II. KAPITEL.

Grundbegriffe.

§ 1. Orthogonalität.

In der euklidischen dreidimensionalen Geometrie heißen zwei Vektoren orthogonal, wenn ihr skalares Produkt verschwindet. Sind x_1, x_2, x_3 die Komponenten des einen und y_1, y_2, y_3 die des anderen Vektors inbezug auf drei zueinander senkrechte Achsen, so ist das skalare Produkt

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i .$$

Eine analoge Definition gilt in n Dimensionen. Indem man diese Analogie weiter verfolgt und $x(t)$, $y(t)$ als zwei Vektoren im Funktionenraume auffaßt, kommt man auf

$$\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \tag{1}$$

als Ausdruck des *skalaren Produktes* in einem solchen Raume. Ist das Integral (1) gleich Null, so sagt man, die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ seien zueinander *orthogonal* in $\langle a, b \rangle$. Sind $x(t)$, $y(t)$ [211]
komplexwertig, und $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$ die zu $x(t)$ bzw. $y(t)$ konjugierten Zahlen, so pflegt man

$$\int_a^b x(t)\, \overline{y}(t)\, dt = \overline{\int_a^b \overline{x}(t)\, y(t)\, dt} \tag{2}$$

als skalares Produkt zu bezeichnen. Das skalare Produkt hängt jetzt von der Reihenfolge der Faktoren ab, soll es aber Null sein, so wird die Reihenfolge gleichgültig und wir können wieder von zwei zueinander orthogonalen Funktionen sprechen.

In einem dreidimensionalen euklidischen Raume gibt es bekanntlich drei zueinander senkrechte Richtungen. Dem entspricht die Tatsache, daß man drei verschiedene paarweise orthogonale Vektoren finden kann, aber nicht vier. Im n-dimensionalen Raume gibt es aus paarweise orthogonalen Vektoren bestehende n-tupel. Man kann vermuten, daß es im Funktionenraume, d. h. in dem abstrakten Raume, wo Funktionen die Rolle von Vektoren spielen, Systeme von unendlichvielen paarweise zueinander orthogonalen verschiedenen Vektoren geben wird. Um die Integrierbarkeit des Produktes $x(t).y(t)$ zu sichern, ist est am einfachsten die Lebesgue'sche Integrierbarkeit von $x(t)$ und $x^2(t)$ in $<a, b>$ und dasselbe für $y(t)$, $y^2(t)$ vorauszusetzen. Wir werden (vgl. I, § 3) dann sagen, daß $x(t)$, $y(t)$ zum Raume L^2 gehören. Diese Voraussetzung ist aber keineswegs notwendig. Man kann nämlich leicht eine unendliche Folge von Funktionen $\{\varphi_i(t)\}$ angeben, so daß die Integrale

$$\int_a^b \varphi_i(t)\, \varphi_k(t)\, dt$$

für $i \neq k$ stets existieren und gleich Null sein werden, ohne daß die Quadrate $\varphi_i^2(t)$ integrierbar wären.

Folgendes Beispiel ist mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung gewählt worden. Wir bauen eine unendliche Matrix $\{\{\alpha_{ik}\}\}$ aus lauter Einsen und Nullen auf:

[212]

$$(3) \qquad \begin{array}{l} 1101001000\ldots \\ 1010100100\ldots \\ 0110010010\ldots \\ 0001110001\ldots \\ 0000001111\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Man erhält diese Matrix, indem man folgende „Kranichschwärme" bildet:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1\,. & 1\,.\,. \\ 1 & .\,1 & .\,1\,. \\ & 1\,1 & .\,.\,1 \\ & & 1\,1\,1 \end{array} \qquad (n = 1, 2, 3),$$

d. h. Anordnungen von Einsen, die aus n Einsen in der Diagonale und aus ebensovielen Einsen in der nächsten Zeile darunter bestehen ($n=1, 2, \ldots$); besetzt man die punktierten Stellen mit Nullen, so entstehen Ziffernrechtecke; schiebt man sie aneinander und schreibt lauter Nullen als Verlängerung einer jeden Spalte, so entsteht die Matrix (3). So kommen in jeder Spalte genau zwei Einsen zu stehen; sie stehen in gewissen zwei Zeilen; schreibt man aber zwei beliebige Zeilen vor (z. B. die 2-te und 5-te), so gibt es genau eine Spalte (z. B. die 8-te), die die vorgeschriebenen zwei Zeilen in Einsen schneidet.

Sei I ein endliches Intervall $<a, b>$ und $I_1, I_2, \ldots$ Teilintervalle von I, so daß das $(n+1)$-te Teilintervall rechts an das n-te anschließt und das ganze I (mit Ausnahme des rechten Endpunktes) durch $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ erschöpft wird. Die Funktion $\varphi_n(t)$ werde in I wie folgt erklärt:

$$\varphi_n(t) = 0 \quad \text{für } t \in I_p, \quad \text{wenn } \alpha_{np} = 0,$$

$$\varphi_n(t) = \sqrt{I_p} \quad \text{für } t \in I_p, \quad \text{wenn } \alpha_{np} = 1$$

und wenn diese Eins im Schema (3) rechts und links von Nullen flankiert erscheint, oder wenn $n = 1$. Sonst setzen wir (im Falle $\alpha_{np} = 1$) $\varphi_n(t) = -1/\sqrt{I_p}$ in der linken, $\varphi_n(t) = +1/\sqrt{I_p}$ in der rechten Hälfte von I_p. So hat z. B. $\varphi_3(t)$ die Werte

in I_1	in I_2	in I_3	in I_4	in I_5	in I_6	in $I_7 \ldots$
0	$\frac{-1}{\sqrt{I_2}}$, $\frac{+1}{\sqrt{I_2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{I_3}}$, $\frac{+1}{\sqrt{I_3}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{I_6}}$	$0 \ldots$

Es ist nun, wie ersichtlich,

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi_i(t)\, \varphi_k(t)\, dt = 0 \qquad \text{für} \quad i \neq k,$$

aber das Integral

$$\int_a^b \varphi_i^2(t)\, dt = \sum_j^{\infty} \int_{P_j} \left(\frac{1}{\sqrt{P_j}}\right)^2 dt = \sum_j^{\infty} 1$$

ist stets unendlich groß (P_j bezeichnen diejenigen I, in welchen $\varphi_i \neq 0$).

Ein *Orthogonalsystem* („O") nennen wir eine endliche oder [213]
unendliche Folge $\{\varphi_n(t)\}$ von Funktionen die paarweise zueinander orthogonal sind in einem endlichen oder unendlichen Intervall $<a, b>$.

Es soll also (4) für $i \neq k$ gelten. Ersetzt man in dieser Definition die Worte „Folge von Funktionen $\{\varphi_n(t)\}$“ durch „Menge
[214] von Funktionen“, so hat man eine *Orthogonalmenge* definiert.

Wir werden Beispiele von unendlichen Orthogonalsystemen gleich kennen lernen. Im nächsten Kapitel werden wir aber zeigen, daß unendliche Orthogonalmengen (in L^2) stets abzählbar sind.

