I. KAPITEL.

Vorkenntnisse.

Dieses Kapitel bringt gewisse Definitionen und Sätze, die wir im ganzen Buche brauchen werden. Von diesen Sätzen sollen einige bewiesen werden.

§ 1. **Konvergenz und Summierbarkeit.**

Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei unendliche Folgen und

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$

dann ist folgende, nach Abel benannte Umformung oft nützlich:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k(b_k - b_{k+1}) - s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p+1}. \qquad [111]$$

Die Abel'sche Umformung kann auch so geschrieben werden:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k(b_k - b_{k+1}) - s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p}. \qquad [112]$$

In beiden Formeln darf s_k durch $s'_k = s_k + c$ ersetzt werden, wo c von k frei ist.

Es sei $q > 1$ und es bezeichne l^q die Menge aller Folgen $\{x_k\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q < \infty,$$

und q' die durch $1/q + 1/q' = 1$ erklärte Zahl.

Dann gilt der Landau'sche Satz: *Ist für jede Folge* $\{x_k\}$ *in* l^q [113]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

konvergent, so gehört $\{a_k\}$ *zu* $l^{q'}$, *d. h. es ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q'} < \infty.$$

Die Umkehrung dieses Satzes ist richtig und folgt fast unmittelbar aus der Hölder'schen Ungleichung

[114] $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Aus [113] folgt für den Fall, wo $\{a_k\}$ nicht zu $l^{q'}$ gehört, die Existenz einer Folge $\{y_k\}$ in l^q mit $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k y_k| = \infty$ und sogar mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k = +\infty$.

Beweis von [113]: Es sei $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{q'} = \infty$; man setze $s_n = \sum_{k=1}^{n}|a_k|^{q'}$; die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^{q'}}{s_k^{\alpha}}$$

ist für $\alpha > 1$ konvergent, für $\alpha < 1$ divergent. Wählt man

$$x_k = \frac{|a_k|^{q'/q}\,\mathrm{sign}\, a_k}{s_k^{\alpha}}$$

und α gemäß $1/q < \alpha < 1$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^q = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|^{q'}}{s_k^{q\alpha}} < \infty,$$

da $q\alpha > 1$. Es sollte daher, nach Voraussetzung, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konvergieren; nun ist aber gliedweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|^{1+q'/q}}{s_k^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|^{q'}}{s_k^{\alpha}}$$

und letzte Reihe ist divergent wegen $\alpha < 1$.

Etwas tiefer liegt folgende Tatsache:

[115] *Es sei H das Produkt aller l^p, wo $p > 2$ (bzw. $p > q \geqslant 1$). Ist dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für kein $\{x_k\}$ in H gegen $+\infty$ divergent, so gibt es ein p' mit $1 < p' < 2$ (bzw. $p' < q'$), so daß $\{a_k\}$ zu $l^{p'}$ gehört.*

Beweis (für $p < 2$; für $p > q$ analog): Die Nichtexistenz des behaupteten p' impliziert eine Folge $\{p'_n\}$ mit

$$2 > p'_n > 1, \qquad \lim_{n\to\infty} p'_n = 2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{p'_n} = +\infty.$$

Auf Grund der aus [113] gefolgerten Bemerkung existiert für jedes n jetzt eine Folge $\{x_k^{(n)}\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^{(n)} = +\infty, \qquad \{x_k^{(n)}\} \in l^{p_n}, \qquad \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p'_n} = 1.$$

Wir dürfen nachträglich die Vorzeichen der $x_k^{(n)}$ so ändern, daß $a_k x_k^{(n)}$ nichtnegativ werde und die Beträge so normieren, daß die konvergenten Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}|^{p_n}$ die Summen $1/2^n$ erhalten. Jetzt bauen wir aus den $\{x_k^{(n)}\}$ eine einzige Folge $\{x_k\}$ auf. Wir setzen $n(k) = 1$ für $1 \leqslant k \leqslant k_1$, wo k_1 die kleinste natürliche Zahl ist mit

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{k_1} a_k x_k^{(1)} \geqslant 1,$$

ferner $n(k) = i+1$ für $k_i < k \leqslant k_{i+1}$, wo k_{i+1} die kleinste natürliche Zahl ist mit

$$(2) \qquad \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} a_k x_k^{(i+1)} \geqslant 1, \qquad k_{i+1} > k_i,$$

und definieren x_k als $x_k^{(n(k))}$. Es ist $\{x_k\} \in H$. Denn es sei $p > 2$; für $n > N$ ist $p_n < p$ wegen $\lim_{n\to\infty} p_n = 2$; ist dann, für $k > K$, $n(k) > N$, so hat man

$$\sum_{k=K+1}^{\infty}|x_k^{(n(k))}|^p \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty}|x_k^{(n(k))}|^{p_{n(k)}},$$

denn es ist $|x_k^{(n)}| \leqslant 1$ für alle n und k; es folgt

$$\sum_{k=K+1}^{\infty}|x_k|^p \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty}|x_k^{(n(k))}|^{p_{n(k)}} = \sum_{k=K+1}^{k_j} + \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} + \ldots \leqslant \sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{2^i} < 1,$$

also $\{x_k\} \in H$. Schreibt man jetzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^{(n(k))} = \sum_{k=1}^{k_1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} + \ldots$$

und beachtet (1) und (2), so folgt für die rechterhand stehende Reihe mit nichtnegativen Gliedern die Divergenz gegen $+\infty$, also dasselbe für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, gegen die Voraussetzung.

Summierbarkeit. Ist eine Folge $\{s_k\}$ divergent, so kann es doch vorkommen, daß ihr durch ein anderes Verfahren als das gewöhnliche „lim" eine Zahl zugeordnet werden kann als eine Art „Grenze". Wir sagen dann, die Folge sei *limitierbar* nach diesem Verfahren. Sind die s_k Teilsummen einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so heißt die Reihe *summierbar* nach diesem Verfahren.

Das wichtigste Verfahren ist dasjenige des *ersten arithmetischen Mittels*; es beruht darauf, daß man anstatt der ursprünglichen Folge $\{s_n\}$ die Folge $\{\sigma_n\}$ der Mittelwerte

[116] $$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

betrachtet und den gewöhnlichen Grenzwert dieser neuen Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, als verallgemeinerte „Grenze", der ursprünglichen Folge zuordnet. Jede konvergente Folge ist nach dem ersten arithmetischen Mittel limitierbar gegen den ursprünglichen Grenzwert, das Verfahren ist also, wie man zu sagen pflegt, *permanent*.

Selbstverständlich gibt es Folgen, die dem Verfahren des ersten arithmetischen Mittels widerstehen; dann können wir es mit Mitteln höherer Ordnung versuchen, wie sie Cesàro angegeben hat. Wir geben sie hier gleich in den für Reihen brauchbaren Formen:

Für jedes nichtnegative ganze n und jedes von $-1, -2, -3 \dots$ verschiedene r definieren wir

$$A_n^r = \binom{r+n}{n} = \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{n!} \qquad \left(\simeq \frac{n^r}{\Gamma(r+1)} \text{ für } n \to \infty\right).$$

Die zu summierende Reihe sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; wir sagen, daß sie (C, r)-*summierbar* gegen s sei, wenn die Folge $\{\sigma_n^{(r)}\}$

[117] $$\sigma_n^{(r)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r a_k}{A_n^r}$$

für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert s strebt. Für $r = 0$ erhalten wir die gewöhnliche Konvergenz, für $r = 1$ die Summierbarkeit mit dem ersten arithmetischen Mittel. Jedes (C, r)-Verfahren ist permanent; s kann als verallgemeinerte „Reihensumme" gelten.

Ist $r_1 > r$, so ist auch (C, r_1) *stärker* als (C, r), d. h. eine (C, r)-summierbare Reihe ist (C, r_1)-summierbar; die Verfahren sind miteinander *konsistent*, d. h. die beiden verallgemeinerten Reihensummen gleichen einander. Permanent, stärker als alle (C, r) und mit ihnen konsistent ist das Poisson'sche (Abel'sche) Verfahren (= Summationsmethode), welches der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ den Grenzwert

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ 0\leq x<1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$$ [118]

als „Summe" zuordnet, falls er vorhanden ist.

Toeplitz'sche Summations-(Limitierungs-)Methoden.

$$B = \| b_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2 \dots)$$

sei eine unendliche Matrix; ist $\{s_k\}$ die zu limitierende Folge, so bilde man

$$B_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} s_k \qquad (i = 1, 2 \dots);$$

ist nun B_i für jedes i vorhanden und $\lim\limits_{i\to\infty} B_i = s$ desgleichen, so heißt $\{s_k\}$ B-limitierbar gegen s. B ist also ein Limitierungs-(Summations-)Verfahren (Methode). Ein solches Verfahren heißt *zeilenfinit*, wenn jede Zeile von B nur endlich viele von Null verschiedene Elemente enthält.

Damit ein Verfahren permanent sei, ist es notwendig und hinreichend, daß [119]

$$1^0 \quad \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} = 1,$$

$$2^0 \quad \lim_{i\to\infty} b_{ik} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

$$3^0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{ik}| < M \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

sei, wo die Konvergenz der Reihen 1^0 *und* 3^0 *zu dem Inhalt der Bedingungen gehört und* M *von* i *frei ist.*

Nur solchen Verfahren werden wir den Namen „Toeplitz'sche Summationsmethoden" beilegen.

Die Cesàro'schen Mittel sind leicht als Toeplitz'sche Methoden zu erkennen. Um das Poisson'sche Verfahren zu einer solchen

Methode zu machen, genügt es den kontinuierlich gegen 1 strebenden Parameter x durch eine Folge $\{x_i\}$ mit $|x_i| < 1$, $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 1$ zu ersetzen. (Wenn man für die so erhaltene Matrix B die drei Eigenschaften $1^0\ 2^0\ 3^0$ verifiziert, so erhält man einen Beweis für den Abel'schen Satz über Potenzreihen). Näheres über Reihen findet man in dem Buche von Knopp.

Zum Schluß dieses § wollen wir noch zwei übliche Symbole erklären: Sind $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ zwei Folgen, so bedeutet $x_n = O(y_n)$ so viel als $|x_n| \leqslant K|y_n|$ mit einem n-freien K, $x_n = o(y_n)$ so viel als $|x_n| \leqslant k_n|y_n|$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$.

§ 2. Einiges über Funktionen und Integrale.

Wir setzen die Kenntnis der wichtigsten Sätze der reellen Funktionentheorie und der Lebesgue'schen Integrationstheorie voraus; letztere ist mehrmals behandelt worden (vgl. z. B. das in dieser Sammlung erschienene Buch von S. Saks). Wir wollen jedoch einiges der Aufmerksamkeit des Lesers empfehlen.

