]). $\{\psi_n\}$ sei das durch Orthogonalisierung von $\{\varphi_n\}$ gewonnene System; wir werden zeigen, daß $\{\psi_n\}$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Es sei $g(t)$ eine beliebige lineare Verbindung der n ersten ψ ; $g(t)$ ist gleichzeitig eine lineare Verbindung der n ersten φ , es ist also eine stetige Funktion, deren Bild ein Polygonzug ist, mit n Ecken, die den Stellen $t = w_1 = a, w_2 = b, w_3, \dots, w_n$ entsprechen. Durch entsprechende Wahl der Koeffizienten kann man jeden solchen Polygonzug darstellen, d.h. die Ordinaten an den n Stellen $\{w_i\}$ können beliebig vorgeschrieben werden (vgl. [243]); ist $\sum_{i=1}^n d_i \varphi_i(t)$ die gesuchte Verbindung, so führen die Orthogonalisi-

sierungsformeln zu $\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(t) = g(t)$.

Es sei $f(t)$ stetig und

$$(37) \quad |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon \quad \text{für } |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon).$$

Wir wollen $J_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - g(t))^2 dt$ abschätzen für den Fall,

wenn t_1, t_2 in demselben Linearitätsintervall von $g(t)$ liegen und $|t_1 - t_2| = d < \delta(\varepsilon)$ ist. Ist $l(t)$ ganz-linear und $l(t_1) = f(t_1), l(t_2) = f(t_2)$, so hat man

$$(38) \quad |f(t) - g(t)| > |l(t) - g(t)| - \varepsilon \quad \text{in } <t_1, t_2>,$$

denn (37) hat $|f(t) - l(t)| < \varepsilon$ in $<t_1, t_2>$ zur Folge. Das Bild von $l(t) - g(t)$ ist dort eine Gerade, deren Ordinatenbeträge in t_1, t_2 die Werte $h_1 = |f(t_1) - g(t_1)|, h_2 = |f(t_2) - g(t_2)|$ annehmen. Je nachdem diese Gerade die t -Achse schneidet oder nicht, gilt in

$$(39) \quad \int_{t_1}^{t_2} (|l(t) - g(t)| - \varepsilon)^2 dt = \frac{d}{3(h_1 + h_2)} [(h_1 - \varepsilon)^3 \mp (h_2 - \varepsilon)^3]$$

das obere oder das untere Vorzeichen. Da $|l - g| - \varepsilon$ negativ sein kann, dann aber absolut kleiner als ε ist, so folgt aus (38)

$$(40) \quad J_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - g(t))^2 dt > \int_{t_1}^{t_2} (|l(t) - g(t)| - \varepsilon)^2 dt - \varepsilon^2 d.$$

Wir setzen nun $\max(h_1, h_2) > 5\varepsilon$ voraus und substituieren in (40) die untere Formel (39); wir bemerken, daß man für $\alpha \gg \beta \gg 0, \alpha > 4\varepsilon, 5(\alpha^3 + \beta^3) \gg (\alpha + \beta + 2\varepsilon)(\alpha^2 + \beta^2)$ hat; ist $\alpha = h_1 - \varepsilon, \beta = h_2 - \varepsilon$ und $h_1 \gg h_2$, so wird

$$\frac{(h_1 - \varepsilon)^3 + (h_2 - \varepsilon)^3}{h_1 + h_2} \geq \frac{(h_1 - \varepsilon)^2 + (h_2 - \varepsilon)^2}{5},$$

also

$$(41) \quad J_{12} > \frac{d}{15} ((h_1 - \varepsilon)^2 + (h_2 - \varepsilon)^2) - \varepsilon^2 d \geq \frac{d}{15} (\max(h_1, h_2) - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 d.$$

Dies gilt auch für $h_1 \leq h_2$ und für das obere Vorzeichen in (39).

Es sei nun $n > 2$ und $s_n(t)$ die n -te Partialsumme der Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\psi_n\}$, M die größte unter den Zahlen $h_i = |f(w_i) - s_n(w_i)|$ ($i = 1, 2, \dots, n$); es sei etwa $h_j = M$ und $M > 7\varepsilon$. Unter den links von w_j gelegenen w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mit $w_i \leq 7\varepsilon$ sei w_p das an w_j nächstgelegene; sollte es solche w_i nicht geben, so sei $w_p = w_1 = a$; analog werde w_q ($\geq w_j$; evt. $= w_2 = b$) definiert. Mit $v_p, v_{p+1}, \dots, v_q$ seien die in $\langle w_p, w_q \rangle$ gelegenen wachsend geordneten w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet ($v_p = w_p < v_{p+1} < \dots < v_{q-1} < v_q = w_q$). Ferner sei $\sigma_n(t)$ eine Hilfsfunktion, die außerhalb von $\langle w_p, w_q \rangle$ gleich $s_n(t)$, in $\langle w_p, w_q \rangle$ aber durch einen Polygonzug mit

$$\sigma_n(w_p) = s_n(w_p), \quad \sigma_n(w_q) = s_n(w_q),$$

$$\sigma_n(w_i) = f(w_i) \quad \text{für } w_p < w_i < w_q \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gegeben ist. Wird in (41) $s_n(t)$ für $g(t)$ gesetzt und sukzessive $\langle v_k, v_{k+1} \rangle$ ($k = p, \dots, q-1$) für $\langle t_1, t_2 \rangle$, so kommt

$$(42) \quad J(s_n) = \int_{w_p}^{w_q} (f(t) - s_n(t))^2 dt = \sum_{k=p}^{q-1} \int_{v_k}^{v_{k+1}} (f(t) - s_n(t))^2 dt$$

$$\geq \frac{d_1 + d_2}{15} (M - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 (d_1 + d_2) + \frac{(w_q - w_p - d_1 - d_2)}{15} \cdot (6\varepsilon)^2 - (w_q - w_p - d_1 - d_2)^2 \varepsilon^2,$$

wo d_1, d_2 die Längen der in w_j angrenzenden Teilintervalle bedeuten. Andererseits ist

$$(43) \quad J(\sigma_n) = \int_{w_p}^{w_q} (f(t) - \sigma_n(t))^2 dt \leq (w_q - w_p) \varepsilon^2 + (d_3 + d_4) (8\varepsilon)^2,$$

wo d_3, d_4 die Länge des ersten, bzw. letzten der in Frage kommenden Teilintervalle bezeichnet; σ_n ist aber eine lineare Verbindung von $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ (Beweis von [243]), also von $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ (nach [313]); [263] gibt also

$$J(s_n) - J(\sigma_n) = \int_a^b (f(t) - s_n(t))^2 dt - \int_a^b (f(t) - \sigma_n(t))^2 dt < 0,$$

was mit (42) und (43) zu

$$\frac{d_1 + d_2}{15} (M - \varepsilon)^2 \leq (w_q - w_p) (2 - 36/15) + \frac{d_1 + d_2}{15} \cdot 36\varepsilon^2 + 64 (d_3 + d_4) \varepsilon^2,$$

d. h. zu

$$\frac{(M - \varepsilon)^2}{15} \leq \frac{36}{15} \varepsilon^2 + 64 \rho \varepsilon^2$$

führt, wo ρ eine n -freie Zahl ist, die alle Längenverhältnisse der durch $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ erklärten Teilintervalle übertrifft; nach der Bemerkung auf S. 51 braucht das Schauder'sche System nicht alle φ_n zu enthalten, wenn nur die benutzten w überalldicht in $\langle a, b \rangle$ zu liegen kommen; dies zeigt die Existenz von ρ und man erhält

$$M \leq (1 + \sqrt{36 + 15 \times 64\rho}) \varepsilon,$$

was den Beweis abschließt.

§ 5. Das Rademacher'sche System.