Keine Orthogonalmenge kann zwei nichtnegative Funktionen enthalten, die in einer Menge Z vom positiven Maße beide positiv wären. Sonst wäre

$$0 = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \geqslant \int_Z f(t)\, g(t)\, dt > 0.$$

Nichtdestoweniger gibt es ein nichttriviales unendliches Orthogonalsystem aus lauter nichtnegativen Funktionen bestehend. Es sei $\varphi_n(t)=0$ in $<0,1>$ außerhalb von $<1/2^n, 1/2^{n-1}>$ und $\varphi_n(t)=1$ im letzteren Intervall. Dann ist offensichtlich $\int_0^1 \varphi_m(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0$ für $m \neq n$ und $\varphi_n(t) \geqslant 0$ (n).

§ 2. **Beispiele.**

Ein Beispiel eines Orthogonalsystems in $<0, \pi>$ ist die Folge

[221] $$\{\cos it\} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Denn man hat für $i \neq k$

$$\int_0^\pi \cos it \cos kt\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos\,(i+k)t + \cos\,(i-k)t]\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\,(i+k)t}{i+k}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\,(i-k)t}{i-k}\right]_0^\pi = 0.$$

Dieselbe Rechnung zeigt die Orthogonalität des Systems [221] in $<\pi, 2\pi>$ und in $<0, 2\pi>$. Ähnliche Eigenschaften hat das System

[222] $$\{\sin it\} \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

es ist für $i \neq k$

$$\int_0^\pi \sin it \sin kt\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos\,(i-k)t - \cos\,(i+k)t]\, dt = 0.$$

Hier ist die Orthogonalität in $<\pi, 2\pi>$ und $<0, 2\pi>$ ebenfalls vorhanden.

Beide Systeme sind in $<\alpha\pi, \beta\pi>$, wo α, β beliebig ganz, und in keinem andern Intervall orthogonal. Hat man ein beliebiges Intervall $<a, b>$ mit $-\infty < a < b < \infty$, so genügt es in den vorhergehenden Beispielen eine geeignete ganze lineare Substitution vorzunehmen: die Systeme

$$\left\{\cos i\pi \frac{t-a}{b-a}\right\} \quad (i = 0, 1, \ldots), \qquad \left\{\sin i\pi \frac{t-a}{b-a}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

sind in $<a, b>$ orthogonal.

Die Funktionenfolge

$$1, \quad \cos t, \quad \sin t, \quad \cos 2t, \quad \sin 2t, \quad \cos 3t, \quad \sin 3t, \ldots$$ [223]

heißt *das trigonometrische System*. Es ist orthogonal in $<0, 2\pi>$. Es ist nicht orthogonal in $<0, \pi>$, denn z. B.

$$\int_0^\pi \sin t \,.\, \cos 2t \,.\, dt = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

Um die Orthogonalität von [223] in $<0, 2\pi>$ zu zeigen, genügt es angesichts der Eigenschaften von [221] und [222] die Integrale

$$\int_0^{2\pi} 1 \,.\, \sin it \,.\, dt, \qquad \int_0^{2\pi} \sin it \,.\, \cos kt \,.\, dt$$

zu berechnen; das erste ist offenbar Null, das zweite gleich $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2it\, dt = -\left[\frac{1}{2}\frac{\cos 2it}{2i}\right]_0^{2\pi} = 0$ für $i = k$; für $i \neq k$ ist es

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin (i+k)t - \sin (i-k)t]\, dt = -\left[\frac{1}{2}\frac{\cos\,(i+k)\,t}{i+k} - \frac{1}{2}\frac{\cos\,(i-k)\,t}{i-k}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. [224]
Eine solche Gleichung ist u. a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda A(t)\, y(t) = 0, \tag{5}$$

wo λ ein reeller Parameter und $A(t) > 0$ eine stetige Funktion ist. Man kann zeigen (etwa durch die Maximisierung von $\int_a^b A(t)\, y(t)\, dt$

unter den Nebenbedingungen $\int\limits_a^b \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 dt = 1, \quad y(a) = y(b) = 0),$
daß es reelle Zahlen λ und zugehörige zweimalstetigdifferenzierbare $y(t)$ gibt, die (5) erfüllen und der Nebenbedingung $y(a) = y(b) = 0$ genügen, ohne identisch Null zu sein.

Sei nun $\lambda_i \neq \lambda_k$ und $y_i(t)$, $y_k(t)$ die zugehörigen Lösungen. Es ist

$$(6) \quad y_i''(t) + \lambda_i A(t)\, y_i(t) = 0, \qquad y_k''(t) + \lambda_k A(t)\, y_k(t) = 0,$$
$$y_i(a) = y_i(b) = 0, \qquad y_k(a) = y_k(b) = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung (6) mit $y_k(t)$, die zweite mit $y_i(t)$ und subtrahiert, so kommt

$$(\lambda_i - \lambda_k)\, A(t)\, y_i(t)\, y_k(t) = \frac{d}{dt}\left[y_i(t)\, y_k'(t) - y_k(t)\, y_i'(t)\right]$$

und

$$(\lambda_i - \lambda_k) \int\limits_a^b A(t)\, y_i(t)\, y_k(t)\, dt = \left[y_i(t)\, y_k'(t) - y_k(t)\, y_i'(t)\right]_a^b = 0;$$

wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ folgt

$$(7) \quad \int\limits_a^b A(t)\, y_i(t)\, y_k(t)\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{A(t)}\, y_i(t) \,.\, \sqrt{A(t)}\, y_k(t)\, dt = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die zu verschiedenen Parameterwerten λ_i zugehörigen zweimalstetigdifferenzierbaren, an beiden Intervallenden verschwindenden Lösungen $y_i(t)$ von (5) zu einem Orthogonalsystem $\{\sqrt{A(t)}\, y_i(t)\}$ Anlaß geben.

Das System [222] ist ein Spezialfall: man hat $a = 0$, $b = \pi$, $A(t) \equiv 1$ zu wählen; λ_k ist $= -k^2$ zu setzen. Das System [221] besteht ebenfalls aus Lösungen der Gleichung

$$y''(t) - k^2\, y(t) = 0,$$

die Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$ sind aber nicht mehr erfüllt.

[225] Das Rademacher'sche System. Ein interessantes Beispiel eines Orthogonalsystems in $<0, 1>$ liefern die sog. Rademacher'schen Funktionen. Die k-te Rademacher'sche Funktion $r_k(t)$ $(k = 1, 2, 3\ldots)$ erhält man aus der dyadischen Entwicklung der Zahl t $(0 < t \leqslant 1)$: steht an der k-ten Stelle die Ziffer 0, so setzt man $r_k(t) = 1$, ist die k-te Ziffer 1, so setzt man $r_k(t) = -1$, und

ist t eine Zahl, die zwei Entwicklungen mit verschiedener k-ten Ziffer zuläßt, oder Null, so setzt man $r_k(t) = 0$. Auf diese Weise zerfällt $<0, 1>$ in 2^k gleiche Teilintervalle; $r_k(t)$ ist im Innern eines jeden Teilintervalls abwechselnd $+1$ und -1 und in den Endpunkten 0.