[121] Zwei Lusin'sche Sätze. *Jede in $\langle 0,1\rangle$ erklärte, meßbare und fast überall (d. h. mit Ausschluß einer Nullmenge) endliche Funktion ist auf einer abgeschlossenen Menge stetig, die so gewählt werden kann, daß die Komplementärmenge dem Maße nach kleiner ist als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$.*

Daraus folgt (da jede Menge in eine perfekte und höchstens abzählbare zerlegt werden kann, das Produkt aber von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen ist):

Ist $\{f_n(t)\}$ eine Folge von in $\langle 0,1\rangle$ erklärten, daselbst meßbaren und fast überall endlichen Funktionen, so gibt es eine perfekte t-Menge D, vom positiven Maß, auf welcher alle $f_n(t)$ stetig sind.

[122] Der Weierstraß'sche Satz. Eine jede stetige Funktion läßt sich im endlichen abgeschlossenen Intervall durch ein Polynom beliebig genau approximieren. M. a. W.: *Ist $f(t)$ in $\langle a,b\rangle$ stetig und ist ε positiv, so gibt es ein natürliches n und ein Polynom $P_n(t)$ vom Grade n von der Eigenschaft*

$$|f(t) - P_n(t)| < \varepsilon$$

in $\langle a,b\rangle$. S. Bernstein beweist diesen Satz, indem er die in $\langle 0,1\rangle$ gleichmäßig geltende Grenzwertformel

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) t^p (1-t)^{n-p} = f(t) \tag{3}$$

aufstellt; da eine in $\langle a,b\rangle$ stetige Funktion $f(t)$ durch die Substitution $\tau = \dfrac{t-a}{b-a}$ in eine in $\langle 0,1\rangle$ erklärte und stetige Funktion von τ übergeht, so genügt es die Formel (3) zu begründen. Diese Formel entspricht folgendem Spiel: Man teilt das Intervall $\langle 0,1\rangle$ in den linken Teil $\langle 0,t\rangle$ und den rechten $\langle t,1\rangle$ und man wählt n-mal blindlings einen Punkt aus $\langle 0,1\rangle$. Trifft man dabei p-mal ins linke Intervall, so soll der Gewinn $f(p/n)$ betragen. Die unter dem lim-Zeichen stehende Summe (3) ist die mathematische Hoffnung eines solchen Spiels und es ist plausibel, daß sie für großes n gegen $f(t)$ strebt, denn der Erwartungswert des Bruches p/n ist nahe an t; genauer gesagt, sind Werte dieses Bruches, die von t um mehr als $1/\sqrt[3]{n}$ abweichen, insgesamt wenig wahrscheinlich. Streng ist folgender Landau'sche

Beweis von (3): Man setze $\binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p} = r_p$; es ist

$$\sum_{p=0}^{n} r_p = (t + (1-t))^n = 1,$$

$$\sum_{p=0}^{n} p r_p = \sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p} = nt \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} t^q (1-t)^{n-1-q} = nt,$$

$$\sum_{p=0}^{n} p(p-1) r_p = \sum_{p=0}^{n} p(p-1) \binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p}$$

$$= n(n-1)\, t^2 \sum_{q=0}^{n-2} \binom{n-2}{q} t^q (1-t)^{n-2-q} = n(n-1)\, t^2,$$

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nt)^2 r_p = \sum_{p=0}^{n} (n^2t^2 - (2nt-1)\, p + p(p-1))\, r_p$$

$$= n^2t^2 - (2nt-1)\, nt + n(n-1)\, t^2 = nt(1-t).$$

Es sei $|f(t)| \leqslant M$ in $\langle 0,1\rangle$; es sei $\delta > 0$ und $\varepsilon(\delta) > 0$ und so, daß für $|t' - t''| \leqslant \varepsilon$

$$|f(t') - f(t'')| < \frac{\delta}{2} \qquad (t', t'' \in \langle 0,1\rangle)$$

sei. Dann ist für $n > 1$ und $> \dfrac{M}{\delta\varepsilon^2}$

$$\left|f(t)-\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) r_p\right| = \left|\sum_{p=0}^{n}\left(f(t)-f\left(\frac{p}{n}\right)\right) r_p\right| = \sum_{|p-nt|\leqslant \varepsilon n} + \sum_{|p-nt|>\varepsilon n}$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2}\sum_{p=0}^{n} r_p + 2M\sum_{|p-nt|>\varepsilon n}^{n} r_p \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{2M}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nt)^2 r_p = \frac{\delta}{2} + \frac{2Mt(1-t)}{\varepsilon^2 n}$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{M}{2\varepsilon^2 n} < \delta, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Konvergenz von Funktionenfolgen.

[123] **Der Egoroff'sche Satz.** *$\{f_k(t)\}$ sei eine Folge von in $<a, b>$ meßbar erklärten Funktionen, daselbst fast überall konvergent. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge E in $<a, b>$, deren Maß $|E|$ die Zahl $b-a-\varepsilon$ übertrifft, und so, daß $\{f_k(t)\}$ in E gleichmäßig konvergiert.*

Bekanntlich kann eine Folge von meßbaren Funktionen, deren Beträge sämtlich unter einer integrierbaren Schranke liegen, unter dem lim-Zeichen integriert werden: war die Folge fast überall konvergent (im endlichen Intervall), so konvergieren die Integrale. Unter zusätzlichen Bedingungen gilt eine Art Umkehrung jenes Satzes, die uns die Konvergenz der Funktionenfolge sichert:

Sind sämtliche $f_k(t)$ integrierbar, $f_k(t) \leqslant f_{k+1}(t)$ fast überall in $<a, b>$, und

$$\int_a^b f_k(t)\,dt \leqslant C \tag{k}$$

(wo C k-frei), so existiert $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t)$ fast überall in $<a, b>$.

Dieser Satz wird oft in der Form gebraucht:

[124] *Sind die Funktionen $g_k(t) \geqslant 0$ und*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b g_k(t)\,dt < \infty,$$

so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(t)$ fast überall konvergent.

[125] *Ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ fast überall in $<a, b>$, so ist*

$$\liminf_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t)|^p\,dt \geqslant \int_a^b |f(t)|^p\,dt \qquad (p>0).$$

(Dieser Satz ist auch gültig, wenn die Integrale links *nicht* existieren, denn dann verlangt die Ungleichung nichts ($\infty \geqslant \ldots$ ist stets richtig); wenn sie aber existieren und die linke Seite endlich ist, so ist die Endlichkeit der rechten ein Teil der Behauptung).

Beweis: Nach [123] ist in E für $n > N$

$$|f_n(t)|^p \geqslant |f(t)|^p - \varepsilon,$$

da ja $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(t)|^p = |f(t)|^p$ f. ü.; es folgt

$$\int_a^b |f_n(t)|^p\,dt \geqslant \int_E |f_n(t)|^p\,dt \geqslant \int_E |f(t)|^p\,dt - \varepsilon(b-a).$$

Dabei ist $|E|$ von $b-a$ beliebig wenig verschieden; mit $|E| \to b-a$ strebt aber $\int_E |f(t)|^p\,dt$ gegen $\int_a^b |f(t)|^p\,dt$, was

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t)|^p\,dt \geqslant \int_a^b |f(t)|^p\,dt - \varepsilon(b-a)$$

und — da ε beliebig — die Behauptung [125] zur Folge hat.

Unter der Voraussetzung des Satzes [125] folgt $\int_E |f(t)|^p\,dt \leqslant A$ aus $\int_E |f_n(t)|^p\,dt < A$; (diese Eigenschaft enthält aber ihrerseits die Behauptung jenes Satzes). Diese Bemerkung führt zum folgenden Ergebnis:

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ fast überall und existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein [126] *n- und E-freies (wohl aber von $|E|$ abhängiges) $\eta(\varepsilon) > 0$, so daß*

$$\int_E |f_n(t)|^p\,dt < \varepsilon$$

für alle n gilt, sobald nur $|E| < \eta$, so ist

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(t)-f_n(t)|^p\,dt = 0.$$

Denn sei $|E| < \eta$ und E so, daß ([123]) $\{f_n(t)\}$ in CE (= Komplementärmenge von E) gleichmäßig konvergiere; dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_{CE} |f(t)-f_n(t)|^p\,dt = 0$$

und, wegen $|\alpha+\beta|^p \leqslant 2^p(|\alpha|^p+|\beta|^p)$,

$$\int_E |f(t)-f_n(t)|^p\, dt \leqslant 2^p\left(\int_E |f(t)|^p\, dt+\int_E |f_n(t)|^p\, dt\right)\leqslant 2^p\cdot 2\varepsilon;$$

durch Addition folgt das Behauptete.

Schwarz'sche und Hölder-Riesz'sche Ungleichung. Mit L^p $(p\geqslant 1)$ werde die Klasse aller in $\langle a, b\rangle$ erklärten, meßbaren und mit p-ter Potenz des Betrages integrierbaren Funktionen bezeichnet. L^1 soll auch als L geschrieben werden dürfen. Ähnlich wie bei Folgen, spielt der zu p konjugierte Exponent p' eine wichtige Rolle; es ist $1/p+1/p'=1$; für $p=2$ kommt $p'=2$, für $p>2$ wird $p'<2$ und umgekehrt.

[127] *Ist $f(t)\in L^p$, $g(t)\in L^{p'}$, so ist $f(t)\,g(t)\in L$ und*

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_a^b |g(t)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Dieses ist das F. Riesz'sche Analogon zur Hölder'schen Ungleichung für Summen. Für $p=2$ wird daraus die Schwarz'sche Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt\,.\int_a^b g^2(t)\,dt}\,.$$

[128] *Liegen beide Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ in L^p, so gilt die Minkowski'sche Ungleichung*

$$\left|\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right|^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Der (von F. Riesz vereinfachte) Beweis für [127] verläuft wie folgt:

Für $x\geqslant 0$ hat die Funktion $1/p\, x^p+1/p'-x$ ihr Minimum bei $x=1$. Dieses Minimum ist 0, also gilt

$$x\leqslant \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{p'} \qquad (x\geqslant 0).$$

Setzt man $x=|\alpha|.|\beta|^{-\frac{1}{p-1}}$, so kommt (nach Multiplikation mit $|\beta|^{p'}$)

$$|\alpha\beta|\leqslant \frac{1}{p}|\alpha|^p+\frac{1}{p'}|\beta|^{p'};$$

hier substituiere man

$$\alpha=f(t)/A, \qquad \beta=g(t)/B,$$

wo A und B zur Abkürzung für die beiden Faktoren rechts in [127] geschrieben wurde, und integriere nach t von a bis b; man erhält [127] (sogar verstärkt).