Dieses (bereits in [225] angegebene) System ist unvollständig (vgl. [236]). Es gehört zur wichtigen Klasse der sog. lakunären Systeme, welche in Kapitel VII besprochen werden. Es besitzt eine interessante Eigenschaft:

Sind $j \leq k \leq l \leq m \leq \dots \leq p \leq q$ natürliche Zahlen und $\{r_n(t)\}$ [451] die Rademacher'schen Funktionen, so ist

$$\int_0^1 r_j(t) r_k(t) \dots r_p(t) r_q(t) dt = 0,$$

mit Ausnahme des Falles, wo der Integrand aus einer geraden Anzahl von Faktoren mit

$$j = k, \quad l = m, \quad \dots, \quad p = q$$

besteht; dann ist das Integral gleich Eins.

Der Ausnahmefall ist leicht zu erledigen, denn es sind dann $r_j^2(t), r_l^2(t), \dots, r_p^2(t)$ sämtlich f. ü. gleich 1. Sonst kann man alle Paare mit gleichen Indizes streichen, denn sie liefern den Faktor 1 f. ü., und es bleiben unter dem Integralzeichen Funktionen mit verschiedenen Indizes ($j' < k' < \dots < p' < q'$) übrig.

Das Produkt $r_{j'}(t) \cdot r_{k'}(t) \dots r_{p'}(t)$ hat $2^{p'}$ Konstanzintervalle (von der Länge $1/2^{p'}$), in welche $\langle 0, 1 \rangle$ zerfällt. Ein jedes dieser Konstanzintervalle J zerfällt in $2^{q'-p'}$ gleiche Teile, innerhalb deren $r_{q'}(t)$ abwechselnd $+1, -1$ ist. Infolgedessen zerfällt

$$\int_0^1 r_{j'}(t) r_{k'}(t) \dots r_{p'}(t) r_{q'}(t) dt$$

in $2^{p'}$ Summanden: $\text{const.} \int r_{q'}(t) dt$, und jeder Summand ist Null wegen $\int r_{q'}(t) dt = 0$.

[452] Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, so ist

$$(44) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$$

fast überall konvergent in $\langle 0, 1 \rangle$ (Rademacher).

[453] Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, so ist (44) fast überall divergent in $\langle 0, 1 \rangle$ (Kolmogoroff).

Beweis von [452]: Sind $s_n(t)$ die Partialsummen von (44) und $f(t)$ die nach dem Riesz-Fischer'schen Satze [356] in L^2 vorhandene Funktion mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f(t) - s_n(t))^2 dt = 0$, so hat man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) - s_n(t))^2 dt = 0 \quad \text{für } \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, 1 \rangle,$$

also auch

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) - s_n(t)) dt = 0.$$

Ist (α_k, β_k) ein Konstanzintervall für $r_k(t)$, also auch für $s_k(t)$, so ist $\int_{\alpha_k}^{\beta_k} (s_n(t) - s_k(t)) dt = 0$ für $n > k$, also — wegen (45) —

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t) dt = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} s_k(t) dt.$$

Ist $t_0 \neq p/2^q$ (p, q ganzzahlig) und ist $\frac{d}{dt} \int_0^t f(u) du$ für $t = t_0$ vorhanden, $\alpha_k < t_0 < \beta_k$, so folgt

$$s_k(t_0) = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} s_k(t) dt = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t) dt,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \int_0^t f(u) du \right)_{t=t_0},$$

also ist letzter Limes f. ü. in $0 \leq t_0 \leq 1$ vorhanden, w. z. b. w.

Ein anderer Beweis stützt sich auf die Identität

$$r_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} [\gamma_n^{(1)}(t) + \gamma_n^{(2)}(t) + \dots + \gamma_n^{(2^{n-1})}(t)],$$

wo $\{\gamma\}$ das in [226] definierte Haar'sche System ist. Setzt man

$$c_n^{(i)} = \frac{a_n}{\sqrt{2^{n-1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}), \text{ so wird } \sum_{i,n} (c_n^{(i)})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \text{ also}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n^{(1)} \gamma_n^{(1)}(t) + \dots + c_n^{(2^{n-1})} \gamma_n^{(2^{n-1})}(t)],$$

und rechts steht — laut [356] — die Entwicklung einer Funktion aus L^2 nach $\{\gamma\}$, wenn wir von den Klammern absehen; da die letzteren die Konvergenz nicht stören, ist nach [442] die Reihe rechts, also auch (44) f. ü. konvergent.

Beweis von [453]: Wir gehen indirekt vor und setzen voraus, (44) wäre in einer t -Menge von positivem Maße konvergent. Dann ist diese Reihe in einer Menge E mit $|E| > 0$ gleichmäßig konvergent. Es gibt also ein M mit

$$|s_{n+p}(t) - s_n(t)| < M \quad (t \in E)$$

für alle natürlichen n, p . Dies ergibt

$$\int_E (s_{n+p}(t) - s_n(t))^2 dt < M^2 |E|,$$

oder

$$(46) \quad M^2 |E| > \int_E \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i r_i(t) \right)^2 dt = |E| \cdot \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2 + 2 \sum_{n+1 \leq i < k \leq n+p} a_i a_k \int_E r_i(t) r_k(t) dt.$$

Nun ist aber $\{r_k(t)\}$ ein multiplikatives System, d. h. ein System [454] von der Eigenschaft [451]; infolgedessen ist das System $\{r_i(t) r_k(t)\}$ aller Produkte ($i < k$) orthogonal und normiert. Die Bessel'sche Ungleichung [264] liefert also für $n > N(E)$

$$\sum_{n+1 \leq i < k \leq n+p} \left[\int_E r_i(t) r_k(t) dt \right]^2 < \frac{|E|^2}{9},$$

(denn links steht die Summe der Koeffizientenquadrate der charakteristischen Funktion von E), was die Doppelsumme in (46) durch

$$\frac{|E|}{3} \cdot \sqrt{\sum_{i,k} (a_i a_k)^2} \leq \frac{|E|}{3} \cdot \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2$$

zu majorisieren erlaubt. Es folgt

$$M^2 |E| > |E| \cdot \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2 - \frac{2|E|}{3} \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2$$

und — wegen $|E| \neq 0$ —

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2 < 3M^2$$

für $n > N(E)$, wie groß auch p sei; dies ist mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ gleichbedeutend.

[455] Probabilistische Deutung. Die Rademacher'sche Funktion $r_1(t)$ ist in $(0, 1/2)$ gleich $+1$, in $(1/2, 1)$ gleich -1 . Wenn wir aus $(0, 1)$ ein t blindlings wählen, indem wir gleichen Teilintervallen gleiche Chancen zuordnen, so wird die Wahrscheinlichkeit für ein t mit $r_1(t) = +1$ ebenso groß, wie die Wahrscheinlichkeit für ein t mit $r_1(t) = -1$. Beide Wahrscheinlichkeiten sind $1/2$. Setzen wir — allgemeiner und genauer — fest, $|E|$ sei die Wahrscheinlichkeit in $<0, 1>$ einen Punkt aus E anzutreffen ($E \subset <0, 1>$). Betrachten wir die n ersten Rademacher'schen Funktionen $r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)$; sie sind unabhängig voneinander im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung; m. a. W.: ist es bekannt, daß $r_i(t)$ den Wert ± 1 hat, so ist die Wahrscheinlichkeit des Wertes ± 1 für $r_k(t)$ ($k \neq i$) noch immer $1/2$, also so groß, wie wenn nichts über t bekannt wäre. Man kann leicht feststellen, daß von den 2^n Kombinationen $r_1(t) = \pm 1, r_2(t) = \pm 1, \dots, r_n(t) = \pm 1$ der Vorzeichen $\pm$ eine jede in einer t -Menge vom Maße $1/2^n$ realisiert wird. Dies erlaubt, alle Probleme des Kopf-Wappen-Spiels um den Einsatz 1 in der Sprache der Rademacher'schen Funktionen zu formulieren, wenn es sich um n Würfe handelt. So ist z. B. die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für einen der Spieler in den n ersten Würfeln mindestens den Gesamtgewinn a zu

erzielen mit der Bestimmung des Maßes der durch die Ungleichung

$$r_1(t) + r_2(t) + \dots + r_n(t) \geq a \quad <0, 1>$$

definierten t -Menge identisch.