Das System [225] ist orthogonal. Sei nämlich $m > n$. Um das Integral

$$(8) \qquad \int\limits_0^1 r_m(t)\, r_n(t)\, dt$$

zu berechnen, nennen wir $I_1, I_2, \ldots, I_{2^n}$ die 2^n Konstanzintervalle von $r_n(t)$. Es ist

$$(9) \qquad \int\limits_{I_k} r_m(t)\, r_n(t)\, dt = (-1)^{k+1} \int\limits_{I_k} r_m(t)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Nun aber zerfällt I_k in 2^{m-n} gleiche Intervalle, in welchen $r_m(t)$ abwechselnd die Werte $+1$ und -1 annimmt; somit ist das Integral rechts in (9) Null, das linke ebenfalls und (8) ist Null als Summe $\sum\limits_{k=1}^{2^n} \int\limits_{I_k} r_m(t)\, r_n(t)\, dt$.

Das System $\{r_k(t)\}$ hat die Eigenschaft $|r_k(t)| \leqslant 1$ $(0 \leqslant t \leqslant 1;$ $k = 1, 2, \ldots)$.

Würden wir $<0, 1>$ in $2k$ gleiche Teile zerlegen und $\rho_k(t)$ abwechselnd $+1$ und -1 setzen, so würden wir kein Orthogonalsystem bekommen. Denn es ist (z. B.)

$\rho_1(t) = +1$ in $(0, 1/2)$, $\qquad \rho_1(t) = -1$ in $(1/2, 1)$,

$\rho_3(t) = +1$ in $(0, 1/6)$, $\qquad \rho_3(t) = -1$ in $(1/6, 2/6), \ldots$ u. s. w.

und $\int\limits_0^1 \rho_1(t)\, \rho_3(t)\, dt = 1/6 - 1/6 + 1/6 + 1/6 - 1/6 + 1/6 = 1/3 \neq 0.$

Führt man das Zeichen „sign" ein, wo

$$\operatorname{sign} \alpha = 1 \quad \text{für } \alpha > 0, \qquad \operatorname{sign} \alpha = -1 \quad \text{für } \alpha < 0, \qquad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

so wird $\rho_k(t) = \operatorname{sign}(\sin 2k\pi t)$. Wir nennen $\{\rho_k(t)\}$ „die *stilisierte* Sinusfolge". Das System [225] ist mit $\{\rho_{2^k-1}(t)\}$, also mit $\{\operatorname{sign}(\sin 2^k \pi t)\}$ identisch.

Das Rademacher'sche System ist ein Spezialfall einer allgemeineren Klasse: $\varphi(t)$ habe die Periode 1 und es sei

$$(10) \qquad \varphi(t) + \varphi(t + 1/2) = 0 \qquad (t).$$

Man definiere: $\varphi_n(t) = \varphi(2^n t)$; war $\varphi \in L^2$, so ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein Orthogonalsystem. Denn für $m > n$ ist

$$\int_0^1 \varphi_m(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \frac{1}{2^n} \int_0^{2^n} \varphi(2^{m-n} u)\, \varphi(u)\, du = \int_0^1 \varphi(2^{m-n} u)\, \varphi(u)\, du,$$

wo von der Substitution $2^n t = u$ und von der Periodizität Gebrauch gemacht wurde. Zerlegt man das Integrationsintervall in $<0, {}^1\!/_2>$ und $<{}^1\!/_2, 1>$, so erhält man für das letzte Integral

$$\int_0^{1/2} \varphi(2^{m-n} u)\, [\varphi(u) + \varphi(u + {}^1\!/_2)]\, du,$$

und dieses verschwindet wegen (10).

Setzt man speziell $\varphi(t) = \operatorname{sign}(\sin 2\pi t)$, so wird $\{\varphi_n(t)\}$ mit [225] identisch.

[226] Das Haar'sche System. Man definiere:

$$\chi_0^{(0)}(t) = +1 \quad \text{in } <0, 1>,$$

$$\chi_0^{(1)}(t) = \begin{cases} +1 & \text{in } <0, {}^1\!/_2) \\ -1 & \text{in } ({}^1\!/_2, 1> \\ 0 & \text{in anderen Punkten,} \end{cases}$$

$$\chi_1^{(1)}(t) = \begin{cases} +\sqrt{2} & \text{in } <0, {}^1\!/_4) \\ -\sqrt{2} & \text{in } ({}^1\!/_4, {}^1\!/_2> \\ 0 & \text{in anderen Punkten,} \end{cases}$$

$$\chi_1^{(2)}(t) = \begin{cases} +\sqrt{2} & \text{in } <{}^1\!/_2, {}^3\!/_4) \\ -\sqrt{2} & \text{in } ({}^3\!/_4, 1> \\ 0 & \text{in anderen Punkten,} \end{cases}$$

und allgemein:

$$\chi_n^{(1)}(0) = +\sqrt{2^n}, \qquad \chi_n^{(2^n)}(1) = -\sqrt{2^n},$$

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} +\sqrt{2^n} & \text{in } \left< \frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) \\ -\sqrt{2^n} & \text{in } \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right> \\ 0 & \text{sonst in } <0, 1>. \end{cases}$$

Dabei durchläuft n die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ und k die Zahlen $1, 2, \ldots, 2^n$. Dieses von Alfred Haar konstruierte System $\{\chi_n^{(k)}(t)\}$ ist orthogonal. Ist nämlich $j > k \geqslant 1$, so ist bereits das Produkt $\chi_n^{(j)}(t) \cdot \chi_n^{(k)}(t)$ identisch Null in $<0, 1>$. Ist aber $m > n$, so ist das Teilintervall, in welchem $\chi_m^{(k)}(t) \neq 0$, gänzlich in einem Konstanzintervall der Funktion $\chi_n^{(j)}(t)$ enthalten; es ist daher ($j \neq k$ oder $j = k$)

$$\int_0^1 \chi_m^{(k)}(t)\, \chi_n^{(j)}(t)\, dt = \lambda \int_{\frac{2k-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2k}{2^{m+1}}} \chi_m^{(k)}(t)\, dt = \lambda \left[\frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}} - \frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}} \right] = 0.$$

Da $\int_0^1 \chi_0^{(0)}(t)\, \chi_m^{(k)}(t)\, dt = 0 \;\; (k > 0)$, so sind alle Fälle erschöpft.

§ 3. Vollständigkeit.