Beweis von [128]: Es genügt ihn für $f(t)\geqslant 0$, $g(t)\geqslant 0$ zu führen. Dann ist aber

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt=\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}f(t)\,dt+\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}g(t)\,dt.$$

Wendet man hier für jeden Term rechts [127] an, so kommt

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\leqslant\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}.\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}.\left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dividiert man durch den rechts sichtbaren gemeinsamen Faktor, so erhält man [128]. —

Eine Art Umkehrung von [127] ist der

Satz: *Existiert $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ für jedes g in $L^p(p>1)$, so gehört f zu $L^{p'}$.* Inhalt und Beweis erinnert an [113]. Wäre $\int_a^b |f(t)|^{p'}\,dt=\infty$, und bezeichnete E_n die durch $|f(t)|\leqslant n$ erklärte t-Menge, so wäre die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_{E_n-E_{n-1}}|f(t)|^{p'}\,dt}{\left(\int_{E_n}|f(t)|^{p'}\,dt\right)^{\alpha}}$$

konvergent für $\alpha>1$, divergent für $0<\alpha\leqslant 1$. Setzte man jetzt

$$g(t) = \frac{|f(t)|^{\frac{p'}{p}} \operatorname{sign} f(t)}{\left(\int\limits_{E_n} |f(t)|^{p'}\, dt\right)^{\alpha}}$$ für $t \in E_n - E_{n-1}$ und 0 für $t \in E_0$, so wäre

für $1/p < \alpha < 1$

$$\int_a^b |g(t)|^p\, dt < \infty, \qquad \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int\limits_{E_n - E_{n-1}} |f(t)|^{p'}\, dt}{\left(\int\limits_{E_n} |f(t)|^{p'}\, dt\right)^{\alpha}} = \infty,$$

gegen die Voraussetzung.

Ähnlich beweist man denselben Satz im Grenzfalle $p=1$, nur hat man dann $L^{p'}(p' = \infty)$ als die Klasse der f. ü. beschränkten Funktionen zu deuten. Der andere Grenzfall: $p = \infty$, $p' = 1$ liefert bei derselben Lesart auch einen richtigen Satz. Auch das Analogon zu [115] ist richtig. —

[129] *Gehört $f(t)$ zu L^p und bezeichnet man*

$$k \int_t^{t+1/k} f(u)\, du \qquad (f(u) \equiv 0 \quad \text{für } u > b)$$

mit $f_k(t)$, so gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b |f(t) - f_k(t)|^p\, dt = 0 \qquad (p \geqq 1).$$

Sei zunächst $f(t)$ beschränkt, $|f(t)| \leqq M$; nach einem bekannten Satze hat die Funktion $\int\limits_a^t f(u)\, du$ fast überall $f(t)$ zur Ableitung, somit ist $\{f_k(t)\}$ f. ü. gegen $f(t)$ konvergent. Nach dem Egoroff'schen Satze [123] ist also gleichmäßig $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(t) = f(t)$ für $t \in E$, $|E| \geqq [b-a] - \varepsilon$. In CE ist aber $|f(t)|$ und $|f_k(t)|$ (wie überall) nicht größer als M und daher ist

$$\limsup_{k \to \infty} \int_a^b |f(t) - f_k(t)|^p\, dt \leqq 2^p M^p \varepsilon.$$

Jetzt werden wir einen Satz (von Fubini) über Doppelintegrale brauchen (dessen Beweis im Saks'schen Buche nachgelesen werden kann). Er lautet: *Hat $\varphi(x, y)$ im Rechteck $\langle 0, a \rangle \langle 0, b \rangle = R$ ein Doppelintegral, so existieren die Integrale*

$$\int_0^a \varphi(x, y)\, dx, \qquad \int_0^b \varphi(x, y)\, dy$$

für fast alle y, bzw. fast alle x, sind integrierbar und es ist

$$(4) \qquad \int_0^a dx \int_0^b \varphi(x, y)\, dy = \int_0^b dy \int_0^a \varphi(x, y)\, dx = \iint_R \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Jetzt kehren wir zu [129] zurück. Es sei $f(t)$ nicht beschränkt; ist dann $g^{(M)}(t) = f(t)$, wenn $|f(t)| \leqq M$ und $g^{(M)}(t) = 0$ für sonstige t, so ist (nach Weglassung des Index M in einigen Formeln und Einführung eines zu f_k analogen g_k), $\lim\limits_{M \to \infty} \int\limits_a^b |f(t) - g^{(M)}(t)|\, dt = 0$, also $\int\limits_a^b |f(t) - g(t)|\, dt < \varepsilon$ für große M. Nun ist

$$\int_a^b |f(t) - f_k(t)|\, dt \leqq \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt + \int_a^b |g(t) - f_k(t)|\, dt$$

$$\leqq \varepsilon + \int_a^b |g - g_k|\, dt + \int_a^b |f_k - g_k|\, dt.$$

Für $k \to \infty$ strebt das vorletzte Integral gegen Null, da $g(t)$ beschränkt ist (wie f früher). Das letzte Integral ist aber

$$\int_a^b \left| k \int_t^{t+1/k} (g(u) - f(u))\, du \right| dt \leqq k \int_a^b dt \int_t^{t+1/k} |g(u) - f(u)|\, du$$

$$= k \int_a^b du \,.\, |g(u) - f(u)| \int_a^b \psi(u, t)\, dt,$$

wobei der Fubini'sche Satz (4) zur Anwendung kommt; ψ ist 1 für $t \leqq u \leqq t + 1/k$, sonst 0; es folgt

$$\int_a^b |f_k - g_k|\, dt \leqq k \,.\, \int_a^b du \,.\, |f(u) - g(u)| \int_{u-1/k}^{u} dt < \varepsilon.$$

Damit ist [129] für $p=1$ bewiesen; für $p > 1$ ist der Beweis ähnlich.

Dieser Satz zeigt, daß jede Funktion in L^p eine „durchschnittliche“ Grenze von stetigen Funktionen ist. Daraus leitet man einen Satz ab, der Treppenfunktionen an Stelle von stetigen Funktionen verwendet. Treppenfunktionen sind streckenweise konstante Funktionen; dabei ist die Anzahl der Strecken, in welche $<a, b>$ zerlegt wird, beliebig aber endlich. Ist die Teilung so fein, daß die Schwankung von $f_k(t)$ auf jeder Strecke kleiner als ε ist, und wählt man als Wert der Treppenfunktion (z. B.) den Wert von $f_k(t)$ im Mittelpunkt der Strecke, so ist die Treppenfunktion in ganz $<a, b>$ von $f_k(t)$ um weniger als ε verschieden, was unsere Bemerkung rechtfertigt.

Teilt man das Intervall in eine endliche Anzahl von Strecken und ersetzt $f(t)$ auf jeder Strecke $<\alpha, \beta>$ durch den Mittelwert $\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$, so erhält man eine Treppenfunktion, die mit immer feiner werdenden Teilung gegen $f(t)$ nicht nur f. ü., sondern auch im Sinne von [129] strebt.

§ 3. **Abstrakte Räume.**

Nur einige wichtige Begriffe und Sätze über abstrakte Räume sollen hier besprochen werden. Genaueres findet man in dem Banach'schen Buche dieser Sammlung.

Eine nichtleere Menge E nennen wir einen *metrischen Raum*, wenn jedem Elementenpaar x, y von E eine nichtnegative Zahl (x, y) zugeordnet ist unter Beachtung der Bedingungen:

1⁰ $(x, x) = 0, \quad (x, y) > 0$ für $x \neq y$,

2⁰ $(x, y) = (y, x)$,

3⁰ $(x, z) \leqslant (x, y) + (y, z)$.

Diese Zahl nennt man *Distanz* von x und y. Eine Folge $\{x_n\}$ von E-Elementen heißt *konvergent*, wenn $\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_p, x_q) = 0$; sie heißt *konvergent gegen* x_∞, wenn $\lim\limits_{p\to\infty}(x_p, x_\infty) = 0$ gilt; x_∞ heißt dann *Grenze* der Folge und man schreibt $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x_\infty$ (Synonyma kommen auch vor, wie in der Theorie der Zahlenfolgen). Hat jede konvergente Folge einen Grenzwert (Cauchy'sches Postulat), so heißt E *komplett*.

Beispiele kompletter Räume.

1. Die Menge L der in $<a, b>$ integrierbaren Funktionen, metrisiert durch die Festsetzung

$$(x, y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\,dt,$$

wobei $x = y$ mit „$x(t) = y(t)$ f. ü. in $<a, b>$" gleichbedeutend sein soll.

2. Allgemeiner: Die Menge L^p der in $<a, b>$ mit der p-ten Potenz des Betrages integrierbaren Funktionen mit der Metrik

$$(x, y) = \left(\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geqslant 1)$$ [131]

(und $x = y$ wie oben). Die *Komplettheit* dieser Räume ist folgendermaßen zu beweisen:

Es sei

$$\lim_{r,s\to\infty}\int\limits_a^b |x_r(t) - x_s(t)|^p\,dt = 0 \qquad (p \geqslant 1). \tag{5}$$

Es werde eine Folge $\{n_k\}$ von wachsenden Indizes bestimmt mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty; \tag{6}$$

nach [127] ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\,dt$ konvergent; wegen [124] ist es auch die Reihe

$$x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$$

fast überall, und ihre Summe $x_\infty(t)$ gehört zu L^p nach [125]. Daraus folgt aber

$$\lim_{k\to\infty}(x_\infty, x_{n_k}) = 0. \tag{7}$$

Denn (5) erlaubt r so zu bestimmen, daß für $s > r$

$$\left(\int\limits_a^b |x_r(t) - x_s(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sei; bestimmt man dann η so, daß man für $|E| < \eta$

$$\left(\int\limits_E |x_r(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

habe, so liefert [128] für alle $s > r$

$$\left(\int_E |x_s(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

sobald nur $|E| < \eta$ ist. Setzt man $s = n_k$ $(n_k > r)$, beachtet $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}(t) = x_\infty(t)$ f. ü. und zieht [126] heran, so folgt (7). Daraus aber in Verbindung mit (5) ergibt sich bereits $\lim\limits_{q\to\infty}(x_\infty, x_q) = 0$, wobei nochmals die Minkowski'sche Ungleichung [128] angewendet wird.

3. Die Menge M der wesentlich beschränkten Funktionen, d. h. solcher $x(t)$, für welche $|x(t)| \leqslant c$ f. ü. gilt, mit der Metrik $(x, y) =$ wesentliche obere Grenze von $|x(t) - g(t)|$ in $\langle a, b\rangle$.

4. Die Menge C aller in $\langle a, b\rangle$ stetigen Funktionen; $(x, y) = \max |x(t) - y(t)|$. Dieser Raum ist komplett, denn eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen hat einen stetigen Grenzwert.