Will man unendlichlange Partien behandeln, so genügt es das Postulat über die Addition der Wahrscheinlichkeiten auf unendliche Summen auszudehnen und ein geeignetes „Vollständigkeitspostulat“ hinzuzufügen. Da die Lebesgue'sche Maßtheorie analoge Postulate erfüllt, wird der Parallelismus zwischen den Rademacher'schen Funktionen und der Theorie des Kopf-Wappen-Spiels erhalten bleiben. So ist z. B. der Cantelli'sche Satz, daß der mittlere Gewinn (Einsatz $= 1$) mit der Wahrscheinlichkeit 1 gegen 0 strebt, mit der Behauptung

$$(47) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k(t) = 0 \quad \text{f. ü.} \quad \text{in } <0, 1>$$

gleichwertig.

In obiger Deutung nehmen andererseits die Sätze [452] und [453] folgende Gestalt an:

Sind in $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ die c_n gegeben und werden die Vorzeichen $\pm$ nacheinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit für $+$ und $-$ gelost, so ist die Wahrscheinlichkeit eine konvergente Reihe zu erhalten im Falle $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ gleich 1 , sonst 0 .

Unsere Deutung des Cantelli'schen Satzes ist nichts anderes als der Borel'sche Satz über die Verteilung der Nullen und Einsen in dyadischen Entwicklungen reeller Zahlen. Dieser Satz besagt, daß — mit Ausnahme einer t -Menge vom Maße Null — alle Zahlen t ($0 \leq t \leq 1$) die gleiche Frequenz von Nullen und Einsen aufweisen, d. h. daß das Verhältnis der Anzahl der Nullen zu der Anzahl der Einsen an den n ersten Stellen mit $n \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt, was mit (47) übereinstimmt. Alle drei Sätze: Borel's, Cantelli's und (47) sind ohne Rechnung miteinander äquivalent, so daß ein aufmerksamer Leser des Borel'schen Satzes den (viel später bewiesenen) Cantelli'schen Satz hätte finden können. Dagegen ist der Bernoulli'sche Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung schwächer als (47). Interpretiert man ihn als eine Eigenschaft des Systems $\{r_k(t)\}$, so liefert er nicht (47), sondern bloß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k(t) = 0,$$

wo „lim as“ den in [162] definierten asymptotischen Grenzwert bedeutet.

Spätere Verschärfungen des Satzes (47) (Khintchin, 1924) lassen sich ebenfalls als Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, also als Verlängerung der Linie Bernoulli-Cantelli deuten.

Die probabilistische Deutung des Systems $\{r_k(t)\}$ erlaubt einige Eigenschaften dieses Systems vorauszusehen. Da man zum Kopf-Wappen-Spiel an Stelle der n ersten ebensogut irgendwelche n verschiedene Funktionen $r_{p_1}(t), \dots, r_{p_n}(t)$ heranziehen kann, ist das Rademacher-Kolmogoroffsche Resultat [452] [453] auf

$$(48) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_{p_i}(t)$$

auszudehnen: Diese Reihe ist auch f. ü. konvergent bzw. divergent, je nachdem $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ oder $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \infty$ gilt.

Wir gewinnen auch das Resultat, daß das Integral

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt$$

(und sogar $\int_0^1 \varphi(|f(t)|) dt$ mit beliebigem φ) von der Wahl der Indizes $\{p_i\}$ in

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_{p_i}(t)$$

unabhängig ist, also nur von $\{c_i\}$ abhängt.

Dieselbe Überlegung ergibt, daß die Konvergenz der Reihe (44), sowie die der Reihe (48), bei jeder Anordnung der Glieder f. ü. erhalten bleibt, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$, und dasselbe gilt für die Divergenz, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \infty$ ist. So ist z. B. die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i(t)}{i}$$

f. ü. absolut divergent, doch bei jeder Anordnung f. ü. konvergent.

Die Khintchin'sche Ungleichung. Für spätere Verwendung brauchen wir eine Ungleichung, die vom Rademacher'schen System erfüllt wird:

$$\text{Ist } s_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k r_k(t), \text{ so ist für } p > 0$$

[456]

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{2} + 1\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Beweis: Sei zunächst $p = 2i$, i natürlich. Dann ist

$$\int_0^1 s_n^{2i}(t) dt = \sum \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_j)!}{a_1! a_2! \dots a_j!} \cdot a_{n_1}^{a_1} a_{n_2}^{a_2} \dots a_{n_j}^{a_j} \cdot \int_0^1 r_{n_1}^{a_1}(t) \dots r_{n_j}^{a_j}(t) dt,$$

wobei die Summe über alle ganzen positiven Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_j$, $a_1, a_2, \dots, a_j$ mit $n_k \leq n$, $a_1 + a_2 + \dots + a_j = 2i$, erstreckt wird. Nach [451] ist die Summe gleich

$$\sum \frac{(2\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + 2\beta_j)!}{(2\beta_1)! (2\beta_2)! \dots (2\beta_j)!} a_{n_1}^{2\beta_1} a_{n_2}^{2\beta_2} \dots a_{n_j}^{2\beta_j},$$

wo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$ ganze positive Zahlen mit der Summe i bedeuten. Nun ist aber

$$\sum \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_j)!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_j!} a_{n_1}^{2\beta_1} a_{n_2}^{2\beta_2} \dots a_{n_j}^{2\beta_j} = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^i,$$

also

$$\int_0^1 |s_n(t)|^{2i} dt \leq c \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^i.$$

Die Konstante c ist das Maximum von

$$\frac{(2\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + 2\beta_j)!}{(2\beta_1)! (2\beta_2)! \dots (2\beta_j)!} \cdot \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_j)!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_j!} = \frac{(2i)! \beta_1! \dots \beta_j!}{i! (2\beta_1)! \dots (2\beta_j)!} \leq \frac{(2i)!}{i! 2^i} \leq i^i.$$

Jetzt sei $2i - 2 < p \leq 2i$. Da $\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ mit p wächst, wie aus [127] ersichtlich, so folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |s_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 |s_n(t)|^{2i} dt\right)^{\frac{1}{2i}} \leq i^{\frac{1}{2}} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{p}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Schreibt man in [456] $s_m(t) - s_n(t)$ statt $s_n(t)$ und $\sum_{k=m+1}^n a_k^2$ statt $\sum_{k=1}^n a_k^2$,

so sieht man, daß die Bedingung $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ bereits die starke

Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t)$ mit dem Exponenten $p > 0$ gegen eine Funktion $f(t) \in L^p$ für alle p impliziert; diese Funktion ist f. ü. gleich der gewöhnlichen Summe der Reihe.

[457] Für $p = 1$ hat man

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 8 \int_0^1 |s_n(t)| dt;$$

dies folgt aus der Hölder'schen Ungleichung ($p = 3/2$, $p' = 3$)

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \int_0^1 s_n^2(t) dt \leq \left(\int_0^1 |s_n(t)| dt \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\int_0^1 |s_n(t)|^4 dt \right)^{\frac{1}{3}}$$

und aus der unter [456] für ganze i mitbewiesenen Ungleichung

$$\int_0^1 |s_n(t)|^{2i} dt \leq i! \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^i$$

mit $i = 2$; beide liefern

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{3}} \leq 4 \left(\int_0^1 |s_n(t)| dt \right)^{\frac{2}{3}},$$

was mit der Behauptung äquivalent ist.

§ 6. Das Walsh'sche System.

Die Rademacher'schen Funktionen sind mit den Haar'schen durch die Beziehung

$$r_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} [\gamma_n^{(1)}(t) + \gamma_n^{(2)}(t) + \dots + \gamma_n^{(2^{n-1})}(t)] \quad (n \geq 1)$$

[461] verbunden, wie bereits bemerkt wurde. Ein anderes System erhält man aus $\{\gamma\}$, indem man setzt:

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= \gamma_0(t), & \psi_1(t) &= \gamma_1^{(1)}(t), \\ \sqrt{2} \psi_2^{(1)}(t) &= \gamma_2^{(1)}(t) + \gamma_2^{(2)}(t), & & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}. \\ \sqrt{2} \psi_2^{(2)}(t) &= \gamma_2^{(1)}(t) - \gamma_2^{(2)}(t) \end{aligned}$$

Wenn man jede Zeile des Vorzeichenschemas zweimal schreibt, so erhält man 4 Zeilen; wenn man jede dieser Zeilen zu 4 Elementen ergänzt, indem man sie einmal durch gleiche und ein zweites Mal durch entgegengesetzte Vorzeichen ergänzt, so entsteht

[457] [461]

Das Walsh'sche System.