Eine Menge von Funktionen $\varphi(t)$ heißt im Intervall $<a, b>$ [231]
vollständig inbezug auf den Raum R, wenn jede Funktion $f(t) \in R$, für welche sämtliche Skalarprodukte

$$\int_a^b f(t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (\varphi)$$

verschwinden, selbst ein Nullelement von R ist. M. a. W.: eine Funktionenmenge (oder ein Funktionensystem) ist vollständig inbezug auf R, wenn es in R außer dem Nullelement keine zu sämtlichen Funktionen der Menge (des Systems) orthogonale Funktion gibt. Die Funktionen $\varphi(t)$ brauchen nicht zu R zu gehören. Die φ-Menge könnte z. B. aus einer einzigen Funktion $\varphi(t)$ bestehen, die auf jeder Punktmenge vom positiven Maße in $<a, b>$ nichtmeßbar wäre; eine solche φ-Menge wäre inbezug auf den Raum L aller in $<a, b>$ integrierbaren Funktionen vollständig, denn nur die fast überall in $<a, b>$ verschwindenden Funktionen liefern mit $\varphi(t)$ ein integrierbares Produkt. Doch wollen wir von nichtmeßbaren Funktionen absehen, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil angesagt wird.

Selbstverständlich braucht eine vollständige Menge weder orthogonal noch abzählbar zu sein. So ist z. B. die Menge aller zu L^2 gehörenden Funktionen vollständig inbezug auf den Raum L^2, denn aus der Bedingung

$$\int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, dt = 0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in L^2$$

folgt — da $\varphi = f$ gesetzt werden darf — $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$, also $f(t) \equiv 0$ fast überall in $<a, b>$.

[232] Andererseits ist es leicht ein abzählbares vollständiges System $\{\varphi_k(t)\}$, z. B. inbezug auf den Raum C (aller in $<a, b>$ stetigen Funktionen) zu bilden. Man teile $<a, b>$ in n gleiche Teile und definiere eine stetige Funktion, die in jedem Teilintervall linear verläuft. Das geometrische Bild ist ein gebrochen-geradliniger Zug. Wenn wir noch verlangen, daß die Ordinaten der $n+1$ Ecken rational seien, so wird es nur abzählbar-unendlichviele solche Funktionen geben, denn die natürliche Zahl n und die rationalen Zahlen $w_1, w_2 \ldots w_{n+1}$ als Ordinaten bestimmen eindeutig die Funktion.

Die Vollständigkeit dieses Systems $\{\varphi_k(t)\}$ läßt sich fast unmittelbar einsehen; es sei $f(t)$ stetig und $\varepsilon > 0$; es ist leicht ein $\varphi_{k(\varepsilon)}(t)$ mit $|f(t) - \varphi_{k(\varepsilon)}(t)| < \varepsilon$ in $<a, b>$ zu bestimmen. Ist $f(t)$ zu allen $\varphi_k(t)$ orthogonal, so folgt

$$\left|\int_a^b f^2(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b f(t)\,[f(t) - \varphi_{k(\varepsilon)}(t)]\,dt\right| \leqslant |b-a|\,.\,M\,.\,\varepsilon,$$

wo M das Maximum von $|f(t)|$ in $<a, b>$ bedeutet; es ist also $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$ und $f(t) \equiv 0$, w. z. b. w.

[233] Ein noch einfacheres Beispiel eines abzählbaren vollständigen Systems inbezug auf C und sogar auf L ist — für das Intervall $<0, 1>$ — die Gesamtheit der Funktionen $\varphi^{(w)}(t)$, die in $<0, w>$ gleich 1, in $(w, 1>$ gleich Null sind; w ist dabei ein echter rationaler positiver Bruch. Es sei

$$f(t) \in L \qquad \text{und} \qquad F(w) = \int_0^1 f(t)\,\varphi^{(w)}(t)\,dt = \int_0^w f(t)\,dt = 0$$

für alle w obiger Art. $\int_a^w f(t)\,dt$ ist aber für alle w in $<0, 1>$ definiert und stetig, also ist $F(w) = 0$ in ganz $<0, 1>$. Nach einem Hauptsatze der Lebesgue'schen Integrationslehre ist $f(t) = \dfrac{dF(t)}{dt}$ fast überall in $<0, 1>$, also $f(t) \equiv 0$ f. ü.

Die Vollständigkeit der Systeme [221], [222], [223]. [234]
Wir beginnen mit [223]; wir zeigen zunächst, daß es inbezug auf C vollständig ist. Es sei

$$\int_0^{2\pi} f(t) \begin{matrix}\cos nt\\ \sin nt\end{matrix}\,dt = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{11}$$

dann ist $\int_0^{2\pi} f(t)\,T_n(t)\,dt = 0$, wo $T_n(t)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom bedeutet. Ist $f(t)$ stetig und nicht identisch Null, etwa $f(t_0) \neq 0$, so ist entweder $f(t) > \varepsilon > 0$ oder $f(t) < -\varepsilon < 0$ im Intervall $<t_0 - \delta, t_0 + \delta> = I$. Der Ausdruck $p(t) = 1 + \cos(t - t_0) - \cos\delta$ ist $\geqslant 1$ in I und es ist $|p(t)| < 1$ außerhalb I. $T_n(t) = [p(t)]^n$ ist ein trigonometrisches Polynom und es ist

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\,T_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,T_n(t)\,dt + \int_{CI} f(t)\,T_n(t)\,dt. \tag{12}$$

Der zweite Integrand bleibt dem Betrage nach unter $|f(t)|$ und konvergiert gegen Null für $n \to \infty$; das Integral hat also (vgl. [123-124]) den Grenzwert Null. Das erste Integral ist aber stets dem Betrage nach wenigstens gleich $2\delta\varepsilon$. Dieser Widerspruch mit (12) zeigt, daß $f(t)$ identisch verschwindet, w. z. b. w.

Das trigonometrische System ist aber auch vollständig inbezug auf L. Sei nämlich $f(t) \in L$, $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Die Formel (11) ergibt $F(2\pi) = 0$; daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} F(t)\cos nt\,dt = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0 \qquad (n),$$

$$\int_0^{2\pi} F(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0 \qquad (n).$$

Sei $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,dt$; die beiden vorangehenden Formeln ergeben

$$\int_0^{2\pi} [F(t) - \alpha] \begin{matrix}\cos nt\\ \sin nt\end{matrix}\,dt = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

also, wegen $[F(t) - \alpha] \in C$, $F(t) - \alpha \equiv 0$. Es ist aber $F(0) = 0$, also $F(t) \equiv 0$ und $f(t) = 0$ fast überall in $<0, 2\pi>$, w. z. b. w.

Dasselbe Verfahren zeigt, daß aus $f(t) \in L$ und daraus, daß $\int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos nt}{\sin nt} dt = 0$ für $n = 1, 2, \ldots,$ $f(t) \equiv \text{const.}$ f. ü. folgt. Diese Bemerkung wenden wir bei [222] an. Es sei

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

man setze $f(\pi + t) = -f(\pi - t)$ $(0 < t \leqslant \pi)$; es kommt

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt - \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0.$$

Die eben formulierte Bemerkung ergibt $f(t) \equiv \text{const.}$ f. ü.; es folgt $0 = \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = 2c,$ $f(t) \equiv 0$ f. ü.

Es hat sich also das System $\{\sin it\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ in $<0, \pi>$ inbezug auf L (also auch auf C) als vollständig erwiesen. Dasselbe gilt von [221] und der Beweis ist ähnlich $(f(\pi + t) = f(\pi - t))$.