5. Sei $p(t)$ für $t \geqslant 0$ erklärt, $p(0) = 0$, rechtsseitig stetig, wachsend und unbeschränkt. Man setze

$$\varphi(u) = \int_0^u p(t)\, dt \quad \textit{für} \quad u \geqslant 0, \qquad \varphi(-u) = \varphi(u).$$

Ist $p^{-1}(t)$ die zu $p(t)$ inverse Funktion, so sei

$$\psi(u) = \int_0^u p^{-1}(t)\, dt \quad \textit{für} \quad u \geqslant 0, \qquad \psi(-u) = \psi(u).$$

Dann ist

$$uv \leqslant \varphi(u) + \psi(v).$$

L_φ sei die Menge der Funktionen $f(t)$ mit endlichem $\int_a^b \varphi(f(t))\, dt$. Gibt es eine Konstante k mit

$$\varphi(2u) \leqslant k\varphi(u)$$

für große u, so ist L_φ ein metrischer kompletter Raum, wenn $(x, y) = \underset{h}{\text{obere Grenze}} \left|\int_a^b (x(t) - y(t))\, h(t)\, dt\right|$, wo $h(t)$ der Bedingung $\int_a^b \psi(h(t))\, dt \leqslant 1$ unterworfen ist.

Die Räume L^p $(p > 1)$ erhält man, wenn man $p(t) = pt^{p-1}$ wählt $(t > 0)$; dann ist $\varphi(u) = |u|^p$; die neue Distanz ist die alte, bis auf einen (nur von p abhängigen) Faktor.

6. Die uns bekannte Menge l^p aller Folgen $\{\xi_n\}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$ $(p > 1)$ ist metrisch und komplett, wenn die Distanz (x, y) für $x = \{\xi_n\}$, $y = \{\eta_n\}$ durch

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

gegeben wird. (Wir lassen auch $p = 1$ zu und schreiben $l^1 = l$).

Ist eine Menge A in einem metrischen Raum E enthalten, so heißt der Punkt x_∞ von E ein *Häufungspunkt* von A, wenn es in A eine Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq x_\infty$ (n) und mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ gibt. Die Menge aller solcher x_∞ heißt die *Derivierte* von A und wird mit A' bezeichnet.

A heißt *geschlossen*, wenn $A' \subset A$; A heißt *offen*, wenn [132] $E - A$ geschlossen ist; A heißt *insichdicht*, wenn $A' \supset A$, *überalldicht*, wenn $A + A' = E$, *nirgendsdicht*, wenn $A + A'$ keine Kugel enthält; eine *Kugel* ist die Menge aller x mit

$$(x, x_0) \leqslant \rho \qquad (\rho > 0),$$

und x_0 ist der *Mittelpunkt*, ρ der *Radius* der Kugel.

Eine Summe von abzählbar-unendlichvielen, nirgendsdichten Mengen heißt *von der ersten Kategorie*; sonst ist eine Menge *von* [133] *der zweiten Kategorie.*

Ein kompletter metrischer Raum ist stets von der zweiten Ka- [134] *tegorie* (Hausdorff).

Eine nichtleere Menge E heißt ein *vektorieller Raum*, wenn [135] die Addition je zweier Elemente und die Multiplikation mit einer reellen Zahl stets ausführbar ist unter Wahrung der bekannten Regeln (Eindeutigkeit, Kommutativität, Assoziativität und Distributivität).

Ist ein Raum metrisch, vektoriell und komplett, und erfüllt [136] er außerdem die Bedingungen

$$\begin{array}{lll} 1^0 & (x, y) = (x - y, \Theta), & \\ 2^0 & \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \quad \text{impliziert} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n x = \Theta & (x), \\ 3^0 & \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta \quad \text{impliziert} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \rho\, x_n = \Theta & (\rho), \end{array}$$

so heißt er *vom Typus F.*

Dabei ist Θ das Nullelement der Addition, $-y$ bedeutet $(-1).y$, $x-y$ bedeutet $x+(-y)$, kleine griechische Buchstaben bedeuten reelle Zahlen.

[137] Man sagt, ein vektorieller Raum E sei *normiert* worden, wenn jedem Element $x \in E$ eine reelle Zahl $\|x\|$, die *Norm* von x, zugeordnet wurde und wenn dabei folgende Postulate erfüllt wurden:

$1^0 \quad \|x\| > 0$ für $x \neq \Theta, \quad \|\Theta\| = 0,$

$2^0 \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$

$3^0 \quad \|\rho x\| = |\rho| \cdot \|x\|.$

In diesem Falle kann man den Raum E metrisieren, indem man
[138] $(x, y) = \|x-y\|$ setzt. *Ist E außerdem komplett, so heißt er vom Typus B.* Es ist leicht zu sehen, daß er dann auch vom Typus F ist.

Unsere Beispiele 1 bis 6 liefern Räume vom Typus B. Um zu sehen, wie in jedem Fall die Norm zu berechnen ist, bemerken wir, daß in 1, 2, 3, 5 die fast überall verschwindende Funktion das Nullelement vorstellt; in 4 tut es die identische Null und in 6 die Folge $\{0\}$. Damit ist bereits $\|x\|$ als $= (x, \Theta)$ gegeben.

[139] Ein Raum heißt *separabel*, wenn er eine überalldichte abzählbare Teilmenge enthält. Die Räume L^p und C (z. B.) sind separabel.

§ 4. **Operationen und Funktionale.**

E und E_1 seien nichtleere Mengen. Jedem Element x aus E werde ein bestimmtes Element $U(x)$ aus E_1 zugeordnet. Damit ist
[141] in E eine *Operation* (U) erklärt worden. Sind die Elemente von E_1 Zahlen, so heißt die Operation ein *Funktional*. Sind beide Men-
[142] gen, E und E_1, metrische Räume, so heißt $U(x)$ in x_∞ *stetig*, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ $(x_n \in E)$ stets $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_\infty)$ zur Folge hat.

Ist eine Folge $\{U_n\}$ von Operationen gegeben, deren Werte $U_n(x)$ zum metrischen Raum E_1 gehören, ebenso wie die Werte von
[143] $U_\infty(x)$, so heißt $\{U_n\}$ *konvergent* gegen U_∞ in x_0, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x_0) = U_\infty(x_0)$ gilt. Sind E und E_1 vektoriell, so nennt man eine Operation $U(x)$ *additiv*, wenn

$$U(x+y) = U(x) + U(y) \qquad (x, y \in E),$$

homogen, wenn

$$U(\tau x) = \tau U(x) \qquad (x \in E, \ \tau \text{ reell}).$$

Ist sowohl E als E_1 vektoriell und metrisch, so heißt $U(x)$ *linear*, wenn sie additiv und stetig ist; die Homogenität ergibt sich [144]
von selbst.

Sehr wichtig ist der Banach'sche Satz: *Ist $U(x)$ additiv und* [145]
impliziert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = y_\infty$ die Gleichheit $y_\infty = U(x_\infty)$, so ist $U(x)$ linear (vgl. das Banach'sche Buch dieser Sammlung).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine in einem B-Raum erklärte additive Operation $U(x)$ linear sei, ist die Existenz einer reellen Zahl $\rho > 0$ mit

$$(8) \qquad \|U(x)\| \leqslant \rho \,.\, \|x\| \qquad (x).$$

Die kleinste Zahl ρ in (8) heißt die *Norm der Operation* $U(x)$; [146]
ist sie μ, so schreibt man

$$\|U\| = \mu.$$

Die linearen Funktionale Φ in den B-Räumen 1, 2, 4 des § 3 [147]
lassen eine kanonische Darstellung zu:

in L ist $\quad \Phi(x) = \int\limits_a^b x(\tau)\, h(\tau)\, d\tau, \quad h \in M, \qquad \|\Phi\| = \|h\|_M;$

in $L^p (p > 1)$ ist $\quad \Phi(x) = \int\limits_a^b x(\tau)\, h(\tau)\, d\tau, \quad h \in L^{p'}, \qquad \|\Phi\| = \|h\|_{L^{p'}};$

in C ist $\quad \Phi(x) = \int\limits_a^b x(\tau)\, dg, \quad g(\tau) \in V, \qquad \|\Phi\| = \int\limits_a^b |dg|.$

Dabei ist M bereits früher (§ 3, 3.) erklärt worden; nach unseren früheren Festsetzungen ist $\|h\|_M$ = wesentliche obere Grenze von $|h(\tau)|$ in $<a, b>$, $\|h\|_{L^{p'}} = \left(\int\limits_a^b |h(\tau)|^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}$; V ist ein neuer Raum: die Menge aller Funktionen $g(\tau)$ von beschränkter Schwankung in $<a, b>$.

Die Gestalt eines linearen Funktionals in M ist nicht mehr so einfach.

§ 5. **Resonanztheoreme.**

Mit diesem Namen umfassen wir eine Klasse von Sätzen, wo aus der Unbeschränktheit einer Folge die Unbeschränktheit einer anderen Folge abgeleitet wird; dabei wird aber ein variabler Bestandteil der ersten Folge durch einen fixen ersetzt. Der Satz [113] über Reihen ist ein Beispiel für dieses Prinzip; analoge Sätze über Integrale gehören auch hierher. Ihre gemeinsame Quelle ist folgendes Theorem:

[151] *$\{F_n(x)\}$ sei eine Folge von linearen Operationen, sämtlich in einem Raum E vom Typus B erklärt; der Gegenraum E_1 sei auch vom Typus B. Es bezeichne μ_n die Norm $\|F_n\|$ der Operation $F_n(x)$* (nach [146]), (die mit der Norm $\|F_n(x)\|$ des Gegenelementes $y_n = F_n(x)$ in E_1 nicht zu verwechseln ist). *Ist dann $F \subset E$ von der zweiten Kategorie* (vgl. [133]) *und*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|F_n(x)\| < \infty$$

für jedes x in F, so ist $\{\mu_n\}$ beschränkt.

Dieses Theorem läßt sich auch so wenden: *Gibt es eine Folge $\{x_n\}$ mit $\|x_n\| \leqslant 1$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|F_n(x_n)\| = \infty$, so ist die Menge X jener x, für welche $\{\|F_n(x)\|\}$ beschränkt ist, von der ersten Kategorie in E.* In dieser Gestalt ist der Resonanzcharakter des Theorems sichtbar, denn das variable x_n läßt sich durch ein fixes x so ersetzen, daß die Divergenz $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|F_n(\ldots)\| = \infty$ erhalten bleibt: und zwar ist das gesuchte x der Komplementärmenge $E - X$ zu entnehmen, die nach [134] niemals leer ist.