133

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & +. \end{array}$$

Dieses neue Schema soll als Vorzeichenregel in den Formeln

$$\sqrt{4} \psi_3^{(i)} = + \gamma_3^{(1)}(t) \pm \gamma_3^{(2)}(t) \pm \gamma_3^{(3)}(t) \pm \gamma_3^{(4)}(t) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

zur Definition der 4 Funktionen $\psi_3^{(i)}(t)$ dienen.

Analog werden alle $\{\psi_n^{(i)}\}$ durch $\{\gamma_n^{(i)}\}$ ausgedrückt. Das Koeffizientenschema ist eine symmetrische, orthogonale und normierte Matrix. Infolgedessen dient dieselbe Matrix, um die $\{\gamma_n^{(i)}\}$ durch die $\{\psi_n^{(i)}\}$ auszudrücken. Nun war aber $\{\gamma\}$ ein orthogonales, normiertes und (inbezug auf L^2 und L) vollständiges System, es hat also $\{\psi\}$ dieselben Eigenschaften. [462]

Sei $f(t) \in L$; $p_n(t)$, $h_n(t)$ seien die Partialsummen der Entwicklungen von $f(t)$ nach $\{\psi\}$ bzw. $\{\gamma\}$; es ist [463]

$$(49) \quad p_{2^n}(t) = h_{2^n}(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Beweis: Ist $\|c_{ik}\|$ ($i, k=1, 2, \dots, 2^{q-1}$; $q \geq 2$) die in [461] erklärte Matrix, welche die Funktionen $\psi_q^{(i)}(t)$ ($i=1, 2, \dots, 2^{q-1}$) durch $\gamma_q^{(k)}(t)$ ($k=1, 2, \dots, 2^{q-1}$) auszudrücken gestattet, ist ferner

$$a_i = \int_0^1 f(t) \psi_q^{(i)}(t) dt, \quad b_k = \int_0^1 f(t) \gamma_q^{(k)}(t) dt,$$

so kommt

$$p_{2^q}(t) - p_{2^{q-1}}(t) = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} a_i \psi_q^{(i)}(t), \quad h_{2^q}(t) - h_{2^{q-1}}(t) = \sum_{k=1}^{2^{q-1}} b_k \gamma_q^{(k)}(t).$$

Drückt man in der ersten Summe ψ durch γ aus, so kommt

$$p_{2^q}(t) - p_{2^{q-1}}(t) = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} a_i \sum_{k=1}^{2^{q-1}} c_{ik} \gamma_q^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{2^{q-1}} \left(\gamma_q^{(k)}(t) \sum_{i=1}^{2^{q-1}} a_i c_{ik} \right).$$

Nun ist aber $\|c_{ik}\|$ gleichzeitig die inverse Matrix, also

$$b_k = \int_0^1 f(t) \gamma_q^{(k)}(t) dt = \int_0^1 f(t) \sum_{i=1}^{2^{q-1}} c_{ik} \psi_q^{(i)}(t) dt = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} c_{ik} a_i$$

und

$$(50) \quad p_{2^q}(t) - p_{2^{q-1}}(t) = \sum_{k=1}^{2^{q-1}} \gamma_q^{(k)}(t) b_k = h_{2^q}(t) - h_{2^{q-1}}(t) \quad (q \geq 2).$$

Wir hatten aber $\psi_0 = \chi_0$, $\psi_1 = \chi_1^{(1)}$, also ist (49) für $n=0$, $n=1$ richtig, was mit (50) die Gültigkeit von (49) für alle n bewirkt.

Das Interessante an dem System $\{\psi\}$ ist, daß es eine natürliche Vervollständigung des Rademacher'schen Systems leistet, denn ein Teil von $\{\psi\}$, und zwar $\{\psi_n^{(1)}(t)\}$, ist mit $\{r_n(t)\}$ ($n \geq 1$) identisch, wie die Anfangsformel dieses § lehrt.

§ 7. Das System $\{\Theta_n(t)\}$.

Probabilistische Probleme, wie die in [455] erwähnten, lassen folgende Frage als natürlich erscheinen:

Reelle Zahlen $\{c_n\}$ seien gegeben; sie seien die Längen der ebenen Vektoren

$$w_n = c_n e^{i\eta_n} \quad (l = \sqrt{-1}),$$

deren Argumente η_n aus $<0, 2\pi>$ gelöst werden. Welches ist die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$?

Sind alle Teile von $<0, 2\pi>$ gleich wahrscheinlich und setzt man $\vartheta_n(t) = 2\pi\eta_n(t)$, so kann man — im Sinne von [455] — die Frage auf die folgende zurückführen: Man bestimme das Maß der Konvergenzpunktmenge von

$$(51) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \vartheta_n(t)},$$

wo den Funktionen $\vartheta_n(t)$ folgende Eigenschaften zukommen sollen:

1° Jedes $\vartheta_n(t)$ ist in $<0, 1>$ erklärt und nimmt daselbst Werte aus $<0, 1>$ an, und zwar so, daß jede meßbare ϑ -Menge aus $<0, 1>$ einer maßgleichen t -Menge des Intervalls $0 \leq t \leq 1$ entspricht;

2° Die Funktionen $\vartheta_n(t)$ sind voneinander im probabilistischen Sinne unabhängig, d. h. ist G_1 eine durch $F_1(\vartheta_{\alpha_1}(t), \vartheta_{\beta_1}(t), \dots, \vartheta_{\mu_1}(t)) \in \Gamma_1$ erklärte t -Menge, G_2 eine durch $F_2(\vartheta_{\alpha_2}(t), \vartheta_{\beta_2}(t), \dots, \vartheta_{\nu_2}(t)) \in \Gamma_2$ erklärte t -Menge, wo F_1, F_2 beliebige meßbare Funktionen und Γ_1, Γ_2 beliebige meßbare Mengen, aber sämtliche Indizes $\alpha_1, \beta_1, \dots, \mu_1$ von sämtlichen $\alpha_2, \beta_2, \dots, \nu_2$ verschieden sind, so ist $|G_1 \cdot G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

Um solche Funktionen zu erhalten, spalten wir die natürliche Zahlenfolge in unendlichviele Teilfolgen, z. B:

1	3	6	10	15	.	.	.
2	5	9	14	20	.	.	.
4	8	13	19	26	.	.	.
7	12	18	25	33	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

Ist nun $0, \tau_1 \tau_2 \dots$ die dyadische unendliche Entwicklung der Zahl t , so sei

$$\vartheta_1(t) = 0, \tau_1 \tau_3 \tau_6 \tau_{10} \dots$$

$$\vartheta_2(t) = 0, \tau_2 \tau_5 \tau_9 \tau_{14} \dots$$

$$\vartheta_3(t) = 0, \tau_4 \tau_8 \tau_{13} \tau_{19} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Hier sind die Indizes der $\vartheta_n(t)$ definierenden dyadischen Entwicklung der n -ten Zeile des Schemas entnommen. Auf diese Weise haben wir eine Abbildung der Strecke $0 \leq t \leq 1$ auf den „Würfel“ $\{0 \leq \vartheta_n \leq 1\}$ ($n=1, 2, \dots$) definiert; sieht man von den dyadisch-endlichen t und ϑ ab, so ist diese Abbildung eineindeutig.