[235] Die Vollständigkeit des Haar'schen Systems in $<0, 1>$ inbezug auf L. Es sei $f(t) \in L$ und $F(t) = \int_0^t f(u)\, du$; die Voraussetzung

$$\int_0^1 f(t) \chi_n^{(k)}(t) \, dt = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, 2^n) \tag{13}$$

ergibt

$$F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) + F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) = 0,$$

wenn (13) unter Berufung auf [226] berechnet wird; es ist also

$$F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) - 2F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) + F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = 0. \tag{14}$$

Für $n = 0$ resultiert daraus — geometrisch gesprochen — die Kollinearität der Punkte mit den Abszissen $x = 0, 1/2, 1$ der Kurve

$y = F(x)$. Aber für $n = 1$, $k = 1$ zeigt (14) die Kollinearität der Punkte $x = 0, 1/4, 1/2$ und für $n = 1$, $k = 2$, die Kollinearität der Punkte $x = 1/2, 3/4, 1$. Somit sind alle Punkte mit den Abszissen $h/2^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; h = 0, 1, \ldots, 2^n)$ kollinear. $F(x)$ ist stetig, also ist $F(t) \equiv ct + d$. Nun enthält die Voraussetzung außer (13) noch:

$$\int_0^1 f(t) \chi_0^{(0)}(t) \, dt = 0,$$

d. h. $F(1) - F(0) = 0$; es folgt $c = 0$, $F(t) \equiv d$, und $f(t) \equiv 0$ fast überall in $<0, 1>$.

Das System [225] ist mit dem Haar'schen verwandt, aber es ist nicht vollständig. So ist z. B. die Funktion $f(t) \equiv 1$ zu allen Rademacher'schen Funktionen orthogonal. Aber die Hinzunahme von $f(t) \equiv 1$ zu dem System würde seine Vollständigkeit nicht herbeiführen. Denn alle Rademacher'schen Funktionen sind antisymmetrisch inbezug auf $t = 1/2$; ist also $f(t)$ eine beliebige inbezug auf $t = 1/2$ symmetrische Funktion, so ist ihr Produkt mit einer beliebigen Rademacher'schen Funktion antisymmetrisch und sein Integral über $<0, 1>$ Null. Damit noch die Funktion $f(t)$ zu der (adjungierten) 1 orthogonal sei, reicht es hin, daß ihr Integral über $<0, 1>$ verschwindet. Eine Funktion, die allen diesen Anforderungen genügt, ist z. B. $\cos 2\pi t$, aber auch $\cos 2\pi q t$ $(q = 1, 2, \ldots)$. [236]

§ 4. Abgeschlossene, minimale und dichte Systeme. Normierung.

Ein Funktionensystem ist im Raume R *abgeschlossen*, wenn man eine jede zu R gehörende Funktion mit Hilfe von ganzen linearen, endlichen Verbindungen der Funktionen des Systems beliebig annähern kann. Genauer gesagt ist das System S inbezug auf R abgeschlossen, wenn es zu jedem $f(t)$ in R und zu $\varepsilon > 0$ n Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ in S und n reelle Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gibt, so daß die Funktion [241]

$$\Phi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \ldots + c_n \varphi_n(t)$$

zu R gehört und die Eigenschaft

$$\| f(t) - \Phi(t) \|_R < \varepsilon \tag{15}$$

besitzt; $\| \quad \|_R$ ist hier das Zeichen für die in R geltende Norm.

Ebenso wie die Vollständigkeit ist die Abgeschlossenheit eine Eigenschaft des Systems, die erst durch die Angabe des Raumes R festgelegt wird. Die Ungleichung (15) wird im Raume C als $\underset{a \leqslant t \leqslant b}{\mathrm{Max}} |f(t) - \Phi(t)| < \varepsilon$ gelesen; nach dem Weierstraß'schen Satze [122] bilden also die sukzessiven Potenzen $1, t, t^2, \ldots$ ein abzählbares, inbezug auf C abgeschlossenes System.

[242] Dieselbe Eigenschaft kommt einem von Herrn J. Schauder konstruierten System zu: Es sei $a < b$ und $\{w_i\}$ $(i > 2)$ sei die Folge aller rationalen Zahlen des Intervalls (a, b): $w_1 = a, \quad w_2 = b, \quad w_3 = \ldots$

$\varphi_1(t)$ sei die durch die Bedingungen $\varphi_1(w_1) = 1, \ \varphi_1(w_2) = 0$ bestimmte ganze lineare Funktion; $\varphi_2(t)$ sei auch ganz-linear mit $\varphi_2(w_1) = 0$, $\varphi_2(w_2) = 1$. Für $n > 2$ werde $<a, b>$ vermittels $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ in $n-2$ Teilintervalle zerlegt und $<w_i, w_k>$ sei dasjenige, welches w_n enthält. $\varphi_n(t)$ sei nun 0 außerhalb $<w_i, w_k>$, 0 in w_i und in w_k, 1 in w_n und ganz-linear in $<w_i, w_n>$, $<w_n, w_k>$. Damit ist eine Folge $\{\varphi_n(t)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von in $<a, b>$ stetigen Funktionen erklärt.

[243] Sei $f(t)$ stetig in $<a, b>$. Nach Herrn Schauder *ist die Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \quad \text{mit } c_1 = f(w_1), \quad c_2 = f(w_2), \ldots \tag{16}$$

$$c_i = f(w_i) - \sum_{k=1}^{i-1} c_k \varphi_k(w_i) \qquad (i > 2)$$

in $<a, b>$ gleichmäßig zur Summe $f(t)$ konvergent.

Dies sieht man leicht ein: ist t die Abszisse, y die Ordinate, so ist das geometrische Bild von $y = s_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$ ein Polygonalzug, dessen $n-1$ Seiten Sehnen der Kurve $y = f(t)$ sind, und dessen n Ecken die wachsend geordneten Zahlen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ zu Abszissen haben. Ist $\varepsilon > 0$ und $\eta(\varepsilon) > 0$ so, daß $|t' - t''| < \eta$ $|f(t') - f(t'')| < \varepsilon$ in $<a, b>$ impliziert, ferner $N(\eta)$ so groß, daß für $n > N$ das größte durch die geordneten $w_1, w_2, \ldots, w_n$ gebildete Intervall kleiner als η sei, dann ist für $n > N(\eta(\varepsilon))$

$$|f(t) - s_n(t)| < \varepsilon \tag{17}$$

in $<a, b>$, denn der Abstand einer Sehne vom Bogen — in der y-Richtung gemessen — ist in jedem der $n-1$ Teilintervalle höchstens gleich der Oszillation der Funktion, also $< \varepsilon$, da die Intervallänge unter η liegt. Es folgt aber aus (17) die angekündigte gleichmäßige Konvergenz der Reihe (16) zur Summe $f(t)$.