Beweis von [151] in zweiter Form: Schreibt man

$$X = F_1 + F_2 + \ldots,$$

wo F_i durch „$\|F_n(x)\| \leqslant i$ für alle n" erklärt ist, so ist F_i geschlossen, da alle $F_n(x)$ stetig sind. Wäre X von der zweiten Kategorie in E, so gäbe es ein F_i (wenigstens), welches nicht nirgendsdicht wäre; so ein F_i muß in einer gewissen Kugel K überalldicht sein und, da es geschlossen ist, diese Kugel enthalten. Ist nun x_0 der Mittelpunkt und ρ der Radius von K, so ist für $x = u - x_0$, $\|x\| \leqslant \rho$, u in K enthalten. Dann ist aber $\|F_n(x)\| \leqslant \|F_n(u)\| + \|F_n(x_0)\| \leqslant 2i$ für $\|x\| \leqslant \rho$. Nun war aber $\|x_n\| \leqslant 1$, also $\|\rho x_n\| \leqslant \rho$, was mit dem eben Bewiesenen

$$\|F_n(x_n)\| \leqslant \frac{2i}{\rho} \tag{n}$$

zur Folge hat, gegen die Voraussetzung.

Spezialfälle des Resonanztheorems [151] sind:

1^0 *Ist* $\limsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_\alpha^\beta |f_n(\tau)|^p d\tau = \infty$ $(p > 1)$, *so gibt es ein $g(\tau)$ in $L^{p'}$ mit* [152]

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(\tau)\, g(\tau)\, d\tau = +\infty. \tag{9}$$

2^0 *Ist* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ (wes. ob. Grenze von $|f_n(\tau)|$) $= \infty$, *so gibt es ein $g(\tau) \in L$ mit* (9). [153]

3^0 *Ist* $\limsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_\alpha^\beta |f_n(\tau)|\, d\tau = \infty$, *so gibt es ein $g(\tau) \in C$ mit* (9). [154]

In allen drei Fällen ist nämlich $F_n(x) = \int\limits_\alpha^\beta f_n(\tau)\, x(\tau)\, d\tau$ als die in $L^{p'}$, L, bzw. C erklärte lineare Operation (Funktional) zu wählen und als x_n die Funktion

$$1^0 \quad |f_n(\tau)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} f_n(\tau) : \left(\int_\alpha^\beta |f_n(\tau)|^p\, d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta),$$

2^0 $\operatorname{sign} f_n(\tau) \cdot \dfrac{1}{|W_n|}$ für $\tau \in W_n$, sonst 0; dabei ist W_n die τ-Menge, wo $|f_n(\tau)|$ die Hälfte seiner wesentlichen oberen Grenze übertrifft,

3^0 eine stetige Funktion, die $\operatorname{sign} f_n(\tau)$ im Sinne von [129] genügend nahe approximiert.

Man wird in allen drei Fällen $\limsup\limits_{n\to\infty} |F_n(x_n)| = \infty$ erzielen und nicht nur die Existenz eines $g(\tau)$ der Behauptung (9) sondern—nach [151]—die Existenz einer g-Menge von der zweiten Kategorie, deren jedes Element $g(\tau)$ die Eigenschaft (9) aufweist, dartun.

Ein Lemma. *Eine im Quadrat $<\alpha, \beta> <\alpha, \beta>$ erklärte Funktion $f(\tau, \omega)$ sei daselbst integrierbar und die Funktion $h(\tau) = \int\limits_\alpha^\beta |f(\tau, \omega)|\, d\omega$ habe eine wesentliche obere Grenze $w < \infty$; ist $\varepsilon > 0$, so gibt es dann eine stetige Funktion $g(\omega)$ mit*

$$|g(\omega)| \leqslant 1, \qquad \text{wes. ob. Grenze von}_{\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta} \int_\alpha^\beta f(\tau, \omega)\, g(\omega)\, d\omega > w - \varepsilon.$$

Beweis: Sei $\varepsilon_0 > 0$ und — gegen die Behauptung —

$$\text{w. o. G.} \left| \int_\alpha^\beta f(\tau, \omega)\, g(\omega)\, d\omega \right| \leqslant (w - \varepsilon_0) \,.\, \max |g(\omega)| \text{ für alle stetigen } g(\omega).$$

Ist $\{g_k(\omega)\}$ die Folge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten und E_k die durch

$$\left| \int_\alpha^\beta f(\tau, \omega)\, g_k(\omega)\, d\omega \right| > (w - \varepsilon_0) \max |g_k(\omega)| \tag{10}$$

definierte τ-Menge, so ergibt sich $|E_k| = 0$ für alle k. Setzt man $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, so ist $|E| = 0$. Nun kann $\tau_0 \in CE$ so gewählt werden, daß

$$\infty > \int_\alpha^\beta |f(\tau_0, \omega)|\, d\omega > w - \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{11}$$

sei, der Definition von w gemäß. Nun gilt aber für $\tau = \tau_0$ das Gegenteil von (10) und wegen des Weierstraß'schen Approximationssatzes [122] folgt für alle stetigen $g(\omega)$

$$\left| \int_\alpha^\beta f(\tau_0, \omega)\, g(\omega)\, d\omega \right| \leqslant (w - \varepsilon_0) \max |g(\omega)|. \tag{12}$$

Approximiert man $\operatorname{sign} f(\tau_0, \omega)$ nach der Vorschrift [129] durch eine stetige Funktion $g_0(\omega)$ hinreichend genau, so kommt

$$\left| \int_\alpha^\beta f(\tau_0, \omega)\, [\operatorname{sign} f(\tau_0, \omega) - g_0(\omega)]\, d\omega \right| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad |g_0(\omega)| \leqslant 1,$$

also — wegen (11) —

$$\int_\alpha^\beta f(\tau_0, \omega)\, g_0(\omega)\, d\omega > \int_\alpha^\beta |f(\tau_0, \omega)|\, d\omega - \frac{\varepsilon_0}{2} > w - \varepsilon_0,$$

gegen (12).

[155] Ein Satz über Integralfolgen: *Sind sämtliche $f_k(\tau, \omega)$ in $<\alpha\beta><\alpha\beta>$ integrierbar und sind die Funktionen*

$$\int_\alpha^\beta |f_k(\tau, \omega)|\, d\omega \tag{13}$$

wohl wesentlich beschränkt in $<\alpha, \beta>$, aber nicht gemeinsam wesentlich beschränkt, so gibt es eine stetige Funktion $g(\omega)$ mit

$$\limsup_{k \to \infty} \left(\underset{\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta}{\text{w. o. G.}} \int_\alpha^\beta f_k(\tau, \omega)\, g(\omega)\, d\omega \right) = +\infty. \tag{14}$$

Beweis: Der Satz gehört zum Ideenkreis des Resonanztheorems [151]. Die Operationen $F_n = \int_\alpha^\beta f_n(\tau, \omega)\, x(\omega)\, d\omega$ sind im Raume C der stetigen Funktionen $x(\omega)$ erklärt; der Gegenraum M ist derjenige der wesentlich beschränkten Funktionen. Der Inhalt des Lemmas ist aber nichts anderes, als daß die w. o. G. des Ausdruckes (13) die Norm der Operation $F_n(x)$ ist; die Folge der Normen ist daher unbeschränkt, woraus die Behauptung folgt. (Es folgt sogar, daß die Menge der g in C, für welche (14) nicht gilt, von der ersten Kategorie ist).

Jetzt wollen wir das Prinzip der Kondensation der Singularitäten formulieren:

E ist ein B-Raum; darin ist eine Doppelfolge von linearen [156]
Operationen erklärt $\{F_{pq}(x)\}$, so daß

$$\limsup_{q \to \infty} \| F_{pq} \| = \infty \qquad (p = 1, 2, \ldots); \tag{15}$$

dann ist eine Menge $X \subset E$ vorhanden (die von der zweiten Kategorie ist), deren Komplement $E - X$ von der ersten Kategorie ist, mit der Eigenschaft

$$\limsup_{q \to \infty} \| F_{pq}(x) \| = \infty \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

für jedes $x \in X$. (Die Gegenräume der Operationen F_{pq} dürfen mit p variieren).

Beweis: Auf Grund von [151] ist die Menge H_p jener x, für welche bei gegebenem p (16) nicht gilt, von der ersten Kategorie; so ist auch die Menge $\sum_{p=1}^{\infty} H_p$ und man hat $X = E - \sum_{p=1}^{\infty} H_p$ zu setzen.

Eine Variante von [156] erhält man, wenn man anstatt (15) [157]
die Voraussetzung einführt, daß es zu jedem p ein x_p gibt, welches die Folge

$$(17) \qquad {}_q\{F_{pq}(x_p)\}$$

divergent macht. Dann lautet die

Behauptung: *Es gibt ein p-freies x, welches für alle Folgen* (17) *dasselbe leistet und die Menge X solcher x ist von der zweiten, die Komplementärmenge E — X von der ersten Kategorie.*

Beweis: Es sei E_p die Menge aller x, die die einfache Folge ${}_q\{F_{qp}(x)\}$ (p fest) zu einer konvergenten machen. E_p ist von der ersten Kategorie; im Falle (15) folgt dieses aus [151]; im Gegenfalle haben wir

$$(18) \qquad \limsup_{q\to\infty} \| F_{pq} \| < \alpha_p < \infty$$

und behaupten, daß E_p sogar nirgendsdicht ist. Denn wäre E_p überalldicht in einer Kugel K, und wäre $x \in K$, $\varepsilon > 0$, so gäbe es ein x' mit $x' \in K$, $\| x - x' \| < \frac{\varepsilon}{3\alpha_p}$, $x' \in E_p$. Dann hätten wir aber

$$\| F_{pq}(x') - F_{pr}(x') \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $q > q_\varepsilon$, $r > q_\varepsilon$. Wegen (18) ist aber $\| F_{pq}(x) \| < \alpha_p \| x \|$ für große q und für alle x. Es folgt also für jedes $x \in K$ und für $q > q_x$, $r > q_x$

$$\| F_{pq}(x) - F_{pr}(x) \| < \varepsilon;$$

die so bewiesene Konvergenz überträgt sich wegen der Linearität von F_{pq} auf ganz E, gegen die Voraussetzung. In beiden Fällen ist daher E_p von der ersten Kategorie; desgleichen ist $\sum_{p=1}^{\infty} E_p = E - X$, w. z. b. w.

Jetzt kehren wir zu den einfachen Folgen zurück, um ein Herrn Saks zu verdankendes Resultat zu erreichen, welches das Resonanztheorem [151] in einem neuen Lichte zeigt, wenn der Gegenraum der Raum der meßbaren Funktionen, R, ist.

E sei wieder ein B-Raum, $\tau \in \langle \alpha, \beta \rangle$ eine reelle Variable. $F_n(x)$ sei eine lineare Operation, deren Gegenraum R ist und zwar soll in R die Distanz als

$$(u, v) = \int_\alpha^\beta \frac{| u(\tau) - v(\tau) |}{1 + | u(\tau) - v(\tau) |} \, d\tau$$

definiert werden. Dann ist R vektoriell, metrisch und komplett. Es ist also $F_n(x) = u(x, \tau, n)$ und letztere Funktion wird für ein $x \in E$ und ein natürliches n eine meßbare Funktion $u(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$.