Beweisen wir 1° für $\vartheta_1(t)$. Es sei $\vartheta_1 \in (p/2^q, p+1/2^q)$; die ersten q Ziffern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$ sind damit fixiert (und umgekehrt entspricht diesen Ziffern das Innere oder ein Endpunkt dieses Intervalls); die entsprechenden t sind also Dualbrüche der Form

$$t = 0, \varepsilon_1 \square \varepsilon_2 \square \square \varepsilon_3 \square \square \square \varepsilon_4 \square \dots \square \varepsilon_q \square \dots;$$

die leeren Stellen sind beliebig mit 0 oder 1 zu besetzen (aber nicht alle mit 0). Die auf diese Weise entstandene t -Menge besteht aus $2^{q(q-1)/2}$ gleichen Intervallen mit $1/2^q$ als Gesamtlänge. Das Intervall für ϑ hatte aber dieselbe Länge. 1° ist also im Falle einer aus Intervallen bestehenden oder einer Nullmenge für ϑ_1 bewiesen. Daraus folgt 1° für alle meßbaren ϑ_1 -Mengen und ähnlich

für $\vartheta_n(t)$. 2° ist im einfachsten Falle, wo G_1 durch $\vartheta_{\alpha_1}(t) \in \left(\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}\right)$,

G_2 durch $\vartheta_{\alpha_2}(t) \in \left(\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}\right)$ gegeben wird, leicht einzusehen: 1° lehrt, daß

in diesem Falle $|G_1| = 1/2^q$, $|G_2| = 1/2^s$ und $G_1 G_2$ ist diejenige t -Menge, die durch beide Bedingungen $\vartheta_{\alpha_1}(t) \in \left(\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}\right)$, $\vartheta_{\alpha_2}(t) \in \left(\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}\right)$

erklärt ist, d. h. es ist die Menge der Dualbrüche t , in welchen

gewisse $q + s$ Stellen fixiert wurden; wir haben aber gesehen, daß das Maß einer solchen Menge $1/2^{q+s}$ beträgt, d. h. gleich $|G_1| \cdot |G_2|$ ist. Der allgemeine Fall läßt sich auf den Spezialfall reduzieren, indem man zunächst bemerkt, daß „Quader“ des Raumes $(\vartheta_{\alpha_1}, \vartheta_{\beta_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1})$ auf t -Mengen abgebildet werden, deren Maß gleich dem Kantenprodukt ist; das Produkt zweier Quader in $(\vartheta_{\alpha_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1})$ und in $(\vartheta_{\alpha_2}, \vartheta_{\beta_2}, \dots, \vartheta_{\mu_2})$ ist ein Quader in $(\vartheta_{\alpha_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1}, \vartheta_{\alpha_2}, \dots, \vartheta_{\mu_2})$ und die Kanten des neuen Quaders liegen auf den Kanten beider Komponenten. Damit ist 2° für Quader bewiesen. Sind nun F_1, Γ_1 meßbar, so definiert $F_1 \in \Gamma_1$ in Raume $(\vartheta_{\alpha_1}, \vartheta_{\beta_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1})$ eine Menge, die man mit Quadern auf Lebesgue'sche Art ausmißt, was schließlich 2° ergibt.

Jetzt führen wir (vgl. (51))

$$\Theta_n(t) = e^{2\pi i \vartheta_n(t)} \quad (n),$$

also komplexwertige Funktionen der reellen Variablen t ein. [471] *Dieses System ist orthogonal, normiert und multiplikativ* (der Inhalt dieser Aussage erhellt aus der Behauptung [474]). Unser Beweis dafür erfordert folgendes Lemma:

[472] *Sind $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \dots, \vartheta_n(t)$ die Koordinaten eines beweglichen Punktes, $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$ ein n -dimensionaler euklidischer Raum und t die Zeit, so verläuft die Bewegung „nach dem Maxwell'schen Prinzip“ (Hilbert'sche Bezeichnung), d. h. der Punkt verbleibt in je zwei Teilen des Würfels $\{0 \leq \vartheta_n \leq 1\}$ (n) von gleichem Volumen gleich lange. M. a. W.: die durch $\{\vartheta_n(t)\}$ definierte Bewegung ist „quasi-ergodisch“.*

Dieses Lemma haben wir aber bereits bei dem Beweise von (51) 2° mitbewiesen; dabei sind als „Teile“ des Würfels beliebige meßbare Mengen zu betrachten und „Volumen“ als n -dimensionales Maß zu verstehen.

[473] Eine unmittelbare Konsequenz von [472] ist die „Gleichheit des Raum- und Zeitmittels“ für eine beliebige integrierbare Funktion $F(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$:

$$(52) \quad \int_0^1 \dots \int_0^1 F(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_n = \int_0^1 F(\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_n(t)) dt.$$

Es ist nämlich im Falle, wo F die charakteristische Funktion einer Menge $M \subset \{0 \leq \vartheta_k \leq 1\}$ ist, das n -fache Integral gleich $|M|$,

das einfache aber gleich dem Maße des t -Bildes von M , also — nach [472] — auch gleich $|M|$. Die Erweiterung auf alle F bietet keine Schwierigkeiten. (Hilbert benutzt die Formel (52) als Postulat für die Phasenbahn, um die kinetische Theorie der Materie ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung zu begründen).

Diese — an sich interessanten — Hilfsmittel haben uns vom Beweise von [471] abgelenkt. Wir haben zu zeigen, daß das [474] Integral

$$(53) \quad \int_0^1 \Theta_{m_1}(t) \bar{\Theta}_{n_1}(t) \Theta_{m_2}(t) \bar{\Theta}_{n_2}(t) \dots \Theta_{m_q}(t) \bar{\Theta}_{n_q}(t) dt$$

mit $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$, $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_q$ im Falle $m_i = n_i$ ($i = 1, 2, \dots, q$) den Wert 1, sonst den Wert 0 annimmt.

Der Integrand in (53) ist (nach [471] Def.)

$$e^{2\pi i (\vartheta_{m_1} - \vartheta_{n_1} + \vartheta_{m_2} - \vartheta_{n_2} + \dots + \vartheta_{m_q} - \vartheta_{n_q})},$$

also ist das Integral (53) nach (52) gleich

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i (\vartheta_{m_1} - \vartheta_{n_1} + \dots + \vartheta_{m_q} - \vartheta_{n_q})} d\vartheta_{m_1} d\vartheta_{n_1} \dots d\vartheta_{m_q} d\vartheta_{n_q},$$

d. h. gleich 1, wenn sich alle Variablen im Exponenten aufheben, sonst 0.

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Theta_n(t)$ f. ü. konvergent, [475] sonst f. ü. divergent.

Dieser Satz entscheidet die am Anfang dieses § gestellte Frage. Sein zweiter Teil läßt sich genau so beweisen, wie [453], denn die in [451] formulierte Eigenschaft des Rademacher'schen Systems kommt — als Eigenschaft des Integrals (53) — dem System $\{\Theta_n(t)\}$ zu. Für den ersten Teil sei $f(t)$ die nach dem Riesz-Fischer'schen Satze existierende starke Grenze der Partialsummen

$s_n(t)$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Theta_k(t)$; es ist dann

$$(54) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) - s_m(t)) dt = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1).$$

Sei $\alpha = \frac{p}{2^q}$, $\beta = \frac{p+1}{2^q}$, $q = \frac{n(n+1)}{2}$, p ganz und $0 \leq p < 2^q$;

wir behaupten, daß das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} \Theta_m(t) dt$ für $m > n$ verschwindet.

Es wird nämlich das Intervall $p/2^q < t < (p+1)/2^q$ auf gewisse Mengen $\{\vartheta_1\}, \{\vartheta_2\}, \dots, \{\vartheta_n\}$ mittels $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_n(t)$ abgebildet, aber das mittels $\vartheta_m(t)$ erhaltene Bild erfüllt $(0, 1)$, denn die ersten q Ziffern von t kommen bei der Definition von $\vartheta_m(t)$ ($m > n$) nicht vor; nach [473] ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Theta_m(t) dt = \int_{\{\vartheta_1\}} d\vartheta_1 \int_{\{\vartheta_2\}} d\vartheta_2 \dots \int_{\{\vartheta_n\}} d\vartheta_n \int_0^1 d\vartheta_{n+1} \dots \int_0^1 e^{2\pi i \vartheta_m} d\vartheta_m = 0.$$

Jetzt gibt (54)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} s_n(t) dt.$$

Ist nun $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $t \in (\alpha, \beta)$, so hat man $|\vartheta_k(t) - \vartheta_k(t_0)| < 1/2^{n-k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), also

$$|\Theta_k(t) - \Theta_k(t_0)| < \frac{4\pi}{2^{n-k}} \quad (k),$$

und daher,

$$\left| 2^q \int_{\alpha}^{\beta} s_n(t) dt - s_n(t_0) \right| \leq 4\pi \left(\frac{|c_1|}{2^{n-1}} + \frac{|c_2|}{2^{n-2}} + \dots + \frac{|c_n|}{1} \right) = b_n.$$

Damit haben wir aber die Beziehung

$$\left| 2^q \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - s_n(t_0) \right| \leq b_n$$

erhalten, wo offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ gilt, der Ausdruck $2^q \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ aber, wegen $\alpha < t_0 < \alpha + 1/2^q = \beta$, mit $n \rightarrow \infty$ für fast alle t_0 gegen $f(t_0)$ strebt.