Das System [242] hat aber auch die Eigenschaft, daß *die Beziehung* [244]

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{18}$$

mit konstanten c_i nur dann statthaben kann, wenn die c_i die in (16) *angegebenen Werte haben.* Setzt man nämlich in (18) $t = w_1$ ein, so kommt $f(w_1) = c_1$, denn $\varphi_i(w_1) = 0$ für $i \neq 1$, $\varphi_1(w_1) = 1$. Ebenso erhält man $f(w_2) = c_2$. Setzt man $t = w_3$, so kommt, wegen $\varphi_3(w_3) = 1$ und $\varphi_{i>3}(w_3) = 0$, $f(w_3) = c_1 \varphi_1(w_3) + c_2 \varphi_2(w_3) + c_3$, also $c_3 = f(w_3) - \sum_{k=1}^{2} c_k \varphi_k(w_3)$ und — durch leichte Induktion — die allgemeine Formel (16) für c_i $(i > 2)$.

Das System [242] büßt keine von den eben bewiesenen Eigenschaften ein, wenn man endlich viele $\varphi_i(t)$ mit $i \geqslant 3$ fortläßt. Es hört aber auf abgeschlossen zu sein, wenn eine (oder beide) von den Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ fortgelassen wird. Ist z. B. $\varphi_1(t)$ gestrichen worden und wählt man $f(t) \equiv 1$, so ist für eine beliebige lineare endliche Verbindung $\Phi(t)$ der übrigen $\varphi_i(t)$ $\Phi(a) = 0$, denn es ist $\varphi_n(a) = 0$ für $n > 1$. Es ist daher — für $\varepsilon < 1$ — stets

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - \Phi(t)| \geqslant |f(a) - \Phi(a)| = 1 > \varepsilon,$$

gegen (15).

Aus demselben Grunde ist das System [222] in $<0, \pi>$ inbezug auf C nicht abgeschlossen; hier sind alle Funktionen $\sin it$ für $t = 0$, $t = \pi$ Null. Nichtdestoweniger ist dasselbe System inbezug auf L in $<0, \pi>$ abgeschlossen, wie wir später sehen werden.

Integration abgeschlossener Systeme. *$\{\varphi_n(t)\}$ sei inbezug auf L abgeschlossen, $\psi_n(t)$ bezeichne $\int_a^t \varphi_n(u)\,du$. Dann ist das aus* 1 *und $\{\psi_n(t)\}$ bestehende System in $<a, b>$ abgeschlossen inbezug auf C.* [245]

Beweis: $\varphi(t)$ sei eine der Funktionen [242]; die Ableitung $\varphi'(t)$ ist streckenweise konstant und man hat

$$\int_a^t \varphi'(u)\,du = \varphi(t) - \varphi(a) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es nach Voraussetzung eine endliche lineare Verbindung $\Phi(t)$ der $\varphi_n(t)$ mit $\int_a^b |\varphi'(u) - \Phi(u)|\,du < \varepsilon$. Umsomehr gilt $\left|\int_a^t (\varphi'(u) - \Phi(u))\,du\right| < \varepsilon$, also $\left|\varphi(t) - \varphi(a) - \int_a^t \Phi(u)\,du\right| < \varepsilon$ oder

$$(19) \qquad |\varphi(t) - \Psi(t)| < \varepsilon \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

mit $\Psi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \Phi(u)\,du = \varphi(a).1 + c_1\psi_1(t) + \ldots + c_N\psi_N(t)$.

Somit ist gezeigt worden, daß man mit Hilfe von endlichen linearen Verbindungen der Funktionen $1, \{\psi_n(t)\}$ jede Schauder'sche Funktion $\varphi(t)$ gleichmäßig in $<a, b>$ approximieren kann. Ist nun $f(t)$ stetig in $<a, b>$ und hat $s_n(t)$ die Bedeutung wie im Beweise von [243], so ist bei entsprechendem n

$$|f(t) - s_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (a \leqslant t \leqslant b);$$

$s_n(t)$ besteht aus n Termen $c\varphi(t)$ und man kann einen jeden auf $\varepsilon/2n$ genau durch lineare, endliche Verbindungen von $1, \{\psi_n(t)\}$ annähern; die Summe dieser Verbindungen $\sigma(t)$ hat die Eigenschaft $|f(t) - \sigma(t)| < \varepsilon$ in $<a, b>$, wie die Behauptung [245] es verlangt.

Der eben angewendete Schluß ist vielfach nützlich. So haben wir z. B. im I-ten Kapitel (§ 2, Schlußbemerkung) ein Funktionensystem kennen gelernt, welches inbezug auf jeden Raum L^p $(p \geqslant 1)$ abgeschlossen ist. Dieses System besteht aus allen streckenweisekonstanten Funktionen. Eine solche Funktion ist eine lineare Verbindung von noch einfacheren Funktionen, und zwar solchen,
[246] die in einem Teilintervall gleich 1, sonst gleich 0 sind. Um die Abgeschlossenheit eines Systems $\{f_n(t)\}$ inbezug auf L^p $(p \geqslant 1)$ festzustellen, genügt es zu zeigen, daß eine jede Funktion der eben bezeichneten Art in L^p durch lineare Verbindungen der

$f_n(t)$ beliebig approximierbar ist (im Sinne der L^p-Norm). Denn die Eigenschaften [137] der Norm erlauben hier wie im Schlußteil des Beweises von [245] vorzugehen.

Ein inbezug auf R *dicht-abgeschlossenes System* ist ein solches, [247]
welches (inbezug auf R) abgeschlossen bleibt, wenn man beliebig viele seiner Funktionen streicht, ohne es aber auf ein endliches System zu reduzieren. Ganz analog ist die Definition eines *dicht-vollständigen Systems*. Keines der bis jetzt von uns untersuchten Systeme ist dicht im obigen Sinne.

Ein Gegenstück zur Dichte ist die Minimalität. *Minimal-abge-* [248]
schlossen ist ein System, welches nach Weglassung einer Funktion — welche es auch sei — die Abgeschlossenheit einbüßt (z. B. ist [223] ein solches System). Analog lautet die Definition eines *minimal-vollständigen* Systems. (Dichte Systeme hat Ch. Müntz angegeben (vgl. [361]); den Ausdruck „minimal" finden wir bei S. Levin, doch in einem etwas abweichenden Sinne).

Ist $\varphi(t)$ irgend ein Element eines normierten Raumes R und [249]
ist $\|\varphi(t)\|_R \neq 0$, so läßt sich eine Konstante c aus der Bedingung

$$(20) \qquad \|c\varphi(t)\|_R = 1$$

berechnen: $c = \pm 1/\|\varphi(t)\|$. Soll c reell sein, so hat die Aufgabe genau zwei Lösungen. Ersetzt man $\varphi(t)$ durch $c.\varphi(t)$, wo c eine Lösung ist, so sagt man, man habe $\varphi(t)$ *normiert*.