Ein Lemma. *Voraussetzungen:* 1° $\{F_n(x)\}$ ist eine Folge von [158]
linearen Operationen, wie wir sie eben betrachtet haben. 2° E enthält einen Teil X von der zweiten Kategorie, so daß für jedes $x \in X$ die Ungleichung

$$(19) \qquad \limsup_{n\to\infty} | u(x, \tau, n) | < \infty$$

in einer τ-Menge T_x gilt, deren Maß eine x-freie, positive Zahl ω übertrifft. *Behauptung:* Ist $0 < \varepsilon < \omega$, so gibt es in $\langle \alpha, \beta \rangle$ eine x-freie τ-Menge T vom Maße $\omega - \varepsilon$, so daß für jedes $x \in E$ fast überall in T die Ungleichung (19) statthat.

Beweis: Z sei die Gesamtheit von Punktmengen S, wobei eine τ-Menge S als Summe von endlich vielen Intervallen $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ mit rationalen, in $\langle \alpha, \beta \rangle$ gelegenen Endpunkten erklärt sein soll. Ist dann M die Gesamtheit aller meßbaren Punktmengen in $\langle \alpha, \beta \rangle$ und die Distanz zweier Elemente von M als das Maß der nichtgemeinsamen Teile beider erklärt,

$$(A, B) = | A + B - AB | \qquad (A \in M,\ B \in M),$$

so ist Z in M überalldicht. $\{S_n\}$ sei die Folge derjenigen S, deren Maß wenigstens $\omega - \varepsilon/2$ beträgt und $X_{l,m} \subset E$ die Menge der x, für welche die Ungleichungen $(n)\ | u(x, \tau, n) | \leqslant m$ für $\tau \in R(x)$ mit $| S_l - S_l R | \leqslant \varepsilon/2$ gelten. Es ist $X \subset \sum_{l=1,\, m=1}^{\infty, \infty} X_{l,m}$, also ein X_{l_1,m_1} von zweiter Kategorie vorhanden; die $F_n(x)$ sind stetig, also X_{l_1,m_1} abgeschlossen und eine Kugel K in X_{l_1,m_1} enthalten. Bezeichnet man S_{l_1} mit $S^{(1)}$, $S^{(1)}R(x)$ mit $R^{(1)}(x)$, so gilt (19) für $x \in K$, also, wegen der Linearität, für $x \in E$, $\tau \in R^{(1)}(x)$. Jetzt wiederholt man denselben Schluß: $S^{(1)}$ tritt an Stelle von $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\{S_n^{(1)}\}$ ist eine S-Folge mit $S_n^{(1)} \subset S^{(1)}$, $| S_n^{(1)} | \geqslant \omega - \varepsilon/2 - \varepsilon/4$; man erhält (19) für $x \in E$, $\tau \in R^{(2)}(x)$ und es ist $S^{(2)} \subset S^{(1)}$, $R^{(1)} \subset S^{(1)}$, $R^{(2)} \subset S^{(2)}$, $| S^{(1)} - R^{(1)} | \leqslant \varepsilon/2$, $| S^{(2)} - R^{(2)} | \leqslant \varepsilon/4$ u. s. w.; es ist auch $| S^{(i)} | \geqslant \omega - \varepsilon$ für alle i. Setzt man $S^{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} S^{(i)}$,

$R^{\infty}(x) = \limsup_{i\to\infty} R^{(i)}(x)$, so gilt (19) für $x \in E$, $\tau \in R^{\infty}(x)$ und S^{∞} ist das T der Behauptung, denn $R^{\infty} \subset S^{\infty}$, $|S^{\infty} - R^{\infty}(x)| = 0$.

[159] Der Saks'sche Satz. *Unter den Voraussetzungen des Lemmas* [158] *existiert in* $<\alpha, \beta>$ *eine Menge* $\mathring{T}$, *so daß*

1^0 $\limsup_{n\to\infty} |u(x, \tau, n)| < \infty$ *für jedes* x *in* E *für fast jedes* τ *in* $\mathring{T}$,

2^0 $\limsup_{n\to\infty} |u(x, \tau, n)| = \infty$ *fast überall in* $C\mathring{T}$ *und zwar für jedes* $x \in E$ *mit Ausnahme von (höchstens) einer Menge erster Kategorie in* E *gilt.*

Beweis: Sei ω_0 die obere Grenze der Zahlen ω, für welche es Mengen $X_\omega \subset E$ von der zweiten Kategorie gibt, so daß für $x \in X_\omega$ die Ungleichung 1^0 in einer Menge T_x vom Maße ω stattfindet. Nach [158] gibt es für jedes $p\,(=1, 2, 3\ldots)$ ein $\mathring{T}_p$ mit $|\mathring{T}_p| \geqslant \omega_0 - 1/p$, so daß 1^0 für jedes $x \in E$ fast überall in $\mathring{T}_p$ statthat. Setzt man $\mathring{T} = \sum_{p=1}^{\infty} \mathring{T}_p$, so ist $\mathring{T}$ die im Texte der Behauptung genannte Menge. Um den Teil 2^0 zu begründen, nehmen wir an X sei von der zweiten Kategorie in E und 1^0 gelte für jedes $x \in X$ in einem Teil von $C\mathring{T}$ mit positivem Maß. Dann wäre für $x \in X$ stets 1^0 in einer Menge T_x mit $|T_x| > \omega_0$ richtig (und zwar ist $T_x = \mathring{T} +$ ein Teil von $C\mathring{T}$); da X von der zweiten Kategorie ist, so enthält es einen Teil X_0 von derselben Kategorie, so daß für $x \in X_0$ stets $|T_x| \geqslant \omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ ist, was gegen die Definition von ω_0 verstößt.

§ 6. Konvergenzarten.

Betrachten wir eine Folge $\{f_k(\tau)\}$ von meßbaren, in $<\alpha, \beta>$ erklärten Funktionen. Die Konvergenz dieser Folge für ein $\tau = \tau_0$ im gewöhnlichen Sinne oder ihre Konvergenz schlechthin, d. h. für jedes τ in $<\alpha, \beta>$, bedarf keines Kommentars, ebensowenig wie die gleichmäßige Konvergenz in $<\alpha, \beta>$ oder einer anderen in $<\alpha, \beta>$ enthaltenen τ-Menge. Wir haben auch bereits von der Redensart Gebrauch gemacht, die Folge sei in $<\alpha, \beta>$ (oder einer Menge $T \subset <\alpha, \beta>$) *fast überall konvergent*, wenn die Konvergenzpunktmenge in $<\alpha, \beta>$ (in T) das Maß $|\beta - \alpha|$ (bzw. $|T|$) aufweist.

Gehören die Funktionen f_k zu einem normierten Raum, so versteht man unter *starker Konvergenz* die Beziehung [161]

(20) $$\lim_{k,q\to\infty} \| f_k(\tau) - f_q(\tau) \| = 0.$$

Handelt es sich um komplette Räume (vgl. § 3), so ist diese Beziehung mit

(21) $$\lim_{k\to\infty} \| f_\infty(\tau) - f_k(\tau) \| = 0$$

äquivalent, wo $f_\infty(\tau)$ eine entsprechende, zum selben Raum gehörende Funktion (Grenzfunktion) ist. Wir schreiben manchmal, anstatt (21),

(22) $$\operatorname*{Lim}_{k\to\infty} f_k(\tau) = f_\infty(\tau).$$

Die starke Konvergenz im Raume M (§ 3, Beispiel 3) ist mit der gleichmäßigen Konvergenz fast überall in $<\alpha, \beta>$ gleichbedeutend. Dagegen ist die gewöhnliche und die starke Konvergenz auseinanderzuhalten und alle vier Fälle kommen vor.

Es sei

$$f_k(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{in } <0, \dfrac{2^k - 1}{2^k}> \\ 2^k & \text{in } \left(\dfrac{2^k - 1}{2^k}, 1\right) \\ 0 & \text{in } 1. \end{cases}$$

Man hat offensichtlich $\lim_{k\to\infty} f_k(\tau) = 0$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, aber es gilt nicht $\operatorname*{Lim}_{k\to\infty} f_k(\tau) = 0$ im Raume L, denn $\{f_k(\tau)\}$ ist nicht stark konvergent in L; es ist nämlich für jedes k $(= 1, 2, \ldots)$

$$\lim_{q\to\infty} \int_0^1 | f_k(\tau) - f_q(\tau) |\, d\tau = 2,$$

gegen (20). Andererseits kann eine stark konvergente Folge sogar überall gewöhnlich divergent sein. Es gilt aber der Satz, daß eine jede in $L^p (p \geqslant 1)$ stark konvergente Folge im Intervall $<\alpha, \beta>$ *asymptotisch* konvergiert. Dieses bedeutet: *Ist* $\varepsilon > 0$ *und* E_k *die durch* $|f_k(\tau) - f_\infty(\tau)| \geqslant \varepsilon$ *definierte* τ-*Menge, so ist* $\lim_{k\to\infty} |E_k| = 0$. [162]
$f_\infty(\tau)$ ist dabei die „starke" Grenze (die sich als die asymptotische herausstellt) und ε beliebig.

Jede asymptotisch konvergente Folge enthält eine fast überall konvergente Teilfolge. Daraus folgt, daß jede stark konvergente Folge eine fast überall konvergente Teilfolge enthält.

S c h w a c h e K o n v e r g e n z. Es sei $\{f_k(\tau)\}$ in L^p stark konvergent; dann ist

$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta |f_\infty(\tau)-f_k(\tau)|^p\,d\tau=0,$$

woraus in Verbindung mit [127] für jedes $g(\tau)\in L^{p'}$ $(1/p+1/p'=1)$

$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta f_k(\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\int_\alpha^\beta f_\infty(\tau)\,g(\tau)\,d\tau \tag{23}$$ (g)

folgt. Es kann nun vorkommen, daß eine Folge $\{f_k(\tau)\}$ die Eigenschaft (23) hat (mitunter ohne stark konvergent zu sein). Dann heißt sie schwach konvergent. Allgemein: Eine Folge $\{x_k\}$, deren
[163] Glieder zum Raume E gehören, nennt man *schwach konvergent* (gegen x_∞), wenn für ein jedes lineare Funktional $\varphi(x)$ die Beziehung

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi(x_\infty)$$

stattfindet. So ist z. B. eine Folge von integrierbaren Funktionen $\{f_k(\tau)\}$ in L schwach konvergent, wenn (23) für jedes $g(\tau)\in M$ gilt. Denn jedes lineare Funktional in L hat die Gestalt $\varphi(x)=\int_\alpha^\beta g(\tau)\,x(\tau)\,d\tau$ mit $g\in M$, und umgekehrt ist jeder solche Ausdruck ein lineares Funktional in L (vgl. [147]). Man beweist auch (vgl. das Banach'sche Buch), daß in den Räumen $L^p(p>1)$ die Konvergenz der linksseitigen Folge (23) für alle g aus $L^{p'}(L^\infty\equiv M)$ bereits die Existenz der „schwachen Grenze" $f_\infty(\tau)$ verbürgt. Die Folge $\{\sin k\tau\}$ $(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$ ist in $L^p(p>1)$ schwach konvergent gegen Null, ohne eine fast überall konvergente Teilfolge zu enthalten; es liegt also die Sache anders als bei starker Konvergenz.