Eine Umordnung der $\Theta_n(t)$ beeinträchtigt den Satz [475] nicht; man kann auch unendlichviele Θ_n fortlassen, wenn man nur unendlichviele beibehält. Eine Umordnung der Reihe (51) ändert ihr Konvergenzverhalten nur in einer Nullmenge; ist $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$,

so beeinflussen obige Änderungen den Wert von $\int_0^1 |f(t)|^p dt$ ($p > 0$) nicht. Sämtliche Resultate gelten auch für komplexe c_n .

Das System $\{\Theta_n(t)\}$ ist unvollständig; z. B. ist die Funktion $e^{4\pi i \vartheta_1(t)}$ zu sämtlichen Funktionen des Systems orthogonal, wie aus [474] zu entnehmen ist. Eine natürliche Vervollständigung, wie im Falle des Rademacher'schen Systems, hat B. Jessen angegeben.

§ 8. Unendliches Intervall.

Viele Eigenschaften der Orthogonalsysteme sind ohne weiteres im unendlichen Intervall zu erklären. So ist z. B. das System $\{e^{-nt}\}$ in $(-\infty, \infty)$ in bezug auf L vollständig. Es sei nämlich

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0 \quad (f \in L) \quad (n);$$

es folgt

$$\int_0^1 f(-\log u) u^{n-1} du = 0 \quad (n),$$

also, nach [358], $f(-\log u) = 0$ f. ü. in $(-\infty, 1)$ d. h. $f(t) \equiv 0$ f. ü. in $(-\infty, \infty)$. Diese Überlegung ist gültig, wenn $f(-\log u)/u$ in

$(-\infty, 1)$ zu L gehört. Wenn wir aber die Existenz von $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ voraussetzen (was wir getan haben), so ist

$$\int_0^1 \left| \frac{f(-\log u)}{u} \right| du < \infty,$$

denn es ist $\int_0^N |f(t)| dt = - \int_1^{e^{-N}} |f(-\log u)| \frac{du}{u}$, woraus für $N \rightarrow +\infty$ das Behauptete folgt.

Es gibt auch Systeme, die in $(-\infty, +\infty)$ vollständig sind.

Die Orthogonalisierung bietet keine Schwierigkeiten, wenn die Funktionen in $(-\infty, +\infty)$ zu L^2 gehören.

Ein klassisches Beispiel sind die Laguerre'schen Polynome. Sie entstehen, wenn man Polynome $P_n(t)$ n -ten Grades von der Eigenschaft [481]

$$\int_0^{\infty} P_n(t) e^{-t} t^k dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

sucht. Systematisch geht man so vor, daß man $\phi(t, u) = e^{-tu/(1-u)}$ nach Potenzen von u entwickelt; zunächst ist

$$\phi(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \cdot \frac{u^k}{(1-u)^{k+1}}$$

für alle t und alle $u \neq t$. Für $|u| < 1$ und alle t kann man den zweiten Faktor durch eine Potenzreihe ersetzen:

$$\begin{aligned} \phi(t, u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k t^k}{k!} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k+1) \dots (k+m)}{m!} u^m \right] u^k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k t^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} u^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} t^k \right\} u^n, \end{aligned}$$

wobei die absolute Konvergenz die Vertauschung der Reihenfolge der Summation rechtfertigt. Es kommt schließlich

$$(55) \quad \phi(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} u^n$$

$$\begin{aligned} \text{mit } L_n(t) &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} t^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1) \dots (n-k+1) t^k \\ &= (\text{nach der Leibniz'schen Regel}) e^{d^n(t^n e^{-t})} \frac{d^n(t^n e^{-t})}{dt^n}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck kann als Definition von $L_n(t)$ angesehen werden. Es ist

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1) \dots (n-k+1) t^{n-k} \\ &= (-1)^n \left[t^n - \frac{n^2}{1!} t^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} t^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right]. \end{aligned}$$

Z. B.:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, & L_1(t) &= -t + 1, & L_2(t) &= t^2 - 4t + 2, \\ L_3(t) &= -t^3 + 9t^2 - 18t + 6, & L_4(t) &= t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24, & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

[482]

Die Funktionen

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{-t/2} L_{n-1}(t)}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

bilden in $(-\infty, \infty)$ ein ON-System. Es ist nämlich für $m < n$

$$\int_0^{\infty} \varphi_{m+1}(t) \varphi_{n+1}(t) dt = \frac{1}{m! n!} \int_0^{\infty} e^{-t} L_m(t) L_n(t) dt = \sum_{k=0}^m \gamma_k \int_0^{\infty} e^{-t} t^k L_n(t) dt,$$

und man hat zunächst für $k < n$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^k L_n(t) dt = 0 \quad (n > 0)$$

zu zeigen. Das Integral ist aber gleich

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} t^k e^{d^n(t^n e^{-t})} dt &= \int_0^{\infty} t^k \frac{d^n(t^n e^{-t})}{dt^n} dt = -k \int_0^{\infty} t^{k-1} \frac{d^{n-1}(t^n e^{-t})}{dt^{n-1}} dt \\ &= (-1)^k k! \left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} t^n e^{-t} \right]_0^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Es werde nun $\int_0^{\infty} \varphi_n^2(t) dt$ berechnet; es ist gleich

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{(n-1)!} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-t} L_{n-1}^2(t) dt &= \frac{1}{(n-1)!^2} \int_0^{\infty} e^{-t} \left[\frac{d^{n-1}(t^{n-1} e^{-t})}{dt^{n-1}} \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!^2} \int_0^{\infty} (-1)^{n-1} \left[t^{n-1} - \frac{(n-1)^2}{1!} t^{n-2} + \dots \right] \frac{d^{n-1}(t^{n-1} e^{-t})}{dt^{n-1}} dt \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!^2} \int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}(t^{n-1} e^{-t})}{dt^{n-1}} dt = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!^2} \cdot (n-1)! \int_0^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{(n-1)! (n-1)!}{(n-1)!^2} = 1. \end{aligned}$$

Nicht die $\varphi_n(t)$, sondern die $L_n(t)$ werden *Laguerre'sche Polynome* genannt. Die Funktion $\phi(t, u)$ erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$(1-u)^2 \frac{\partial \phi(t, u)}{\partial u} = (1-u-t) \phi(t, u),$$

also ist (vgl. (55))

$$(1-u)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(t)}{(n-1)!} u^{n-1} = (1-u-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} u^n,$$

was durch Koeffizientenvergleichung zu

$$L_{n+1}(t) - (2n+1-t) L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0 \quad (n \geq 1)$$

führt.

Das System $\{L_n(t)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) ist in jedem endlichen Intervall abgeschlossen und vollständig in bezug auf L^2 (und L). Denn es ist $L_n(t)$ genau n -ten Grades und die Potenzen $t^0, t^1, t^2, \dots, t^n$ lassen sich durch $L_0, L_1, \dots, L_n$ linear ausdrücken.

[483] Die Laguerre'schen Funktionen $\{\varphi_n(t)\}$ bilden in $(0, \infty)$ ein in bezug auf L^2 vollständiges System.