Soll z. B. $\sin n\pi t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, im Raume L^2 normiert werden, so kommt

$$\|\sin n\pi t\|^2 = \int_0^1 \sin^2 n\pi t\,.\,dt = \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sin^2 u\,.\,du = 1/2,$$

$$\|\sin n\pi t\| = \pm\sqrt{1/2}, \qquad c = \pm\sqrt{2}.$$

Das System $\{\pm\sqrt{2}\sin n\pi t\}$ besteht also aus lauter normierten Funktionen. Die Vorzeichen $\pm$ sind beliebig, es gibt also kontinuierlich-unendlichviele Normierungen eines unendlichen Systems.

Die Normierung kann die Merkmale der Abgeschlossenheit, der Vollständigkeit, der Orthogonalität, der Dichte und der Minimalität weder einführen noch beseitigen.

Das trigonometrische System [223] pflegt man in L^2 zu normieren; in C ist es bereits normiert. In L^2 ist das normierte trigonometrische System:

$$(21)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\quad \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\quad \ldots$$

Das System [224] ist nur bis auf konstante Faktoren bestimmt; wir können es also als normiert ansehen. Das System [225] (welchem wir den Namen des Herrn Rademacher beigelegt haben) ist in M, in L und in L^2 gleichzeitig normiert, das Haar'sche System [226] nur in L^2. Das System [242] ist in C normiert; man sieht, daß es weder in L^2 noch in L normiert ist, doch könnte man es (z. B. in L^2) normieren, während z. B. das System [225] in C nicht zu normieren ist, da seine Elemente nicht zu C gehören. Doch werden wir künftighin unter *Normierung* die Normierung in L^2 verstehen, sobald nicht ausdrücklich anderes verlangt wird.

Es werde hier bemerkt, daß die Eigenschaften der Orthogonalität, der Vollständigkeit, der Abgeschlossenheit, der Normierung, der Dichte und Minimalität in den meisten Räumen (L, L^2, M) nicht beeinflußt werden, wenn man die Funktionen in t-Mengen vom Maße Null abändert.

§ 5. **Orthogonalreihen und Orthogonalentwicklungen.**

[251] Ist $\{\varphi_i(t)\}$ ein abzählbares Orthogonalsystem, so heißt die Reihe

$$(22)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(t)$$

eine *Orthogonalreihe*; c_i sind beliebige Konstanten. Als erster hat Euler eine Orthogonalreihe, und zwar eine trigonometrische Reihe verwendet; er benützte sie in der Theorie der Jupiter- und Saturnbewegung (im J. 1748). Eine trigonometrische Reihe ist eine Reihe (22), wenn für $\{\varphi_i(t)\}$ das System (21) gewählt wird. Da die Konstanten c_i zur Verfügung stehen, dürfen wir voraussetzen, daß $\{\varphi_i(t)\}$ in R normiert ist; das engt die Definition [251] nur insofern ein, daß kein $\varphi_i(t)$ ein Nullelement von R sein darf und daß alle $\varphi_i(t)$ zu R gehören.

Es sei $\{\varphi_i(t)\}$ ein abzählbar-unendliches, orthogonales, in L^2 normiertes System; der Einfachkeit halber seien die $\varphi_i(t)$ in $\langle a, b\rangle$ stetig. Wir wollen annehmen, die Reihe (22) sei gleichmäßig konvergent und $f(t)$ sei ihre Summe. In diesem Falle ist die Bestimmung der Konstanten c_i unmittelbar: multipliziert man die Beziehung

$$(23)\qquad f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(t)$$

beiderseits mit $\varphi_k(t)$ und integriert beide Teile über $\langle a, b\rangle$, indem man rechts unter dem Summenzeichen integriert, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz erlaubt ist, so kommt

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\int_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_k(t)\,dt=c_k,$$

weil rechts alle Terme bis auf den k-ten infolge der Orthogonalität verschwinden und weil das k-te Integral infolge der Normierung gleich 1 ist. Es ist also

$$(24)\qquad c_k=\int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Für die Theorie der Orthogonalreihen ist es nun wesentlich die Koeffizienten c_k nach der Formel (24) zu berechnen: „à la Fourier", wie man zu sagen pflegt. Ist also $\{\varphi_i(t)\}$ orthogonal und in L^2 normiert, so heißen die nach Formel (24) berechneten c_k die *Koeffizienten von $f(t)$ nach $\{\varphi_i(t)\}$*, wobei von $f(t)$ nur verlangt [252]
wird, daß sämtliche Integrale (24) existieren.

Setzt man diese Koeffizientenwerte in (22) ein, so nennt man die so entstandene Reihe die *Entwicklung der Funktion $f(t)$ nach* [253]
dem System $\{\varphi_i(t)\}$. Man schreibt dann

$$(25)\qquad f(t)\sim\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(t),$$

und es ist ein Hauptproblem der Theorie, ob und wann das Zeichen $\sim$ durch das Gleichheitszeichen zu ersetzen ist. Aber auch ohne dieses Problem gelöst zu haben, können wir oft die Formel (25) als eine nützliche „Darstellung" von $f(t)$ verwenden.

Es werde hier gleich bemerkt, daß im Falle der sog. durch- [254]
schnittlichen Konvergenz der Reihe (22) gegen $f(t)$, d. h. im Falle, wo die Partialsummen $s_n(t)$ die Beziehung

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} s_n(t)=f(t)$$

in dem in [161] erklärten Sinne (vgl. I, (22)) im Raume L^2 erfüllen, die Koeffizienten c_k notwendig die Werte (24) annehmen. Denn es ist $(n>k)$

$$\int_a^b \varphi_k(t)\,[f(t)-s_n(t)]\,dt = \int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt - c_k$$

und

$$\left|\int_a^b \varphi_k(t)\,[f(t)-s_n(t)]\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^b \varphi_k^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [f(t)-s_n(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|f-s_n\|_{L^2},$$

welcher Ausdruck voraussetzungsgemäß gegen Null strebt.

Ist das System $\{\varphi_i(t)\}$ nicht normiert, so liefert, bei sonstigen Voraussetzungen, dieselbe Überlegung Werte für c_k, die eine leichte Modifizierung erfahren. Ist nämlich $\int_a^b \varphi_k^2(t)\,dt = \lambda_k > 0$, so ist das System

$$\left\{\psi_k(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,\varphi_k(t)\right\}$$

bereits normiert. Ist d_k der k-te Koeffizient von $f(t)$ nach $\{\psi_k(t)\}$, so kommt

$$d_k = \int_a^b f(t)\,\psi_k(t)\,dt = \int_a^b f(t)\cdot\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\,dt = \frac{c_k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Die Entwicklung nach $\{\psi_k(t)\}$ lautet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k\,\psi_k(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cdot\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k\,\varphi_k(t)}{\lambda_k}.$$

[255] Wenn man also die Entwicklung nach $\{\varphi_i(t)\}$ bildet, indem man die Formel (24) für die Koeffizienten benützt, aber dann die k-te Funktion durch λ_k dividiert, so wird die Reihe Term für Term mit einer anderen identisch, die bereits eine Entwicklung nach einem normierten System $\{\psi_i(t)\}$ darstellt.