[164] *Damit eine Folge $\{f_k(\tau)\}$ aus L^p $(p>1)$ gegen $f_\infty(\tau)$ schwach konvergiere, ist*

$$\int_\alpha^\beta |f_k(\tau)|^p\,d\tau\leqslant\gamma,\qquad \lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\tau f_k(\omega)\,d\omega=\int_\alpha^\tau f_\infty(\omega)\,d\omega\qquad(\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta) \tag{k}$$

notwendig und hinreichend; dieses folgt leicht aus der Schlußbemerkung des § 2 und aus [152].

Der Begriff der schwachen Konvergenz läßt sich auch für Folgen von Funktionalen erklären: eine solche, $\{\varphi_n(x)\}$, heißt

schwach konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ $(=\varphi_\infty(x))$ für jedes $x\in E$ existiert. Hier gilt der S a t z:

Sind die Normen der linearen Funktionale $\varphi_n(x)$ gemeinsam be- [165]
schränkt, und der Raum E separabel ([139]), *so enthält $\{\varphi_n(x)\}$ eine schwach konvergente Teilfolge.*

B e w e i s: Laut Voraussetzung gibt es in E eine überalldichte Folge $\{x_i\}$. Aus der Zahlenfolge $\{\varphi_n(x_1)\}$ läßt sich eine konvergente Teilfolge $\{\varphi_{n'_k}(x_1)\}$ herausgreifen; aus $\{\varphi_{n'_k}(x_2)\}$ eine konvergente Teilfolge $\{\varphi_{n''_k}(x_2)\}$ u. s. w. Die Diagonalfolge $\{\varphi_{n_k^{(k)}}(x)\}$ ist bereits für alle x_i konvergent. Nun ist aber — wegen $\|\varphi_n\|<K$ — (mit n- und x-freiem K) $|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_i)|<K\|x-x_i\|$, was die Existenz von $\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k^{(k)}}(x)$ für alle $x\in E$ leicht folgern läßt. Dieser „lim" ist ein additives und—infolge letzter Ungleichung—stetiges Funktional. Es ist daher $\varphi_\infty(x)$ linear, ein Korrolar zu [165].

Eine Anwendung von [165] bietet der

S a t z: *Ist $\int_\alpha^\beta |f_k(\tau)|^p d\tau\leqslant\gamma$ $(p>1)$ mit k-freiem γ, so enthält $\{f_n(\tau)\}$* [166]
eine in L^p schwach konvergente Teilfolge $\{f_{n_k}(\tau)\}$; im Falle $p=\infty$ lautet die Voraussetzung „$|f_k(\tau)|\leqslant\gamma$ fast überall" und dann enthält $\{f_n(\tau)\}$ bloß eine Teilfolge $\{f_{n_k}(\tau)\}$, welche für jedes $g(\tau)\in L$ die Konvergenz der Zahlenfolge $\int_\alpha^\beta f_{n_k}(\tau)\,g(\tau)\,d\tau$ sichert.

Zunächst erinnern wir an die Treppenfunktionen am Schluß von § 2. Sie können offenbar so gewählt werden, daß die Konstanzintervalle rationale Endpunkte, die Konstanten selbst rationale Werte haben. Dieses zeigt, daß die Räume $L^{p'}$ bzw. L separabel sind. Zweitens ist, nach [147],

$$\int_\alpha^\beta f_k(\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

für $x\in L^{p'}$ bzw. $x\in L$ unter den Voraussetzungen [166] das lineare Funktional $\varphi_k(x)$ und die Normen $\|\varphi_k\|$ (vgl. [147]) gemeinsam beschränkt. [165] liefert also das Behauptete.

[167] Unbedingte Konvergenz. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\tau)$ heißt *absolut* konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\tau)|$ konvergiert. Eine solche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\tau)$ hat die Eigenschaft bei jeder Umordnung der Terme konvergent zu bleiben und zwar gegen dieselbe Summe. Die Umkehrung ist auch richtig. Die Sache liegt nicht mehr so einfach, wenn man eine Reihe von Elementen eines B-Raumes hat, die daselbst, d. h. stark konvergiert. Hier ist das Analogon der absoluten Konvergenz, d. h. die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|$ nicht mehr notwendig (obwohl hinreichend), damit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ bei allen Umordnungen (und sogar zu derselben Summe) stark konvergiere. So ist z. B. die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos k\tau$$

mit $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$ ein Beispiel für $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ mit $x_k \in L^2$, wo nach einem späteren Satze die *unbedingte* Konvergenz, d. h. Konvergenz bei allen Umordnungen (nach der in L^2 gültigen Norm) stattfindet, obwohl die Rechnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| = \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 k\tau \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\pi}\, |\gamma_k|$$

für $\gamma_k = 1/k$ die absolute Divergenz liefert.

[168] Ein Satz von Orlicz über unbedingte Konvergenz: *Damit eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, deren Terme zu einem B-Raum gehören, daselbst (d. h. der Norm nach) unabhängig von der Anordnung der Terme konvergiere, ist die Konvergenz einer jeden Teilreihe*

$$(24) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$$

notwendig und hinreichend.

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k}$ eine divergente Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zwei Folgen $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ mit $p_i < q_i < p_{i+1} < q_{i+1}$, so daß

$$\| \overline{s}_{q_i} - \overline{s}_{p_i} \| > \varepsilon,$$

wo $\overline{s}_n$ die n-te Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x}_k$ bedeutet. Wir können nun die Abschnitte $\overline{s}_{q_i} - \overline{s}_{p_i}$ inbezug auf die ursprünglichen Indizes der Terme x_k betrachten und eine Teilfolge ($i = \nu_1, \nu_2, \ldots$) behalten, so daß die Indizes in jedem Abschnitt größer seien als in dem vorhergehenden. In jedem Abschnitt werde nun die ursprüngliche Reihenfolge der Terme hergestellt und die Abschnittsklammern aufgelöst: es entsteht eine divergente Teilreihe (24).

Sei (24) divergent und $s_p = \sum_{k=1}^{p} x_{n_k}$. Sei wieder $\varepsilon > 0$, $p_i < q_i < p_{i+1} < q_{i+1}$ und

$$\| s_{q_i} - s_{p_i} \| > \varepsilon \qquad (i).$$

In der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ gibt es Terme, die zu den Abschnitten $(s_{q_i} - s_{p_i})$ gehören und (eventuell) andere. Wir ordnen $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ so um, daß wir die ersten Terme so gruppieren, wie sie in den Abschnitten stehen und (event.) zwischen je zwei Gruppen je einen anderen Term einschalten. So entsteht eine divergente Umordnung. Damit ist [168] in beiden Teilen bewiesen.

§ 7. **Das Momentenproblem.**

Die Zahlen

$$\mu_n = \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\, g_n(\tau)\, d\tau$$

heißen *Momente* der Funktion $f(\tau)$ inbezug auf die Folge $\{g_n(\tau)\}$. Das Momentenproblem besteht in der Angabe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine vorgegebene Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ eine Momentenfolge sei. Der Raum, in welchem $f(\tau)$ gesucht werden soll, ist hier ausschlaggebend.

Es sei $g_k(\tau) \in L^{p'}$ $(p' > 1)$ bzw. L $(k = 1, 2, \ldots)$.

Damit es in L^p $(p < \infty)$ bzw. M ein $f(\tau)$ gebe, dessen Norm [171]
$\leqslant \gamma$ und dessen Momentenfolge $\{\mu_n\}$ sei, ist die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu_k\xi_k\right| \leqslant \gamma\,.\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(\tau)\right|^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{25}$$

$$\text{bzw.}\quad \left|\sum_{k=1}^{n}\mu_k\xi_k\right| \leqslant \gamma\,.\int_{\alpha}^{\beta}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(\tau)\right| d\tau$$

für alle endlichen Zahlensysteme $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ *notwendig und hinreichend* (F. Riesz, S. Banach).

Die Notwendigkeit ist sofort ersichtlich:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu_k\xi_k\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(\tau)\right) f(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \gamma\,.\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(\tau)\right|^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}$$

und ebenso im Grenzfalle $p'=1$ (wegen [127] bzw. noch einfacher). Setzen wir voraus, (25) sei für alle Zahlsysteme $\xi_{1,2,\dots,n}$ erfüllt. Bei festem n und bei der Nebenbedingung

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(\tau)\right|^{p'} d\tau = 1 \tag{26}$$

für $\xi_{1,2,\dots,n}$ hat die Summe $\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k\xi_k = U_n$ ein endliches Maximum des Betrages, da $|U_n| \leqslant \gamma$. Dieses Maximum findet man, indem man die Ableitungen von $|U_n|^{p'} - \lambda\int_{\alpha}^{\beta}|h_n(\tau)|^{p'}d\tau$ nach ξ_k $(k = 1, 2 \dots n)$ gleich Null setzt; $h_n(\tau)$ ist zur Abkürzung anstatt $\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k g_k(\tau)$ geschrieben worden;

$$\mu_k\,|U_n|^{p'-1}\operatorname{sign} U_n - \lambda\int_{\alpha}^{\beta}|h_n(\tau)|^{p'-1}\operatorname{sign} h_n(\tau)\,.\,g_k(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (k).$$

Multipliziert man mit ξ_k und addiert, so kommt—wegen (26)—$|U_n|^{p'} = \lambda$. Ist also $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ die Maximumstelle, und setzt man diese ξ in $h_n(\tau)$ ein, so wird

$$\mu_k = \int_{\alpha}^{\beta} g_k(\tau)\,\psi_n(\tau)\,d\tau \quad \text{mit} \quad \psi_n(\tau) = U_n\,|h_n(\tau)|^{p'-1}\operatorname{sign} h_n(\tau). \tag{27}$$

Die Funktion $\psi_n(\tau)$ löst das Momentenproblem für $k=1,2,3,\dots n$; es ist $(p'>1)$ wegen (26)

$$\int_{\alpha}^{\beta}|\psi_n(\tau)|^p\,d\tau = |U_n|^p\,.\int_{\alpha}^{\beta}|h_n(\tau)|^{p'}d\tau \leqslant \gamma^p,$$

d. h. $\|\psi_n\|_p \leqslant \gamma$. Im Grenzfalle $p'=1$ ist $\psi_n(\tau) = U_n \operatorname{sign} h_n(\tau)$ und $\|\psi_n\|_M = |U_n| \leqslant \gamma$.