Beweis: Es sei $f(t) \in L^2$ und

$$\int_0^\infty f(t) \varphi_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

d. h.

$$\int_0^\infty f(t) e^{-t/2} L_{n-1}(t) dt = 0 \quad (n)$$

oder

$$(56) \quad \int_0^\infty g(t) t^k dt = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

wenn $g(t) = f(t) \cdot e^{-t/2}$ gesetzt wird. $|g(t)|$ ist aber in $(0, \infty)$ integrierbar, denn es ist $f(t) \in L^2$, $e^{-t/2} \in L^2$ in diesem Intervall; wir wollen aus $g(t) \in L$ und (56) $g(t) = 0$ f. ü. in $(0, \infty)$ ableiten, was den Beweis abschließt.

Zu diesem Zwecke werde $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$ gesetzt; $F(s)$

existiert für $s \geq 0$. Setzt man noch $c_n = \int_0^\infty e^{-t/2} t^n dt$, so wird

$$c_n = 2nc_{n-1} = 2^{n+1}n!,$$

was zur Begründung der Formel

$$(57) \quad F(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-st)^n}{n!} g(t) dt \quad (|s| < 1/4)$$

dienen soll. Es ist nämlich die in (57) benutzte Vertauschung der Integration und Summation erlaubt, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{s^n}{n!} \int_0^\infty |g(t)| t^n dt$ absolut konvergiert; nach der Schwarz'schen Ungleichung ist aber

$$\int_0^\infty |g(t)| t^n dt \leq \text{const.} \sqrt{c_{2n}}$$

und der Konvergenzradius ist mindestens

$$1 \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{c_{2n}}}{n!}} = \frac{1}{4} \right|.$$

Aus (56) und (57) folgt $F(s) = 0$ für $0 \leq s < 1/4$, d. h. für $s \geq 0$, denn $F(s)$ ist für $s > 0$ regulär.

$$F(s) = \int_0^1 u^{s-1} g(-\log u) du = 0 \quad (s \geq 0)$$

und [358] geben

$$g(-\log u) = 0 \quad \text{f. ü. in } (0, 1), \quad \text{d. h.} \quad g(t) = 0 \quad \text{f. ü. in } (0, \infty).$$

Hermite'sche Polynome. Differenziert man sukzessive die Funktion

$$\varphi^{(0)}(t) = e^{-t^2}$$

und bezeichnet mit $\varphi^{(n)}(t)$ die n -te Ableitung von $\varphi^{(0)}(t)$, so kommt

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t) &= -2t \varphi^{(0)}(t), & \varphi^{(2)}(t) &= (4t^2 - 2) \varphi^{(0)}(t), \\ \varphi^{(3)}(t) &= -(8t^3 - 12t) \varphi^{(0)}(t), & & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Die Polynome

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t, \quad \dots,$$

allgemein

$$H_n(t) = (-1)^n e^t \frac{d^n(e^{-t^2})}{dt^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad [484]$$

heißen die *Hermite'schen*. Sie erfüllen die Sturm-Liouville'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 H_n(t)}{dt^2} - 2t \frac{dH_n(t)}{dt} + 2n H_n(t) = 0.$$

Setzt man

$$(58) \quad \psi_n(t) = H_n(t) e^{-t^2/2},$$

so ist $\{\psi_n(t)\}$ in $(-\infty, +\infty)$ ein Orthogonalsystem. Es ist nämlich ($n > m$)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) \psi_m(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) \varphi^{(0)}(t) dt \\
 &= H_m(t) (-1)^n \varphi^{(n-1)}(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(t) \varphi^{(n-1)}(t) dt \\
 &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(t) \varphi^{(n-1)}(t) dt = (-1)^{m+n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(m+1)}(t) \varphi^{(n-m-1)}(t) dt = 0,
 \end{aligned}$$

denn $H_m^{(m+1)}(t) \equiv 0$. Man hat ferner $\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_n(t))^2 dt = 2^n \cdot n! \sqrt{\pi}$. Infolgedessen ist ([255])

$$(59) \quad f(t) \sim c_0 \psi_0(t) + c_1 \psi_1(t) + \dots$$

mit

$$c_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_k(t) dt \quad (k)$$

die formelle Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\psi_k\}$, wenn die Integrale existieren. Im Kapitel VIII wird die Vollständigkeit des Systems $\{\psi_k\}$ bewiesen werden. In den „Frequenzflader og Korrelation“ sind die sechs ersten $H_n(t)$ in Schritten von 0.01 zehnstellig bis $t=4.00$ von Jörgensen tabuliert worden.

Folgende Umstände haben die Verbreitung der Hermite'schen Polynome in der Statistik begünstigt:

1° Das Intervall $(-\infty, +\infty)$ ist überall dort, wo von vornherein alle Werte möglich sind, der natürliche Variabilitätsbereich.

2° Die Funktion $\psi^{(0)}(t) = e^{-t^2/2}$ ist mit der Gauß'schen Verteilungsfunktion identisch; demzufolge liefert bereits das erste Glied der Reihe (59) eine gute Annäherung in zahlreichen Fällen einer nahezu normalen Verteilung eines Merkmals.

3° Die Berechnung der Koeffizienten c_k führt auf die Ermittlung der Momente $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) t^k dt$ der Funktion $g(t) = e^{-t^2/2} f(t)$; die dazu nötigen Rechenschemata und Tafeln sind seit langer Zeit vorhanden.

4° Man kennt kein rechnerisch einfacheres Orthogonalsystem für das unendliche Intervall.

Eine rein theoretische Begründung der Anwendbarkeit der Hermite'schen Polynome in der Statistik gibt es unseres Wissens nicht.

Der Nutzen einer Entwicklung beruht darauf, daß eine lange Zahlenreihe ($f(t)$) im Wesentlichen durch einige charakteristische Zahlen (etwa $c_1, c_2, \dots, c_6$) ersetzt wird; anstatt einer unübersichtlichen Funktionstafel erhält man einen geschlossenen Ausdruck (bis auf den Faktor $e^{-t^2/2}$ ein Polynom), was die Lösung aller einschlägigen Aufgaben erleichtert.

§ 9. Vollständige Systeme.

Um vollständige Orthogonalsysteme zu bilden, genügt es vollständige Systeme zu finden, die man dann orthogonalisiert. Man kann nun aber leicht vollständige Systeme erhalten, wenn man einen Gedanken von O. Szász verallgemeinert; es zeigt sich, daß die meisten analytischen Funktionen zu solchen Systemen Anlaß geben.

Sei $F(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen z , regulär in einem Gebiete, welches das Stück $<0, r>$ ($r > 0$) der reellen Achse enthält. Es soll ferner $F(z)$ auf diesem Stück reelle Werte annehmen und die Potenzreihe

$$(60) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

soll so häufig von Null verschiedene Koeffizienten a_{n_j} ($n_j \geq 1$) aufweisen, daß die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j$ divergiere.

Es sei $\{s_v\}$ eine reelle Zahlenfolge mit $s_v \geq 0$ (v), $\lim_{v \rightarrow \infty} s_v = s_{\infty}$; [491] s_{∞} sei endlich und von allen s_v verschieden, b eine positive Zahl mit $bs_{\infty} \leq r$. Unter diesen Voraussetzungen ist das System

$$\{\varphi_v(t) = F(s_v t)\} \quad (v \geq N)$$

(für ein geeignetes N) im Intervall $0 \leq t \leq b$ erklärt und daselbst in bezug auf L vollständig.