Man berechne z. B. die Entwicklung von $|t|$ in $<-\pi, \pi>$ nach dem System $\{\cos it\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$:

Es ist $\int_{-\pi}^{+\pi} 1^2 . dt = 2\pi$, $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 it . dt = \pi$, also $\lambda_0 = 2\pi$, $\lambda_i = \pi$ $(i=1,2,\ldots)$ und

$$c_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} |t| . dt = \pi^2, \qquad c_i = \int_{-\pi}^{+\pi} |t| \cos it . dt = \frac{2}{i^2}[(-1)^i - 1] \quad (i=1,2,\ldots);$$

die gesuchte Entwicklung ist also

$$|t| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t - \frac{4}{9\pi}\cos 3t - \frac{4}{25\pi}\cos 5t - \ldots$$

(Würden wir hier das Zeichen $\sim$ durch $=$ ersetzen dürfen, so würden wir, nach der Substitution $t = 0$, die Beziehung

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

bekommen).

Nicht jede Reihe der Gestalt (22) ist eine Entwicklung. [221] ist ein Orthogonalsystem; die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nt \tag{26}$$

ist keine Entwicklung. Es ist hier $\lambda_0 = \pi$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \frac{\pi}{2}$. Wäre nun $f(t) \in L$ eine Funktion, die (26) liefert, so käme

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt . dt = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{27}$$

also

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,[\cos(n+2)\,t - \cos nt]\,dt = 0,$$

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(n+1)\,t . \sin t . dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

also — wenn $\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin^2 t . dt$ gesetzt wird —

$$\int_0^{\pi} [f(t) - \alpha]\sin t . \sin nt . dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Das System [222] ist aber ([234]) vollständig inbezug auf L; es ist also $(f(t) - \alpha)\sin t \equiv 0$ f. ü. in $<0, \pi>$, also $f(t) = \alpha$ f. ü. in $<0, \pi>$, was der Formel (27) widerspricht.

Dieser Weg zu den Formeln (24) ist, im Grunde genommen, der Euler-Fourier'sche (1748 — 1807). Einen besseren Einblick gewährt aber ein anderer, den die skandinavische Schule (Gram) gefunden hat.

§ 6. Das Problem der besten Approximation.

Es sei in $<a, b>$ eine Funktion $f(t) \in L^2$ erklärt. Das System $\{\varphi_i(t)\}$ sei in L^2 orthogonal und normiert. Wir werden ein solches System als „ein ON" bezeichnen. Man schreibe

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(t) \tag{28}$$

und verlange, bei festem n, die Koeffizienten ξ_i so zu bestimmen, daß $s_n(t)$ im Raume L^2 so nahe als möglich an $f(t)$ zu liegen komme. M. a. W. verlangt man die Minimisierung von

$$\|f(t) - s_n(t)\| = \sqrt{\int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2\, dt}$$

durch geeignete Wahl der ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Minimisierung der quadratischen Form der Variablen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

[261] $$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \int_a^b [f(t) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(t)]^2\, dt = \int_a^b f^2(t)\, dt - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

wo für die Skalarprodukte (24) c_k geschrieben und wo die Orthogonalität und Normierung bereits benutzt wurden. Eine leichte Umformung gibt

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \int_a^b f^2(t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Da von den drei Gliedern rechts nur der mittlere von den ξ_i abhängt, und zwar so, daß er stets nichtnegativ ist und den Wert Null nur für

$$\xi_1 = c_1, \qquad \xi_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = c_n \tag{29}$$

[262] annimmt, so ist gezeigt worden, daß *die Form $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ein einziges, eigentliches, absolutes Minimum an der Stelle* (29) *aufweist;* ihr Wert an dieser Stelle ist

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \int_a^b f^2(t)\, dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2, \tag{30}$$

wo die c_i durch (24) erklärt sind. Wir hatten aber stets

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2\, dt \geqslant 0, \tag{31}$$

also auch $F(c_1, c_2, \ldots, c_n) \geqslant 0$; (30) ergibt daher

$$\int_a^b f^2(t)\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i^2. \tag{32}$$

Wir haben also gezeigt, daß der Integralausdruck (31) seinen Minimalwert erreicht, wenn die Koeffizienten ξ_i die Fourierschen Werte c_i (24) annehmen. *Wenn man also eine Funktion in eine Orthogonalreihe nach der Vorschrift des § 5 entwickelt, so liefert jede Partialsumme dieser Entwicklung die bestmögliche Approximation; dieses Optimum ist das einzige.* [263]

Außerdem liefert die Ungleichung (32) im Falle unendlicher Systeme die sog. *Besselsche Ungleichung* [264]

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\, dt, \tag{33}$$

also u. a. die Konvergenz der Koeffizientenquadratsumme.

Eine wichtige Konsequenz der Bessel'schen Ungleichung (33) ist [265]

$$\lim_{i \to \infty} c_i = 0 \qquad (f(t) \in L^2). \tag{34}$$

Es kann aus (33) auch abgelesen werden, daß $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$ keine Entwicklung einer zu L^2 gehörenden Funktion ist, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ divergiert. *Ist aber $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$, so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$ stark konvergent,* denn es ist $(m > n)$ $\|s_m(t) - s_n(t)\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{m} c_i^2}$, wenn $s_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$ gesetzt wird. [266]

Ist das normierte Orthogonalsystem $\{\varphi_i(t)\}$ inbezug auf L^2 abgeschlossen, so gilt [267]

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2\, dt = 0. \tag{35}$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung ein Zahlensystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mit

$$\left\| f(t) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(t) \right\| < \sqrt{\varepsilon},$$

es ist also $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < \varepsilon$ und umsomehr $F(c_1, c_2, \ldots, c_n) < \varepsilon$, d. h. $\int_a^b [f(t) - s_m(t)]^2 \, dt < \varepsilon$ für $m \geqslant n$, w. z. b. w.

[268] Eine weitere Konsequenz der Besselschen Ungleichung (33) ist die Konvergenz fast überall der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \varphi_i^2(t)$$

unter der Voraussetzung $f(t) \varepsilon L^2$. Es ist nämlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \int_a^b \varphi_i^2(t) \, dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

nach [264] eine konvergente Reihe und aus [124] folgt die Behauptung.

[269] *Die gliedweise integrierte Entwicklung einer $f(t) \varepsilon L^2$ ist gleichmäßig konvergent.* Es ist nämlich

$$\left| \sum_{i=p}^{q} c_i \int_a^t \varphi_i(u) \, du \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=p}^{q} c_i^2 \sum_{i=p}^{q} \left(\int_a^t \varphi_i(u) \, du \right)^2} \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{36}$$

da aber die Integrale $\int_a^t \varphi_i(u) \, du$ Koeffizienten der Funktion $g(u)$ sind, die in $\langle a, t \rangle$ gleich 1, sonst 0 ist, so folgt aus (33) und (36)

$$\left| \sum_{i=p}^{q} c_i \int_a^t \varphi_i(u) \, du \right| < \sqrt{b-a} \sqrt{\sum_{i=p}^{q} c_i^2} \qquad (q > p),$$

und letzter Ausdruck strebt für $p \to \infty$ unabhängig von t gegen Null.