Da die Folge $\{\|\psi_n\|\}$ beschränkt ist, enthält $\{\psi_n(\tau)\}$ eine schwachkonvergente Teilfolge im Falle $p'>1$; ihre Grenze $\psi_\infty(\tau)$ hat die Eigenschaften $\|\psi_\infty\| \leqslant \gamma$ und

$$\mu_k = \int_{\alpha}^{\beta} g_k(\tau)\,\psi_\infty(\tau)\,d\tau \qquad (k),$$

ist also das gesuchte $f(\tau)$ in L^p. Im Grenzfalle $p'=1$ konvergiert nach [166] die Folge $\left\{\int_{\alpha}^{\beta}\psi_n(\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right\}$ für $g(\tau)\in L$ gegen $\int_{\alpha}^{\beta}\psi_\infty(\tau)\,g(\tau)\,d\tau$; es ist dieses $\psi_\infty(\tau)$ das in M gesuchte $f(\tau)$.

§ 8. Die Umkehrung von Funktionaloperationen.

Eine Menge heißt *konvex*, wenn sie mit x_1, x_2 stets $\tau x_1 + (1-\tau)x_2$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ enthält. Ein konvexer Körper im Raume E ist eine konvexe, geschlossene Menge mit inneren Punkten. Ist der Nullpunkt Θ ein innerer Punkt des konvexen Körpers K, so ist die untere Grenze der Zahlen $\rho > 0$, für welche $1/\rho\,.\,x$ zu K gehört, endlich und nichtnegativ. Sie definiert das *Minkowski'sche Funktional* von K, $\varkappa(x)$. Es ist leicht zu sehen:

1⁰ Für innere x ist $\varkappa(x) < 1$, für x am Rande ist $\varkappa(x) = 1$;

2⁰ $\varkappa(x+y) \leqslant \varkappa(x) + \varkappa(y)$;

3⁰ $\varkappa(\tau x) = \tau\,\varkappa(x)$ für $\tau \geqslant 0$;

4⁰ $\varkappa(x) \leqslant \gamma\,\|x\|$ mit x-freiem γ.

Ein Satz von Banach über die Erweiterung von Funktionalen (vgl. das Banach'sche Buch): *E sei ein B-Raum, R ein linearer* [181] *Teil von E; $\varkappa(x)$ sei in E erklärt und habe die Eigenschaften* 2⁰ *und* 3⁰; *$\varphi(x)$ sei additiv und homogen, in R erklärt und daselbst von $\varkappa(x)$ majorisiert*

$$\varphi(x) \leqslant \varkappa(x) \qquad (x \in R). \tag{28}$$

Behauptung: $\varphi(x)$ läßt sich additiv und homogen auf ganz E unter Beibehaltung von (28) *erweitern.*

Der Beweis möge im zitierten Buche nachgelesen werden.

[182] Ein Lemma: *E sei ein B-Raum; K ein konvexer Körper in E; Θ, der Nullpunkt von E, sei ein innerer, x_0 ein Randpunkt von K. Dann gibt es in E ein lineares Funktional $\varphi(x)$ mit $\varphi(x) \leqslant 1$ für $x \in K$, $\varphi(x_0) = 1$.*

Beweis: $\varkappa(x)$ sei das Minkowski'sche Funktional von K, R sei die Gesamtheit der Punkte τx_0 mit beliebigem reellen τ (eine „Gerade"). Setzt man $\varphi(x) = \tau$ für $x = \tau x_0$, so hat man auf R ein additives und homogenes Funktional erklärt; es ist $\varphi(x) \leqslant \varkappa(x)$ für $x \in R$, denn $\varphi(\tau x_0) = \tau = \varkappa(\tau x_0)$ für $\tau > 0$, und für $\tau \leqslant 0$ ist $\varphi(x) = \varphi(\tau x_0) = \tau = -\varkappa(-\tau x_0) \leqslant \varkappa(\tau x_0) = \varkappa(x)$ (wegen 2^0). Nach [181] läßt sich also $\varphi(x)$ auf ganz E erweitern, so daß (28) mit dem soeben definierten $\varkappa(x)$ erhalten und $\varphi(x)$ additiv und homogen bleibt. Wegen 4^0 ist $\varkappa(x) \leqslant \gamma \|x\|$, also $\varphi(x) \leqslant \gamma \|x\|$, also $|\varphi(x)| \leqslant \gamma \|x\|$ und $\varphi(x)$ erweist sich als linear. Es ist offenbar $\varphi(x_0) = 1$ und (wegen $\varphi(x) \leqslant \varkappa(x)$) $\varphi(x) \leqslant 1$ für $x \in K$, w. z. b. w.

Es sei $y = U(x)$ eine lineare Operation und der Raum der unabhängigen Variabeln x ein B-Raum, ebenso wie der Gegenraum. Es bietet sich die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Operation den ganzen Gegenraum erschöpfe, d. h. damit die Gleichung $y = U(x)$ bei beliebigem y des Gegenraumes eine Auflösung nach x zulasse.

[183] *Eine solche Bedingung ist die Existenz eines positiven γ, so daß ein jedes lineare Funktional $F(y)$ im Gegenraume die Ungleichung erfülle*

$$\|F(U(x))\| \geqslant \gamma \|F\|.$$

(Dabei steht links die Norm des Funktionals $F(U)$ (der Variabeln x), welches durch die Substitution von $y = U(x)$ in $F(y)$ entsteht).

Die Bedingung ist notwendig. Denn sonst existiert eine Folge von Funktionalen $\{F_n\}$ mit $\|F_n\| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|F_n(U(x))\| = 0$. Man setze

$$\|F_n(U(x))\| = \beta_n, \qquad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\beta_n} + \frac{1}{n}}, \qquad G_n(y) = \alpha_n F_n(y).$$

Dann kommt

$$(29) \qquad \|G_n\| = \alpha_n \|F_n\| = \alpha_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \|G_n\| = \infty,$$

$$\|G_n(U(x))\| = \alpha_n \|F_n(U(x))\| = \frac{\beta_n}{\sqrt{\beta_n} + \frac{1}{n}} \leqslant \sqrt{\beta_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \|G_n(U(x))\| = 0.$$

Es sei $y_0 = U(x_0)$; dann folgt

$$(30) \qquad |G_n(y_0)| \leqslant \|x_0\| . \|G_n(U(x))\|, \qquad \lim_{n\to\infty} G_n(y_0) = 0.$$

Da (30) für jedes y_0 des Gegenraumes gelten soll, steht die Eigenschaft (29) im Widerspruch gegen das Resonanztheorem [151].

Die Bedingung ist hinreichend. Zunächst werden wir zeigen, daß das Bild R_ρ der Kugel $\|x\| \leqslant \rho$, welches im Gegenraum vermöge der Operation $U(x)$ entsteht, selbst in einer Kugel $\|y\| \leqslant \sigma(\rho)$ überalldicht ist, d. h.: das zu R_ρ abgeschlossene $\overline{R}_\rho$ enthält diese Kugel.

Es ist nämlich $\overline{R}_\rho$ eine geschlossene, konvexe Menge mit dem Nullpunkt N als Symmetriezentrum. Enthielte $\overline{R}_\rho$ keine N-zentrische Kugel, so wäre eine Folge $\{y_n\}$ vorhanden mit

$$(31) \qquad \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0, \quad y_n \ni \overline{R}_\rho \qquad (n).$$

Die Distanz δ_n von y_n und $\overline{R}_\rho$ ist positiv. Jetzt bilde man die Summe aller Kugeln mit dem Radius $\delta_n/2$ (n fest), deren Mittelpunkte zu $\overline{R}_\rho$ gehören, und schließe diese Menge zu S_n ab. ϑ_n sei die größte Zahl mit $\vartheta_n y_n \in S_n$ und $z_n = \vartheta_n y_n$. Der Punkt z_n ist ein Randpunkt von S_n. Nach [182] existiert ein lineares Funktional φ_n mit $\varphi_n(z_n) = 1$, $\varphi_n(y) \leqslant 1$ für $y \in S_n$. Für $\|x\| \leqslant \rho$ ist $U(x) \in R_\rho$, also $U(x) \in S_n$; es folgt $\varphi_n(U(x)) \leqslant 1$, $\varphi_n(U(-x)) \leqslant 1$, also

$$|\varphi_n(U(x))| \leqslant 1 \qquad (\|x\| \leqslant \rho).$$

Setzt man jetzt $\Phi_n(x) = \varphi_n(U(x))$, so wird $\|\Phi_n\| \leqslant 1/\rho$; die Voraussetzung liefert aber $\|\Phi_n\| \geqslant \gamma \|\varphi_n\|$, also $\|\varphi_n\| \leqslant 1/\rho\gamma$. Insbesondere ist

$$(32) \qquad 1 = |\varphi_n(z_n)| \leqslant \|z_n\| . \|\varphi_n\| \leqslant \frac{\|z_n\|}{\rho\gamma}, \qquad \|z_n\| \geqslant \rho\gamma.$$

Nun ist aber wegen $y_n \ni \overline{R}_\rho$ (vgl. (31)) $\vartheta_n \leqslant 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n \|y_n\| = 0$, gegen (32). Es ist also R_ρ in einer Kugel $\|y\| \leqslant \sigma(\rho)$ überalldicht.

Sei nun y_0 ein Punkt der Kugel $\|y\| \leqslant \sigma(1)$. In dieser Kugel ist R_1 überalldicht, es gibt also ein $y_1 \in R_1$ mit $\|y_0 - y_1\| \leqslant \sigma(1/2)$. $R_{1/2}$ ist aber in der Kugel $\|y\| \leqslant \sigma(1/2)$ überalldicht, woraus ein $y_2 \in R_{1/2}$ mit $\|y_0 - y_1 - y_2\| \leqslant \sigma(1/4)$ resultiert, u. s. w.

$y_n \in R_{\frac{1}{2^{n-1}}}$ bedeutet aber $y_n = U(x_n)$ mit $\| x_n \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$; setzt man

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k ,$$

so wird — wegen der Linearität von $U(x)$ —

$$U(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} U(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y_0 ,$$

da $\| y_0 - y_1 - \ldots - y_n \| \leqslant \sigma(1/2^n)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma(1/2^n) = 0$ (wegen der Stetigkeit von $U(x)$ für $x = \Theta$) ist. Für jedes y_0 der Kugel $\| y \| \leqslant \sigma(1)$ existiert also eine Wurzel x_0 der Gleichung $U(x) = y_0$; $U(x)$ ist aber homogen, also die Einschränkung $\| y_0 \| \leqslant \sigma(1)$ unwesentlich. Damit ist der Satz [183] über die Umkehrbarkeit einer linearen Operation in beiden Teilen bewiesen.