Beweis: $\rho(>0)$ sei der Konvergenzradius von (60) und $|sb| < \rho$. Die Entwicklung

$$F(st) = a_0 + a_1 st + a_2 s^2 t^2 + \dots$$

gilt bei festem s in $0 \leq t \leq b$. Ist $f(t)$ in $<0, b>$ integrierbar, so ist

$$(61) \quad G(s) = \int_0^b F(st) f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k s^k$$

mit

$$(62) \quad b_k = \int_0^b t^k f(t) dt$$

jedenfalls im Kreise $|sb| < \rho$ eine gültige Darstellung. Nun ist aber $G(s)$ — wie aus der Integraldarstellung (61) ersichtlich — für reelle s von 0 bis einschließlich s_∞ regulär, wegen $bs_\infty \leq r$. Infolgedessen gehört s_ν für $\nu > N$ zu dem $\langle 0, s_\infty \rangle$ umfassenden Regularitätsgebiet von $G(s)$ und $G(s_\nu)$ ist für diese s_ν erklärt; dabei sei N so bestimmt, daß bs_ν für $\nu > N$ ein regulärer Punkt von $F(z)$ sei; es ist also $\varphi_\nu(t)$ für $\nu > N$ in $\langle 0, b \rangle$ bestimmt (und analytisch-regulär). Sei nun

$$G(s_\nu) = 0 \quad (\nu > N).$$

Wegen $s_\nu \rightarrow s_\infty$, $s_\nu \neq s_\infty$ folgt daraus $G(s) \equiv 0$ in $\langle 0, s_\infty \rangle$, also

$$a_k b_k = 0 \quad (k)$$

und — wegen $a_{n_j} \neq 0$ —

$$b_{n_j} = 0 \quad (j);$$

(62) und der Müntz-Lerch'sche Satz [363] geben (unter Beachtung der Voraussetzung $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j = \infty$) $f(t) = 0$ f.ü. in $\langle 0, b \rangle$. Die Formel $G(s_\nu) = 0$ bedeutet aber nichts anderes als $\int_0^b f(t) \varphi_\nu(t) dt = 0$, also hat letzte Gleichung (für alle $\nu > N$) $f(t) = 0$ f.ü. zur Folge, w. z. b. w.

Die Bedingung $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j = \infty$ ist wesentlich, denn sonst existiert nach [361] in L^2 (sogar in C) ein $f(t)$ nicht f.ü. $= 0$, für welches alle b_{n_j} in (62) verschwinden. $G(s)$ ist dann identisch Null, also $\int_0^b \varphi_\nu(t) f(t) dt = 0$ für alle $\nu > N$, d. h. $f(t)$ ist zu allen $\varphi_\nu(t)$ orthogonal.

Man verifiziert sofort, daß ein beliebiges unendliches Teilsystem von $\{\varphi_\nu(t)\}$ alle Voraussetzungen von [491] erfüllt. Infolgedessen ist es vollständig. M. a. W.: $\{\varphi_\nu(t)\}$ ist ein dicht-vollständiges System nach der Definition [247]. (Es ist also auch — in bezug auf L^2 — dicht-abgeschlossen).

Das Szász'sche Beispiel für $\{\varphi_\nu\}$ ist

$$(63) \quad \{(1 + s_\nu t)^\alpha\},$$

wo $0 < s_\nu < 1$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_\nu = \alpha < 1$, $s_\nu \neq \alpha$.

Ist nun σ reell und von $0, 1, 2, \dots$ verschieden, so ist (63) in $0 \leq t \leq 1$ ein vollständiges System. In der Tat, $F(z) = (1 + z)^\alpha$ ist für $|z| < 1$ regulär, die Strecke $\langle 0, \alpha \rangle$ liegt in jenem Kreise, und alle Koeffizienten von $F(z)$ sind von Null verschieden. (Zugleich sieht man den Grund für den Ausschluß von $\sigma = 0, 1, 2, \dots$). Sei z. B. $\sigma = -1$, $s_\nu = 1/\nu$, $\alpha = 0$; der Szász'sche Satz zeigt die Vollständigkeit von $\{1/(\nu + t)\}$ in $\langle 0, 1 \rangle$.

Die Funktionen $\sin z$, $\sin^2 z$, $\log(1 + z)$ erfüllen die Voraussetzungen für $F(z)$; r kann beliebig gewählt werden. Infolgedessen ($s_\nu = 1/\nu$) sind die Systeme

$$\{\sin(t/\nu)\}, \quad \{\sin^2(t/\nu)\}, \quad \{\log(1 + t/\nu)\}$$

in jedem Intervall $\langle 0, b \rangle$ ($b > 0$) vollständig, also auch in jedem Intervall $\alpha \leq t \leq \beta$ mit $\alpha \geq 0$. Es ist $\log(1 + t/\nu) = \log(t + \nu) - \log \nu$, also ist das System

$$1, \quad \log(t + 1), \quad \log(t + 2), \quad \dots$$

in $\langle \alpha, \beta \rangle$ vollständig.

Die nach [491] gebildeten Systeme werden zu in bezug auf C [492] abgeschlossenen Systemen, wenn die 1 hinzugefügt wird.

Beweis: $F'(z)$ hat alle Eigenschaften von $F(z)$, die für [491] von Belang sind. Infolgedessen ist $\{\varphi'_\nu(t)\}$ ein vollständiges System in bezug auf L^2 (und L). Es ist demnach in bezug auf L^2 abgeschlossen, also auch in bezug auf L abgeschlossen. Ist $k (= 0, 1, 2, \dots)$ gegeben und $\varepsilon > 0$, so seien $n, c_1, c_2, \dots, c_n$ der (erfüllbaren) Ungleichung

$$\int_0^b |t^k - c_1 \varphi'_1(t) - \dots - c_n \varphi'_n(t)| dt < \varepsilon$$

gemäß gewählt, die für $0 \leq u \leq b$

$$\left| \int_0^u [t^k - \sum_{j=1}^n c_j \varphi'_j(t)] dt \right| < \varepsilon$$

zur Folge hat; es kommt

$$\left| \frac{u^{k+1}}{k+1} - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(u) + \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(0) \right| < \varepsilon \quad (0 \leq u \leq b),$$

also ist eine gleichmäßige Approximation von u^{k+1} durch ganz-lineare Verbindungen von $1, \varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u); \dots$ möglich. Da u^{k+1}

($k=0, 1, 2, \dots$) alle Potenzen liefert und u^0 auch (durch 1) approximierbar ist, so sind nach [122] alle stetigen Funktionen gleichmäßig approximierbar, w. z. b. w.

Der Fall $s_\nu \rightarrow \infty$. Bis jetzt konnten wir die Frage, ob z. B. $\{\cos \sqrt{n}t\}$ in $\langle 0, 2\pi \rangle$ vollständig sei, nicht beantworten. Die (positive) Lösung ist erst im folgenden Satz enthalten:

[493] Sei $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ eine ganze reguläre Funktion von der Ordnung ρ ; a_{n_j} ($j = 1, 2, \dots$) seien ihre von Null verschiedenen Koeffizienten (mit Ausnahme von a_0) und es sei $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j = \infty$; a_0 und a_{n_j} seien sämtlich reell. Ist $\varepsilon > 0$, $s_\nu \neq 0$ und

$$(64) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|s_\nu|^{\rho+\varepsilon}} = \infty,$$

so ist $\{\varphi_\nu(t) = F(s_\nu t)\}$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ inbezug auf L vollständig.

Beweis: Sei $f(t) \in L$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) und

$$G(s) = \int_{\alpha}^{\beta} F(st) f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k s^k$$

(ähnlich wie in (60), (61) u. (62), mit $\langle \alpha, \beta \rangle$ statt $\langle 0, b \rangle$). $G(s)$ ist ganz und (c, δ, γ konstant)

$$(65) \quad |G(s)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| \cdot \max_{\alpha \leq t \leq \beta} e^{\gamma |st|^{\rho+\varepsilon}} dt \leq c \cdot e^{\delta |s|^{\rho+\varepsilon}}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Ist nun

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi_\nu(t) dt = 0 \quad (\nu),$$

so ist $G(s_\nu) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$); die $\{s_\nu\}$ bilden einen Teil der Nullstellenfolge von $G(s)$. Nach (65) ist aber $G(s)$ höchstens von der Ordnung ρ , also ist $\rho + \varepsilon$ — nach einem bekannten Satze — ein konvergenzerzeugender Exponent für die reziproken Beträge der Nullstellen von $G(s)$, wenn $G(s)$ nicht identisch verschwindet. Dies verstößt aber gegen (64). Somit ist $G(s) \equiv 0$ und der Beweis endet genau so, wie derjenige von [491]. (Im Falle $\{\cos \sqrt{n}t\}$ ist $\rho = 1$, $n_j = 2j$, $\varepsilon \leq 1$).